НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ НЕЧЁТНОЙ СТЕПЕНИ

Ю. С. Волков (Новосибирск)[1]

Ранее автором [1] был предложен новый подход к построению классических интерполяционных полиномиальных сплайнов $S(x)$ степени $2n-1$. Данный доклад посвящён дальнейшему изучению свойств возникающих при этом систем уравнений $\mathbf{A}_k\mathbf{b}^k = \mathbf{f}^k$. В качестве определяемых параметров выступают коэффициенты b_i^k разложения k-ой ($k = 1, \dots, 2n-1$) производной сплайна $S(x)$ по B-сплайнам $B_{i,2n-k}(x)$ степени $2n-k-1$. Матрицы $\mathbf{A}_k$ систем уравнений имеют довольно простую ленточную структуру, и их элементы a_{ij}^k легко могут быть вычислены по формуле $a_{ij}^k = \int Q_{ik}(t)B_{j,2n-k}(t)\,dt$, где $Q_{im}(t)$ и $B_{jm}(t)$ являются B-сплайнами $(m-1)$-ой степени, отличающиеся лишь нормировкой

$$\int Q_{im}(t)\,dt = 1, \quad \sum_j B_{jm}(t) \equiv 1.$$

Интересно отметить, что даже в случае достаточно хорошо изученных кубических сплайнов наш подход приводит к новой системе уравнений (относительно коэффициентов разложения первой производной по B-сплайнам) с хорошо обусловленной матрицей. Уравнения системы (кроме уравнений, соответствующих краевым условиям сплайна) имеют вид

$$\lambda_i b_{i-1}^1 + (1 + \mu_i + \lambda_{i+1})b_i^1 + \mu_{i+1}b_{i+1}^1 = 3f[x_i, x_{i+1}],$$

где $\mu_i = h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)$, $\lambda_i = 1-\mu_i$, $h_i = x_{i+1}-x_i$, x_i — точки интерполяции функции $f(x)$.

Для случая сплайнов произвольной степени показано, что матрицы систем уравнений являются вполне неотрицательны-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Интеграционных проектов СО РАН № 1

ми, и следовательно обратные к ним матрицы являются знакопеременными, т. е. знаки элементов в каждой строке строго чередуются. Это позволило для сплайнов пятой степени получить оценки числа обусловленности матрицы $\mathbf{A}_2$ при любой величине локального сеточного отношения $\rho = \max_i\{h_{i-1}/h_i, h_i/h_{i-1}\}$, зависящие только от ρ.

Оценка нормы матрицы $\mathbf{A}_k^{-1}$ позволяет установить оценки приближения k-ой и $(2n-1-k)$-ой производных интерполируемой функции $f(x)$ соответствующими производными интерполяционного сплайна. Справедливы следующие неравенства:

$$||(S-f)^{(k)}||_\infty \le (K_1 + K_2||\mathbf{A}_k^{-1}||)\,\omega(f^{(k)};\bar{h}),$$

$$||(S-f)^{(2n-1-k)}||_\infty \le (K_3 + K_4||(\mathbf{A}_k^{T})^{-1}||)\,\omega(f^{(2n-1-k)};\bar{h}),$$

с константами K_1, K_2, K_3, K_4 зависящими только от n и k ($\bar{h} = \max h_i$). Хотя в приведённых неравенствах присутствует норма не только $\mathbf{A}_k^{-1}$, но и её транспонированной, однако достаточно иметь оценку нормы одной из этих матриц. Вторую можно выразить через первую (см. [2]).

На равномерной сетке системы для любой производной отличаются лишь правыми частями (матрицы одинаковы и совпадают с хорошо изученной коллокационной) — в правой части стоит просто вектор соответствующих разделённых разностей от интерполируемой функции. Эти системы уравнений позволяют вывести достаточные условия монотонности или выпуклости (m-выпуклости) сплайна при интерполяции монотонной или выпуклой (m-выпуклой) функции.

[1] *Волков Ю.С.* О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Сплайн-функции и их приложения. – Новосибирск, 1997. – Вып. 159: Вычислительные системы. – С.3-18.

[2] *Волков Ю.С.* Равномерная сходимость производных интерполяционных сплайнов нечётной степени // Препринт № 62. – Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1984.

E-mail: volkov@math.nsc.ru