АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

А. А. Сазанов (Екатеринбург)[1]

Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \mathcal{D}^r + \Lambda$, где $\mathcal{D}^r$ — оператор r-кратного дифференцирования, Λ — оператор Немыцкого, определяемый функцией $\lambda = \lambda(t, \epsilon)$, $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_{r-1})$, $(t, \epsilon) \in \Omega = [0, 1] \times R^r$, функция λ удовлетворяет условиям Каратеодори. Через Δ_n, Δ'_m обозначим две сетки узлов на $[0, 1]$, Δ_n определяет узлы подпространства сплайнов, а Δ'_m — узлы интерполяции. Пусть $W_p^r = \{x(t) : \ \|\mathcal{D}^r x\|_p \leq 1\}$, $W_p^{\mathcal{L}} = \{x(t) : \ \|\mathcal{L}x\|_p \leq 1\}$. Будем предполагать, что оператор Немыцкого действует в пространство $L[0, 1]$.

Последовательность полиномиальных интерполяционных сплайнов (ПИС) степени $r - 1$, дефекта α, определенных сетками Δ_n, Δ'_m, назовем "хорошей", если сплайны имеют такой же порядок приближения функции в L_p на классе W_p^r, что и наилучшие приближения.

Обобщенные интерполяционные сплайны (ОИС), порожденные оператором $\mathcal{L}$, определим как в [1]. Справедлива

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *ПИС, определяемые сетками Δ_n, Δ'_m, существуют и единственны;*

2) *рассматриваемые ПИС — "хорошие";*

3) *последовательность сеток Δ_n — квазиравномерная;*

4) $|\lambda(t, \eta) - |\lambda(t, \epsilon)| \leq \nu(t)\|\eta - \epsilon\|_{l_1}$, $\nu(t)$ — *суммируемая функция;*

5) $\sup\limits_{x \in W_1^r} \sum_{j=0}^{r-1} \|\nu(t)\mathcal{D}^j(x(t) - \sigma(t, x))\|_{L[0,1]} < 1$, *где* $\sigma(t, x)$ — *ПИС для функции* $x(t)$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 99-01-00140 и Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (проект 00-15-96035)

Тогда ОИС $S(t,x)$ для $x(t)$, определяемые оператором $\mathcal{L}$ и сетками Δ_n, Δ'_m, существуют, единственны и справедливо соотношение

$$\sup_{x\in W_p^{\mathcal{L}}} \|\mathcal{D}^j(x(t)-S(t,x))\|_q = (1+o(1)) \sup_{x\in W_p^r} \|\mathcal{D}^j(x(t)-\sigma(t,x))\|_q,$$

$$1 \le p,q \le \infty, \quad 0 \le j \le r-1.$$

[1] *Сазанов А.А.* Обобщенные интерполяционные сплайны, порожденные нелинейным оператором // Тр. междунар. школы С.Б. Стечкина (Россия, г. Миасс, 24 июля – 3 августа 1998 г.). – Екатеринбург, 1999. – С.138–147.

E-mail: anatolii.sazanov@imm.uran.ru