О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ.

В. Л. Мирошниченко (Новосибирск)[1]

1. Пусть на отрезке $[a,b]$, в узлах равномерной сетки $\Delta : x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,\ldots,N;\ x_0 = a,\ h = (b-a)/N$, заданы значения функции $f_i = f(x_i),\ i = 0,\ldots,N$. Через $S(x)$ обозначим кубический сплайн класса C^2, удовлетворяющий условиям интерполяции $S(x_i) = f_i,\ i = 0,\ldots,N$ и одному из типов краевых условий:

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & S'(x_k) = f'(x_k), & k = 0, N; \\ \text{II.} & S''(x_k) = f''(x_k), & k = 0, N; \\ \text{III.} & S^{(r)}(x_0) = S^{(r)}(x_N), & r = 1, 2. \end{array}$$

Условия III (условия периодичности) предполагаются выполненными, когда $f(x)$ есть $(b-a)$-периодическая функция.

В [1] при предположении $f(x) \in W^r_\infty[a,b], r \geq 1$, установлены точные оценки для периодических кубических сплайнов

$$\|S^{(m)} - f^{(m)}\|_\infty \leq K_{rm} h^{r-m} \|f^{(r)}\|_\infty, \quad r = 1,2,3,4, \quad m < r. \quad (1)$$

В частности,

$$\begin{array}{ll} K_{10} = (1+3\sqrt{3})/8, & K_{30} = (3-\sqrt{3})(7/4+\sqrt{3}+\sqrt{2})/144, \\ K_{20} = 3\sqrt{3}/32, & K_{40} = 5/384. \end{array}$$

В докладе описывается техника получения точных оценок для непериодических сплайнов. Доказано, что оценки (1) сохраняют силу при $m = 0$ для краевых условий типа I при $r > 1$ и условий типа II при $r > 2$. Кроме того, оценки (1) при $r = 1, 2$ верны для кубических сплайнов с естественными краевыми условиями ($S''(x_0) = S''(x_N) = 0$).

2. В теории приближений важную роль играют константы Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Интеграционных проектов СО РАН № 1

Рассмотрим величину $\widetilde{K}_r = \pi^{-r} K_r$. Имеет место

Теорема. *Справедливы равенства*

$$\widetilde{K}_r = \frac{|T_r|}{2^r r!}, \quad r = 0, 1, \ldots,$$

где T_r – целые числа, определяемые рекуррентной формулой

$$T_r = 1 - \sum_{k=1}^{[\frac{r+1}{2}]-1} C_r^{2k} T_{r-2k}, \quad r = 3, \ldots; \quad T_0 = T_1 = T_2 = 1,$$

$[\cdot]$ – *целая часть числа.*

В докладе дается обзор точных оценок приближения периодическими полиномиальными сплайнами [2,3] и формулируются некоторые гипотезы относительно присутствия в них констант $\widetilde{K}_r$.

[1] *Miroshnichenko V.L.* Exact error bounds for the periodic cubic and parabolic spline interpolation on the uniform mesh // Mathematica Balkanica. – 1988. – Vol. 2, N 2-3. – P.210-221.

[2] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука. – 1984. – 352 с.

[3] *Калиев П.У.* Алгоритм получения точных констант в оценках погрешности приближения сплайнами нечётной степени на равномерной сетке // Методы сплайн-функций. – Новосибирск. – 1988. –Вып. 128: Вычислительные системы. – С.3-31.

E-mail: miroshn@math.nsc.ru