ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ И СПЛАЙНЫ

Ю. Н. Субботин (Екатеринбург),
С.А.Теляковский (Москва)[1]

В докладе речь пойдет об относительных поперечниках, введенных В.Н.Коноваловым (см. [1]). Пусть X — банахово пространство, W и V – центрально симметричные множества в X, тогда n-мерный относительный поперечник определяется следующим образом:

$$K_n(W,V,X) := \inf_{\Lambda_n} \sup_{f \in W} \inf_{g \in \Lambda_n \bigcap V} \|f-g\|_X,$$

где Λ_n — подпространство X размерности не выше n.

Далее MW_p^r $(1 \le p \le \infty)$ – класс 2π-периодических функций $f(x)$ с абсолютно непрерывной $(r-1)$–ой производной $1 \le p < \infty$ и r-ой производной, удовлетворяющей условию $\|f^{(r)}\|_{L_p[0,2\pi]} \le M$, а при $p=\infty$ предполагается, что $f^{(r-1)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой M. При этом вместо MW_∞^r будем писать MW_C^r. Если $M=1$, то будем писать соответственно W_p^r, W_C^r. Полагаем $\mathbf{C} = \mathbf{C}[0,2\pi]$.

Ссылки на все цитируемые ниже результаты можно найти в [1]. В.Н.Коновалов показал, что при $r \ge 3$ поперечники $K_n(W_C^r, W_C^r, \mathbf{C})$ даже по порядку не совпадают с колмогоровскими поперечниками $d_n(W_C^r, \mathbf{C})$. В.Ф.Бабенко исследовал вопрос о том, насколько малым положительным числом может быть ϵ_n, чтобы при $M = 1+\epsilon_n$ относительный поперечник $K_n(W_C^r, MW_C^r, \mathbf{C})$ по порядку совпадал с колмогоровским $d_n(W_C^r, \mathbf{C})$. В частности, он подтвердил гипотезу С.Б.Стечкина, что для любого $\epsilon > 0$ при $M = 1+\epsilon$ порядки относительных и колмогоровских поперечников совпадают. Аналогичные вопросы были рассмотрены В.Ф.Бабенко для относительных поперечников $K_n(W_1^r, MW_1^r, L_1)$. Ю.Н.Субботин и С.А.Теляковский в [1] показали, что при $M \ge \frac{4}{\pi^2}\log\min(m,r) + A$,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ГФЕН Китая № 99-01-39006

где A – абсолютная константа, справедливы равенства

$$K_n(W_C^r, MW_C^r, \mathbf{C}) = d_n(W_C^r, \mathbf{C}),$$
$$K_n(W_1^r, MW_1^r, L_1) = d_n(W_1^r, L_1).$$

В докладе при некоторых p речь пойдет о точных значениях или асимптотике наименьших констант M^*, при которых

$$K_n(W_p^r, M^*W_p^s, L_p) = d_n(W_p^r, L_p). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть n, r, s натуральные числа и $s < r$. Наименьшее число $M^* = M^*(n, r, s)$, для которого при $p = 2$ справедливо равенство (1), при $n = 2m - 1$ равно $1 - m^{-r}$.*

Теорема 2. *Пусть r – фиксированное натуральное число, n и s – натуральные, $1 \leq s \leq r-1$. Тогда для наименьшей константы $M^* = M^*(n, r, s)$, для которой $K_{2n}(W_C^r, M^*W_C^s, \mathbf{C}) = d_{2n}(W_C^r, \mathbf{C})$, при $n \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство*

$$M^* = M^*(n, r, s) = K_{r-1} + o(1), \tag{2}$$

где K_{r-1} – константа Фавара.

Замечание. При доказательстве теоремы 2 для величины $M^*(n, r, s)$ при любых натуральных r и s $(1 \leq s \leq r-1)$ установлена верхняя оценка (2), в которой $o(1)$ равномерно по r и s стремится к нулю при $n \to \infty$. Вывод этой оценки связан с оценками производных интерполяционного периодического сплайна степени $r-1$ с равномерными узлами.

Кроме того в докладе речь пойдет об асимптотике констант Лебега, равномерной по n и r $(n, r \to \infty)$, указанных выше интерполяционных сплайнов.

[1] *Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.* Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Матем. заметки. – 1999. – Т.65, №6. – С.871–879.

E-mail: Yurii.Subbotin@imm.uran.ru