РЕСТРИКТИВНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

В.В.Поддубный (Томск)

Рассматривается новый тип полиномиальных сплайнов — рестриктивные сплайны. Конструкции этого типа сплайнов обобщают известные и отличаются от них тем, что в условия сопряжения элементов сплайна в его узлах вводятся ограничения (типа неравенств) на величину максимально допустимого скачка сопрягаемой производной соответствующего порядка. В случае отсутствия ограничений рестриктивный сплайн переходит в обычный сплайн некоторого дефекта, а в случае предельно жестких ограничений – тоже в обычный сплайн, но дефекта, на единицу меньшего. Меняя силу ограничений изменением границ неравенств, можно плавно регулировать степень гладкости рестриктивного сплайна, получая конструкции, промежуточные между обычными сплайнами соседних дефектов.

Пусть $S(x)$ – кубический сплайн, определенный на интервале $[x_0, x_{n+1}]$, разбитом точками $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ на $n+1$ интервалов. Обозначим через $S_i(x)$ – i-й элемент сплайна (полином третьей степени), определенный на интервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} a_i^{(\alpha)} (x - x_i)^\alpha,$$

где $a_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ — его коэффициенты. Введем для рестриктивного кубического сплайна дефекта Δ $(0 \leq \Delta \leq 4)$ более общие, чем у обычных сплайнов, условия сопряжения его элементов:

$$\frac{d^\alpha S_{i+1}(x_{i+1})}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha S_i(x_{i+1})}{dx^\alpha} + \alpha! \delta_{\alpha, 4-\Delta} u_i, \quad |u_i| \leq c_i,$$

$$\alpha = 0, 1, 2, \quad i = 0, \ldots, N-1,$$

где u_i — ограниченный по модулю величиной $c_i > 0$ скачок в i-м узле $(4-\Delta)$-й производной сплайна, $\delta_{\alpha, 4-\Delta}$ — символ Кронекера. Например, рестриктивный кубический сплайн дефекта 2 использует три условия сопряжения, из которых первые два

($\alpha = 0,1$) совпадают с условиями сопряжения для обычных эрмитовых сплайнов, а третье ($\alpha = 2$) характерно только для рестриктивных сплайнов: $a_{i+1}^{(0)} = a_i^{(0)} + h_i a_i^{(1)} + h_i^2 a_i^{(2)} + h_i^3 a_i^{(3)}$, $a_{i+1}^{(1)} = a_i^{(1)} + 2h_i a_i^{(2)} + 3h_i^2 a_i^{(3)}$, $a_{i+1}^{(2)} = a_i^{(2)} + 3h_i a_i^{(3)} + u_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Выражение для сплайна вместе с условиями сопряжения описывает бесчисленное множество всевозможных рестриктивных кубических сплайнов. Конкретный выбор сплайна диктуется его целевым назначением. Например, сглаживающий кубический сплайн, предназначенный для наилучшей (в среднеквадратическом смысле) аппроксимации (сглаживания) экспериментальных данных $z^{(0)}$, $z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}$, наблюдаемых соответственно в точках $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}$ из интервала $[x_0, x_{n+1}]$, обеспечивает максимальную (в среднеквадратичном смысле) близость сплайна к наблюдаемым данным $\{z^{(k)}\}$ в точках $\{x^{(k)}\}$. Коэффициенты рестриктивного сплайна находятся из решения оптимизационной задачи $J \Rightarrow \min$ при ограничениях в виде системы соответствующих условий сопряжения и неравенств для "управлений" u_i, где

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \mu^{(k)} [S(x^{(k)}) - z^{(k)}]^2 + \frac{1}{2}\mu \int_{x_0}^{x_{n+1}} V^2(x)dx + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} Q_i u_i^2,$$

$\mu^{(k)} > 0$ и $\mu > 0$ – некоторые весовые множители, $V(x)$ есть $S'(x)$ или $S''(x)$, $Q_i > 0$. Получаемая оптимизационная задача в силу выпуклости (квадратичности) целевого функционала, рекуррентности связей (условий сопряжения) и ограничений типа неравенств на "управления" формально выглядит как задача оптимального управления. Применением принципа максимума Л.С.Понтрягина она сводится к рестриктивной двухточечной краевой задаче оптимизации, решение которой может быть получено известным методом.

Очевидно, понятие рестриктивного сплайна можно распространить на полиномиальные сплайны произвольной степени.

E-mail: poddubny@inf.tsu.ru