ОПТИМАЛЬНЫЙ КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Т. Жанлав (Улан-Батор, Монголия)

Пусть на $[a,b]$ введена равномерная сетка Δ_N: $x_i = a + ih$, $i = 0, ..., N$, $h = (b-a)/N$, в точках которой заданы значения y_i функции $y = f(x) \in C^8[a,b]$. Пусть $S(x)$ кубический сплайн класса $C^2[a,b]$, определенный на сетке Δ_N, удовлетворяющий условиям интерполяции

$$S(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, N,$$

и подходящим краевым условиям, о которых будет сказано ниже. Введем обозначения: $M_i = S''(x_i)$ и

$$\lambda_i = M_i - y_i^{(2)} + \frac{h^2}{12} y_i^{(4)} - \frac{h^4}{360} y_i^{(6)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

Определение. Если для $S(x)$ выполняется условие

$$\max_{0 \le i \le N} |\lambda_i| = O(h^p), \quad p > 0,$$

то будем говорить, что краевые условия, использованные при построении $S(x)$, обеспечивают p-ый порядок точности.

Наивысший порядок точности краевых условий (в смысле введенного определения) для интерполяционных кубических сплайнов равен 6. Интерполяционный кубический сплайн, удовлетворяющий краевым условиям, обеспечивающим наивысший порядок точности, назовем оптимальным. Имеет место

Теорема 1. *Интерполяционный кубический сплайн $S(x)$ класса $C^2[a,b]$ будет оптимальным тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$M_{\bar{x}xi} = y_i^{(4)} + O(h^4), \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

где $M_{\bar{x}xi} = (M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1})/h^2$.

Теорема 2. *Интерполяционный кубический сплайн* $S(x)$, *удовлетворяющий краевым условиям*

$$82M_o + 339M_1 = e_o(y),$$
$$339M_{N-1} + 82M_N = e_N(y),$$

где $N \geq 5$ *и*

$$e_o(y) = -5y_o^{(2)} + \frac{1}{12}(6381y_{\bar{x}x1} - 1522y_{\bar{x}x2} + 281y_{\bar{x}x3} - 28y_{\bar{x}x4}),$$
$$e_N(y) = -5y_N^{(2)} + \frac{1}{12}(6381y_{\bar{x}x,N-1} - 1522y_{\bar{x}x,N-2}+$$
$$+ 281y_{\bar{x}x,N-3} - 28y_{\bar{x}x,N-4}),$$

является оптимальным.

С помощью оптимального сплайна можно аппроксимировать производные функции $y_i^{(2k+1)}$, $y_i^{(2k+2)}$ с точностью $O(h^{6-2k})$ $(k = 0, 1, 2)$ [1]. На основе оптимального сплайна легко получаются квадратурные формулы точности $O(h^6)$ и $O(h^8)$ [2]. Кроме того, оптимальный сплайн можно применять для построения сплайн-схем повышенной точности при нахождении собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с большой точностью [3].

[1] *Zhanlav T.* On an optimal cubic spline and its application to the numerical analysis // Scientific transaction NUM. – 1998. – №1. – P.1–10.

[2] *Zhanlav T.* Numerical integration formulas based on optimal cubic spline interpolation // Scientific transaction NUM. – 1998. – №1. – P.28–32.

[3] *Batgerel B., Batzorig V. and Zhanlav T.* An eigth-order formula for the Sturm-Liouville eigenvalues // Scientific transaction NUM. – 1998. – №1. – P.33–37.

E-mail: janlav@num.edu.mn