ВСПЛЕСКИ В ЗАДАЧЕ ПУАССОНА ДЛЯ КОЛЬЦА

Ю.Н.Субботин, Н.И.Черных (Екатеринбург) [1]

Пусть $R_\rho = \{z = re^{ix} : \ 0 < \rho \le r \le 1, \ 0 \le x \le 2\pi\}$, $\varphi(x)$, $\varphi_\rho(x)$ — 2π-периодические вещественные суммируемые функции, $f(z)$ — вещественная функция от $|z|$ и x. Задача Пуассона для оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta u = f, \quad u(e^{ix}) = \varphi(x), \quad u(\rho e^{ix}) = \varphi_\rho(x), \tag{1}$$

где $u(e^{ix}), u(\rho e^{ix})$ — радиальные граничные значения функции $u(re^{ix})$ на окружностях $r = 1$ и $r = \rho$, соответственно.

Для пространств гармонических функций $h_p^m(R_\rho)$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$) в [1] явно выписаны всплесковые базисы

$$\{\alpha_{-1} \equiv \frac{1}{2}, \, \widetilde{\alpha}_{-1} = \frac{\ln|z|}{2\ln p}, \, \alpha_n(z), \, \widetilde{\alpha}_n(z), \, \alpha_n(\rho/z), \, \widetilde{\alpha}_n(\rho/z) : n \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2}$$

Причем коэффициенты разложения гармонической функции $u(z) = u(|z|, x)$ из $h_p^m(R_\rho)$ вычисляются, используя лишь ее граничные значения.В частности, это позволяет найти точное решение задачи (1) при $f \equiv 0$ (задача Дирихле для уравнения Лапласа). В этом случае известна функция Грина для единичного круга:

$$\omega(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - z_0|}{|1 - z\bar{z}_0|}, \quad |z_0| < 1, \quad z_0 = r_0 e^{ix_0}.$$

Используя указанную выше схему, найдем в виде ряда по системе (2) (см. (46) в [1]) гармоническую в R_ρ функцию $u^*(z, z_0)$ ($f \equiv 0$) при $u^*(\rho e^{ix}, z_0) = \varphi_\rho(x) = \omega(\rho e^{ix}, z_0)$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Тогда функция $G_\rho(z, z_0) = \omega(z, z_0) - u^*(z, z_0)$ будет функцией Грина, с помощью которой явно выписывается решение задачи (1):

$$u(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r_0 e^{ix_0}) G_\rho(z, z_0) r_0 \mathrm{d}r_0 \mathrm{d}x_0 +$$

[1]Работа выполнена при поддержке Совета по государственной поддержке ведущих научных школ (проект 00–15–96035) и первым из авторов при поддержке гранта РФФИ № 99–01–00140, вторым – гранта РФФИ № 99–01–00175.

$$+\int_{\partial R_\rho} u|_{\partial R_\rho} \frac{\partial G_\rho(z,z_0)}{\partial \bar{u}} \mathrm{d}x_0, \quad (z_0=\rho e^{ix}), \tag{3}$$

где производная берется относительно переменной z_0 по внутренней нормали к границе кольца R_ρ.

Пусть теперь $R_{\rho_1,z_1}=\{z: \ |z|\le 1, \ |z-z_1|\ge\rho_1: \ |z_1|<1; \ 0<\rho_1<1-|z_1|\}$ – несимметричное кольцо. Не нарушая общности, можно считать, что $0<z_1<1$. Определим ρ из условия $2(1-\rho\rho_1)=(1-\rho_1^2+z_1^2)+\sqrt{(1-\rho_1^2+z_1^2)^2-4z_1^2}$, и положим $x_1=z_1(1-\rho\rho_1)^{-1}$, $w(z)=(z-x_1)/(1-zx_1)$. Тогда $0<\rho<1, \ z_1<x_1<z_1+\rho_1$, а $w(z)$ – конформное отображение кольца R_{ρ_1,z_1} на R_ρ.

Решение задачи (1) при $f\equiv 0$ для кольца R_{ρ_1,z_1} имеет вид

$$u(z)=\sum_{n=-1}^{\infty} b_n\alpha_n(w(z))+\widetilde{b}_n\widetilde{\alpha}_n(w(z))+b_n^\rho\alpha_n(\frac{\rho}{w(z)})+\widetilde{b}_n^\rho\widetilde{\alpha}_n(\frac{\rho}{w(z)}),$$

где в отличие от (46) из [1] при вычислении коэффициентов интегралы по окружности $z=e^{i\tau}$ вычисляются с весом $(1+x_1)/(1-x_1)$, а по окружности $z-z_1=\rho_1 e^{i\tau}$ – с весом $\rho_1^2(1-x_1^2)/[(1-x_1z_1)(\rho_1^2-2\rho_1(z_1-x_1)\cos\tau+(z_1-x_1)^2]$.

По аналогии с концентрическим случаем (3) можно выписать решение задачи (1) для кольца R_{ρ_1,z_1} и при $f\neq 0$.

Отметим, что полученные явные формулы позволяют находить асимптотику решений при $\rho_1\to 0$ $(\rho\to 0)$.

[1] *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН, сер. матем. – 2000. – Т.64, №1. – С.145–174.

[2] *Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Всплески в задаче Дирихле // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тезисы докладов Всероссийской конференции (Екатеринбург, 26 февраля – 2 марта, 2001). – Екатеринбург: УрГУ. – 2001.

E-mail: nikolai.chernykh@imm.uran.ru