ПРИМЕНЕНИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МНОЖЕСТВЕННОЙ СТРЕЛЬБЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В. В. Когай, С. И. Фадеев (Новосибирск)

Рассмотрим нелинейную краевую задачу для системы из N обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$x \in [a, b], \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, Q), \quad g(y(a), y(b), Q) = 0. \tag{1}$$

Здесь y, f и g — векторы с компонентами y_i, f_i и g_i соответственно, $i = 1, 2, ..., N$; Q – скалярный параметр. Вектор-функции $f(x, y, Q)$ и $g(\alpha, \beta, Q)$, где $\alpha = y(a)$, $\beta = y(b)$, достаточно гладкие по совокупности аргументов, так что по предположению краевая задача (1) имеет решение $y = y(x, Q)$, дифференцируемое как по x, так и по параметру Q в некоторой окрестности точки $Q = Q_0$.

Нами предлагается следующий алгоритм продолжения по параметру. В соответствии с идеей метода ортогональных прогонок С.К.Годунова разобьем отрезок $[a, b]$ на m частей:

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1} = b, \tag{2}$$

и рассмотрим серию задач Коши:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, Q), \quad y|_{x=x_i} = p^{(i)}, \tag{3}$$

$$\frac{dV}{dx} = A(x)V, \quad V|_{x=x_i} = I, \tag{4}$$

$$\frac{dw}{dx} = A(x)w + R(x), \quad w|_{x=x_i} = 0, \tag{5}$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $A(x) = f_y(x, y(x, Q), Q)$, $R(x) = f_Q(x, y(x, Q), Q)$, I – единичная матрица. Согласно методу множественной стрельбы потребуем, чтобы функции $y(x, Q, p^{(i)})$, определяемые из серии задач Коши (3), представляли решение краевой задачи (1), т.е. удовлетворяли как краевым условиям, так и условиям непрерывности в узлах сетки (2). В результате для определения компонент $p_j^{(i)}$ векторов $p^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m+1$, $j = 1, \ldots, N$, имеем систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{[1]} = g(p^{(1)}, p^{(m+1)}, Q) = 0, \\
&\Phi^{[i]} = y(x_i, Q, p^{(i-1)}) - p^{(i)} = 0, \\
&\qquad i = 2, 3, \ldots, m+1,
\end{aligned}$$

или

$$\Phi(p, Q) = 0, \tag{6}$$

где p – составной вектор, составленный из векторов $p^{(1)}$, ..., $p^{(m+1)}$, а Φ – составной вектор, составленный из векторов $\Phi^{(1)}$, ..., $\Phi^{(m+1)}$. Если в $(N+1)$-мерном пространстве (x, y) графиком решения $y = y(x, Q)$ краевой задачи (1) является гладкая поверхность, то графиком решения $p = p(Q)$ системы (6) будет гладкая пространственная кривая Γ_Q. Серия задач Коши (3)–(5) дает возможность найти решение системы (6) методом Ньютона. Параметризация, т.е. регулярный выбор текущего параметра среди компонент вектора p в процессе продолжения решения, позволяет численно построить Γ_Q, включая возможные точки ветвления типа "поворот" при некоторых значениях Q.

[1] *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т.1: Краевые задачи. – Новосибирск: Из-во НГУ. – 1994. – 264 с.

[2] *Фадеев С.И.* Программа численного решения нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами // Вычислительные методы линейной алгебры. (Тр. Ин-та математики СО АН СССР) – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. – 1990. – Т.17. – С.104-198.

E-mail: fadeev@math.nsc.ru