

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

Российская конференция,
посвящённая 80-летию со дня рождения
Юрия Семёновича Завьялова

31 января – 2 февраля 2011 г.

Тезисы докладов

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 519.6:517.51
ББК В192+В161.4
М545

Методы сплайн-функций. Российская конференция, посвящённая 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова (Новосибирск, 31 января – 2 февраля 2011 г.): Тез. докладов / ИМ СО РАН. Новосибирск, 2011. 113 с.

ISBN 978-5-86134-180-6.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-06004-г).

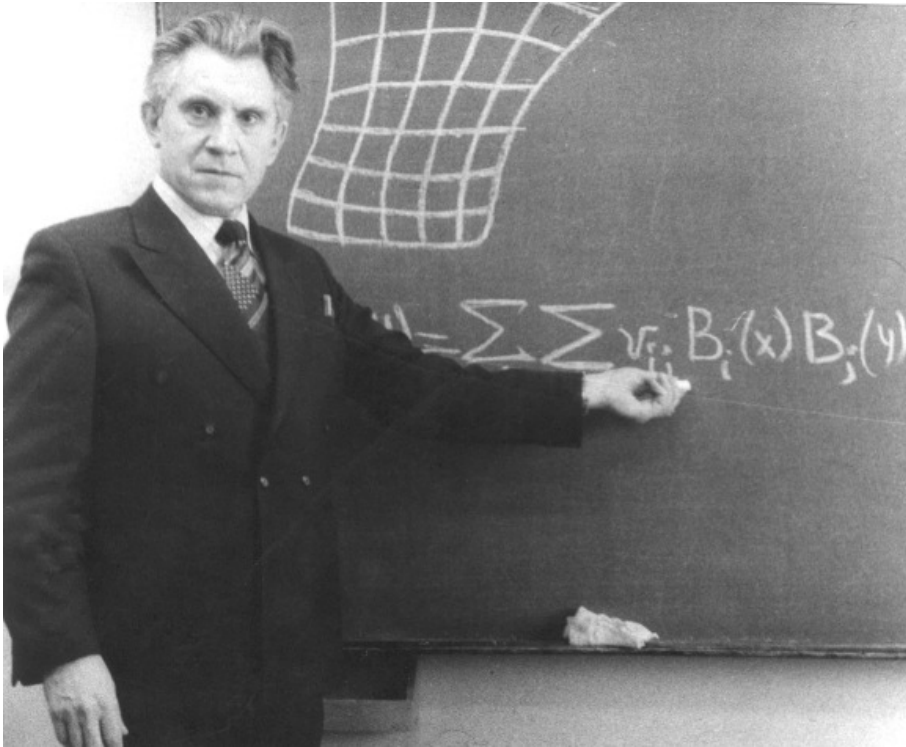
Программный комитет

Ю. Н. Субботин — председатель, С. И. Фадеев — заместитель председателя, Ю. С. Волков — председатель оргкомитета, В. Л. Мирошниченко — ответственный секретарь, В. И. Бердышев, Б. И. Квасов, А. Н. Коновалов, В. Н. Малозёмов, Н. И. Черных, В. Т. Шевалдин

М $\frac{1602070100-01}{Я82(03)-11}$ Без объявл.

© Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
2011

ISBN 978-5-86134-180-6



Юрий Семёнович Завьялов (1931–1998)

Слайны как инструмент геометрического моделирования (к 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова)

Юрий Семёнович Завьялов родился 3 января 1931 года в Зейском районе (прииск Кировский) Амурской области в семье служащих. В этом же году семья переехала в г. Зею, где Ю. С. Завьялов и закончил среднюю школу. В 1948 году он поступил в Томский государственный университет им. В. В. Куйбышева, который закончил с отличием по специальности механика.

Ещё студентом он активно занимался научной работой, после окончания университета поступил в аспирантуру к Е. Д. Томилову и в 1956 году защитил кандидатскую диссертацию «Об интегрировании некоторых уравнений неизэнтропического движения газа». С 1956 года стал работать в Томском университете в должности ассистента, доцента, в течение двух лет исполнял обязанности заведующего кафедрой прикладной и вычислительной математики. В связи с созданием нового факультета (физико-технического) часть кафедры была отделена и преобразована в кафедру математической физики вновь образованного факультета, Ю. С. Завьялов был избран заведующим новой кафедрой в 1962 году.

Томский период научной деятельности Ю. С. Завьялова связан с механикой жидкости и газа и проходил под влиянием идей академика Л. И. Седова, представившего две статьи молодого учёного в Доклады АН СССР [1], [2]. Методами теории касательных преобразований им установлен промежуточный интеграл уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа со специальной функцией распределения энтропии, который впоследствии вошёл в монографии по теоретической газовой динамике. Был найден общий интеграл плоско-параллельного установившегося вихревого сверхзвукового движения газа со специальным видом функции скорости. Интегралы использовались для приближённого решения реальных краевых задач. Результаты нашли применение в исследованиях других специалистов, в частности, в магнитной гидромеханике.

Второй период деятельности Ю. С. Завьялова, новосибирский, начался в Институте математики СО АН СССР в 1963 году. Здесь его научная деятельность началась с задачи оптимизации динамических

систем, зависящих от параметров. Были разработаны способы минимизации функционалов на множестве решений системы дифференциальных уравнений. Результаты применялись в системах автоматизации проектирования: в электронике при разработке больших интегральных схем, в горном машиностроении при проектировании первой в стране крупно-тоннажной фильтрующей центрифуги для обогащения угля.

Другая задача, которой Ю. С. Завьялову пришлось заниматься, также пришла из практики — возникла потребность внедрения в промышленное производство вычислительной техники. Он первым в стране взялся за разработку и внедрение системы автоматизации проектирования сложных машин (в авиационном производстве) и технологических процессов с помощью вычислительной техники и станков с числовым программным управлением (ЧПУ). Ключевым звеном этой системы явились методы математического описания кривых и поверхностей сложной геометрической формы.

Достаточно быстро стало ясно, что для кривых и поверхностей достаточно сложной формы теоретически разработанные способы представления многочленами и рациональными функциями не подходят, можно было работать только с кусочными многочленными функциями — сплайнами. Конечно, на тот момент такой объект как сплайны в математической литературе уже существовал, однако теоретической литературы по кусочно-многочленным функциям среди обширного множества существующей математической литературы по теории интерполяции и аппроксимации было очень мало. А в нашей стране её вообще не было!

Масса литературы имела отношение к интерполяции и восстановлению функций *одной* вещественной или комплексной переменной *аналитическими* функциями. Интерполяция и аппроксимация *многочленами* и *рациональными* функциями предлагали изобилие возможностей, и было доказано множество теорем о *сходимости* таких схем, когда степень стремится к бесконечности. Однако, как хорошо известно, простая полиномиальная интерполяция на равномерных сетках не сходится при стремлении шага сетки к нулю даже для некоторых очень гладких аналитических функций (например, для функции Рунге $1/(1+x^2)$ на $[-5, 5]$).

Для *периодических* функций, заданных на равномерных сетках (с шагом постоянной длины), надёжная схема аналитической интерполяции обеспечивается отрезками рядов Фурье (тригонометрическими

многочленами), она идеальна для многих теоретических целей.

Однако в этих схемах нет гибкости (шаг должен быть постоянным), они не применимы для большинства граничных условий и очень чувствительны к ошибкам округления при вычислениях.

А о более трудных задачах интерполяции и аппроксимации функций двух и более переменных известно значительно меньше. Теорема Вейерштрасса утверждает, что *любая* непрерывная функция сколь угодно точно может быть приближена на *любом* компактном множестве многочленами достаточно высокой степени [3]. Конструктивно такая аппроксимация может быть достигнута с помощью многочленов Бернштейна, более того, при этом приближаются и производные. С точки зрения существующей теории всё хорошо, чего нам ещё желать. К тому же многочлены и рациональные функции прекрасно подходят для вычисления на компьютерах. Однако даже для функций одной переменной использование многочленов Бернштейна для вычисления приближения многочленами очень *неэкономично* [3]. На практике значительно шире используются интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа, даже несмотря на то что они могут расходиться.

Примерно в это же время (с появлением и распространением вычислительных машин) с такими же проблемами столкнулись и на Западе в передовых компаниях по производству автомобилей, судов, самолётов. Данное обстоятельство побудило создавать и развивать математическую теорию кусочно-многочленных приближений.

В некоторых задачах требовалось использовать кусочные многочлены пятой степени, а в некоторых приложениях достаточно было кусочно квадратических или даже линейных функций, однако более универсальным и удобным оказалось применение кусочно кубических многочленов для приближения гладких кривых и кусочно бикубических многочленов для представления гладких поверхностей.

Кусочно кубические функции одной переменной с непрерывными наклонами и кривизной на самом деле уже использовались инженерами и конструкторами. Для получения плавных кривых и обводов они использовали тонкие упругие рейки (механические сплайны), к которым в определённых точках x_i прикладывались нагрузки w_i в соответствии с классической механической теорией Эйлера-Бернштейна. Такие механические сплайны малой жёсткости использовались как аналоговые вычислители, чтобы кривые прошли через заданные точки.

Наверно, ещё Эйлеру было известно, что энергия деформации, минимизируемая такими механическими сплайнами, пропорциональна $\int y''^2 dx$ при малых прогибах рейки. Использование механических сплайнов для интерполяции гладких близких к горизонтальным кривых, проходящих через заданное множество точек, соответствует вычислению прогибов тонкой рейки с жёсткостью k . Третья производная имеет разрыв $w_i/k = \Delta y_i'''$ в точке x_i , и прогиб $y(x)$ приближённо описывается кубическим многочленом между точками x_i .

Наверно, нельзя сказать, что такие рассуждения очень глубокие или очень новые. Использование кусочно-многочленных функций высокой степени для приближения гладких функций одной переменной было рассмотрено очень обстоятельно ещё И.Шёнбергом в его важной работе [4], где для случая равномерной сетки на всей числовой прямой были получены очень глубокие результаты. Однако в то время на русском языке не было ещё ни одной статьи, использующей слово “сплайн”. В своих первых работах с кусочно кубическими функциями Ю. С. Завьялов предложил их называть “многозвенниками”, но такое название не прижилось [5].

Что оказалось достаточно важным, — интерполяция сплайнами быстро *сходится* на широком множестве сеток, не чувствительна к ошибкам округления, легко программируется, и расчёты с ней быстро выполняются на вычислительных машинах. К тому же, разработанные вычислительные схемы по приближению поверхностей оказались также удобны и эффективны для широкого класса гладких поверхностей и быстро прижились в практике.

Помимо внедрения сплайновых методов в проектировании и производстве, Юрий Семёнович Завьялов в Институте математики создал первую в стране научную школу по теории сплайн-функций. Им и его учениками внесён крупный вклад в теорию аппроксимации сплайн-функциями. В случае одной переменной разработана методика получения на ЭВМ точных оценок погрешности аппроксимации, построены формулы локальной аппроксимации, точные на функционалах на классах функций, и формулы, обеспечивающие квазиоптимальные приближения. Много внимания уделено методам практического построения сплайнов, разработаны новые алгоритмы для построения интерполяционных, аппроксимационных и сглаживающих сплайнов, подробно исследованы разные типы краевых условий, установлены оценки погрешностей для многих случаев. На основе сплайн-аппроксимации построе-

ны новые формулы численного дифференцирования, в частности, дифференцирования при ошибках в исходных данных и интегрирования сильно осциллирующих функций, более эффективные, чем известные ранее. Разработан новый метод решения краевых задач для дифференциальных и интегральных уравнений — метод сплайн-коллокации, позволяющий, в отличие от разностных методов, строить решения задач во всей области с требуемыми дифференциальными свойствами, заданным порядком точности, с точной аппроксимацией граничных условий. Изучена задача изогеометрической интерполяции кубическими сплайнами, установлены достаточные условия, при которых классический кубический сплайн будет обладать нужными геометрическими характеристиками (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.), предложены конструкции обобщённых сплайнов, всегда решающие подобные задачи. В случае многих переменных исследованы вопросы интерполирования: существование и единственность решения, сходимость, разработаны алгоритмы. Установлены вариационные свойства полиномиальных сплайнов и исследованы задачи сглаживания исходных данных. По результатам исследований Ю. С. Завьялова и учеников изданы три монографии [6] – [8].

Отличительной особенностью исследований школы Ю. С. Завьялова является тесная связь с прикладными проблемами вычислительной математики и инженерной практики. На базе сплайнов созданы методы моделирования кривых и поверхностей сложной формы (обводы летательных аппаратов, рабочие колёса гидротурбин и т.п.). Это позволило решать геометрические задачи, возникающие при конструировании и технологической подготовке производства, включая расчёт траекторий режущего инструмента при программировании станков с ЧПУ. Разработано программное обеспечение в виде адаптивной интегрированной системы. Различные варианты этой системы внедрены на Новосибирском авиационном заводе им. В. П. Чкалова для технологической подготовки серийного авиационного производства; Ленинградском металлургическом заводе для проектирования и изготовления рабочих колёс гидротурбин; на Кировском заводе (Ленинград) для проектирования и изготовления лопаток циркуляционных насосов; Уфимском филиале НИИД и заводе «Прогресс» (Запорожье) для проектирования и изготовления лопаток газотурбинных двигателей. Создана система для моделирования типовых фигур и манекенов в швейном производстве.

Ю. С. Завьялов — автор более 70 научных работ, среди которых 4 монографии. Им подготовлено 16 кандидатов и 2 доктора наук. По его инициативе и под его руководством регулярно проводились школы-совещания по теории и приложениям сплайнов. За разработку автоматизированной технологии подготовки производства Ю. С. Завьялов в 1981 году удостоен премии Совета Министров СССР. Награждён орденом «Знак Почёта» и медалью «Ветеран труда».

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С. О некоторых интегралах одномерного движения газа // ДАН СССР, 1955. Т. 103, № 5. С. 781–782.
2. Завьялов Ю. С. Об одном классе плоско-параллельных установившихся вихревых движений газа // ДАН СССР, 1957. Т. 116, № 3. С. 363–364.
3. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Физматгиз, 1954.
4. Schoenberg I. J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Parts A and B // Quar. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
5. Завьялов Ю. С. Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении // Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. С. 3–22.
6. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
7. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985.
6. Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск: Наука, 1988.

Ю. С. Волков, В. Л. Мирошниченко

О задаче определения класса скоростей с заданной структурой линий уровня по кинематическим данным

Аниконов Ю. Е.¹, Волков Ю. С.¹, Горшкалев С. Б.²,
Деревцов Е. Ю.¹, Мальцева С. В.³

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
anikon@math.nsc.ru; volkov@math.nsc.ru; dert@math.nsc.ru;

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука
СО РАН, Новосибирск; GorshkalevSB@ipgg.nsc.ru;

³Новосибирский государственный университет, Новосибирск;
svetlana.v.maltseva@gmail.com

Решение обратной кинематической задачи для сферически-симметричной модели Земли сыграло большую роль в развитии представлений о внутреннем строении Земли. На основе анализа сейсмических данных впервые было построено распределение скорости продольных и поперечных волн вдоль радиуса Земли. Отметим, что поставленная задача была решена при существенных ограничениях на рассматриваемую среду, которые можно трактовать и как наличие *априорной информации*, которая заключается в предположении о сферической симметрии Земли.

Накопленные геофизические данные убедительно свидетельствуют о том, что физические параметры Земли являются функциями трех переменных [1]. Наиболее значительно они меняются с глубиной, причем в целом скорость распространения сигнала возрастает. Это обстоятельство приводит к характерному поведению лучей, вдоль которых происходит распространение сигнала. Именно, луч, “выпущенный” с поверхности Земли, искривляясь, сначала проходит в глубину, затем снова выходит на поверхность. Таким образом, выпущенный из одной точки поверхности и принятый в ее другой точке (рефрагированный) сигнал несет “зашифрованную” информацию о структуре и характеристиках вещества в глубине Земли, что позволяет, развивая методы “дешифровки”, делать выводы о внутреннем строении Земли.

При сейсмических наблюдениях существуют объективные причины, препятствующие идеальному решению обратной задачи. Системы наблюдений в сейсморазведке носят дискретный характер и не являются

регулярными по удалениям и азимутам. Волновая природа сейсмического поля ставит естественный предел детальности изучения геологической среды, поэтому предел разрешающей способности метода определяется длиной волны упругих колебаний. При регистрации волновых полей присутствуют помехи, не имеющие отношения к измеряемому полю, такие как ветер, дождь и помехи, носящие техногенный характер. Все эти причины не являются непреодолимым препятствием для решения обратной задачи, но вносят искажения в измеряемые параметры волнового поля. Таким образом, применяемые методы обработки сейсмических данных должны быть устойчивы к ошибкам разного рода.

В работе ставится и исследуется задача определения структуры множества линий уровня скорости по кинематическим данным (годографу). Один из возможных подходов к решению обратной кинематической задачи сейсмологии состоит в том, что прежде чем начать поиск скорости, принадлежащей некоторому классу, например, классу не зависящих от “вертикальной” переменной функций, необходимо предпринять попытку установить, по исходным кинематическим данным, принадлежность скорости данному классу. Оказывается, это можно сделать при довольно общих предположениях [2]. Таким образом, процедура восстановления скорости по кинематическим данным следует за предварительным анализом этих данных, в результате которого мы определяем класс искомых скоростей, имеющих определенную структуру множества линий уровня. Иными словами, необходимо сначала найти класс скоростей, используя кинематические данные, а затем приступить к определению скорости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Интеграционных проектов СО РАН (проект 2009-81).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сейсмическая томография*. Под редакцией Г. Нолета. М.: Мир, 1990.
2. *Аниконов Ю.Е., Пестов Л. Н.* Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 1996.

Точные интегральные неравенства для тригонометрических полиномов

Арестов В. В.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
Институт математики и механики УрО РАН,
Екатеринбург; Vitalii.Arestov@usu.ru

Будут обсуждаться точные неравенства для линейных операторов, порожденных композицией Сеге, во множестве тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов $\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|) dx$. В настоящее время такие неравенства (включая неравенство Бернштейна для производных тригонометрических полиномов) достаточно хорошо изучены [1] для класса Φ^+ функций φ , неубывающих, локально абсолютно непрерывных на полуоси $(0, +\infty)$ и таких, что функция $\varphi(e^v)$ является выпуклой вниз на $(-\infty, \infty)$ или, что то же самое, функция $u\varphi'(u)$ не убывает на $(0, +\infty)$. Этому классу принадлежат функции φ , которые не убывают и выпуклы вниз на $(0, +\infty)$, а также конкретные функции $\ln u$, $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\} = \ln \max(1, u)$, u^p при всех $p > 0$. В докладе основное внимание будет уделено точным неравенствам для класса Φ функций φ , неубывающих и неотрицательных на полуоси $[0, +\infty)$ [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00213) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 16(7) «Теоретические основы навигации по геофизическим полям и методы регулирования диаграмм направленности антенных систем» при поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1013).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических многочленов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
2. Арестов В. В. Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 38–53.

Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса по равномерным узлам симплекса

Байдакова Н. В.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
baidakova@imm.uran.ru

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ – невырожденный m -симплекс, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ – барицентрические координаты точки симплекса, $u(\lambda) \in \Delta$ – точка симплекса с барицентрическими координатами λ . Введем множество мультииндексов

$$I = \{i \mid i \in \mathbb{Z}_+^{m+1}, |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{m+1} = n\}.$$

Пусть $\{a_i\}$ – узлы равномерной сетки на Δ , т. е. узлы, имеющие следующие барицентрические координаты:

$$a_i = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{m+1}}{n} \right), \quad i \in I. \quad (1)$$

Рассматривается лагранжев процесс интерполяции функции $f \in C(\Delta)$ алгебраическими многочленами степени не выше n по совокупности переменных в узлах (1) (под степенью многочлена по совокупности переменных понимается наибольшая из степеней входящих в него мономов). Такой интерполяционный процесс позволяет получать непрерывную результирующую кусочно-полиномиальную функцию на триангулированной области. Через $L_n^m(\lambda)$ будем обозначать функцию Лебега данного интерполяционного процесса, т. е. норму функционала в пространстве $C(\Delta)$, ставящего в соответствие каждой непрерывной функции f значение ее интерполяционного многочлена в точке $u(\lambda)$. Через L_n^m будем обозначать константу Лебега указанного интерполяционного процесса, т. е. норму оператора, действующего из $C(\Delta)$ в $C(\Delta)$, который каждой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен. Известно, что $L_n^m = \max_{u(\lambda) \in \Delta} L_n^m(\lambda)$ (см., например, [1; гл. 5, §1] или [2; гл. 3, §1]).

Интерполяция по равномерным узлам часто используется в методе конечных элементов. Функция Лебега позволяет оценить отклонение полученного интерполяционного многочлена от истинного в точке, если

значения функции в узлах интерполирования измерены с известной погрешностью. Кроме того, функция Лебега используется при исследовании поточечной сходимости интерполяционных процессов. Константа Лебега играет аналогичную роль при исследованиях влияния погрешности измерения значений функции и сходимости интерполяционных процессов в равномерной метрике (для более детального изучения данных вопросов в случае отрезка см., например, [1; гл. 5, §1] или [2; гл. 3, §1]; данные результаты без труда переносятся на случай m -симплекса).

Известно, что порядок роста констант Лебега по n в случае $m \geq 2$ совпадает [3] с одномерным случаем [4, §3.2] и равен $O(2^n/(n \ln n))$.

Введем множество последовательностей

$$\mathcal{A} = \{\alpha_n \mid \alpha_n > 0, \alpha_n \rightarrow \infty \text{ и } \alpha_n/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$$

и функцию $\varphi(x) = 2x^x(1-x)^{1-x}$. Отметим, что $\varphi(x) > 1$ при $x \in (0, 1)$, $x \neq 1/2$ [1; гл. 5, §4]. Доказана следующая

Теорема. Пусть $m \geq 2$, $u(\lambda) \in \Delta$, $\lambda_0 = \min_{s=1,2,\dots,m+1} \lambda_s \geq \alpha_n/n$, где $\alpha_n \in \mathcal{A}$, $c_m(\lambda_0)$ – положительная функция, зависящая только от λ_0 и m . Тогда найдется последовательность номеров $n_k \rightarrow \infty$, для которых выполняются неравенства

$$L_{n_k}^m(\lambda) \geq c_m(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+m/2}} [\varphi(\lambda_0)]^{n_k}.$$

В случае $m = 1$ аналогичный (более точный) результат доказан в [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-01-00347) и программы проектов исследований, выполняемых совместно в Уральском и Сибирском отделениях РАН (№ 09-С-1-1007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
2. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
3. Байдакова Н. В. О порядке констант Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 814–831.
4. Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1968.

Об абсолютной ε -энтропии компакта периодических C^∞ -гладких функций (к проблеме К.И. Бабенко)

Белых В. Н.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
belykh@math.nsc.ru*

Будем рассматривать слова в алфавите из двух букв 0 и 1 – двоичные слова. Если x элемент компакта $X \subset \Phi$, где Φ – метрическое пространство с метрикой ρ , то таблицей элемента x называется двоичное слово T_x . Его длину N назовем длиной (или объемом) таблицы. Зафиксировав длину, рассмотрим таблицы всевозможных элементов $x \in X$. Ясно, что число различных таблиц не превосходит 2^N . По теореме Хаусдорфа для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть компакта X в Φ . Следовательно, с помощью конечного числа битов можно задать элемент компакта с любой заданной точностью. Множество таблиц $\{T_x\}$ данной длины N и расшифровывающий алгоритм \mathcal{R} , который по таблице T_x восстанавливает элемент $x_0 \in \Phi$, являющийся приближенным представлением элемента $x \in X$, определяют способ табулирования компакта X . Точностью способа табулирования называется величина $\varepsilon = \sup_{x \in X} \rho(x, \mathcal{R}(T_x))$. Одной из задач теории табулирования

является задача построения метода табулирования, имеющего заданную точность при минимальном объеме таблицы. Математическим отражением этой ситуации является понятие абсолютной (или колмогоровской) ε -энтропии $H_\varepsilon(X)$, характеризующее нижнюю оценку роста объема таблицы элемента компакта X с увеличением точности $\varepsilon > 0$ его запоминания. Функцию $H_\varepsilon(X)$, зависящую ещё и от метрики X , можно рассматривать как числовую характеристику сложности финитного устройства компакта $X \subset \Phi$: чем быстрее при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $H_\varepsilon(X)$ растет к бесконечности, тем сложнее устроен компакт X . Важная роль отводится при этом выяснению асимптотики роста $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Хорошо известно, что для компактов X функций конечной гладкости рост $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ оказывается степенным $(1/\varepsilon)^\beta, \beta > 0$ и он тем медленнее, чем выше запас гладкости, составляющих компакт элементов. Напротив, для компактов X , состоящих из аналитических функций, рост $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ характеризуется всего лишь некоторой фиксированной положительной степенью величины $\log(1/\varepsilon)$, причем

известны и точные результаты (К.И. Бабенко, В.Д. Ерохин, А.Г. Витушкин, В.М. Тихомиров, Х. Видом). Что касается более общих классов C^∞ -гладких функций, например, неаналитических, то здесь до сих пор не было никаких результатов даже для случая функций одной переменной. Интерес к наилучшему финитному описанию классов C^∞ -гладких функций обозначен в книге К.И. Бабенко (Основы численного анализа, РХД, Москва-Ижевск, 2002, с. 301), где сформулирована проблема отыскания главного члена в асимптотической формуле для величины $H_\varepsilon(X)$: требуется найти асимптотику колмогоровской ε -энтропии компакта $X \subset C^\infty$, рассматривая его как ограниченное подмножество пространства C непрерывных функций.

В основе полученного в докладе результата – предложенная ранее В.Н. Белых (СМЖ, 2005, т. 46, № 3) процедура конструктивного описания пространств C^∞ -гладких периодических на окружности S функций. Именно, пространство $C^\infty[S]$ задается указанием мажоранты k -х производных $G(k)$ и пары эффективно конструируемых по ней монотонных функций $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$, обладающих при условии $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$ рядом полезных свойств на полуоси $r \geq 0$. Функция $\mu(r)$ является строго монотонной, непрерывной и стремящейся к нулю с ростом параметра r . Функция $\vartheta(r)$, напротив, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r . Такой подход к решению проблемы К.И. Бабенко позволил выписать асимптотику (при $\varepsilon \rightarrow 0$) абсолютной (колмогоровской) ε -энтропии компакта $X \subset C^\infty[S]$, рассматривая его как ограниченное подмножество пространства $C[S]$ непрерывных периодических на S функций (ДАН, 2010, т. 431, № 6):

$$H_\varepsilon(X) = \frac{2}{\ln 2} \int_1^{r(\varepsilon)} \vartheta(t) dt + O(r \ln r), \quad \text{где } r = r(\varepsilon) = \mu^{-1}(\varepsilon). \quad (*)$$

В частности, для классов Жеврея порядка $\alpha > 0$ асимптотика $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражается формулой: $H_\varepsilon(X) \sim b \log_2^{\alpha+1}(1/\varepsilon)$, где $b > 0$ – постоянная. Значениям $0 < \alpha \leq 1$ соответствуют известные результаты для классов аналитических функций.

Таким образом, учёт асимптотик колмогоровской энтропии показывает, что между классами C^∞ -гладких функций и классами функций конечной гладкости имеется существенное различие, выражающееся в требуемом, в силу равенства (*), объеме компьютерных вычислений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00147-а) и Интеграционного проекта № 40 Президиума СО РАН.

Проекторы на пространства линейных сплайнов и сходимость алгоритмов адаптации для сингулярно возмущенных краевых задач

Блатов И. А.¹, Добробог Н. В.²

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара; ¹blatow@mail.ru, ²dogreen@mail.ru

В докладе рассматривается метод конечных элементов Галеркина для двух сингулярно возмущенных краевых задач. Доказывается условно равномерная по малому параметру сходимость метода, а также сходимость алгоритмов адаптации расчетной сетки в случае неизвестной границы погранслоя. Ключевым фактом в доказательстве основных результатов является равномерная ограниченность галеркинских проекторов на пространства линейных сплайнов в различных операторных нормах. Частично представляемые результаты опубликованы в [1].

Рассмотрим задачи

$$L_\varepsilon x \equiv -\varepsilon^2 x'' + c_1(t)x = f(t), \quad x(-1) = x(1) = 0. \quad (1)$$

$$L_\varepsilon x \equiv -\varepsilon x'' + b(t)x' + c_2(t)x = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь функции $c_1(t) \in C^1[-1, 1]$, $f(t) \in C[-1, 1]$, причем $c(t) \geq c^* > 0$, $t \in [-1, 1]$, ε — параметр, принимающий произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. Функции $b(t)$, $c_2(t) \in C^1[0, 1]$ и $f(t) \in C[0, 1]$, причем $b(t) \geq b^* > 0$, $t \in [0, 1]$.

Для построения приближенного решения задач (1),(2) используется метод Бубнова-Галёркина в пространстве E линейных сплайнов на сетках Г. И. Шишкина [2], удовлетворяющих краевым условиям. Пусть m — число узлов участка редкого разбиения сетки Шишкина.

Оператор $P_\varepsilon = P(\varepsilon, m): E \rightarrow E$ называется *галёркинским проектором*, если $P_\varepsilon x = x_m$, где x — точное решение задачи (1) или (2), x_m — галеркинское приближение.

Теорема 1. *Найдется положительная константа C , не зависящая от ε , m : $\varepsilon m \leq 1$, такая, что для галеркинского проектора, соответствующего задаче (1), справедлива оценка*

$$\|P\|_{C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]} \leq C.$$

В случае задачи (2) введем в пространстве $E_\varepsilon = \{x \in C[0, 1] : x' \in L_\infty[0, a], x(0) = x(1) = 0\}$ норму $\|x\|_\varepsilon = \varepsilon \|x'\|_{L_\infty[0, a]} + \|x\|_{C[0, 1]}$. Здесь a — узел, разделяющий участки крупного и мелкого разбиения в сетке Шишкина [2].

Теорема 2. *Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0, m_0 \in \mathbb{N}, \gamma > 0, C > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], m \geq m_0 : \varepsilon \ln m \leq \frac{\gamma}{m}$ галеркинский проектор P , соответствующий задаче (2) существует, и справедлива оценка*

$$\|P\|_{E_\varepsilon \rightarrow E_\varepsilon} \leq C.$$

Теорема 3. *Найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0, m_0 \in \mathbb{N}, \gamma > 0, C > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], m \geq m_0 : \varepsilon \ln m \leq \frac{\gamma}{m}$ существуют единственные решения $x_m(t)$ задач (1), (2), причем*

$$\|x_m(t) - x(t)\| \leq C/m^2.$$

Кроме того в докладе представлены алгоритмы адаптации и теоремы их сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блатов И. А., Добробог Н. В. Условная ε -равномерная сходимость алгоритмов адаптации в методе конечных элементов для сингулярно возмущенных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 10. С. 1550–1568.
2. Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрОРАН, 1992.

Комонотонная интерполяция кубическим сплайном в случае одной переменной направления монотонности

Богданов В. В.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
bogdanov@math.nsc.ru

Пусть в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ известны значения некоторой функции $f(x) : f_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$. Кубический сплайн $S(x)$, интерполирующий исходные данные, будем называть комонотонным, если $S(x_i) = f_i$ и число перемен знака производной $S'(x)$ на $[a, b]$ совпадает с числом перемен знаков в наборе разделённых разностей $f[x_i, x_{i+1}] = (f_{i+1} - f_i)/h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i$.

В частности, в задаче сохранения монотонности данных из условия $f[x_i, x_{i+1}] \geq 0$ должно следовать $S'(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Известно, что кубический сплайн класса C^2 , идеально подходящий для большинства практических приложений, не всегда будет монотонным, если данные монотонны. Достаточные условия его монотонности получены В.Л. Мирошниченко [1].

В задаче наследования направлений монотонности при интерполяции мы считаем, что на отрезке $[a, b]$ точки смены направлений монотонности достаточно далеко отстоят друг от друга. Тогда достаточно рассмотреть задачу лишь с однократной переменной направления монотонности на отрезке.

Построение кубического сплайна состоит в определении каких-либо его параметров из соответствующей системы уравнений. Матрицы этих систем трёхдиагональные и могут иметь диагональное преобладание. Ранее Ю. С. Завьялов [2] для матрицы с диагональным преобладанием предложил преобразование, приводящее её к монотонному виду, что позволило получить достаточные условия ковыпуклости интерполяционного кубического сплайна.

Мы показываем, что это преобразование переносится на более широкий класс матриц, в частности, на матрицы с диагональным преобладанием по столбцу. Этого оказывается достаточно для получения условий комонотонности, если указанное преобразование применять к

матрице системы уравнений для вычисления сплайна через коэффициенты B -сплайн-разложения его производной [3]. В такой системе уравнений правая часть состоит из величин $d_i = f[x_{i-1}, x_i]$, что оказалось удобным при исследовании именно кусочной монотонности, а количество перемен знаков искомых параметров соответствует числу перемен знаков производной сплайна на отрезке.

Таким образом, если направление возрастания данных меняется на убывание в l -ом узле, то кубический сплайн, например, в представлении [3] будет монотонным при выполнении условий

$$d_{l-1} - d_l \frac{\mu_{l-1}(1 + \mu_l + \lambda_{l+1})}{w_l} - d_{l+1} \frac{\mu_l \mu_{l-1}}{w_l} - d_{l-2} \frac{\lambda_{l-2}}{1 + \mu_{l-3} + \lambda_{l-2}} \geq 0,$$

$$d_l - d_{l-1} \frac{\lambda_l - 1}{1 + \mu_{l-2} + \lambda_{l-1}} \geq 0, \quad d_{l+1} - d_{l+2} \frac{\mu_{l+1}}{1 + \mu_{l+1} + \lambda_{l+2}} \geq 0,$$

$$d_{l+2} - d_{l+1} \frac{\lambda_{l+1}(1 + \mu_{l-1} + \lambda_l)}{w_l} - d_l \frac{\lambda_l \lambda_{l+1}}{w_l} - d_{l+3} \frac{\mu_{l+2}}{1 + \mu_{l+2} + \lambda_{l+3}} \geq 0,$$

$$d_i - d_{i+1} \frac{\mu_i}{(1 + \mu_i + \lambda_{i+1})} - d_{i-1} \frac{\lambda_{i-1}}{(1 + \mu_{i-2} + \lambda_{i-1})} \geq 0 \quad \text{для } i \neq l,$$

где $w_l = (1 + \mu_{l-1} + \lambda_l)(1 + \mu_l + \lambda_{l+1}) - \mu_l \lambda_l$, $\mu_i = h_{i-1}/(h_{i-1} + h_i)$, $\lambda_i = 1 - \mu_i$ для всех i сетки Δ .

В частности, на равномерной сетке ограничения на данные на монотонных участках те же, что и в задаче получения строгой монотонности: $1/2 \leq f[x_i, x_{i+1}]/f[x_{i-1}, x_i] \leq 2$, а на 5 интервалах, симметрично прилегающих к узлу смены характера монотонности, строже: $2/3 < f[x_i, x_{i+1}]/f[x_{i-1}, x_i] < 3/2$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов Интеграционных проектов СО РАН (проект 2009-81), СО РАН и УрО РАН (проект 2009-14) и ОМН РАН (проект 2009-1.3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miroshnichenko V. L.* Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions'84. Sofia. 1984. P. 610–620.
2. *Завьялов Ю. С.* О неотрицательном решении системы уравнений с нестрогим якобиевой матрицей // Сиб.мат.журн. 1996. Т. 34, № 6. С.1303–1307.
3. *Волков Ю. С.* Новый метод построения интерполяционных кубических сплайнов // ДАН. 2002. Т. 382, № 2. С.155–157.

Сплайновый метод решения задачи об определении скоростной характеристики среды по данным сейсмического профилирования

Богданов В. В.¹, Карстен В. В.², Мирошниченко В. Л.¹

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
bogdanov@math.nsc.ru; miroshn@math.nsc.ru;

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука
СО РАН, Новосибирск; KarstenVV@ipgg.nsc.ru

Предложенный в [1] метод решения обратной кинематической задачи сейсмологии применяется для определения скоростной характеристики среды по данным сейсмического профилирования. Метод основан на комбинированном использовании уравнения эйконала и сплайновых методов аппроксимации функций многих переменных. Задача решается в предположении горизонтально-слоистого строения среды; никаких предположений о количестве слоев и их толщине не делается. Вначале по данным о временах первого вступления сейсмического сигнала от источников возбуждения, зарегистрированными приемниками, расположенными в вертикальной скважине, строится сплайн, аппроксимирующий время прихода сигнала из источников возбуждения в любую точку пространства. Затем с помощью уравнения эйконала определяется скоростная характеристика среды в окрестности скважины.

Численные эксперименты на модельных и реальных данных демонстрируют высокую эффективность предложенного метода. Отметим также, что он может быть распространен и на более широкий круг задач. В частности, по существу, без всяких изменений он может применяться к неvertикальным скважинам.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Интеграционных проектов СО РАН (проект 2009-81).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниконов Ю. Е., Богданов В. В., Деревцов Е. Ю., Мирошниченко В. Л., Сапожникова Н. А. Численное решение обратной кинематической задачи сейсмологии с внутренними источниками // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. IX, № 4(28). С. 3–26

Фундаментальные и интерполяционные базисные сплайны шестого порядка аппроксимации

Бурова И. Г.

Санкт-Петербургский государственный университет, С.Петербург;
BurovaIG@mail.ru

В книге [1] всесторонне рассмотрены В-сплайны. В [2] построены интерполяционные минимальные базисные сплайны. В данной работе построены фундаментальные трижды непрерывно дифференцируемые базисные сплайны шестого порядка аппроксимации первой высоты со свойствами, аналогичными В-сплайнам и получены коэффициенты перехода к интерполяционным базисным сплайнам шестого порядка аппроксимации первой и второй высоты. Переход осуществляется посредством попарного произведения найденных коэффициентов и фрагментов фундаментальных базисных сплайнов. Предлагаются варианты приближений этими сплайнами (см. также [3]).

1. Построение трижды непрерывно дифференцируемых базисных сплайнов шестого порядка аппроксимации. Пусть $\{X_j\}$ — сетка упорядоченных равноотстоящих с шагом h вещественных узлов: $\dots < X_{j-1} < X_j < X_{j+1} < \dots$. Для вычисления базисных функций $\omega_{j,i}(x)$, $i = 0, 1$, на промежутке $[X_j, X_{j+1}]$ решаем систему уравнений

$$X_{j-1}^s \omega_{j-1,0}(x) + X_j^s \omega_{j,0}(x) + X_{j+1}^s \omega_{j+1,0}(x) + s X_{j-1}^{s-1} \omega_{j-1,1}(x) + \\ + s X_j^{s-1} \omega_{j,1}(x) + s X_{j+1}^{s-1} \omega_{j+1,1}(x) = \sum_{k=0}^5 c_{(s+1)k} x^k, \quad s = 0, 1, \dots, 5.$$

Аналогичные системы уравнений выписываем на соседних промежутках $[X_{j-1}, X_j]$ и $[X_{j+1}, X_{j+2}]$.

Неизвестные коэффициенты c_{iq} , $i = 1, \dots, 6$, $q = 0, \dots, 5$ будем находить так, чтобы на вещественной оси функции $\omega_{j,0}$ и $\omega_{j,1}$ были трижды непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяли условиям $\text{supp } \omega_{j,1} = \text{supp } \omega_{j,0} = [X_{j-1}, X_{j+2}]$, причем при $p = 0, 1, 2, 3$ выполнялись равенства $\omega_{j+1,0}^{(p)}(X_{j+2}) = 0$, $\omega_{j+1,1}^{(p)}(X_{j+2}) = 0$, $\omega_{j-1,0}^{(p)}(X_{j-1}) = 0$, $\omega_{j-1,1}^{(p)}(X_{j-1}) = 0$, $\omega_{j-1,1}^{(p)}(X_j) = \omega_{j,1}^{(p)}(X_j)$, $\omega_{j-1,0}^{(p)}(X_j) = \omega_{j,0}^{(p)}(X_j)$.

Так как количество неизвестных больше количества условий, то функции $\omega_{j,i}$ определяются неоднозначно. Приведем один из возможных вариантов. Полагая $\omega_{j,i}(X_j + th) = \tilde{\omega}_i(t)$, получаем

$$200\tilde{\omega}_0(t) = \begin{cases} -9h^4(-2+3t)(1+t)^4, & -1 \leq t \leq 0, \\ 9h^4(2-10t^3+5t+5t^4), & 0 \leq t \leq 1, \\ 9h^4(-1+3t)(-2+t)^4, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

$$200\tilde{\omega}_1(t) = \begin{cases} -h^5(-4+11t)(1+t)^4, & -1 \leq t \leq 0, \\ h^5(-1+2t)(4-38t^3+13t+19t^4+6t^2), & 0 \leq t \leq 1, \\ h^5(-7+11t)(-2+t)^4, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

2. Переход к интерполяционным базисным сплайнам шестого порядка аппроксимации. Найдены коэффициенты перехода от полученных фундаментальных базисных сплайнов к интерполяционным базисным сплайнам шестого порядка аппроксимации первой высоты. Например, фрагмент шаблона базисного сплайна шестого порядка аппроксимации первой высоты получаем так: $\tilde{\Omega}_0(t) = \tilde{\omega}_0(t)k_0(t)$, $0 < t < 1$, где $k_0(t) = 200t(1-2t^2+t^4)/((20t^2-95t^4-5t+50t^3+38t^5-4)h^4)$. Приведем шаблоны полученных базисных непрерывно дифференцируемых сплайнов шестого порядка аппроксимации первой высоты:

$$\tilde{\Omega}_0(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(8t+11t^2+3t^3-4)(1+t)^2, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1-2t^2+t^4, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{4}(t-5t^2+3t^3+1)(-2+t)^2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

$$\tilde{\Omega}_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}ht(4+t^2+4t)(1+t)^2, & -1 \leq t \leq 0, \\ ht(1-2t^2+t^4), & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{4}ht(1+t^2-2t)(-2+t)^2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Аналогично, с помощью другого найденного набора коэффициентов осуществляется переход от фундаментальных базисных сплайнов к сплайнам шестого порядка аппроксимации второй высоты $W_{j,i}$, $\text{supp } W_{j,i} = [X_{j-1}, X_{j+1}]$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01-01-00297, № 01-01-00245).

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Издательство Наука, 1980.
2. Бурова И. Г., Демьянович Ю. К. Минимльные сплайны и их приложения. СПб.: Издательство СПбГУ, 2010.
3. Бурова И. Г. О решении задачи Лагранжа сплайнами минимального дефекта // Методы вычислений. Вып. 23. СПб.: Издательство СПбГУ, 2010. С. 5–14.

Экстремальные функции кубатурных формул на многомерной сфере

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск;

vask@math.nsc.ru

На единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматриваются кубатурные формулы вида

$$\int_S \varphi dS \cong \sum_{j=1}^N c_j \varphi(\theta^{(j)}), \quad \theta^{(j)} \in S, \quad \sum_{j=1}^N c_j = \sigma_{n-1},$$

где σ_{n-1} — площадь S . Предполагается, что подынтегральные функции $\varphi = \varphi(\theta)$, где $\theta = x/r$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x|$, принадлежат пространству $X_2^r(S)$ соболевского типа на сфере S , [1]. Пространство $X_2^r(S)$ — это пополнение совокупности всех сферических полиномов φ по норме

$$\|\varphi | X_2^r(S)\| = \left\{ \left| \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int \varphi(\theta) d\theta \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{2r} \sum_{l=1}^{\sigma(k)} |a_{k,l}(\varphi)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Здесь $\lambda_{n,k} = k(n+k-2)$, $\sigma(k) = (n+2k-2) \frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!}$. Число r может быть и дробным, $r > (n-1)/4$. Величины $a_{k,l}(\varphi)$ — это коэффициенты Фурье в разложении φ по ортогональному базису из сферических гармоник.

Функционал погрешности

$$(l_N, \varphi) \equiv \int_S \varphi dS - \sum_{j=1}^N c_j \varphi(\theta^{(j)})$$

имеет в $X_2^r(S)$ экстремальную функцию $u_N(\theta)$, определяемую соотношениями [2]

$$\|l_N | X_2^r(S)^*\|^2 = (l_N, u_N) = \|u_N | X_2^r(S)\|^2.$$

В докладе предлагается формула общего вида экстремальных функций типа $u_N(\theta)$, а также устанавливается связь этих функций со сферическими натуральными сплайнами.

Для кубатурных формул на сфере с единственным узлом имеет место следующий результат [1]. Экстремальная функция $u_1(\theta) \equiv G_{\theta_0}(\theta)$ функционала погрешности $(I_1, \varphi) \equiv \int_S \varphi dS - \sigma_{n-1} \varphi(\theta^{(0)})$ представима в виде следующего абсолютно сходящегося ряда

$$G_{\theta_0}(\theta) = 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta_0).$$

Здесь $G_k^{(n)}(t)$ — полиномом Гегенбауэра, нормализованный условием $G_k^{(n)}(+1) = 1$.

В случае же $N > 1$ экстремальная функция функционала погрешности представляет собой выпуклую комбинацию функций того же вида, что и $G_{\theta_0}(\theta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васкевич В. Л. Константы и функции вложения пространств соболевского типа на единичной сфере // Доклады академии наук. 2010. Т. 433. № 4. С. 441-446.
2. Соболев С. Л., Васкевич В. Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

Расстояния и степени недостоверности на многозначных высказываниях экспертов

Викентьев А. А.¹, Викентьев Р. А.²

¹ *Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;*
vikent@math.nsc.ru

² *Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

В настоящее время появляется все больший интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний экспертов. Для задач распознавания на высказываниях надо определить расстояния, являющиеся метриками. В тезисах высказывания экспертов записываются в виде формул многозначной логики (например, Лукасевича). Для определенности значения истинности интерпретируем как степени ошибочности. Ясно, что различные высказывания экспертов (и соответствующие им формулы) несут в себе разное количество информации, а значит, возникает вопрос о ранжировании высказываний экспертов и сравнении их по информативности. Для решения этих задач введены и исследованы возможные расстояния на формулах и меры недостоверности формул. Результаты переносятся на многозначные логики первого порядка. Для разбиения объектов на кластеры вместо полиномов предлагается использовать сплайны. Все используемые здесь понятия и обозначения такие же, как в [1–5] или аналогичны им.

«Расстоянием» между формулами ϕ и ψ при $S(\phi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$ с использованием множества n -значных моделей $P(S(\Sigma))$ назовем

$$\rho_{S(\Sigma)}(\phi, \psi) = \frac{|\bigcup_{k=0}^{n-2} \text{Mod}_{S(\Sigma)}(\phi_{\frac{k}{n-1}} \wedge \psi_1)| + |\bigcup_{k=0}^{n-2} \text{Mod}_{S(\Sigma)}(\phi_1 \wedge \psi_{\frac{k}{n-1}})|}{n|S(\Sigma)|}.$$

Теорема 1 (свойства «расстояния»). *Для любых формул ϕ, ψ таких, что $S(\phi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$ верно*

- 1) $0 \leq \rho_{S(\Sigma)}(\phi, \psi) \leq 1$;
- 2) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi, \psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\psi, \phi)$;
- 3) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \phi \equiv \psi$;
- 4) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi, \psi) = 1 \Leftrightarrow \bigcup_{i=0}^{n-2} \bigcup_{k=0}^{n-2} (\text{Mod}(\phi)_{\frac{k}{n-1}} \sqcup \text{Mod}(\psi)_{\frac{i}{n-1}}) = P(S(\Sigma))$;
- 5) $\rho_{S(\Sigma)}(\phi, \psi) \leq \rho_{S(\Sigma)}(\phi, \chi) + \rho_{S(\Sigma)}(\chi, \psi)$;

6) Если $\phi^1 \equiv \phi^2$, то $\rho_{S(\Sigma)}(\phi^1, \psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\phi^2, \psi)$.

Теорема 2 (инвариантность расстояний при расширении). Для любых $S(\Sigma_0)$ и $S(\Sigma_1)$ таких, что $S(\phi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma_0) \subseteq S(\Sigma_1)$ верно

$$\rho_{S(\Sigma_0)}(\phi, \psi) = \rho_{S(\Sigma_1)}(\phi, \psi).$$

Мерой *недостоверности* $I_{S(\Sigma)}(\phi)$ для формулы из $\Phi(\Sigma) = \{\phi | S(\phi) \subset S(\Sigma)\}$ назовем

$$I_{S(\Sigma)}(\phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\phi_{\frac{i}{n-1}})|}{n|S(\Sigma)|},$$

где α_i монотонно не убывают, удовлетворяют условиям: $0 \leq \alpha_i \leq 1$; $\alpha_i + \alpha_{n-1-i} = 1$ для всех $i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$; и настраиваются под задачу.

Теорема 3 (свойства меры $I_{S(\Sigma)}$). Для любых $\phi, \psi \in \Phi(\Sigma)$ верно

- 1) $0 \leq I_{S(\Sigma)}(\phi) \leq 1$;
- 2) $I_{S(\Sigma)}(\phi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\phi) = 1$;
- 3) $I_{S(\Sigma)}(\phi \wedge \psi) \geq \max\{I_{S(\Sigma)}(\phi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
- 4) $I_{S(\Sigma)}(\phi \vee \psi) \leq \min\{I_{S(\Sigma)}(\phi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
- 5) $I_{S(\Sigma)}(\phi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\phi \wedge \psi) = I_{S(\Sigma)}(\phi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$;
- 6) $I_{S(\Sigma)}^3(\phi \wedge \psi) = (I_{S(\Sigma)}^3(\phi) + I_{S(\Sigma)}^3(\psi) + \rho_{S(\Sigma)}^3(\neg\phi, \neg\psi))/2$;
- 7) $I_{S(\Sigma)}^3(\phi \vee \psi) = (I_{S(\Sigma)}^3(\phi) + I_{S(\Sigma)}^3(\psi) - \rho_{S(\Sigma)}^3(\neg\phi, \neg\psi))/2$.

Доказаны также свойства расстояний и меры недостоверности для частного случая $n = 3$, похожие на случай $n = 2$. Подбор нужного значения n в конкретной задаче является частью процесса адаптации для введения расстояния и меры недостоверности. В случае $n = 3$ проведены исследования по следующим вопросам. При поиске логических закономерностей требуются расстояния между высказываниями экспертов в возникшей теории в текущий момент времени. Предложенные методы работают и в этом случае: будут применяться модели теории.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00113а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лбов Г. С., Старцева Н. Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.
2. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
3. Карпенко А. С. Логика Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000.
4. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. С-Пб.: Лань, 2004.
5. Загоруйко Н. Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.

Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности высоких порядков

Виноградов О. Л.¹, Жук В. В.²

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург; ¹olvin@math.spbu.ru, ²zhuk@math.spbu.ru

Далее C — пространство непрерывных 2π -периодических функций с равномерной нормой $\|\cdot\|$, P — полунорма, заданная на C , удовлетворяющая условиям: 1) $P(f(\cdot+h)) = P(f)$ для любых $f \in C$ и $h \in \mathbb{R}$, 2) существует такое $M \in \mathbb{R}$, что $P(f) \leq M\|f\|$ для всех $f \in C$. Пусть еще Φ — функционал, заданный на C , такой что $\Phi(f) \geq 0$, $\Phi(f+g) \leq \Phi(f) + \Phi(g)$ для любых $f, g \in C$; $C^{(r)}$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых функций из C ; символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Величины

$$m_r(\Phi)_P = \sup_{f \in C^{(r)}} \frac{\Phi(f)}{P(f^{(r)})}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

называют моментами функционала Φ . Полагаем

$$\nu_s = \sum_{l=0}^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} \frac{C_{2s}^{s-2l-1}}{C_{2s}^{2s}} \frac{8}{(2l+1)^2}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $f \in C$, $h > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $m_{2k}(\Phi)_P < +\infty$ при всех $k = 0, \dots, s$. Тогда

$$\Phi(f) \leq \left(\frac{1}{C_{2s}^s} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{m_{2k}(\Phi)_P}{h^{2k}} \nu_s^k + \frac{1}{4^s} \frac{m_{2s}(\Phi)_P}{h^{2s}} \nu_s^s \right) \omega_{2s}(f, h)_P.$$

Далее $E_n(f)_P$ и $E_{m,n}(f)_P$ — наилучшие приближения f по полунорме P соответственно тригонометрическими многочленами порядка не выше $n-1$ и сплайнами порядка m минимального дефекта по равноотстоящим узлам $\frac{k\pi}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$); индекс p указывает на то, что приближения и модули непрерывности берутся в пространстве L_p ;

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}}$$

— константы Фавара.

Применение теоремы 1 к наилучшим приближениям приводит к неравенствам типа Джексона.

Следствие 1. Пусть $f \in C$, $\alpha > 0$, $s, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$E_n(f)_P \leq \left(\frac{1}{C_{2s}^s} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\alpha\pi)^{2k}} \nu_s^k + \frac{1}{4^s} \frac{\mathcal{K}_{2s}}{(\alpha\pi)^{2s}} \nu_s^s \right) \omega_{2s} \left(f, \frac{\alpha\pi}{n} \right)_P.$$

Если $p \in [1, +\infty]$, то оценки верны для $f \in L_p$, $E_n(f)_p$ и $\omega_{2s} \left(f, \frac{\alpha\pi}{n} \right)_p$.

Следствие 2. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_p$, $\alpha > 0$, $s, n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2s - 1$. Тогда

$$E_{n,m}(f)_p \leq \left(\frac{1}{C_{2s}^s} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\alpha\pi)^{2k}} \nu_s^k + \frac{1}{4^s} \frac{\mathcal{K}_{2s}}{(\alpha\pi)^{2s}} \nu_s^s \right) \omega_{2s} \left(f, \frac{\alpha\pi}{n} \right)_p.$$

Оценки в следствиях 1 и 2 достигаются с помощью линейных методов приближения. Устанавливается аналог следствия 1 для приближений заданных на \mathbb{R} функций целыми функциями конечной степени. При $s \geq 2$ константы в следствиях 1 и 2 (исключая ряд случаев в пространстве L_2) наилучшие из известных.

В связи с предшествующими результатами укажем на работы [1–3].

Работа выполнена при поддержке ФЦП Минобрнауки РФ № 2010-1.1-111-128-033.

ЛИТЕРАТУРА

1. Foucart S., Kryakin Y., Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constructive approximation. 2009. V. 29. P. 157–179.
2. Виноградов О. Л., Жук В. В. Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 383. С. 5–32.
3. Виноградов О. Л., Жук В. В. Скорость убывания констант в неравенствах типа Джексона в зависимости от порядка модуля непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 383. С. 33–52.

Использование сплайнов в дискретно-стохастических численных алгоритмах

Войтишек А. В.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск; vav@osmf.sscs.ru*

1. Сплайны как «моделируемые» аппроксимационные базисы. В целом ряде дискретно-стохастических алгоритмов (см. [1], разд. 5.3) используются полиномиальные и кусочно-полиномиальные приближения функций вида

$$g(\mathbf{u}) \approx L_M g(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^M w_i \chi_i(\mathbf{u}), \quad (1)$$

на компактном множестве $U \subset R^d$. В формуле (1) $L_M g$ обозначает аппроксимацию функции g на сетке $V^{(M)} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M\}$. Базисные полиномиальные функции $\Xi^{(M)} = \{\chi_1, \dots, \chi_M\}$ и коэффициенты $W^{(M)} = \{w_1, \dots, w_M\}$ определенным образом связаны с узлами сетки $V^{(M)}$. В целом ряде задач требуется, чтобы кроме традиционных свойств аппроксимации и устойчивости приближение (1) обладало свойством «моделируемости» [1], состоящим в том, что для вероятностного распределения с плотностью $f(\mathbf{u}) = H L_M g(\mathbf{u})$ (здесь H – соответствующая нормирующая константа) можно построить эффективный численный алгоритм реализации выборочных значений. Наилучшим образом перечисленным свойствам удовлетворяет конечно-элементная *аппроксимация Стренга–Фикса* [2], базисные функции которой представляют собой произведения B -сплайнов. Идеи построения моделируемых приближений функций вида (1) развиты в работе [3].

2. Использование сплайнов в дискретно-стохастических алгоритмах численного интегрирования. Приближения вида (1) с базисными сплайн-функциями широко используются в модификациях, приводящих к уменьшению трудоемкости методов Монте-Карло, используемых для вычисления многократных интегралов [4]. Перечислим эти модификации: выборка по важности, выделение главной части, двусторонний геометрический метод, выборка по группам, метод симметризации, метод взвешенной равномерной выборки, метод Монте-Карло с поправочным множителем.

3. Использование сплайнов при построении функциональных оценок метода Монте-Карло. Приближение вида (1) используются при построении дискретно-стохастических алгоритмов приближения функций g , представленных в интегральной форме [1, 5]. Основными примерами таких функций являются: интеграл, зависящий от параметра, и решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Дискретно-стохастический алгоритм приближения таких функций включает введение сетки по параметру, оценку значений функции в узлах методом Монте-Карло и восполнение решения вида (1) по полученным значениям в узлах с использованием аппроксимационного базиса. Соответствующий базис должен обладать хорошими свойствами устойчивости. И здесь вполне естественным и эффективным является использование аппроксимации Стренга–Фикса из [2].

4. Дискретно-стохастические методы построения адаптивных сеток. При решении прикладных задач часто актуальной является возможность построения адаптивных сеток с последующей оценкой решения в узлах сетки и восполнением вида (1) решения в целом. При построении таких сеток весьма существенные преимущества имеют дискретно-стохастические методы, основанные на моделях *самообучения*. Новый подход к аналитическому описанию таких методов представлен в работе [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00035, 10-01-00040).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М: Изд. центр «Академия», 2006.
2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М: Наука, 1981.
3. Войтишек А. В., Бессмельцев М. В. Технологии построения моделируемых вероятностных плотностей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, №4 (в печати).
4. Войтишек А. В. Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.
5. Войтишек А. В. Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2007.
6. Войтишек А. В., Хмель Д. С. Аналитическое описание применения одномерной схемы Т.Кохонена для построения адаптивных сеток // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14, №2 (в печати).

Исследование аппроксимативных свойств интерполяционных сплайнов

Волков Ю. С.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
volkov@math.nsc.ru

Сплайны (кусочно многочленные функции) были введены в рассмотрение в 1946 году И.Шёнбергом [1]. Однако только в 1957 году было установлено, что среди всех интерполирующих заданные значения гладких функций именно они минимизируют некий функционал, близкий к функционалу энергии изгибаемой рейки [2]. Данное обстоятельство послужило предпосылкой возможного практического использования сплайнов для математического описания кривых и поверхностей.

С другой стороны, примерно в это же время начала появляться вычислительная техника и оборудование с программным управлением. Возникла необходимость использования их в промышленности и автоматизации производства.

В качестве ответа на запрос практики об автоматизации авиационного производства и проектирования Ю.С.Завьялов и обратился к сплайнам (первым в Советском Союзе), правильно оценив их возможности. Конечно же для полноценного и эффективного практического использования такого нового объекта как сплайны потребовалось их всестороннее теоретическое изучение, которое и началось в Институте математики СО АН СССР под руководством Ю.С.Завьялова. В первую очередь в соответствии с практическими нуждами началось исследование аппроксимативных свойств.

Именно в это время и по тем же причинам изучение сплайнов и их аппроксимативных свойств началось во всём мире. В 1963 году на конференции в Обервольфахе [3, р.187] основателем сплайнов И.Шёнбергом был поставлен вопрос исследования сходимости процесса интерполяции.

Уже в одной из своих первых работ о сплайнах Ю.С.Завьялов [4] получил результаты о сходимости процессов интерполяции кубических сплайнов, которые на Западе были повторены через 3 года.

В докладе рассматривается вклад Ю.С.Завьялова и его коллектива в изучение интерполяционных сплайнов. Внимание будет уделено таким аспектам: сходимость процесса интерполяции как для самих сплайнов, так и для производных; порядок сходимости; константы в оценках погрешности интерполяции.

Часть результатов в этом направлении, полученная в школе Ю.С.Завьялова, систематизирована в монографии [5], которая и сегодня является одной из наиболее цитируемых монографий по сплайнам в нашей стране.

В докладе акцент будет сделан на окончательные результаты и последние достижения по указанным вопросам, а также выделены результаты коллег Ю.С.Завьялова.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов Интеграционных проектов СО РАН (проект 2009-81), СО РАН и УрО РАН (проект 2009-14) и ОМН РАН (проект 2009-1.3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schoenberg I. J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Parts A and B // Quar. Appl. Math. 1946. Vol. 4. P. 45–99, 112–141.
2. Holladay J. C. A smoothest curve approximation // Math. Tables Aids Comput. 1957. Vol. 11, n. 60. P. 233–243.
3. On Approximation Theory: Proc. conf. Oberwolfach, 1963 / Eds. P. L. Butzer, J. Korevaar. Basel: Birkhäuser, 1964.
4. Завьялов Ю. С. Интерполирование кубическими многозвенниками // Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. С. 23–73.
5. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

О локальной аппроксимации кубическими сплайнами

Волков Ю. С.¹, Стрелкова Е. В.², Шевалдин В. Т.²

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
volkov@math.nsc.ru

²Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
Valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Пусть $B_k(x)$ — нормализованный B -сплайн степени k с носителем $[0, (k+1)h]$ ($h > 0$) и узлами $0, h, 2h, \dots, (k+1)h$. Любой B -сплайн степени k по сетке с узлами $\{sh\}_{s \in \mathbb{Z}}$ может быть получен из $B_k(x)$ путём сдвига на несколько интервалов сетки [1]. Считаем, что на равномерной сетке, смещённой на α ($0 \leq \alpha < 1$) относительно $\{sh\}_{s \in \mathbb{Z}}$, известны значения $\{y_{j+\alpha}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ некоторой функции $f(x): f((j+\alpha)h) = y_{j+\alpha}$ ($j \in \mathbb{Z}$).

Рассматривается аппроксимация функции $f(x)$ вида

$$S_k(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_k(x - jh),$$

где $I_j = \sum_{m \in M} c_m y_{j+m+\alpha}$, с коэффициентами c_m ($m \in M$), M — некоторое множество целых чисел. Ясно, что если речь идёт о локальной аппроксимации, то множество M должно содержать небольшое количество индексов. Например, хорошо известны простейшие формулы локальной аппроксимации для одноэлементного множества M с $I_j = y_{j+[(k+1)/2]}$. Рассматриваемая задача достаточно подробно изучалась в случае $\alpha = 0$, в частности, при $M = \{1, \dots, k\}$ найдены значения для коэффициентов c_m , обеспечивающие точность аппроксиманта $S_k(f, x)$ на многочленах k -степени [1], [2]. В кубическом случае ($k = 3$) задача рассматривалась для $\alpha = 1/2$ [3].

Пусть $\Delta^n y_{j+\alpha} = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} C_n^s y_{j+s+\alpha}$ — конечная разность порядка n заданных значений функции с шагом h (здесь C_n^s — биномиальные коэффициенты), и обозначим $m_1 = \min M$, $m_2 = \max M$.

Теорема 1. Пусть $c_m \geq 0$ ($m \in M$). Сплайн $S_k(f, x)$ степени k наследует свойства k -монотонности исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}$, а именно
 1) если $y_{j+\alpha} \geq 0$ ($j = m_1 - k + l, \dots, m_2 + l$), то $S_k(f, x) \geq 0$ при $x \in [lh, (l+1)h]$;

2) если $\Delta^n y_{j+\alpha} \geq 0$ ($j = m_1 - k + l, \dots, m_2 + l - n$), то $S_k^{(n)}(f, x) \geq 0$ при $x \in [lh, (l+1)h]$.

Далее рассмотрение ведётся для кубических сплайнов ($k = 3$). Пусть $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Теорема 2. Сплайн $S_3(f, x)$ восстанавливает многочлены до n -й степени тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства

1) если $n = 0$, то $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$;

2) если $n = 1$, то $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1, \\ 2c_1 + c_2 - c_4 = \alpha; \end{cases}$

3) если $n = 2$, то $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1, \\ 2c_1 + c_2 - c_4 = \alpha, \\ 26c_1 + 8c_2 + 2c_3 + 8c_4 = 6\alpha^2; \end{cases}$

4) если $n = 3$, то $c_1 = (\alpha^3 - 2\alpha)/6$, $c_2 = (-3\alpha^3 + 3\alpha^2 + 9\alpha - 1)/6$, $c_3 = (3\alpha^3 - 6\alpha^2 - 6\alpha + 8)/6$, $c_4 = (-\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha - 1)/6$.

Отметим, что для при $\alpha = 0$ получаем хорошо известные формулы, в которых $c_1 = 0$, $c_2 = -1/6$, $c_3 = 4/3$, $c_4 = -1/6$ [1], а при $\alpha = 1/2$ — формулы из работы [3]: $c_1 = c_4 = -7/48$, $c_2 = c_3 = 31/48$.

Исследована задача о зависимости величины погрешности приближения достаточно гладкой функции $f(x)$ локальным сплайном $S_3(f, x)$ от выбора смещения исходных данных, т.е. от величины параметра α . Показано, что наилучшая точность приближения аппроксимируемой функции $f(x)$ сплайном $S_3(f, x)$ достигается при значении параметра $\alpha = 0$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов совместных Интеграционных проектов СО РАН (проект 2009-14) и УрО РАН (проект 09-С-1-1007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. Luche T., Schumaker L. L. Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. V. 15, n. 4. P. 294–325.
3. Шевалдина Е. В. Наследование свойств k -монотонности при аппроксимации локальными кубическими сплайнами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 106–110.

Сплаины в инженерной геометрии

Воронова Л. Г., Скороспелов В. А., Турук П. А.

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;
vskrsp@math.nsc.ru*

Юрий Семенович Завьялов уделял большое внимание прикладным аспектам теории сплайн-функций. Первый опыт внедрения научных разработок в производство был получен в результате совместных работ с Новосибирским авиационным заводом (НАПО) им. В.П.Чкалова по автоматизации плазово-шаблонных работ. Реализованная в дальнейшем методика моделирования сплайнами теоретических обводов самолета позволила автоматизировать различные конструкторско-технологические работы при подготовке производства, включая расчет управляющих программ для оборудования с ЧПУ. В частности, впервые в отрасли на НАПО были освоены многокоординатные станки с ЧПУ. В 1981 году эти работы были удостоены премии Совета Министров СССР.

В 1972 г. по инициативе Юрия Семеновича начались совместные работы с Ленинградским металлическим заводом по автоматизации проектирования и изготовления рабочих колес гидротурбин и питательных насосов, которые успешно продолжают и по сей день. На начальной стадии сотрудничества были разработаны методики математического моделирования с помощью сплайнов поверхностей элементов проточного тракта этих объектов и затем на их основе осуществлена автоматизация проектно-конструкторских и технологических работ по проектированию и подготовке их производства. По мере оснащения завода мощной вычислительной техникой появилась возможность внедрить в практику проектирования методы, основанные на численном моделировании течений. Основная роль сплайнов в этом подходе — геометрическая поддержка: геометрическое моделирование, генерация расчетных сеток, генерация множества допустимых форм проектируемого объекта для выбора оптимального.

Кроме приведенных, Юрий Семенович сумел наладить контакты и с другими областями промышленности: судостроение (г. Феодосия, изготовление элементов подводных крыльев, г. Ленинград, изготовление циркуляционных насосов), авиационное двигателестроение (г. Уфа,

проектирование и изготовление лопаток ГТД, г. Новосибирск, изготовление лопастей воздушных винтов), шахтное оборудование (г. Томск, изготовление лопаток вентиляторов), легкая промышленность (г. Новосибирск, лекала для раскроя одежды и манекены), медицинское оборудование (г. Москва, проектирование и изготовление световых отражателей). Все эти отрасли объединяет та особенность, что их объекты имеют сложные пространственные обводы и поэтому применение аппарата сплайн-функций для их математического представления весьма эффективно. В процессе совместной деятельности с предприятиями перечисленных отраслей был создан большой объем программного материала и естественно возникла необходимость его систематизирования. В результате обсуждения этого вопроса с Юрием Семеновичем были приняты следующие принципы подхода к решению этой проблемы:

- создаваемая система должна быть достаточно универсальной в том смысле, что может быть адаптирована для решения задач конкретной предметной области. Особенность обеспечения этого свойства;
- наличие достаточно простого и удобного языка общения пользователя с проблемно-ориентированной версией системы;
- наличие базы данных и средств управления ею, обеспечивающие долговременное хранение данных и оперативный доступ к ним;
- наличие программных средств графической поддержки;
- возможность выполнения расчетов как в диалоговом режиме, так и в режиме исполнения заранее подготовленного задания.

В соответствии с перечисленными принципами была создана программная система ASTRA, которая была затем адаптирована для:

- автоматизации конструкторско-технологических работ при подготовке производства в авиастроении (система RISK, внедрена на НАПО);
- автоматизации проектирования и изготовления элементов проточной части гидротурбин (система ASTRAL, внедрена на ЛМЗ).

Основные результаты по использованию сплайнов в инженерной геометрии опубликованы в [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скорospelов В. А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
2. Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н., Скорospelов В. А., Шаров С. В. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. 202 с.

Сведение краевой задачи для волнового уравнения к краевой задаче для симметрической гиперболической системы с диссипативным граничным условием

Гордиенко В. М.

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск;
gordienk@math.nsc.ru

Рассматривается краевая задача для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, & t > 0, \quad x > 0, \\ pu_t + qu_x + ru_y + su_z = 0, & x = 0, \\ u = \varphi, \quad u_t = \psi, & t = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где p, q, r, s — вещественные числа или гладкие функции; $p \geq 0$.

Ставится вопрос о возможности сведения задачи (1) к краевой задаче для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием. Такое сведение позволит обосновать корректность краевой задачи (1), а также предложить численный метод расчёта. Указанное сведение возможно тогда и только тогда, когда для коэффициентов граничного условия выполнено:

$$p > 0, \quad r^2 + s^2 < p^2, \quad q < 0. \quad (2)$$

Для осуществления этого сведения требуется найти вектор $[k, l, m, n]$, лежащий внутри верхней половины прямого кругового конуса:

$$k > 0, \quad k^2 - l^2 - m^2 - n^2 > 0$$

и такой что:

$$\left\langle \begin{bmatrix} l & k & 0 & 0 \\ k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle > 0, \quad (3)$$

$$\left. \vphantom{\left\langle \begin{bmatrix} l & k & 0 & 0 \\ k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle} \right|_{pu_0 + qu_1 + ru_2 + su_3 = 0}$$

$\forall u_0, u_1, u_2, u_3; u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$. Символом $\langle \rangle$ здесь обозначено скалярное произведение.

Обозначим через \mathcal{Q} множество векторов $[k, l, m, n]$, при которых выполняется условия (3). Основной целью работы является — переформулировка условия (3) и описание множества векторов \mathcal{Q} в наглядных геометрических терминах.

Оказывается, множество \mathcal{Q} представляет собой внутренность полы конуса второго порядка и задаётся условиями

$$\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} \right\rangle > 0; \quad l < 0,$$

$$\text{где } Q = (p^2 - r^2 - s^2) \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ -q \\ -r \\ -s \end{bmatrix} [p \quad -q \quad -r \quad -s].$$

Если выполнены условия (2), то конус \mathcal{Q} расположен внутри верхней полы прямого кругового конуса. Для матрицы Q можно в явном виде вычислить собственные векторы и собственные функции, что и позволяет полностью описать форму и расположение конуса \mathcal{Q} .

Аппроксимация сложных контуров мультисплайнами

Горелов Д. Н.

*Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева
СО РАН, Омск; gorelov@ofim.oscsbras.ru*

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Пусть в точках $x_{*j} \in [a, b]$, $j = 1, \dots, M$, образующих дискретное множество, функция $f(x)$ и ее первые или вторые производные могут быть неограниченными. При этом в случае неограниченности первой производной в рассматриваемой точке должна быть ограничена сама функция, а при неограниченности второй производной — ограничена как функция, так и первая ее производная. Предположим, что нам известна асимптотика функции $f(x)$ в малой окрестности каждой точки x_{*j} в виде

$$f(x) \sim \Phi_j(x) = |x - x_{*j}|^{\alpha_j}, \quad 0 < |\alpha_j| < \infty, \quad |x - x_{*j}| \ll 1, \quad j = 1, \dots, M.$$

Вне точек x_{*j} будем полагать, что функция $f(x)$ кусочно непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными. Контур, задаваемый уравнением $y = f(x)$, будем называть сложным. Введем мультифункцию $\Phi(x)$, равную произведению всех $\Phi_j(x)$. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \Phi(x)F(x), \quad x \in [a, b]; \quad \Phi(x) = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\dots\Phi_M(x).$$

По определению, функция $F(x)$ кусочно непрерывная и ограниченная вместе со своими первыми и вторыми производными.

Поставим задачу об аппроксимации исходной функции $f(x)$ сплайнами. Непосредственная аппроксимация функции $f(x)$ известными сплайнами невозможна из-за возможной неограниченности самой функции и ее производных. Но для функции $F(x)$ можно построить интерполяционные сплайны $S(x)$ различного вида, например, кубический, полагая известной таблицу чисел (x_i, F_i) , $i = 0, \dots, N$, где $F_i = F(x_i)$, а точки x_i образуют упорядоченную последовательность $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Тогда при достаточной гладкости $F(x)$ получим, что

$$|F(x) - S(x)| = O(h^k), \quad k \geq 2, \quad h = \max_i |x_{i+1} - x_i|, \quad i = 0, \dots, N.$$

В результате функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно аппроксимировать сплайном вида $\Phi(x)S(x)$, для которого

$$|f(x) - \Phi(x)S(x)| = \Phi(x)O(h^k), \quad x \in [a, b].$$

Интерполяционную функцию $\Phi(x)S(x)$ будем называть мульти-сплайном. Он определяется произведением мультифункции $\Phi(x)$, учитывающей особенности исходной функции $f(x)$, и сплайна $S(x)$, аппроксимирующего функцию $F(x)$, не имеющую особенностей в рассматриваемом интервале $[a, b]$. Соответствующая конструкция была апробирована в работах [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н., Редреев Д. Г. Применение кубических сплайнов для аналитического представления замкнутого контура, заданного таблицей координат // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 2. С. 26–31.
2. Горелов Д. Н., Редреев Д. Г. Метод криволинейных панелей для решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши по замкнутому контуру // Вычислительные технологии. 2009. Т. 14. № 1. С. 52–61.

Вложенные пространства сплайнов и их всплесковое разложение

Демьянович Ю. К.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург; Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu

При построении всплесковых (вэйвлетных) разложений используется вложенность пространств на измельчающихся сетках, которая следует из кратного-масштабных соотношений (для равномерной сетки) или их обобщения — калибровочных соотношений (пригодных и для неравномерной сетки). Для эффективного всплескового разложения система вложенных пространств должна обладать аппроксимативными свойствами, асимптотически оптимальными по N -поперечнику стандартных компактов. Известно, что обоими этими свойствами обладают пространства полиномиальных сплайнов минимального дефекта (см. [1-3]). Упомянутые аппроксимативные свойства в общем (не обязательно полиномиальном) случае получаются, если при построении упомянутых пространств исходить из аппроксимационных соотношений (см. [4]); при этом центральной трудностью оказывается построение вложенных пространств при сохранении упомянутых соотношений. В данном сообщении предлагается один из возможных путей преодоления этой трудности в общей ситуации пространств сплайнов, заданных на дифференцируемом многообразии.

На гладком n -мерном (вообще говоря, некомпактном) многообразии \mathcal{M} рассматривается $m + 1$ -накрывающее покрытие $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_j \mid j \in \mathcal{J}\}$, его дробление $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_i \mid i \in \mathcal{K}\}$ на клетки \mathfrak{C}_i и его полное оснащение множеством A векторов \mathbf{a}_j из $m + 1$ -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^{m+1} , $A = \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ (таким образом, для всех $i \in \mathcal{K}$ система векторов $A_{(i)} = \{\mathbf{a}_j \mid j \in \mathcal{J}, \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{C}_i\}$ является базисом в \mathbb{R}^{m+1}); здесь \mathcal{J} и \mathcal{K} — упорядоченные (конечные или счетные) множества индексов.

Для вектор-функции (столбца) $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами из некоторого линейного пространства $\mathbb{X}(\mathcal{M})$ функций, заданных на \mathcal{M} , при $t \in \cup_{k \in \mathcal{K}} \mathfrak{C}_k$ определяется вектор-функция (столбец) $\omega(t) = (\omega_j(t))_{j \in \mathcal{J}}$ из аппроксимационных соотношений $A\omega(t) = \varphi(t)$, $\omega_j(t) = 0 \forall t \notin \mathfrak{S}_j$; здесь обозначение A используется также для матрицы, состоящей из вектор-столбцов \mathbf{a}_j , $A = (\mathbf{a}_j)_{j \in \mathcal{J}}$. Рассмотрим линейное пространство

$\mathbb{S}_m = \mathbb{S}(\mathfrak{S}, A, \varphi) = Cl_p\{\tilde{u} \mid \tilde{u}(t) = \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j \omega_j(t) \quad \forall t \in \mathfrak{M} \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$
(символ Cl_p означает замыкание в топологии поточечной сходимости).
Если компоненты вектор-функции φ линейно независимы на каждой клетке \mathfrak{C}_k , то функции $\{\omega_j\}$ линейно независимы.

Рассмотрим еще покрытие $\overline{\mathfrak{S}}^{(k)} = \{\overline{\mathfrak{S}}_j \mid j \in \overline{\mathcal{J}}\}$, являющееся элементарным измельчением покрытия \mathfrak{S} (с центром в \mathfrak{C}_k), а также его полное оснащение $\overline{A}^{(k)}$, являющееся элементарным продолжением оснащения A (таких продолжений имеется бесконечное множество). Аналогично предыдущему найдем вектор-функцию $\overline{\omega}(t) = (\overline{\omega}_j(t))_{j \in \overline{\mathcal{J}}}$ из соотношений $\overline{A}^{(k)} \overline{\omega}(t) = \varphi(t)$, $\overline{\omega}_j(t) = 0 \quad \forall t \notin \overline{\mathfrak{S}}_j$.

Положим $\overline{\mathbb{S}}_m = \mathbb{S}_m(\overline{\mathfrak{S}}^{(k)}, \overline{A}^{(k)}, \varphi)$. Если в упомянутых условиях для каждого $j \in \{j'' \mid \mathfrak{S}_{j''} \not\subseteq \mathfrak{C}_k\}$ найдется $j' \in \overline{\mathcal{J}}$ так, что $\overline{\omega}_j = \omega_{j'}$, то $\mathbb{S}_m \subset \overline{\mathbb{S}}_m$.

Пусть $\{g_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ — система функционалов, биортогональная к системе функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathcal{J}}$. Предполагая, что существуют линейные продолжения функционалов g_i на пространство $\overline{\mathbb{S}}_m$ такие, что для любого $j \in \overline{\mathcal{J}}$ количество ненулевых элементов во множестве $\{\langle g_i, \overline{\omega}_j \rangle\}_{i \in \mathcal{J}}$ конечно, определим линейную операцию проектирования \mathcal{P} пространства $\overline{\mathbb{S}}_m$ на \mathbb{S}_m равенством $\mathcal{P}\overline{u} = \sum_{i \in \mathcal{J}} \langle g_i, \overline{u} \rangle \omega_i \quad \forall \overline{u} \in \overline{\mathbb{S}}_m$ и введем линейное пространство $\mathbb{W} = (\mathcal{I} - \mathcal{P})\overline{\mathbb{S}}_m$, где \mathcal{I} — тождественная операция. Представление $\overline{\mathbb{S}}_m = \mathbb{S}_m \dot{+} \mathbb{W}$ дает всплесковое разложение пространства $\overline{\mathbb{S}}_m$; первое слагаемое в этом разложении называется *основным* пространством, а второе — *всплесковым* пространством.

Предлагаемый подход к построению вложенных пространств и всплесковых разложений иллюстрируется в случаях, когда $\mathfrak{M} = (\alpha, \beta)$ — конечный или бесконечный интервал вещественной оси, $\mathfrak{M} = [a, b]$ — отрезок вещественной оси, а также в случаях, когда \mathfrak{M} плоскость, сфера и тор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. В., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва: Наука, 1976.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980.
3. Малоземов В. Н., Певный А. В. Полиномиальные сплайны. Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1986.
4. Демьянович Ю. К. Аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 1994.

Шкала неулучшаемых оценок погрешности интерполяционных сплайнов произвольного порядка на множествах суперсходимости

Дольников В. Л., Стрелков Н. А.

*Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль; strelkov@uniyar.ac.ru*

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $S_n(x) = S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$ — интерполяционный сплайн порядка n класса $C^{n-1}(\mathbb{R})$, совпадающий с $f \in L_p^{n+2}(\mathbb{R})$ в узлах равномерной сетки $\mathbb{R}_h = \{kh : k \in \mathbb{Z}\}$, причем областями полиномиальности сплайна S_n являются интервалы $(kh + (n-1)h/2, kh + (n+1)h/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рассматриваются две задачи: 1) полное описание множеств суперсходимости, на которых m -я производная погрешности имеет правильный порядок $O(h^{n+2-m-1/p})$; 2) нахождение точных констант в равномерных (по множествам суперсходимости) оценках погрешности этих производных.

Пусть

$$Q_N(x, z) = \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N z^k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{N+1}{j} (x+k-j)^N, \quad N \leq n+1,$$

$$R_n(z) = zQ_n(1-d_n, z),$$

где $d_n = (n+1)/2 - [(n+1)/2]$. Степень полинома R_n равна $2[n/2] + 1$, а его нули z_r ($r = -[n/2], \dots, [n/2]$) таковы, что $z_0=0$, $z_{-r} = 1/z_r$ для всех $r=1, \dots, [n/2]$, где $z_1, \dots, z_{[n/2]}$ — различные точки интервала $(-1, 0)$.

Наконец, пусть определенная в полосе $[-d_n, 1-d_n] \times \mathbb{R}$ функция $G_n(\cdot, \cdot)$ имеет следующий вид:

если $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [-d_n, 1-d_n]$, $t \in (0, 1)$, то

$$G_n(x, k+t) = - \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k} Q_{n+1}(t, z_r) Q_n(1-d_n-x, z_r)}{(1-z_r)^{n+2} R'_n(z_r)},$$

если $t+k < x$;

$$G_n(x, k+t) = (-1)^{n+1} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n} Q_{n+1}(1-t, z_r) Q_n(d_n+x, z_r)}{(1-z_r)^{n+2} R'_n(z_r)},$$

если $t + k > x$.

Теорема. Пусть $p \in [1, \infty]$, $\|f^{(n+2)}\|_p < \infty$, а n , m и α удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $n = 2r, r \geq 1, m = 0, \alpha = 1/2$;
- 2) $n \geq 1, m = n, \alpha = n/2 - [n/2]$;
- 3) $n \geq 3, m = n - 2k, 1 \leq k \leq [(n-1)/2], \alpha = 0$ или $\alpha = 1/2$;
- 4) $n \geq 2, m = n - 2k + 1, 1 \leq k \leq [n/2], \alpha = n/2 - [n/2] \pm \mu_k$, где $\mu_k \in (0, 1/2)$ таковы, что $1/2 \pm \mu_k$ — корни многочлена Бернулли B_{2k} .

Тогда

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |(S_n - f)^{(m)}((\alpha + i)h)| \leq D_{m,\alpha,p,n} h^{n+2-m-1/p} \|f^{(n+2)}\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где

$$D_{m,\alpha,p,n} = \|D_1^m G_n(\alpha, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Константы $D_{m,\alpha,p,n}$ уменьшить нельзя.

Производные $D_1^m G_n$, от которых зависят константы $D_{m,\alpha,p,n}$, допускают следующие представления:

если $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [-d_n, 1 - d_n]$, $t \in (0, 1)$, $m = 0, \dots, n$, то

$$|D_1^m G_n(x, k+t)| = \left| \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k} Q_{n+1}(t, z_r) Q_{n-m}(1 - d_n - x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+2-m} R'_n(z_r)} \right|,$$

если $t + k < x$;

$$|D_1^m G_n(x, k+t)| = \left| \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n} Q_{n+1}(1-t, z_r) Q_{n-m}(d_n + x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+2-m} R'_n(z_r)} \right|,$$

если $t + k > x$.

Аналог квадратического сплайна для функций с погранслошной составляющей

Задорин А. И.

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО
РАН, Омск; zadorin@ofim.oscsbras.ru

В работе исследуются формулы сплайн-интерполяции функций с погранслошной составляющей:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $p(x)$ — регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ — известная погранслошная составляющая, имеющая большие производные на исходном интервале; постоянная γ не задана. Представление (1) справедливо для решений сингулярно-возмущенных краевых задач. Известно, что в случае больших градиентов интерполируемой функции и равномерной сетки погрешность формул полиномиальной сплайн-интерполяции может быть порядка $O(1)$.

В [1] нами строились сплайн-интерполяционные формулы на равномерной сетке, первого и второго порядка точности, независимо от градиентов составляющей $\Phi(x)$. Формулы строились так, чтобы они были точными на составляющей $\Phi(x)$. Производные таких интерполянтов терпели разрыв на границе соседних интервалов.

Построим непрерывно-дифференцируемый интерполянт второго порядка точности. Для этого на каждом интервале $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$, $n = 1, \dots, N$ будем строить интерполянт $u_\Phi(x)$ в виде:

$$u_\Phi(x) = a_n + b_n x + c_n \Phi(x).$$

Потребуем выполнения условий интерполяции во всех узлах сетки и условий непрерывности первой производной во внутренних узлах сетки:

$$\begin{aligned} u_\Phi(x_n) &= u_n = u(x_n), \quad n = 0, \dots, N; \\ u'_\Phi(x_n - 0) &= u'_\Phi(x_n + 0), \quad n = 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$u_\Phi(x) = u_n + M_{n-1}(x - x_n) + \left[u_n - u_{n-1} - M_{n-1}h \right] \times$$

$$\times \frac{\Phi(x) - \Phi_n - \Phi'_{n-1}(x - x_n)}{\Phi_n - \Phi_{n-1} - \Phi'_{n-1}h}, \quad x \in \Delta_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (2)$$

где постоянные $\{M_n\}$ связаны рекуррентным соотношением:

$$\Theta_n M_n + (1 - \Theta_n) M_{n-1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad M_0 = u'(0),$$

$$\Theta_n = [(\Phi_n - \Phi_{n-1})/h - \Phi'_{n-1}] / (\Phi'_n - \Phi'_{n-1}).$$

Отметим, что сплайн (2) будет квадратическим при задании $\Phi(x) = x^2$.

Лемма 1. Пусть $\Theta_n \geq 1/2 + \eta$, $\eta > 0$. Тогда для некоторой постоянной C , не зависящей от функции $\Phi(x)$ и ее производных, выполнится:

$$|u(x) - u_\Phi(x)| \leq C \max_s |p''(s)| h^2, \quad x \in [0, 1].$$

Лемма 2. Пусть при всех $x \in (x_{n-1}, x_n)$

$$\Phi''(x) > 0, \quad \Phi'''(x) < 0 \quad \text{или} \quad \Phi''(x) < 0, \quad \Phi'''(x) > 0.$$

Тогда $\Theta_n > 1/2$.

В случае, когда составляющая $\Phi(x)$ соответствует экспоненциальному пограничному слою, $\Phi(x) = \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x)$, где $a_0 > 0$, положительный параметр ε может быть близким к нулю. В этом случае выполнены условия лемм 1 и 2.

Результаты численных экспериментов, проведенных в случае экспоненциального погранслоя, подтверждают второй порядок точности построенного интерполянта (2), равномерно по параметру ε .

Отметим, что построенная в [1] формула равномерно точной сплайн-интерполяции применялась в [2] при разработке двухсеточного метода решения краевой задачи для нелинейного сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00726).

ЛИТЕРАТУРА

1. Задорин А.И., Задорин Н.А. Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 2. С. 221–233.
2. Vulkov L.G., Zadorin A.I. Two-Grid Algorithms for an ordinary second order equation with exponential boundary layer in the solution // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. 2010. V. 7, № 3. P. 580-592.

Об алгоритме склейки кусочно-полиномиальных функций

Иродова И. П.

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль; IrinaIrodova@gmail.com

Пусть на кубе $Q_0 = [0, 1]^d$ задана функция $f \in L_p(Q_0)$ и для этой функции найдены кусочно-полиномиальные приближения. Требуется построить сплайн дефекта 1, который дает тот же порядок приближения, что и кусочно-полиномиальная функция.

Существуют разные подходы к решению этой задачи. Ю.А.Брудный в [1] предложил алгоритм склейки кусочно-полиномиальных функций для построения сплайна в одномерном случае. Другой подход, использующий квазиинтерполяционный оператор, предложен в статье К. де Бора [2].

В данной статье для построения сплайна будут использоваться специальные диадические разбиения. Этот алгоритм является обобщением алгоритма, предложенного Ю.А. Брудным. Отметим, что алгоритм можно использовать и для приближения в пространстве Никольского-Бесова $B_p^{\lambda\theta}$.

Пусть P_k — пространство многочленов степени не выше $k - 1$ по каждой переменной. Через $E_k(f, Q)_p$ обозначим наилучшее приближение функции f многочленами из P_k в $L_p(Q)$, $Q \subset Q_0$. Далее, пусть F — разбиение куба Q_0 . Тогда

$$e_k(f, F)_p := \left(\sum_{Q \in F} E_k(f, Q)_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Введем теперь понятие специальных диадических разбиений.

Пусть x — вершина куба Q_0 . От Q_0 перейдем к кубу Q_x , который получается гомотетией Q_0 относительно вершины x с коэффициентом 3. Куб Q_x разделим на 2^{nd} равных кубов, а затем возьмем пересечение этих кубов с кубом Q_0 . Получившееся разбиение Q_0 на параллелепипеды обозначим $F_n(x)$.

Через $P_k(\Pi)$ будем обозначать пространство кусочно-полиномиальных функций, построенных по разбиению Π , а через $S_k(\Pi)$ — пространство сплайнов степени не выше $k - 1$, гладкости $k - 2$ по каждой переменной, построенных по разбиению Π .

Наконец, символом Π_{kn} обозначим разбиение Q_0 на равные кубы с длиной ребра $1/((k - 1)2^n)$.

Теорема. Для функции f из $L_p(Q_0)$, $0 < p \leq \infty$ и любого натурального n найдется сплайн $s_n \in S_k(\Pi_{kn})$, $k > 1$ такой, что

$$\|f - s_n\|_p \leq c \cdot \sum e_k(f, F_n(x))_p;$$

здесь суммирование идет по всем 2^d вершинам куба Q_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Брудный Ю. А. Кусочно-полиномиальная аппроксимация и локальные приближения // ДАН СССР. 1971. Т. 201, вып. 1. С. 16–18.
2. De Boor C. The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory // Approximation Theory: Proc. Intern. Symp. / Ed. G.C.Lorentz. New York – London: Academic Press, 1973. P. 266–276.

Ю. С. Завьялов и развитие аэрокосмических исследований (1970-1995 г.г.)

Исаев В. К.

*Центральный аэрогидродинамический институт
им. профессора Н.Е. Жуковского, Москва; visae@mail.ru*

В докладе предполагается осветить некоторые аспекты деятельности Ю.С. Завьялова, которые оказали значительное влияние на внедрение сплайновых методов в аэрокосмическую науку и промышленность.

1. Ю.С. Завьялов — основоположник и глава школы теории сплайнов (Новосибирск – Москва – Жуковский). Доклад Ю.С. Завьялова на семинаре ЦАГИ под руководством А.А. Дородницына.

2. Основные направления развития теории и приложений сплайнов в ЦАГИ (сглаживающие и сглаживающие иррациональные сплайны, сплайны Понтрягина, сплайны Чебышева, локальные сплайны и регуляризация их дифференциальных характеристик [1–10]).

3. Основные этапы развития автоматизированной системы изготовления аэродинамических моделей (АСИМ, АСИМ+) в ЦАГИ (1973–1992 г.г. [7–8]).

4. Группа «Геометрия САПР ЛА» секции «САПР ЛА» Минавиапрома (под руководством Г.С. Бюшгенса и Л.М. Шкадова и ее роль в развитии информационных технологий в авиапромышленности. К истории отдела 48 ЦАГИ.

5. Роль семинаров Ю.С. Завьялова в развитии теории и приложений сплайнов на отечественных предприятиях аэрокосмической отрасли. Ю.С. Завьялов — руководитель, координатор, редактор, оппонент.

6. О работах ЦАГИ (под руководством Г.П. Свищева, Г.С. Бюшгенса и В.П. Ситникова), МАИ (Ю.А. Рыжов, С.В. Скородумов), НИИТ (П.Н. Белянин, О.С. Сироткин), Института автоматики и электрометрии (Ю.Е. Нестерихин) и Института математики СО АН СССР (Ю.С. Завьялов), Витебского технологического института (В.И. Горюшкин, Д.Н. Свирский) и предприятий Минстанкопрома по созданию отечественных технологических систем нового поколения, в том числе, быстрого прототипирования [9–10].

7. О чертах личности Ю.С. Завьялова — выдающегося советского ученого и патриота России.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исаев В. К. Принцип максимума Понтрягина и П-сплайны // ДАН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 22–25.
2. Исаев В. К., Малахов А. И. Принцип максимума Понтрягина и вариационный подход к задачам интерполяции // Труды ЦАГИ, вып. 2218. М.: ЦАГИ, 1984. С. 1–38.
3. Исаев В. К. Принцип максимума Понтрягина и управляемые процессы эрмитовой интерполяции. Современные проблемы математики. Математический анализ, алгебра, топология. Посвящается академику Льву Семёновичу Понтрягину к его семидесятилетию // Труды МИАН, т. 167. М.: Наука, 1985. С. 156–166.
4. Исаев В. К., Плотников С. А. Обратная задача Чебышева и оптимальное приближение геометрической информации. Применение методов вычислительной геометрии в системах автоматизированного проектирования // Труды ЦАГИ, вып. 2344. М.: ЦАГИ, 1987. С. 3–40.
5. Исаев В. К., Щербаков Н. В. Некоторые задачи оптимизации траектории обработки деталей со сложными техническими формами // Труды ЦАГИ, вып. 2344. М.: ЦАГИ, 1987. С. 74–86.
6. Исаев В. К., Плотников С. А. Обратная задача Чебышева и сплайны Чебышева // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. Труды МИАН, т. 211. М.: Физматлит, 1995. С. 164–185.
7. Исаев В. К., Ситников В. П., Сухнев В. А., Каримуллин И. Г., Скородумов С. В., Сонин В. В., Лубашевский В. В., Барышников О. Е., Зайцев В. Е., Хоботов Е. Н., Шустова Л. И., Платов В. М. Работы по созданию интегрированной автоматизированной системы изготовления аэродинамических моделей в ЦАГИ: АСИМ (1970-1980), АСИМ+(1980-1992) // Проблемы создания перспективной авиационно-космической техники. М.: Физматлит, 2005. С. 498–502.
8. Исаев В. К., Рябов А. М., Сухнев В. А., Сонин В. В., Шустова Л. И., Буйко Д. П. Исследования по отработке геометрических обводов и автоматизации раскрой теплозащитного покрытия ВКС “Буран” // Проблемы создания перспективной авиационно-космической техники. М.: Физматлит, 2005. С. 503–505.
9. Исаев В. К., Скородумов С. В. Состояние и современные тенденции развития технологий создания изделий опытного машиностроения // Проблемы машиностроения. Сборник трудов конференции. Институт машиноведения имени А. А. Благонравова РАН, Москва, 2008. С. 244–248.
10. Isaev V. K. To the theory of optimal splines // Applied Mathematics and Computation (Special issue in honor of George Leitmann on his 85th birth year). 2010. V. 217, № 3. P. 1095–1109.

Изогеометрическая аппроксимация сплайнами с натяжением

Квасов Б. И.

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск;
kvasov@ict.nsc.ru

Задача построения интерполяционного сплайна с натяжением может быть сформулирована как дифференциальная многоточечная краевая задача [1,2]. Ее дискретизация приводит к необходимости решения линейной системы с пятидиагональной матрицей, которая для неравноотстоящих данных может быть плохообусловлена [3]. В работе показано, что данную систему можно расщепить на трехдиагональные системы с диагональным преобладанием. Решение последних не требует вычисления гиперболических функций, устойчиво и допускает эффективное распараллеливание на основе принципа суперпозиции [4]. Для квазиравномерной сетки системы имеют положительно определенные матрицы. Приведены алгоритмы распараллеливания вычислений для трех- и пятидиагональных систем. В трехмерном случае используется обобщенное бигармоническое уравнение и метод дробных шагов [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006.
2. Costantini P., Kvasov B. I., Manni C. On discrete hyperbolic tension splines // Adv. Comput. Math. 1999. V. 11. P. 331-354.
3. Rogina M., Singer S. Conditions of matrices in discrete spline approximations of DMBVP // Ann. Univ. Ferrara. 2007. V. 53. P. 393-404.
4. Яненко Н. Н., Коновалов А. Н., Бугров А. Н., Шустов Г. В. Об организации параллельных вычислений и распараллеливании прогонки // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1978. Т. 9, № 7. С. 139-146.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

**Точные константы Лебега
для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов
формально-самосопряженного
дифференциального оператора**

Ким В. А.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
vkim1986@gmail.com*

Как известно, теория \mathcal{L} -сплайнов естественным образом обобщает классическую теорию полиномиальных сплайнов. Одним из значимых фактов классической теории являются формулы точных констант Лебега для интерполяционных полиномиальных сплайнов произвольной степени и с равномерными узлами, найденные в [1]. Касаясь рассматриваемого обобщения, в [2] было показано, что для формально-самосопряженных дифференциальных операторов последовательность точных констант Лебега по порядку этих операторов ограничена. В [3] найдена асимптотика по порядку точных констант Лебега для формально-самосопряженных дифференциальных операторов. В работах [4] и [5] получены значения точных констант Лебега для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка, соответственно, для дифференциальных операторов $D(D^2 - \beta^2)$, $\beta > 0$ и $D(D - \alpha)(D - \beta)$, $\alpha < 0 < \beta$. Данная работа обобщает результат [1] на случай формально-самосопряженного дифференциального оператора произвольного порядка, однако, в отличие от [1], автором использован удобный с вычислительной точки зрения аппарат В-сплайнов.

Пусть $h > 0$ и \mathcal{L} -сплайны определены одним из следующих дифференциальных операторов:

$$\mathcal{L}_{2n+1} = D \prod_{i=1}^n (D^2 - \alpha_i^2), \quad n \in \mathbb{N}; \quad \mathcal{L}_{2n+2} = D^2 \prod_{i=1}^n (D^2 - \alpha_i^2), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\{\alpha_i, i = \overline{1, n}\} \subset \mathbb{R}$, с узлами интерполяции $\{2hj, j \in \mathbb{Z}\}$ и возможными разрывами $(\text{order}(\mathcal{L}) - 1)$ -ой производной в узлах $\{2hj + h, j \in \mathbb{Z}\}$, где $\text{order}(\mathcal{L})$ — порядок дифференциального оператора, определяющего \mathcal{L} -сплайны. Тогда справедлива следующая

Теорема. Точная константа Лебега для интерполяционных $2hp$ -периодических \mathcal{L} -сплайнов равна:

если p нечетно, то

$$\|L\|_p^p = \sum_{q=1}^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \frac{x_s^{n-1+|kp-l|}}{P'(x_s)} (-1)^{q-1} B(h-2hl-2hq);$$

если p четно, то

$$\begin{aligned} \|L\|_p^p &= \sum_{q=1}^{p/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \frac{x_s^{n-1+|kp-l|}}{P'(x_s)} (-1)^{q-1} B(h-2hl-2hq) + \\ &+ \sum_{q=p/2+1}^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \frac{x_s^{n-1+|kp-l|}}{P'(x_s)} (-1)^q B(h-2hl-2hq). \end{aligned}$$

Точная константа Лебега для интерполяционных возможно-непериодических \mathcal{L} -сплайнов равна

$$\begin{aligned} \|L\|_{\infty} &= \sum_{q=-\infty}^0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \frac{x_s^{n-1+|l|}}{P'(x_s)} (-1)^q B(h-2hl-2hq) + \\ &+ \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=1}^n \frac{x_s^{n-1+|l|}}{P'(x_s)} (-1)^{q-1} B(h-2hl-2hq), \end{aligned}$$

где $\{x_s, s = \overline{1, n}\}$ — нули на $(-1, 0)$ многочлена

$$P(z) = \sum_{l=0}^{2n} B(2h(l-n))z^l.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Richards F. B. Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. V. 7, № 3. С. 302–317.
2. Tzimbarario J. Lebesgue constants for cardinal \mathcal{L} -spline interpolation // Can. J. Math. 1977. V. 29, № 2. С. 441–448.
3. ter Morsche H. G. On the Lebesgue constants for cardinal \mathcal{L} -spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. V. 45, № 3. С. 232–246.
4. Ким В. А. Точные константы Лебега для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка // Математические заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
5. Ким В. А. Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.

Об одном алгоритме поиска ближайших соседей в многомерной сетке

Ковалев С. Н.¹, Фёдоров Е. А.²

Новосибирский государственный университет, Новосибирск;

¹sinegorye@yandex.ru, ²forallepsilon@ya.ru

В работе рассматривается экономичный (по числу сравнений) алгоритм построения списков соседей для узлов многомерной сетки.

Задача поиска и исключения близко расположенных соседних точек находит применение в различных областях, в частности, при прореживании сетки для задач сплайн-аппроксимации. Алгоритм, сравнивающий последовательно расстояния между всеми узлами сетки, требует $O(N^2)$ операций сравнения для сетки из N точек.

Предлагаемый в данной работе способ поиска соседних точек позволяет уменьшить число требуемых сравнений до $O(N \cdot \lg N)$, что способно существенно улучшить быстродействие на сетках большого размера. Суть метода заключается в рекурсивном разбиении исходного множества точек на подмножества с последующим решением нескольких подзадач меньшего размера путём простого перебора.

Приведены численные оценки эффективности работы метода в сравнении с алгоритмом простого перебора.

Разностные схемы и законы сохранения

Коновалов А. Н.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск; kan@sscc.ru*

В докладе рассматривается класс разностных схем для системы уравнений динамической теории упругости. Используется сопряженно-операторная постановка в скоростях-деформациях. Исследуются соответствующие этим разностным схемам законы сохранения.

Построение компактных разностных схем для численного решения одномерных сингулярных диффузионно-конвективных уравнений

Кузоватов И. А., Суббочев Н. Г.

Сибирский федеральный университет, Красноярск;

kuzovатов@yandex.ru, nik160492@mail.ru

Компактные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации широко используются для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений. В качестве примера приведем на равномерной сетке классическую компактную разностную схему для одномерного уравнения Лапласа $-u''(x) = f(x)$:

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}).$$

При моделировании физических процессов вызывает интерес построение схем повышенного порядка аппроксимации для численного исследования дифференциальных уравнений с малым параметром ε при старшей производной. В данном случае анализируется не только порядок аппроксимации разностной схемы, но и устойчивость схемы, и порядок равномерной сходимости по малому параметру при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим схему экспоненциальной подгонки, применяемую для численного исследования сингулярных диффузионно-конвективных уравнений

$$-\operatorname{div}(\varepsilon a \nabla u - \vec{b} u) = f,$$

где a – коэффициент диффузии, \vec{b} – вектор скорости потока. Схема экспоненциальной подгонки является абсолютно устойчивой по малому параметру схемой второго порядка аппроксимации, обладает первым порядком равномерной сходимости.

Запишем разностный оператор экспоненциальной подгонки для численного решения одномерного модельного сингулярного диффузионно-конвективного уравнения $-\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x)$,

$$L_h u_h \equiv \frac{u_i - u_{i-1} e^{\frac{h}{\varepsilon}}}{\left(e^{\frac{h}{\varepsilon}} - 1\right) h} + \frac{u_i - u_{i+1} e^{-\frac{h}{\varepsilon}}}{\left(1 - e^{-\frac{h}{\varepsilon}}\right) h} = f_i.$$

Построение компактных разностных схем проводится при помощи применения к сеточной функции правой части модифицирующего оператора. Конкретный вид модифицирующего оператора и соответствующей компактной разностной схемы определяется способом интерполяции сеточной функции правой части дифференциального уравнения. В операторном виде компактную разностную схему можно записать следующим образом

$$L_h u_h = M_h f_h.$$

Для сингулярных диффузионно-конвективных уравнений представляется оптимальным выбор интерполяции гиперболическими сплайнами с автоматическим выбором параметров натяжения. Кусочно-линейная и локально квадратичная интерполяции приводят ко второму и третьему порядку равномерной сходимости соответствующих компактных схем, что уступает четвертому порядку аппроксимации компактной схемы для уравнения Лапласа. Применение интерполяции кубическими сплайнами нередко приводит к нарушению изогеометрии исходных данных, что крайне нежелательно при моделировании физических процессов.

Интерполяция гиперболическими сплайнами с автоматическим выбором параметров натяжения сохраняет изогеометрию исходных данных сеточной правой части и приводит к построению компактной разностной схемы четвертого порядка равномерной сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000.
2. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Математические заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.
3. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2006.
4. Rentrop P., Wever U. Computational strategies for the tension parameters of the exponential spline // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1987. Vol. 95: Optimal Control. P. 122–134

Применение метода наименьших квадратов для калибровки измерительных каналов МАЭС

Лабусов В. А.^{1,2}, Мирошниченко В. Л.³, Селюнин Д. О.^{1,2}

¹Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск;

²ООО «ВМК–Оптоэлектроника», Новосибирск; labusov@vmk.ru

³Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;
miroshn@math.nsc.ru

В настоящее время для измерения интенсивности спектральных линий широко применяются многоканальные анализаторы атомно-эмиссионных спектров (анализаторы МАЭС). Измерительный канал анализатора МАЭС — совокупность взаимосвязанных элементов его фотоэлектронной системы, обеспечивающая преобразование интенсивности входного излучения, падающего на одну фотоячейку, в выходной электрический сигнал, преобразованный в цифровую форму. Реально наблюдаемая зависимость выходного сигнала от интенсивности излучения является нелинейной и индивидуальной для каждого измерительного канала (анализаторы МАЭС содержат до 72000 измерительных каналов), что приводит к погрешности измерения интенсивности и к разбросу выходных сигналов соответственно. Значения нелинейности достигают 10%. Поэтому перед использованием анализатора МАЭС необходимо провести калибровку его измерительных каналов с целью снижения их нелинейности и разброса.

Разработан метод электронной калибровки измерительных каналов анализаторов МАЭС с целью снижения нелинейности зависимости фотоотклика каждого канала от интенсивности входного излучения. Созданы специализированный блок электронной регистрации и программное обеспечение, реализующие электронную калибровку.

Аппроксимация зависимости напряжения на входе схемы измерения от выходного сигнала измерительного канала выполнена полиномом 37-ой степени, представленном в виде разложения по базису из полиномов Чебышёва. Коэффициенты полинома находятся методом наименьших квадратов. Погрешность аппроксимации составляет 0,01 %, что лежит в пределах случайной погрешности. Это позволило снизить нелинейность измерительных каналов анализатора МАЭС более чем в 10 раз. Отметим, что достигнутая точность аппроксимации невозможна

без применения Чебышёвских полиномов. Использование в рассматриваемой задаче традиционного степенного базиса для полиномов не позволяет строить полиномы степени выше седьмой, а это не обеспечивает требуемой точности аппроксимации.

Заметим, что аппроксимация функциональной зависимости выполняется для каждого из очень большого количества измерительных каналов. Это естественно диктует жёсткие требования к надёжности используемого математического аппарата. Применение полиномов Чебышёва обеспечило высокое качество получаемых аппроксимаций.

Применение метода электронной калибровки приведёт к существенному снижению погрешности результатов атомно-эмиссионного спектрального анализа веществ и материалов.

Работа выполнена при поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН (№ 2009-81).

ЛИТЕРАТУРА

1. Селюнин Д. О., Лабусов В. А., Петроченко Д. В., Мирошниченко В. Л., Неклюдов О. А., Речкин Г. В. Метод электронной калибровки измерительных каналов анализаторов МАЭС // *Автометрия*. 2010. Т. 46, № 5. С. 67–76
2. Мирошниченко В. Л., Селюнин Д. О. О современных методах аппроксимации экспериментальных данных // *Матер. X Междунар. симп. «Применение анализаторов МАЭС в промышленности»*. Новосибирск, 2009. С. 22-28.

Всплесковые базисы на произведении нульмерных групп

Лукомский С. Ф.

Саратовский государственный университет, Саратов;

Lukomskiisf@info.sgu.ru

Пусть $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ – локально компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп

$$\cdots \subset \mathfrak{G}_n \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_{-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_{-n} \subset \cdots \quad (1)$$

такой, что $(\mathfrak{G}_n/\mathfrak{G}_{n+1})^\# = p$ – простое число; $g_n \in \mathfrak{G}_n \setminus \mathfrak{G}_{n+1}$ – базисная последовательность в \mathfrak{G} ; существуют $\beta_1, \dots, \beta_s \in \overline{0, p-1}$ такие, что

$$pg_n = \beta_1 g_{n+1} \dot{+} \beta_2 g_{n+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \beta_s g_{n+s}. \quad (2)$$

Пусть далее X – группа характеров и (\mathfrak{G}_n^\perp) – совокупность аннуляторов подгрупп \mathfrak{G}_n . Если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию (2), то оператор $A : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, определенный равенством

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_{n-1} \quad \text{при} \quad x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_n,$$

является аддитивным. Назовем его оператором растяжения. Обозначим $H_0 = \{a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \cdots \dot{+} a_{-p}g_{-p} : p \in \mathbb{N}, a_{-j} \in \overline{0, p-1}\}$.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in L_2(\mathfrak{G})$ есть решение масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H} C_h \varphi(Ax \dot{-} h),$$

где $H \subset H_0$ – конечное множество. Если $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_0^\perp}(\chi)$, то φ порождает КМА в $L_2(\mathfrak{G})$.

С.В.Козырев поставил задачу построения КМА на произведении полей p -адических чисел как основную проблему в p -адическом КМА. Э.Кинг и М.Скопина [2] привели пример КМА в двумерном случае, выбрав оператор растяжения в виде шахматной матрицы $\begin{pmatrix} A & A \\ -A & A \end{pmatrix}$, где A – одномерный оператор растяжения.

В настоящем докладе мы приведем решение этой задачи для произвольной размерности $d \geq 2$ и любой локально компактной нульмерной группы \mathfrak{G} с условием (2).

Произведение $G = \mathfrak{G}^d$ нульмерных групп снова является нульмерной группой, но подгруппы $G_{nd} = \mathfrak{G}_n^d$ не образуют основную цепочку, так как $(\mathfrak{G}_n^d / \mathfrak{G}_{n+1}^d)^\# = p^d$. Поэтому цепочку подгрупп \mathfrak{G}_n^d необходимо дополнить до основной.

Теорема 2. Пусть при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{G}_{n+1}^d = G_{(n+1)d} \subset G_{(n+1)d-1} \subset \dots \subset G_{nd+1} \subset G_{nd} = \mathfrak{G}_n^d$$

строго возрастающая совокупность подгрупп. Тогда существует матрица $\mathcal{A}_n = (a_{\nu,l}^{(n)})$ такая, что

$$G_{(n+1)d-l} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{(n+1)d-l+1} \dot{+} j\mathfrak{g}_{(n+1)d-l}).$$

$$\mathfrak{g}_{(n+1)d-l} = (a_{0,l}^{(n)} g_n, a_{1,l}^{(n)} g_n, \dots, a_{d-1,l}^{(n)} g_n), \quad a_{\nu,l}^{(n)} = \overline{0, p-1}.$$

Матрицы \mathcal{A}_n можно выбрать одинаковыми при всех n и можно указать алгоритм их построения.

Теорема 3. Если матрицы \mathcal{A}_n одинаковы при всех n , операция $\dot{+}$ в исходной группе \mathfrak{G} удовлетворяет равенству (2), то векторы $\mathfrak{g}_{(n+1)d-l}$ образуют базисную последовательность и равенство

$$A_d \mathbf{x} - \sum_{n,l} a_{nd+l} \mathfrak{g}_{nd+l-1} \quad \text{при} \quad \mathbf{x} = \sum_{n,l} a_{nd+l} \mathfrak{g}_{nd+l}$$

определяет в $G = \mathfrak{G}^d$ оператор растяжения.

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1 и можем строить КМА и соответствующие всплесковые базисы в $L_2(\mathfrak{G}^d)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1) и фонда РФФИ (грант 10-01-00097-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукомский С. Ф. КМА на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сборник. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.
2. King E., Skopina M. A. Quincunx MRA for $L_2(Q_2^2)$ // P-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2010. Т. 2, № 3. С. 222–331.

О неполиномиальных B -кривых

Макаров А. А.

Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург;
Antony.Makarov@gmail.com

Геометрическое моделирование (Computer Aided Geometric Design, CAGD, компьютерная геометрия) широко используется при разработке CAD/CAM систем (систем автоматизированного проектирования, САПР) и связано с построением кривых и поверхностей по ограниченной информации. Методы построения кривых Безье и B -кривых (или их весового варианта — NURBS-кривых) являются стандартом де-факто при построении кривых и поверхностей для различных CAGD-систем. Однако, используемые полиномиальные базисы не могут точно представить трансцендентные кривые, которые весьма часто используются в прикладном проектировании. Активно исследуются различные способы построения сплайнов, обладающих свойствами B -сплайнов.

В данной работе в качестве базиса для построения B -кривых используются B_φ -сплайны [1–3], являющиеся неполиномиальным обобщением известных полиномиальных B -сплайнов. Источником упомянутых сплайнов являются соответствующие аппроксимационные соотношения, рассматриваемые как система линейных алгебраических уравнений, из которой выводятся (как полиномиальные, так и неполиномиальные) сплайны. Получаемые сплайны имеют максимальную гладкость и минимальный компактный носитель.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянович Ю. К., Макаров А. А. Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Проблемы матем. анализа. 2006. Вып. 34. С. 39–54.
2. Макаров А. А. Нормализованные тригонометрические сплайны лагранжева типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 81–87.
3. Макаров А. А. О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка // Проблемы матем. анализа. 2008. Вып. 38. С. 47–60.

Численное исследование критерия горизонтальной однородности среды по кинематическим данным

Мальцева С. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск;
svetlana.v.maltseva@gmail.com

В работе рассматривается двумерная модель среды в полуплоскости $y > 0$, в которой скорость распространения волны линейно возрастает с глубиной, $v = ay + b, a > 0, b > 0$. Эта среда описывается римановой метрикой $ds^2 = \frac{1}{(ay+b)^2}(dx^2 + dy^2)$, геодезическими которой являются дуги окружностей с центрами, лежащими на прямой $y = -\frac{b}{a}$ [1]. Данная модель имеет приложения в сейсмике, геотомографии, сейсмологии.

Прямая задача вычисления времен пробега τ между любыми двумя (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точками полуплоскости $y > 0$ решается по явной формуле, приведенной к удобному виду.

В качестве данных для решения обратной задачи берутся времена пробега между каждыми двумя датчиками, вычисленные по явной формуле. Источники и приемники располагаются в узлах равномерной сетки, построенной на отрезке $[0, 1]$ линии $y = 0$. Критерием локальной горизонтальности среды служит равенство нулю функционала $F(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_2}\right)^2$ (см., например, [2]).

В работе рассматриваются два способа вычисления первых производных: с помощью конечно-разностных отношений и нормализованных B -сплайнов третьего порядка. При конечно-разностной аппроксимации добавление равномерного шума ведет к росту относительной ошибки вычисления τ и абсолютной ошибки вычисления F . С целью уменьшения этих ошибок была использована сплайн-аппроксимация, позволяющая уменьшить как относительную ошибку вычисления времен пробега τ , так и абсолютную ошибку вычисления функционала F . Проведено численное исследование влияния характеристик среды (a, b) и уровня шума на времена пробега τ и функционал $F(x_1, x_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. —Т. 4, часть первая. Москва: Наука, 1974.
2. Аниконов Ю.Ё., Пестов Л. Н. Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии. Новосибирск: Изд-во новосибирского университета, 1996.

Об алгоритмах и программах для построения кубических сплайнов

Мирошниченко В. Л.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;
miroshn@math.nsc.ru

Различные типы кубических сплайнов и их обобщения широко применяются при решении различных прикладных задач. В докладе обсуждаются вопросы, связанные с алгоритмами построения классических интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 и их программной реализацией. Однако сделанные рекомендации в значительной мере справедливы и для других видов кубических сплайнов. Представленный в докладе материал основан на многолетнем опыте автора по «эксплуатации» кубических сплайнов.

Главной целью доклада является описание набора программ, необходимого для эффективного использования кубических сплайнов класса C^2 одной и многих переменных (в случае многих переменных рассматриваются сплайны на прямоугольной сетке).

Большое внимание уделяется вопросам, связанным с надёжностью работы программ и их оптимальностью как по временным затратам, так и по объёму используемой памяти. Заметим, что минимизация объёма используемой памяти приобретает критическое значение при работе со сплайнами трёх и более переменных.

Подробно рассматривается очень важный вопрос о краевых условиях для сплайна. Пожалуй, именно с неудачным выбором краевых условий связано наибольшее количество «недоразумений» при практическом использовании сплайнов. Одна из причин такого положения заключается, к сожалению, в часто встречающемся довольно поверхностном изложении «такого тривиального» понятия, как кубический сплайн, в учебной литературе. В докладе приводятся типы краевые условия, которые, по мнению автора, обязательно должны реализовываться программой построения кубического сплайна.

Дается критический анализ различных программ, в том числе программ из известной библиотеки IMSL.

В связи с современными тенденциями широкого распространения многопроцессорной вычислительной техники (даже персональные ком-

пьютеры в самом ближайшем будущем станут очень-очень многопроцессорными) высказываются соображения о распараллеливании программ для работы со сплайнами многих переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
3. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение. М.: Мир, 1998.
4. Schumaker L. L. Spline functions: Basic theory. New York: John Wiley & Sons, 1981.
5. Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006.
6. Роженко А. И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2005.
7. Späth H. Spline algorithms for curves and surfaces. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publishing Inc., 1974.
8. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1989.

Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа на классах интерполируемых данных

Новиков С. И.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
 Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Через $B_R^n(0)$ обозначим n -мерный открытый шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат и пусть $\{x^{(s)}\}_{s=1}^N \subset B_R^n(0)$ – конечное множество точек интерполяции.

Для класса интерполируемых данных

$$\mathfrak{M}_p = \left\{ z : z = \{z_j\}_{j=1}^N, \|z\|_{l_p^N} \leq 1 \right\},$$

и множества интерполирующих функций

$$Y_N(z) = \left\{ f \in C^2(B_R^n(0)) \cap C(\overline{B_R^n(0)}) : \right. \\ \left. f|_{|x|=R} = 0, f(x^{(s)}) = z_s, s = 1, 2, \dots, N \right\}$$

при $1 \leq p \leq \infty$ изучается следующая величина:

$$A_p^N(B_R^n(0)) = \sup_{z \in \mathfrak{M}_p} \inf_{f \in Y_N(z)} \|\Delta f\|_{L_p(B_R^n(0))},$$

где Δ – оператор Лапласа. Эта величина представляет собой норму оператора Лапласа "наилучшей" интерполирующей функции для "наихудшей" интерполируемой последовательности из класса \mathfrak{M}_p .

В докладе будут представлены двусторонние оценки для $A_p^N(B_R^n(0))$ через радиус шара R и число точек интерполяции N .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-01-00347) и программой поддержки научных исследований, выполняемых совместно учеными УрО и СО РАН.

О возможности использования линейного приближения для уравнения состояния воды при моделировании гидрофизических процессов в водоемах с высокой минерализацией

Овчинникова Т. Э.

*Институт водных и экологических проблем СО РАН, Новосибирск;
teo@ad-sbras.nsc.ru*

При моделировании гидрофизических процессов с использованием RANS-моделей, в качестве замыкания для осредненных уравнений Рейнольдса часто используется двухпараметрическая $\epsilon - \epsilon$ модель и ее модификации. При выводе уравнений таких моделей существенным является предположение о линейном характере зависимости плотности воды ρ от температуры и солености, описываемой уравнением состояния воды:

$$\rho(T, S) = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_m) + \beta S],$$

где T – температура воды, S – соленость, T_m – температура максимальной плотности пресной воды. В том, что касается солености, зависимость плотности от нее действительно близка к линейной, но относительно температуры такая формула может давать хорошее приближение в случае $T > T_m$ или $T < T_m$, но не на всем диапазоне температур, поскольку в окрестности T_m зависимость плотности от температуры имеет почти квадратичный характер [1]. Известно [2], что с ростом минерализации эта зависимость постепенно приобретает монотонный характер, поэтому становится возможным использование линейного приближения. В работе [2] было показано, что для водоемов с повышенной минерализацией с физико-химической точки зрения приемлемым может быть Международное уравнение состояния морской воды, 1980 [3] (в дальнейшем будем называть его УС80).

В данной работе сделана попытка построения линейного приближения для УС80, которое не только хорошо аппроксимирует плотность, рассчитываемую с его использованием, но и градиент плотности в условиях выраженной стратификации водоема по температуре и солености. Показано, что при подходящем выборе интервалов этих параметров, по которым строится линейное приближение, можно добиться достаточно

близкой аппроксимации градиента плотности. Сравнение производилось на данных о вертикальных распределениях температуры и солености реального соленого водоема — западной части Аральского моря, соленость которого превышает 100 мг/л.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-05-01149), а также междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№ 23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров О. Б., Васильев О. Ф., Овчинникова Т. Э. Приближенное уравнение состояния воды вблизи температуры максимальной плотности с учетом минерализации // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40, № 3. С. 423–425.
2. Прокопьев С. И., Овчинникова Т. Э., Васильев О. Ф. Термодинамические характеристики воды в природных водоемах с высокой минерализацией // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 2. С. 281–285.
3. Мамаев О. И. Термохалинный анализ вод мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1987.

Анализ ошибок сплайн-аппроксимационного приближения в задачах геокартирования

Плавник А. Г.¹, Сидоров А. Н.²

¹*Западно-Сибирский филиал Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Тюмень; plavnik@ikz.ru*

²*ГП ХМАО-Югры «Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В.И. Шпилльмана», Тюмень; sidorov@crru.tmn.ru*

Современные методы компьютерного картирования предоставляют надежные средства для оперативной обработки больших объемов данных. Вместе с тем неоднозначность восстановления всего поля значений по ограниченному числу точек задаваемых параметров при отсутствии априорных сведений о закономерностях пространственной изменчивости свойств геологических объектов обуславливает проблематичность вопросов оценки надежности выполненных построений.

Для оценки влияния основных показателей, контролирующих результат картирования (шага сетки, по которой строится решение, а также значений весовых коэффициентов в минимизируемом функционале) на ошибки аппроксимации выполнена серия вычислительных экспериментов. В качестве объекта картирования выбрана глубина залегания кровли покурской свиты (кровли апт-альб-сеноманского сеноманского комплекса) в пределах восточной части Ханты-Мансийского округа на основе данных стратиграфических разбивок по 300 разведочным скважинам. Скважины неравномерно располагаются на территории, которая представляет собой практически квадратную область со сторонами более 500 км. Расстояние от скважин до ближайших к ним скважинам варьирует от 1.2 до 73.4 км и в среднем составляет 9.55 км.

Построение карт осуществлено минимизацией суммы квадратов ошибок аппроксимации (с некоторым весовым коэффициентом) с использованием в качестве стабилизатора интегрального показателя кривизны поверхности. Применен программный комплекс GST, реализующий сплайн-аппроксимационный подход.

Как показывают расчеты, с увеличением весового коэффициента ошибка аппроксимации вполне ожидаемо уменьшается, а детализация

построений увеличивается. При этом темпы изменения ошибки аппроксимации с ростом величины весового коэффициента очень незначительны. Вместе с тем, результаты расчетов для некоторых шагов сетки имеют принципиально различающийся характер. Для относительно небольшого шага сетки с увеличением весового коэффициента вид результирующих карт в основном стабилизируется, а происходит лишь детализация локальных особенностей. В отличие от этого при картировании с крупным шагом сетки этап детализации не стабилизируется, а сменяется неустойчивым характером картирования в зонах с низкой плотностью (или отсутствием) фактических данных.

Рассмотрено также предположение о том, что одновременно с уменьшением ошибок аппроксимации при уменьшении шага сетки должно происходить перераспределение основных ошибок в участки с наиболее высокой плотностью расположения исходных данных и резкое уменьшение ошибок в точках с расстоянием до ближайших точек, кратно превышающим величину шага сетки. Однако согласно результатам расчетов имеет место согласованность в повышенных значениях ошибок аппроксимации в точках независимо от величины шага сетки. При этом с уменьшением шага такая согласованность принимает практически функциональный характер (коэффициент корреляции для погрешностей при расчетах с шагом 4 и 2 км составляет 0.99).

По-видимому, наличие отмеченной независимости в распределении погрешностей аппроксимации от шага сети обусловлено особенностями модели, используемой при картировании, а точнее ее недостаточной надежностью в тех зонах, где расположены точки с повышенными ошибками. Действительно в рассматриваемых примерах характерные точки расположены в зонах близких к участкам с высоко амплитудной изменчивостью глубины залегания кровли покурской свиты, то есть в зонах плохо согласованных с моделью, определяемой условием минимизации кривизны.

Отметим, что погрешности в рассмотренных точках в целом существенно ниже, чем в точках с высокой плотностью фактических данных. Поэтому если ограничивать анализ только средними показателями величины ошибок аппроксимации, то можно пропустить важную информацию о приемлемости модели, используемой при картировании, и о зонах, в которой фактические данные не согласуются с этой моделью в наибольшей степени. В свою очередь учет этой информации может использоваться для корректировки модельных условий, а также при сопоставительном анализе различных моделей.

Оценка устойчивости геокартирования в рамках сплайн-аппроксимационного подхода

Плавник А. Г.¹, Сидоров А. Н.²

¹Западно-Сибирский филиал Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Тюмень; plavnik@ikz.ru

²ГП ХМАО-Югры «Научно-аналитический центр рационального недропользования им. В.И. Шпилемана», Тюмень; sidorov@crru.tmn.ru

Одним из методов анализа результатов картирования и сопоставления различных способов и вариантов построения карт является подход, при котором расчеты осуществляются по части данных, а оставшаяся часть контрольных точек используется для сравнения расчетных и фактических значений. При использовании различных аппроксимационных методов результаты расчетов в контрольных точках могут существенно отличаться друг от друга. Точность приближения расчетных значений в контрольных точках может значительно варьировать и в рамках одного метода аппроксимации (например, на участках карты с различной плотностью расположения фактических данных). При этом степень влияния «возмущений», задаваемых данными контрольной выборки, может интерпретироваться как характеристика устойчивости результатов картирования при использовании того или иного аппроксимационного метода.

Тесная взаимосвязь сплайн-аппроксимационного подхода в решении задач геокартирования с методом наименьших квадратов (МНК) обеспечивает возможность использования разработанных для МНК рекуррентных методов корректировки результатов расчетов при исключении части данных или внесении новых, которые могут применяться как при наличии линейных ограничений на оцениваемые параметры, так и при их отсутствии. Рекуррентные соотношения позволяют построить эффективные вычислительные процедуры для анализа изменчивости результатов картирования при последовательном исключении одной или нескольких точек из числа данных, учитываемых при построениях. Это обусловлено тем, что необходимо только однократное предварительное выполнение процедуры, связанной с факторизацией матрицы и решение задачи картирования системы с полным набором точек наблюдаемых значений.

Из рекуррентных зависимостей следует, что соотношение ошибки аппроксимации к ошибке прогноза (обозначенные далее в формулах со знаками «-» и «+», соответственно, при исключении и добавлении некоторой точки) представляет собой величину, определяемую весовым коэффициентом, значениями базовых функций и матрицей системы и независимую от задаваемых значений картируемого параметра не только в этой точке, но и во всех других точках:

$$\nu^- = 1 - \rho_k \mathbf{g}_k \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}_k, \quad \nu^+ = \frac{1}{1 + \rho_k \mathbf{g}_k \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}_k}$$

Такая инвариантность определяет самостоятельное значение для этого показателя (коэффициента устойчивости). В данном отношении этот коэффициент имеет схожие свойства с оценкой вариации в крайкинге, которая также не зависит от значений картируемых параметров, а зависит от расположения точек и от ковариационной матрицы системы. Область определения коэффициента устойчивости заключена в интервале (0,1).

Использование коэффициента устойчивости позволяет количественно оценить характер изменения локальных результатов от плотности используемых данных при различных вариантах картирования. Например, полученные значения коэффициента устойчивости для каждой из точек, участвующих в построении карты, могут использоваться для построения карты устойчивости, которая в свою очередь может применяться для интерпретации надежности выполненных картопостроений.

Однако более эффективным и обладающим большими возможностями является подход, основанный на рекуррентных соотношениях для варианта с добавлением новых точек в решение задач картирования. При этом обеспечивается расчет коэффициента устойчивости для произвольных точек области картирования, а не только в точках с задаваемыми значениями картируемого параметра. И, таким образом, определяется возможность детального построения карт устойчивости в зонах с низкой плотностью данных.

Второе важное преимущество состоит в том, что осуществление оценки устойчивости возможно не только для значения картируемого параметра, но и для других показателей аппроксимируемой поверхности. Таких, например, как значения производных или еще более сложных конструкций, описываемых локальными уравнениями (которые, в общем случае, могут не использоваться при решении самой задачи картирования).

Восстановление векторных полей по их известным лучевым преобразованиям на основе метода наименьших квадратов с использованием B -сплайнов

Полякова А. П.

Институт математики им. Соболева СО РАН, Новосибирск;
anna.polyakova@ngs.ru

В настоящее время проблема исследования неразрушающими методами внутреннего строения и свойств разнообразных объектов выдвигается как одна из основных в различных областях науки и техники. На ранних этапах своего развития эта проблема решалась методами интроскопии при диагностике изделий и спектроскопии при исследовании состава объектов. За последнее время техника дистанционного зондирования и обработки данных достигли достаточно высокого уровня, в результате чего появилась возможность реконструировать пространственную структуру среды. Наряду со многими методами бесконтактной диагностики выделились томографические методы. От других методов диагностики томография отличается тем, что информацию одного и того же элемента объема получают многократно при различных ракурсах относительно объекта.

В данной работе под задачей векторной томографии подразумевается следующая постановка. Пусть ограниченная плоская область заполнена средой с прямолинейным характером распространения лучей. В области задано некоторое векторное поле. Требуется найти это поле по его известным продольным и (или) поперечным лучевым преобразованиям.

Ранее эта задача численно решалась, в частности, с помощью метода наименьших квадратов с использованием полиномов в качестве аппроксимирующей последовательности [2]. Однако на практике была установлена выигрышность локальных базисов, построенных на основе двумерных B -сплайнов [1], перед полиномиальными.

При реализации метода наименьших квадратов значительное количество времени затрачивается на вычисление образов базисных элементов. В работе получены аналитические выражения для продольного и

поперечного преобразований от базисных векторных полей, построенных на основе двумерных B -сплайнов. Эти формулы позволили значительно сократить время вычисления без потери точности, по сравнению с использованием численного интегрирования для получения образов базисных элементов.

Проведено всестороннее тестирование алгоритма с целью определения пределов его применимости. Исследовано влияние на точность восстановления векторного поля таких факторов как степень дискретизации данных (а именно, считающихся известными лучевые преобразования), степень и количество базисных элементов (в форме соленоидальных или потенциальных полей с локальным носителем), гладкость искомого поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн функций. Москва: Наука, 1980.
2. Деревцов Е. Ю., Кашина И. Г. Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 233–254.

Асимптотический анализ краевых условий для сплайнов пятой степени

Примаков С. С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск;
npri89@mail.ru

Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах равномерной сетки $\Delta : x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, N}; x_0 = a, h = (b - a)/N$, заданы значения функции $f_i = f(x_i), i = \overline{0, N}$. Через $S(x)$ обозначим сплайн пятой степени класса C^4 , удовлетворяющий условиям интерполяции $S(x_i) = f_i, i = \overline{0, N}$ и одному из шести типов “классических” краевых условий (на каждом из концов отрезка $[a, b]$ фиксируются две производных сплайна):

$$\begin{cases} S^{(\alpha)}(x_0) = f_0^{(\alpha)}, & S^{(\beta)}(x_0) = f_0^{(\beta)}, \\ S^{(\alpha)}(x_N) = f_N^{(\alpha)}, & S^{(\beta)}(x_N) = f_N^{(\beta)}, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, 3; \alpha < \beta \leq 4.$$

Здесь $f_j^{(k)} = f^{(k)}(x_j)$.

Предполагается, что функция $f(x)$ достаточно гладкая и имеет все производные, необходимые для проведения выкладок. Выражение для сплайна $S(x)$ может быть записано через f_i и $m_i = S'(x_i), i = 0, \dots, N$. Параметры m_i определяются из пятидиагональных систем линейных уравнений. При этом для всех рассматриваемых типов краевых условий эти системы приводятся к системам с диагональным преобладанием. Это позволяет (используя теорему об асимптотическом представлении решения ленточных систем линейных уравнений [2]) получить следующее соотношение:

$$S(x) = f(x) + \frac{h^6}{6!} \varphi_{i,N}(t) f^{(6)}(x) + O(h^7), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, N-1},$$

где функции $\varphi_{i,N}(t)$ зависят от номера интервала и от количества узлов сетки, а также от типа краевых условий.

Выполненный анализ поведения функций $\varphi_{i,N}(t)$ показывает, что оптимальными краевыми условиями для интерполяционного сплайна пятой степени (с точки зрения минимизации погрешности приближения при $h \rightarrow 0$) являются краевые условия с заданием на концах отрезка $[a, b]$ первой и третьей производных, т.е. $\alpha = 1, \beta = 3$. В этом случае

$$\varphi_{i,N}(t) = \varphi(t) = \frac{1}{2}t^2(1-t)^2(1+2t-2t^2) \leq \frac{3}{64}.$$

Кроме указанных выше краевых условий мы рассматриваем также условия следующего вида [4]:

$$\begin{cases} S^{(\alpha)}(x_0) = f_0^{(\alpha)}, & S^{(\beta)}(x_1) = f_1^{(\beta)}, \\ S^{(\alpha)}(x_N) = f_N^{(\alpha)}, & S^{(\beta)}(x_{N-1}) = f_{N-1}^{(\beta)}, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь дополнительные ограничения для сплайна заданы в двух точках на левом и двух точках на правом концах отрезка $[a, b]$ соответственно.

Среди этих (двухточечных) краевых условий оптимальными являются те, при которых задаются первая и третья производные в различных комбинациях, то есть $\alpha, \beta \in \{1, 3\}$. При этом погрешность приближения сплайном характеризуется введённой выше функцией $\varphi(t)$.

Заметим, что точность приближения непериодическим сплайном пятой степени с оптимальными краевыми условиями такая же, как для периодического сплайна пятой степени [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. Мирошниченко В. Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами // Сплайн-аппроксимация и численный анализ (Вычислительные системы, вып. 108). Новосибирск, 1985. С. 3–30.
3. Киндалев Б. С. Асимптотические формулы для сплайна пятой степени и их применение // Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, 1981. С. 18–24.
4. Мирошниченко В. Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами // Проблемы обработки информации (Вычислительные системы, вып. 100). Новосибирск, 1983. С. 83–100.

О стратегии приближения функций многих переменных

Роженко А. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск. rozhenko@oapmg.sccc.ru

Доклад посвящён специфике решения больших задач приближения функций многих переменных, в которых сотни независимых переменных, а объём обучающей выборки исчисляется десятками и сотнями тысяч.

Стратегия решения таких задач состоит из последовательности шагов:

1. Подготовка данных — исключение пропусков в данных, разбиение выборки на обучающую и контрольную.
2. Нелинейное преобразование (калибровка) переменных — устранение разномасштабных значений, замена номинальных переменных на вектор из булевых переменных, нелинейные преобразования шкалы порядковых переменных.
3. Трансформация переменных — сдвиг среднего значения в нуль, приведение разнородных переменных к сравнимым шкалам с помощью нормализации.
4. Редукция переменных — уменьшение сложности приближающей функции за счёт отбрасывания неинформативных переменных. Используются методы статистического и корреляционного анализа, принцип главных направлений.
5. Прореживание обучающей выборки — поиск и устранение выбросов в данных, удаление близких точек, измерения в которых могут быть противоречивыми и приводить к неустраняемым ошибкам приближения.
6. Построение приближения — использование аппроксиматоров минимальной сложности, линейная, полиномиальная и сплайновая регрессия, выбор узлов сплайновой регрессии.

Аппарат приближения функций многих переменных — библиотека SDM (Spline for Data Mining), разработанная под руководством автора на языке C# для платформы .Net [1]. Эта библиотека продолжает серию программных разработок, в которых автор принимал участие: библиотеку LIDA-3 на Фортране [2], библиотеку JSpline+ на Java [3].

Основные разделы библиотеки SDM:

SdmData — векторы, коллекции векторов, матрицы (плотные, ленточные, симметричные), «решатели» систем линейных алгебраических уравнений для различных матриц, симметричная проблема собственных значений.

SdmMining — калибраторы переменных, аффинные трансформации переменных, статистический анализ переменных, классификатор сетки (поиск соседних узлов сетки), фильтр узлов сетки (отбраковка выбросов в данных и прореживание сетки), метод наименьших квадратов с линейными ограничениями типа равенств с итерационным накоплением результата, полиномиальная регрессия.

SdmSplines — полиномиальные сплайны произвольной степени одной переменной (интерполяция, сглаживание, выбор параметра сглаживания, приближения по интегральным средним), сплайны многих переменных: RBF-сплайны, LRBF-сплайны, HRBF-сплайны, LHRBF-сплайны, мультилинейные сплайны (интерполяция, сглаживание, выбор параметра сглаживания, регрессия).

SdmDrawing — объектно-ориентированная библиотека отрисовки. Представление графика в виде дерева узлов, обводка, заливка, трансформации, клипирование, установки пера и кисти, установки шрифта, отрисовка рамки, текстовых меток, цветовой теневой карты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozhenko, A. I. Spline software “Sdm.net: Splines for Data Mining under .Net”, <http://sites.google.com/site/arozenkosite/sdm>.
2. Библиотека программ LIDA-3 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации сигналов и изображений. Ч. I. Аппроксимация: Оперативно-информационный материал. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987.
3. Галков А. В., Лихачев О. А., Никишкина А. Е., Петраков Д. В., Роженко А. И., Фурсова Н. Ф. JSpline+: библиотека сплайнов для Java // Сибирская конф. «Методы сплайн-функций», посвященная памяти Ю.С. Завьялова (1931–1998). Новосибирск, 29 января–2 февраля 2001 г.: Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2001. С. 31–33.

Использование B -сплайнов при численном решении задачи векторной $2D$ -томографии

Светов И. Е.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
svetovie@mail.ru

Современные томографические исследования широко применяются в медицине, биологии, электронной микроскопии и других разделах естественных наук. В настоящее время намечается очередной скачок в развитии индустриальной и компьютерной томографии, связанный с появлением новых классов задач — восстановление векторных и тензорных полей по результатам просвечивания исследуемых объектов.

Так как не существует точных формул восстановления по конечному числу значений лучевых преобразований, решение задачи восстановления векторного поля ищется в виде приближенного решения. В данной работе для решения поставленной задачи использовался алгоритм, основанный на методе наименьших квадратов (МНК). Ранее МНК успешно использовался для решения двумерной задачи векторной томографии, причём в качестве аппроксимирующей последовательности выступали соленоидальные векторные поля, построенные на основе однородных многочленов [2].

В настоящей работе в качестве аппроксимирующей последовательности используются потенциальные и соленоидальные векторные поля, построенные на основе двумерных B -сплайнов. Пусть \mathbb{B} — единичный круг, заполненный средой с рефракцией, которая моделируется геодезическими заданной римановой метрики g_{ij} . Угол α определяет точку $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ на окружности, из которой выпускается луч. Угол β — угол к нормали окружности, под которым выпускается луч.

Продольное и поперечное лучевые преобразования векторного поля v определяются равенствами

$$[\mathcal{P}v](\alpha, \beta) = \int_{\tau_-(\alpha, \beta)}^0 v_i(\gamma_{\alpha, \beta}(t)) \dot{\gamma}_{\alpha, \beta}^i(t) dt,$$

$$[\mathcal{P}^\perp v](\alpha, \beta) = \int_{\tau_-(\alpha, \beta)}^0 v_i(\gamma_{\alpha, \beta}(t)) \eta_{\alpha, \beta}^i(t) dt,$$

соответственно. Здесь $\tau_-(\alpha, \beta)$ — значение параметра t геодезической $\gamma_{\alpha, \beta}$, определяющего точку, в которой она второй раз пересекает окружность $\partial\mathbb{B}$; вектор $\eta_{\alpha, \beta}$ ортогонален вектору $\dot{\gamma}_{\alpha, \beta}$ в смысле метрики g_{ij} .

Задача векторной томографии. Пусть (\mathbb{B}, g) — риманова область, и известны значения продольного лучевого преобразования и (или) значения поперечного лучевого преобразования для всех $(\alpha, \beta) \in \partial\mathbb{B} \times \partial\mathbb{B}$. Требуется по этим данным найти векторное поле $v(x)$, $x \in \mathbb{B}$.

Известно [1], что по продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть векторного поля. Установлено, что по поперечному лучевому преобразованию можно восстановить лишь потенциальную часть векторного поля. При реализации МНК базисные соленоидальные и потенциальные векторные поля строились по формулам

$$B_s(x^1, x^2) = \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial B}{\partial x^2}, \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial B}{\partial x^2} \right),$$

$$B_p(x^1, x^2) = \left(\frac{\partial B}{\partial x^1}, \frac{\partial B}{\partial x^2} \right),$$

соответственно. Здесь $B(x^1, x^2)$ — двумерный B -сплайн.

Были построены алгоритмы восстановления соленоидальной и потенциальной частей векторного поля, основанные на формулах обращения. На тестовом материале проведено численное сравнение качества восстановления векторного поля этими алгоритмами и алгоритмом, основанным на МНК. Численные эксперименты показали неоспоримое преимущество алгоритмов, основанных на МНК, перед алгоритмами, основанными на формулах обращения.

Работа осуществлена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-92001), Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН № 14)

ЛИТЕРАТУРА

1. Sharafutdinov V. A. Integral Geometry of Tensor Fields. Utrecht: VSP. 1994.
2. Деревцов Е. Ю., Кашина И. Г. Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 233–254.

Точные константы в неравенствах для интерполяционных сплайнов произвольного порядка

Стрелков Н. А.

*Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова,
Ярославль; strelkov@uniyar.ac.ru*

Пусть \mathbb{R}_h — равномерная сетка на действительной прямой \mathbb{R} , состоящая из узлов $x_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $f \in C(\mathbb{R})$, то тем же символом f будет обозначаться последовательность, состоящая из значений функции f в узлах сетки \mathbb{R}_h , то есть $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где $f_k = f(x_k)$. Для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ пусть $S_n(x) = S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$ — интерполяционный сплайн порядка n (для f), определяемый следующими условиями:

- 1) сплайн S_n — алгебраический полином степени n на каждом из интервалов $(kh + (n-1)h/2, kh + (n+1)h/2)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 2) $S_n(kh) = f_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$;
- 3) $S_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$.

Если $n \geq 2$, то для любой последовательности f существует бесконечно много интерполяционных сплайнов n -го порядка. Однако если разности порядка n от f ограничены, то существует единственный интерполяционный сплайн $S_n(x, f, \mathbb{R}_h)$, имеющий ограниченную n -ю производную.

В дальнейшем будут использоваться полиномы

$$Q_n(x, z) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n z^k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (x+k-j)^n$$

и

$$R_n(z) = zQ_n(1 - d_n, z),$$

где

$$d_n = (n+1)/2 - [(n+1)/2],$$

т.е. d_n равно $1/2$ или 0 в зависимости от четности или нечетности n .

Полином R_n имеет степень $2[n/2] + 1$, а его нули z_r ($|r| \leq [n/2]$) таковы, что $z_0 = 0$, $z_1, \dots, z_{[n/2]}$ — различные точки интервала $(-1, 0)$, а $z_{-r} = 1/z_r$ для всех $r = 1, \dots, [n/2]$.

Пусть $A_n(x, t)$ — кусочно-полиномиальная функция, определяемая в полосе $(0, 1/2) \times \mathbb{R}$ следующим образом: для $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, 1/2)$, $t \in (0, 1)$

$$A_n(x, k+t) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{-k} Q_n(t, z_r) Q_n(1 - d_n - x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+1} R'_n(z_r)},$$

если $t + k < x$;

$$A_n(x, k+t) = (-1)^{n+1} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{z_r^{k+2d_n} Q_n(1 - t, z_r) Q_n(d_n + x, z_r)}{(1 - z_r)^{n+1} R'_n(z_r)},$$

если $t + k > x$.

Теорема. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty$.

Если $0 \leq m < j \leq n + 1$, то

$$\|S_n^{(m)} - f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq C(m, j, p, n) h^{j-m-1/p} \|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})};$$

если $0 \leq j \leq m \leq n$, то

$$\|S_n^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq C(m, j, p, n) h^{j-m-1/p} \|f^{(j)}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (3)$$

Постоянные $C(m, j, p, n)$ имеют вид

$$C(m, j, p, n) = \|F_{m,j,p,n}\|_{L_\infty(0,1/2)},$$

где

$$F_{m,j,p,n}(x) = \|D_1^m D_2^{n+1-j} A_n(x, \cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Константы $C(m, j, p, n)$ уменьшить нельзя.

Если $j = 0$, то оценка (1) содержательна лишь в случае $p = \infty$, поскольку $C(m, 0, p, n) = \infty$ для всех $p \in [1, \infty)$ и $m \leq n$. Это объясняется тем, что при вычислении $D_1^m D_2^{n+1} A_n(x, t)$ возникает линейная комбинация δ -функций, сосредоточенных на прямых $t = k$, $k \in \mathbb{Z}$ с зависящими от x полиномиальными коэффициентами.

Наследование свойства обобщенной k -монотонности при аппроксимации локальными \mathcal{L} -сплайнами

Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Пусть $r \in \mathbb{N}$, D — символ дифференцирования и $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^r (D - \beta_j)$ — линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, все корни $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ характеристического многочлена которого действительны и попарно различны. Пусть φ_k ($k \leq r$) — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_k(D)f = \prod_{j=1}^k (D - \beta_j)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_k^{(j)}(0) = \delta_{j,k-1}$ ($j = \overline{0, k-1}$) и

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_k} z_m = \prod_{j=1}^k (T - e^{\beta_j h} E) z_m$$

— обобщенная конечная разность порядка k с шагом $h > 0$, соответствующая оператору \mathcal{L}_k , определенная на пространстве числовых последовательностей $\{z_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Здесь $Tz_m = z_{m+1}$ и E — тождественный оператор.

B - \mathcal{L} -сплайном k -го порядка с носителем $[0, kh]$ и равномерными узлами называется функция вида

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_k}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_k} \varphi_k((x - kh)_+),$$

где t_+ означает $\max\{0, t\}$. Нетрудно проверить, что $B_{\mathcal{L}_k} \in C^{k-2}[0, kh]$ и $B_{\mathcal{L}_k}(x) > 0$ при $x \in (0, kh)$. Для функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ положим $y_{j+\alpha} = f((j + \alpha)h)$ ($j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < 1$). С помощью функционала

$$I_j = \sum_{s=1}^r c_s y_{j+s-1+\alpha} \quad (c_s \in \mathbb{R})$$

построим локальный \mathcal{L} -сплайн порядка r вида

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh). \quad (1)$$

Очевидно, этот сплайн не является интерполяционным, так как $S((j + \alpha)h) \neq y_{j+\alpha}$.

В [1] авторами указана система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_r функционала I_j , решение которой обеспечивает сохранение сплайном S ядра оператора \mathcal{L}_k , т. е. выполнение равенств

$$S(e^{\beta_j \cdot}, x) = e^{\beta_j x}, \quad j = \overline{1, k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Кроме того, в [1] исследованы аппроксимативные свойства построенных сплайнов.

В настоящей работе нас интересует вопрос: какие условия на коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_r гарантируют локальное наследование \mathcal{L} -сплайном S вида (1) условий обобщенной k -монотонности исходных данных $\{y_{j+\alpha}\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Поясним, что понимается под этим свойством.

Пусть l — фиксированное целое число. Если для какого-то фиксированного натурального числа $k \leq r$ все разности $\Delta_h^k y_{j+\alpha}$ порядка k неотрицательны при некоторых целых значениях j , близких к l , то функция $\mathcal{L}_k(D)S$ (т. е. аналог k -ой производной локального сплайна S вида (1)) должна быть неотрицательна на отрезке $[lh, (l+1)h]$.

Нами доказано равенство

$$\mathcal{L}_k(D)S(x) = \sum_{s=1}^r c_s \sum_{j=l-r+1}^{l+k} \Delta_h^{\mathcal{L}_k} y_{j+s-k-1+\alpha} B_{\mathcal{L}_{r-k}}(x - jh),$$

$$x \in [lh, (l+1)h] \quad (l \in \mathbb{Z}, k \leq r),$$

из которого следует, что условия $c_s \geq 0$ ($s = \overline{1, r}$) являются необходимыми и достаточными для локального наследования \mathcal{L} -сплайном условия обобщенной k -монотонности. В выписанном равенстве функция $B_{\mathcal{L}_{r-k}}$ — B - \mathcal{L} -сплайн, соответствующий оператору $\mathcal{L}_{r-k}(D) = \prod_{j=k+1}^r (D - \beta_j)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта 09-С-1-1007, выполняемого учеными УрО РАН совместно с СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т. Аппроксимация локальными \mathcal{L} -сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 270–278.

О применении диадических биортогональных дискретных всплесков для обработки изображений

Строганов С. А.

Российский государственный геологоразведочный университет,
Москва; objiomob@gmail.com

Основные методы применения всплесков для обработки изображений изложены в [1]. Подход с обратной связью (feedback-based approach) (см., например, [2]) к задаче поиска наилучшего базиса для обработки данного изображения может быть разбит на три основных шага: (а) кодирование входного изображения массивом его всплеск-коэффициентов, (б) восстановление изображения и подсчет величины $PSNR$, (с) замена параметров для достижения наилучшего значения.

Как обычно через $l^2(\mathbb{Z}_+)$ обозначим пространство последовательностей $x = (x(0), x(1), x(2), \dots)$ таких, что $\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} |x(n)|^2 < \infty$. Для $x \in l^2(\mathbb{Z}_+)$ положим

$$(T_k x)(j) = x(j \oplus 2k), \quad k, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть u, s — две конечные последовательности из $l^2(\mathbb{Z}_+)$ и системы

$$B(u) = \{T_{2k}u\}_{k \in \mathbb{Z}_+}, \quad B(s) = \{T_{2k}s\}_{k \in \mathbb{Z}_+}, \quad (1)$$

удовлетворяют условию биортонормированности

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} u(j \oplus 2k) \overline{v(j \oplus 2k)} = \delta_{k,j}.$$

Зададим последовательности v, τ по формулам

$$v(j) = (-1)^j \overline{s(1 \oplus j)}, \quad \tau(j) = (-1)^j \overline{u(1 \oplus j)}. \quad (2)$$

и определим системы $B(v), B(\tau)$ аналогично (1). Тогда системы $B(u) \cup B(s)$ и $B(v) \cup B(\tau)$ называются *диадическими биортонормированными всплеск-системами первого этапа* в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. По всплеск-системам первого этапа аналогично [4] определяются всплеск-системы m -го этапа. В докладе излагаются результаты численных экспериментов применения к обработке изображений диадических биортогональных дискретных всплеск-систем. В приведенной ниже таблице через

DBW2 обозначена всплеск-система, определяемая следующим образом. Пусть даны комплексные числа $b_0, b_1, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1$ такие, что $b_0\tilde{b}_0 + b_1\tilde{b}_1 = 1$. Определим u, s по формулам

$$\begin{aligned} u(0) &= 2^{-1/2}(b_0 + b_1), & u(1) &= 2^{-1/2}(b_0 - b_1), \\ s(0) &= 2^{-1/2}(\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1), & s(1) &= 2^{-1/2}(\tilde{b}_0 - \tilde{b}_1), \end{aligned}$$

$u(j) = s(j) = 0$ для $j \geq 2$, а последовательности v, τ заданы по формулам (1). Тогда системы $B(u) \cup B(s)$ и $B(v) \cup B(\tau)$ образуют диадические биортонормированные всплеск-системы первого этапа в $l^2(\mathbb{Z}_+)$ для DBW2. В частности, при $b_0 = \tilde{b}_0 = 1$ и $b_1 = \tilde{b}_1 = 0$ получается всплеск-система Хаара.

В численных экспериментах использовался метод кодирования изображений, применяющийся в стандарте JPEG 2000 с шагом квантования равным Δ . Мы сравнили ортогональные всплеск-системы Хаара, Добеши D4, а также биортогональную всплеск-систему 9/7 с системой DBW2.

При шаге квантования $\Delta \leq 20$ результаты диадической системы совпадают с результатами полученными для системы Хаара. Однако при увеличении шага квантования системы DBW2 превосходят как систему Хаара, так и системы Добеши и 9/7 по качеству восстановленного изображения. В таблице приведены значения $PSNR$ для $\Delta = 50$.

Изображение	Haar	D4	D9/7	DBW2
lena	29,699286	30,226144	30,554083	31,770427
winter	26,830675	26,840673	26,821589	27,210524
bird	33,161090	33,655059	33,959729	36,424915
bridge	27,024998	27,154206	27,265919	28,632374
goldhill	28,419710	28,543566	28,604985	30,347575
rose	29,547306	26,840673	30,598752	32,153616

ЛИТЕРАТУРА

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М: Мир, 2005.
2. Hereford J., Roach D. W., Pigford R. Image compression using parameterized wavelets with feedback // Independent Component Analyses, Wavelets, and Neural Networks. 2003. V. 5102. P. 267–277.
3. Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008.

Некоторые экстремальные и аппроксимативные свойства сплайнов и интерполяционные регулярные и нерегулярные всплески

Субботин Ю. Н.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
yunsub@imm.uran.ru

В докладе речь пойдет о решении некоторых экстремальных задач интерполяции, сформулированных в частных случаях Н. Н. Яненко и в экстремальной постановке С. Б. Стечкиным. Будет рассказано о современном состоянии рассматриваемой проблемы, о некоторой их модификации и нерешённых проблемах. Будут затронуты проблемы, связанные с формосохраняющими аппроксимациями. Кроме того, будут рассмотрены проблемы построения регулярных интерполяционных всплесков на основе сплайнов четной и нечетной степени с равномерными узлами, а также нерегулярных интерполяционных всплесков, приспособленных для хорошей аппроксимации функций, имеющих конечное число особых точек.

Работа выполнена в рамках Программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-Т-1-1004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. Субботин Ю. Н. Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198.
3. Субботин Ю. Н. Применение сплайнов в теории приближений // ISNN. 1972. Vol. 20. P. 405–418.
4. Субботин Ю. Н. Формосохраняющая экспоненциальная аппроксимация // Изв. вузов. 2009. № 11. С. 53–60.
5. Subbotin Yu. N. Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean // East Jour. on Approx. 1996. Vol. 2, № 2. P. 155–167.

Об исследовании математических моделей многостадийного синтеза вещества

Фадеев С. И.¹, Лихошвай В. А.², Штокало Д. Н.³,
Королев В. К.¹

¹Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск;
fadeev@math.nsc.ru

²Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск;
likho@bionet.nsc.ru

³Новосибирский государственный университет, Новосибирск;
dmitry@nprog.ru

Обсуждается проблема математического моделирования многостадийного синтеза вещества (полимеров ДНК, РНК и белков). В качестве примера рассмотрена нелинейная модель синтеза с учетом обратимости и стоков. Численными методами исследуется возможность описания построенной модели уравнением с запаздывающим аргументом.

Рассмотрим автономную систему уравнений с нулевыми начальными данными при $t = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f(x_n) - \frac{c_1 x_1}{1 + \rho x_1^\sigma} + \frac{c_2 x_2}{1 + \rho x_2^\sigma} - \omega x_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= c_1 \left(\frac{x_{i-1}}{1 + \rho x_{i-1}^\sigma} - \frac{x_i}{1 + \rho x_i^\sigma} \right) - c_2 \left(\frac{x_i}{1 + \rho x_i^\sigma} - \frac{x_{i+1}}{1 + \rho x_{i+1}^\sigma} \right) - \omega x_i, \\ & \quad i = 2, \dots, n-2; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n-1}}{dt} &= c_1 \left(\frac{x_{n-2}}{1 + \rho x_{n-2}^\sigma} - \frac{x_{n-1}}{1 + \rho x_{n-1}^\sigma} \right) - \frac{c_2 x_{n-1}}{1 + \rho x_{n-1}^\sigma} - \omega x_{n-1}, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{c_1 x_{n-1}}{1 + \rho x_{n-1}^\sigma} - \theta x_n, \end{aligned}$$

Здесь $c_1 = (n-1)/\tau_1$, $c_2 = (n-1)/\tau_2$ – константы скоростей реакций на каждой из стадий; $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ – время протекания реакции прямого и обратного процессов; $\theta > 0$, $\omega \geq 0$ – константы утилизации и стока; $\rho \geq 0$ и $\sigma > 0$ – параметры, характеризующие нелинейность в описании промежуточных стадий; $f(x_n)$ – функция из класса функций Хилла, дающая описание скорости инициации синтеза, например, $f(z) = \alpha/(1 + \beta z^\gamma)$ с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$.

Гипотеза о предельном свойстве системы (1). Пусть $\tau_2 > \tau_1$. Тогда для любых $T > 0$ и $\sigma > 0$ имеет место равномерная сходимост

$$\sup_{t \in [0, T]} |x_n(t) - y(t)| \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $x_n(t)$ – n -я компонента решения задачи Коши (1), $y(t)$ – решение уравнения с запаздывающим аргументом с нулевыми начальными данными: $y(t) = 0$ при $t \leq \tau$,

$$t > \tau, \quad \frac{dy(t)}{dt} = e^{-\omega\tau} f(y(t - \tau)) - \theta x(t), \quad \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (2)$$

Сформулированная гипотеза получила численное подтверждение [1] путем прямого сравнения результатов интегрирования (1) и (2). Для этого потребовалась разработка эффективного метода интегрирования автономных систем с правыми частями типа (1), который позволяет при разумных временных затратах проводить численное исследование решений задачи Коши (1) при больших n (порядка 10^5 и более) и на достаточно большом интервале по времени. Была предложена полуняевная разностная схема с погрешностью аппроксимации решения порядка шага интегрирования, обладающая монотонностью и высокой устойчивостью к изменению шага интегрирования. При этом учет структуры правых частей позволил включить в алгоритм метод прогонки.

Как оказалось, учет нелинейности в описании процессов промежуточных стадий, характеризуемой значением параметра σ существенно влияет на предельное свойство, указывая на область параметров модели, в которой предельный переход становится практически невозможным. Если $\sigma \geq 1$, или не слишком отличается от единицы в меньшую сторону, то сравнение распределения продукта синтеза, задаваемого компонентой $x_n(t)$ системы (1), с тем, что дает решение уравнения с запаздывающим аргументом (2), указывает на практическое совпадение при не слишком больших n . Однако, с убыванием σ к нулю требуемое n резко возрастает, что практически свидетельствует о невозможности использования уравнения с запаздывающим аргументом (2) для описания распределения продукта синтеза в этой ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фадеев С. И., Лихошвай В. А., Штокало Д. Н., Королев В. К. Об исследовании математических моделей матричного синтеза нерегулярных полимеров ДНК, РНК и белков // Сибирские Электронные Математические Известия. 2010. Т. 7. С. 467–475.

О диадических нестационарных всплесках

Фарков Ю. А.

Российский государственный геологоразведочный университет,
Москва; farkov@list.ru

Стационарные диадические всплески на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ изучались в [1]–[3]. В частности, как показано в [2], необходимым условием ортогональности диадического всплеска ψ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, порождаемого масштабирующим уравнением с конечным числом ненулевых коэффициентов, является отсутствие у соответствующей маски блокирующих множеств. Относительно нестационарных всплесков на вещественной прямой \mathbb{R} см., например, [4, глава 8].

Для произвольной последовательности $\{f_j\}$ функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$f_{j,k}(x) = f_j(x \oplus 2^{-j}k), \quad j, k \in \mathbb{Z}_+,$$

где \oplus — операция двоичного сложения на \mathbb{R}_+ . Отметим, что преобразования Фурье-Уолша функций $f_{j,k}$ имеют вид $\widehat{f}_{j,k}(\omega) = w_k(2^{-j}\omega)\widehat{f}_j(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, где w_k — функции Уолша. Определим последовательности $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ по следующему алгоритму.

Шаг 1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбрать $b_k^{(n)} \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, такие, что

$$b_0^{(n)} = 1, \quad |b_k^{(n)}|^2 + |b_{k+2^{n-1}}^{(n)}|^2 = 1, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

Шаг 2. Определить коэффициенты $c_k^{(n)}$ по формулам

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{2^n-1} b_j^{(n)} w_j(2^{-n}k), \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

и проверить, что маска

$$m_0^{(n)}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k^{(n)} w_k(\omega)$$

не имеет блокирующих множеств.

Шаг 3. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ принять

$$\widehat{\varphi}_j(\omega) = 2^{-j/2} \prod_{n=j+1}^{\infty} m_0^{(n)}(2^{-n}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

так, что $\widehat{\varphi}_j(\omega) = \sqrt{2} m_0^{(j+1)}(2^{-j-1}\omega) \widehat{\varphi}_{j+1}(\omega)$.

Шаг 4. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ принять

$$\psi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} (-1)^k c_{k \oplus 1}^{(j+1)} \varphi_{j+1}(x \oplus 2^{-j-1}k), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Определим подпространства $\{V_j\}$ и $\{W_j\}$ по формулам

$$V_j = \overline{\text{span}} \{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad W_j = \overline{\text{span}} \{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Имеет место следующая

Теорема. Для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ справедливы свойства:

(i) системы $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ являются ортонормированными базисами в V_j и W_j соответственно;

(ii) $V_j \subset V_{j+1}$, $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$, $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}_+)$.

Следствие. Система

$$\{\varphi_0(\cdot \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}_+\}$$

является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Аналог этой теоремы для пространства $L^2(\mathbb{R})$ доказан в [4, § 8.2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Int. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21, № 2. P. 307–317.
2. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.
3. Родионов Е. А., Фарков Ю. А. Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 429–444.
4. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

Исследование задачи ранжирования документов

Фёдоров Е. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск;
forallepsilon@ya.ru

В работе рассматривается задача восстановления табличной функции ранжирования документов по её значениям в 245-мерном пространстве. Количество значений — почти 100000 наборов <признаки, значение функции>.

Практика построения регрессионных соотношений по реальным данным показывает, что с усложнением модели точность приближения падает. Здесь под сложностью понимается число параметров модели, от которых она зависит [1]. Это требует использования аппроксиматоров с минимальным числом параметров, которые подбирают исходя из условия минимизации ошибки в некоторой норме.

Исходные данные задачи имеют неоднородную структуру: признаки принимают либо бинарные значения 0 или 1, либо непрерывные, нормированные на интервал $[0, 1]$, значения функции — целые из интервала $[0, 4]$.

Аппроксимирующая функция ищется в виде

$$r(\bar{X}) = \sum_{i=1}^m u_i f_i(\bar{X}),$$

где u_i — параметры модели, оцениваемые по табличным данным (\bar{X}_k, r_k) , $k = 1, \dots, N$; $f_i(\bar{X})$, $i = 1, \dots, m$, — система базисных функций векторного аргумента \bar{X} .

Эта модель сводится к построению псевдорешения переопределённой системы линейных уравнений $Au = r$, где $a_{ij} = f_j(\bar{X}_i)$, $r_i = r_i(\bar{X}_i)$, $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, m$.

Точность аппроксимации оценивается на основе двух метрик — среднеквадратичного отклонения RMSE и уменьшающегося совокупного дохода DCG. Рассматриваются различные модели аппроксиматоров: линейная модель, линейная модель с калибровкой значений функции разными калибраторами, модели с квадратичными и кубическими базисными функциями, редукцией переменных, слабо коррелирующих с правой частью и переменных, сильно коррелирующих между собой,

метод главных компонент, линейная модель с адаптивными сдвигами правой части. Проводится сравнение моделей с точки зрения оценок RMSE и DCG.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. Москва: Финансы и статистика, 1985.

Всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций

Черных Н. И.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;
chernykh@imm.uran.ru

В докладе будет дан краткий обзор совместных результатов автора и Ю. Н. Субботина по теме, сформулированной в заглавии и будут представлены новые результаты по конструированию и применению всплесков для представления и исследования решений задач Дирихле и Пуассона в двухсвязных областях с эллиптической границей. В частности, предполагается описать особенности поведения решений рассматриваемых задач при стягивании внутренней границы области в точку и/или отрезок.

Работа поддержана РФФИ (проект 09-01-00014).

ЛИТЕРАТУРА

1. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
2. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 41, № 5. С. 17–30.
3. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Гармонические всплески в краевых задачах // Тр. Междун. конф. «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посв. 60-летию А. И. Субботина. Екатеринбург, 2005. Т. 1. С. 38–47.
4. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральной дыркой // Тр. Междун. летней мат. Школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ. 2007. С. 129–144.
5. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Задача Дирихле в области со щелью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 208–221.
6. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Гармонические всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 283–298.

Об условной положительной определённости логарифмических мультиквადриков

Шайдоров Т. С.¹, Роженко А. И.²

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск;
timoha89@mail.ru

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск; rozhenko@oanpg.sccc.ru

Условно положительно-определённые функции используются в качестве базисов в задачах приближения функций многих переменных сплайнами.

Непрерывная функция $G : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ называется условно положительно-определённой порядка $m \geq 0$ на $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, если

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j G(x_i, x_j) > 0$$

для любого множества различных точек x_1, \dots, x_n , $n \in \mathbb{N}$, и для всех векторов $\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, таких что $\sum_{i=1}^n \alpha_i p(x_i) = 0$ для всех полиномов $p(x)$ степени меньшей m .

Функцию $G(x, y)$ называют радиальной, если $G(x, y) = g(|x-y|)$, где $g(r)$ — функция скалярного аргумента, а $|x-y|$ — евклидово расстояние между точками.

Условная положительная определённость радиальных функций изучалась многими авторами. Отметим работу [1], в которой собраны результаты исследований в этом направлении и приведены доказательства для многих радиальных функций, в частности для функций, приведённых в таблице.

$g(r)$	Ограничения	Порядок	Примечание
$(-1)^{[\beta]+1} r^{2\beta}$	$\beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}$	$[\beta] + 1$	Степенное ядро
$(-1)^{\beta+1} r^{2\beta} \ln r$	$\beta > 0, \beta \in \mathbb{N}$	$\beta + 1$	Логарифмическое ядро
$(-1)^{[\beta]+1} (r^2 + c^2)^\beta$	$\beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}$	$[\beta] + 1$	Мультиквадрик
$(r^2 + c^2)^\beta$	$\beta < 0$	0	Обратный мультиквадрик

В цитируемой статье не исследован случай логарифмического мультиквадрика, когда степень мультиквадрика неотрицательная целая и добавляется логарифмический множитель. В работе доказывается следующее

Утверждение. Функция $g(r) = (-1)^{\beta+1}(r^2+c^2)^\beta \ln(r^2+c^2)$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, порождает условно положительно-определённую радиальную функцию порядка $\beta + 1$ в \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schaback R., Wendland H. Characterization and construction of radial basic functions // Multivariate Approximation and Application / Eds. D. Leviatan, D. Levin, A. Pinkus. Cambridge University Press, 2001. P. 1–24.

Суперкомпактные кубические мультивсплески и алгоритмы с расщеплением

Шумилов Б. М.¹, Эшаров Э. А.²

¹ *Томский государственный университет, Томск;*
 b_shumilov@math.tsu.ru

² *Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск;*
 elzare78@rambler.ru

1. Пусть V_L – пространство сплайнов степени 3 гладкости C^1 на отрезке $[a, b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L : u_i = a + (b - a)i/2^L$, $i = 0, 1, \dots, 2^L$, $L > 0$, и базисными функциями $N_{i,k}^L(v) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1 \forall i$, где $v = 2^L(u - a)/(b - a) + 1$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами двух известных функций [1]. Сплайн-коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k = 0, 1 \forall i$, являются узловыми значениями аппроксимируемой зависимости и её первой производной. Базисными функциями для пространства V_{L-1} являются функции $N_{i,k}^{L-1}$, в два раза большие по ширине, с центрами в четных целых числах.

2. Для случая аппроксимации незамкнутых кривых предлагается вычесть из исходных координат уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю точки. Полученный сплайн имеет нулевые значения при $u = a, b$, и в качестве вейвлетов допустимо использовать функции $N_{i,k}^L$ с центрами в четных целых числах [2]. Формулы для сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} и вейвлет-коэффициентов имеют вид произведения ленточных матриц на вектор сплайн-коэффициентов, $[C_0^{L,1}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,1}]^T$, на густой сетке Δ^L . Здесь значения коэффициентов $C_i^{L,0}$ и $C_i^{L,1}$ в нечетных узлах предварительно пересчитываются из решения двух независимых трехдиагональных систем линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием.

3. Полуортогональные конструкции позволяют получить гладкие симметричные вейвлеты с компактным носителем и при этом сохранить ортогональность между вейвлетами и базисными функциями. В частности, в [3] были найдены вейвлеты $\psi_k(t - i)$, $k = 0, 1 \forall i$, для которых удовлетворяются условия ортогональности относительно скалярного произведения с производными на всей числовой оси. Носителем функций $\psi_k(t)$, $k = 0, 1$, является отрезок $[0, 2]$. Это позволяет отнести данные вейвлеты к новому классу суперкомпактных вейвлетов, поскольку для случая стандартного скалярного произведения

носитель получается шире и составляет отрезок $[0, 3]$ [4]. Особый интерес они представляют для приложений, связанных с вариационным моделированием кривых и решением дифференциальных уравнений. После обнуления значений сплайна по концам отрезка аппроксимации $[a, b]$ и удаления из базиса соответствующих базисных функций условия ортогональности выполняются на конечном отрезке. Для вычисления сплайн-коэффициентов на прореженной сетке и вейвлет-коэффициентов имеют место аналогичные алгоритмы с расщеплением на параллельное решение двух независимых систем линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием при дополнительном условии предварительного пересчета сплайн-коэффициентов на густой сетке по некоторым простым формулам.

4. В докладе представлены результаты реконструкции вейвлет-разложения интерполяционного эрмитового кубического сплайна $S_3(t)$ с числом разбиений $n = 32$ на интервале $0 \leq x \leq 1$ для функции Хартена [5]. Сравнение с результатами вычисления по локальным формулам [5] показывает, что графики для обоих типов вейвлетов выглядят совершенно одинаково, однако для локальной схемы обнуляется вейвлет-коэффициент функции на самом нижнем уровне разрешения, тогда как для нелокальной схемы становится малым центральный из вейвлет-коэффициентов производных на верхнем уровне разрешения. Для полуортогональных вейвлетов становится малым большее число вейвлет-коэффициентов, так что эффект сжатия выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. Шумилов Б. М., Эшаров Э. А. Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. Приложение. 2006. № 19. С. 260–266.
3. Jia R.-Q., Liu S.-T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. 2006. V. 25. P. 23–39.
4. Гурсунов Д. А., Губская М. М. Новые типы эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов // Труды Томского государственного университета. – Т. 273. Серия общенаучная: Молодежная научная конференция Томского государственного университета 2009 г., вып. 2: Проблемы естествознания. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 217–220.
5. Arandiga F., Baeza A., Donat R. Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2004. V. 9. P. 263–273.

Алгоритмы построения и оптимизация прогнозов на основе рекуррентных сплайнов первой степени

Эшаров Э. А.¹, Шумилов Б. М.²

Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск; ¹elzare78@rambler.ru, ²sbm@tsuab.ru

Пусть измеряемый процесс $f(t)$ регистрируется в моменты времени t_i , $i = 0, 1, \dots, m, \dots$, со случайной погрешностью ξ_i :

$$y_i = f(t_i) + \xi_i \quad \forall i.$$

В [1] для выделения тренда случайного процесса используется аппроксимация значений, заданных на густой равномерной сетке $T = \{t_i\}$, сплайном первой степени с узлами $\hat{t}_k = t_{km} \in T$, $k = 0, 1, \dots$, на более редкой сетке вида

$$S_1(t) = \frac{\hat{t}_{k+1} - t}{\Delta t} \alpha_k + \frac{t - \hat{t}_k}{\Delta t} \alpha_{k+1}, \quad \hat{t}_k \leq t \leq \hat{t}_{k+1}, \quad \hat{t}_{k+1} = \hat{t}_k + \Delta t.$$

В докладе показывается, что некоторое улучшение результата для случая гладких функций дает применение рекуррентного сплайн-фильтра по схеме прогнозирования, когда для нахождения оценок коэффициента $\hat{\alpha}_{k+1}$ сплайна $S_1(t)$ используется рекуррентный алгоритм глубины 1, требующий пересчета этого коэффициента через известный $\hat{\alpha}_k$ с учетом наблюдений, поступивших с $(k - 1)$ -го участка:

$$\hat{\alpha}_{k+1} = \lambda \hat{\alpha}_k + \sum_{i=0}^m b_i y_{(k-1)m+i}, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом k -я группа измерений не влияет на значения оценок коэффициентов $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_k$, вычисленных ранее, причем значения $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ определяются, например, по способу наименьших квадратов на начальном участке измерений.

На основе теории сплайн-схем, точных на многочленах [2], строится модификация данной формулы, позволяющая уменьшить время запаздывания вычисления прогноза по отношению к моментам измерения. Выполняется оптимизация построенной формулы по критерию минимума остаточной дисперсии оценок.

Теорема. Пусть тренд выполняется линейным продолжением оптимального рекуррентного сплайна 1-й степени. В точках \hat{t}_k и \hat{t}_{k+1} средняя ошибка положения линии тренда равна ошибке коэффициента сплайна, т.е. $\sigma\sqrt{2(6 + \sqrt{39})}/m$, а в любой иной точке тренда его средняя ошибка $\omega_y^O(t)$ вычисляется как

$$\frac{\sigma}{\Delta t} \sqrt{\frac{2(6 + \sqrt{39})}{m} [\hat{t}_{k+1} + \lambda(t - \hat{t}_k) - t]^2 + \frac{12(26 + 3\sqrt{39})}{25m} (t - \hat{t}_k)^2}.$$

Аналогично можно получить для линейного продолжения простого рекуррентного сплайна 1-й степени

$$\omega_y^S(t) = \frac{\sigma}{\Delta t} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{m} [\hat{t}_k - \lambda\hat{t}_{k-1} - t(1 - \lambda)]^2 + \frac{(24 - 12\sqrt{3})}{m} (t - \hat{t}_{k-1})^2}.$$

Поскольку при этом

$$\omega_y^S(\hat{t}_{k+2}) = \sqrt{\frac{74\sqrt{3} - 72}{m}} \sigma > \omega_y^O(\hat{t}_{k+2}) = \sqrt{\frac{2(6 + \sqrt{39})}{m}} \sigma,$$

немедленно следует вывод, что дисперсия продолжения сплайна на два шага вперед по простой схеме больше, чем дисперсия продолжения сплайна на шаг вперед по оптимальной схеме, хотя исходные данные берутся одинаковые.

В докладе анализируется возможность осуществления точечного и интервального прогнозов по полученным формулам. Приводятся результаты численных экспериментов и дано сравнение с классическими методами прогнозирования временных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц К.И. Сглаживание экспериментальных данных сплайнами. Томск: Изд-во ТГУ, 1991.
2. Шумилов Б.М. Рекуррентная аппроксимация сплайнами // Известия вузов. Математика. 1996. № 1. С. 85–87.

Mathematical modelling of a gravitational optical phenomenon in the Milky Way centre

Leus V.¹, Taylor S.²

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk; ladakyle@sky.com*

²*University of Liverpool, Liverpool; s.taylor@liv.ac.uk*

A mathematical modelling of some natural phenomena always played a significant role for scientific comprehension. It enabled researchers to elucidate an implicit essence hidden beyond an obvious appearance, and subsequently to predict an uncertain reality. A widely known example is the discovery of the planet Neptune made by a French mathematician Urbain Le Verrier “with the point of his pen” in the middle of the 19-th century. Our theoretic paper also deals with astronomical data obtained from the observations of an enigmatic object hidden amongst clouds of dust in the centre of Galaxy.

The effect of a light beam bending near a massive body may be interpreted as a consequence of space-refraction taking place in the vicinity of a mass, where the value of refractive index depends on the gravitational potential. Einstein was the first scientist to discuss the natural phenomenon of gravitational lensing. In 1936 he examined the possibility that the gravity-lensing effect might be detected if one star intercepts the line of sight to a more distant star. He understood that such a geometrical occurrence is extremely unlikely. Moreover, even if the case arises the effect may be undetectable due to the very small angular diameter of the image — the bright halo (Einstein ring) encircling the lensing star. Even nowadays the angular diameter of images caused by a stellar mass — so called microlensing — is too small to be resolvable by telescopes.

However, there is an object in our Milky Way which could play the role of the point mass for an unusual “rowd scene” microlensing. We mean the super-gigantic collapsar — the so called black hole — located in the centre of the Galaxy. Its existence has been demonstrated by high-resolution observations in the near infrared range of the stars orbiting the collapsar under Kepler’s laws. According to observed movements of nearly hundred stars calculations show that the central collapsar has a mass of several million solar masses, concentrated in a region of order of 0.5 light minute in diameter.

The microlensing of one star usually gives two images located very close one to another. For the solar-mass lens the angular separation corresponds to several microarcseconds only. That is why astronomers use microlensing exclusively as a magnifying instrument giving an opportunity to observe very weak objects invisible otherwise. Nevertheless, in the case of the centre of Milky Way there are a dense cluster of stars surrounding super-massive collapsar from each arm. Mathematical modelling of the situation shows that the full superposition over all microlensing images of stars would provide a refulgent optical aureole which should be able to be detected by observation.

On restoration of signals by a regularization method

Morozov V. A.

Research Computer Center of Moscow State University, Moscow;
morozov@srcc.msu.ru

The problem for restoration of noisy signals is treated as a problem of calculation of certain values for an unbounded operator. In this connection a Tikhonov regularization method is used. Completely theoretically justified approaches to the choice of the regularization parameter, as well as pragmatic approaches, based on intuitive reasons, are considered. The usage of some a priori information about the structure of the required “useful” signal in the “temporary” area, as well as in the “frequent” one, is admitted. The exposition is conducted in language of the functional analysis. This permits a reasonably strict justification of all considerations. It also provides a further range of possible applications in various fields of knowledge, connected with processing of experimental data. The considered here setting of the problem corresponds to the case of direct measurements. Influence of “large” nuisances is also investigated.

This work was carried out under financial support of RFFI (grants №10-01-00297)

REFERENCES

1. *Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya.* Methods for solving ill-posed problems // Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
2. *Morozov V. A.* Methods for solving incorrectly posed problems // N.-Y. etc.: Springer, 1984.
3. *Morozov V. A.* Regularization methods for ill-posed problems // London etc.: CRC Press, 1993
4. *Groetsch C. W.* The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations 13 of the first kind // Boston: Pitman, 1984.
5. *Malyshev V. A., Morozov V. A.* Linear semigroups and differential inequalities // Moscow: MSU, 1995.
6. *Morozov V. A.* Some aspects of restoration of signal by a regularization method // Singapore etc.: World Scientific Public., 1999.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аниконов Ю. Е., 11
Арестов В. В., 13
- Байдакова Н. В., 14
Белых В. Н., 16
Блатов И. А., 18
Богданов В. В., 20, 22
Бурова И. Г., 23
- Васкевич В. Л., 25
Викентьев А. А., 27
Викентьев Р. А., 27
Виноградов О. Л., 29
Войтишек А. В., 31
Волков Ю. С., 5, 11, 33, 35
Воронова Л. Г., 37
- Гордиенко В. М., 39
Горелов Д. Н., 41
Горшкалев С. Б., 11
- Демьянович Ю. К., 43
Деревцов Е. Ю., 11
Добробог Н. В., 18
Дольников В. Л., 45
- Жук В. В., 29
- Задорин А. И., 47
- Иродова И. П., 49
Исаев В. К., 51
- Карстен В. В., 22
Квасов Б. И., 53
Ким В. А., 54
- Ковалев С. Н., 56
Коновалов А. Н., 57
Королев В. К., 90
Кузоватов И. А., 58
- Лабусов В. А., 60
Лихошвай В. А., 90
Лукомский С. Ф., 62
- Макаров А. А., 64
Мальцева С. В., 11, 65
Мирошниченко В. Л., 5, 22, 60, 66
- Новиков С. И., 68
- Овчинникова Т. Э., 69
- Плавник А. Г., 71, 73
Полякова А. П., 75
Примаков С. С., 77
- Роженко А. И., 79, 97
- Светов И. Е., 81
Селонин Д. О., 60
Сидоров А. Н., 71, 73
Скороспелов В. А., 37
Стрелков Н. А., 45, 83
Стрелкова Е. В., 35, 85
Строганов С. А., 87
Субботин Ю. Н., 89
Суббочев Н. Г., 58
- Турук П. А., 37
- Фадеев С. И., 90
Фарков Ю. А., 52

Фёдоров Е. А., 56, 94

Черных Н. И., 96

Шайдоров Т. С., 97

Шевалдин В. Т., 35, 85

Штокало Д. Н., 90

Шумилов Б. М., 99, 101

Эшаров Э. А., 99, 101

Leus V., 103

Morozov V. A., 105

Taylor S., 103

СОДЕРЖАНИЕ

Сплайны как инструмент геометрического моделирования (к 80-летию со дня рождения Ю. С. Завьялова) <i>Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.</i>	5
Аниконов Ю. Е., Волков Ю. С., Горшкалев С. Б., Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В. О задаче определения класса скоростей с заданной структурой линий уровня по кинематическим данным	11
Арестов В. В. Точные интегральные неравенства для тригонометрических полиномов.....	13
Байдакова Н. В. Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса по равномерным узлам симплекса	14
Белых В. Н. Об абсолютной ϵ -энтропии компакта периодических C^∞ -гладких функций (к проблеме К.И. Бабенко)	16
Блатов И. А., Добробог Н. В. Проекторы на пространства линейных сплайнов и сходимость алгоритмов адаптации для сингулярно возмущенных краевых задач	18
Богданов В. В. Комонотонная интерполяция кубическим сплайном в случае одной переменной направления монотонности.....	20
Богданов В. В., Карстен В. В., Мирошниченко В. Л. Сплайновый метод решения задачи об определении скоростной характеристики среды по данным сейсмического профилирования..	22
Бурова И. Г. Фундаментальные и интерполяционные базисные сплайны шестого порядка аппроксимации.....	23
Васкевич В. Л. Экстремальные функции кубатурных формул на многомерной сфере.....	25

Викентьев А. А., Викентьев Р. А. Расстояния и степени достоверности на многозначных высказываниях экспертов.....	27
Виноградов О. Л., Жук В. В. Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности высоких порядков.....	29
Войтишек А. В. Использование сплайнов в дискретно-стохастических численных алгоритмах.....	31
Волков Ю. С. Исследование аппроксимативных свойств интерполяционных сплайнов.....	33
Волков Ю. С., Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т. О локальной аппроксимации кубическими сплайнами.....	35
Воронова Л. Г., Скороспелов В. А., Турук П. А. Сплайны в инженерной геометрии.....	37
Гордиенко В. М. Сведение краевой задачи для волнового уравнения к краевой задаче для симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием.....	39
Горелов Д. Н. Аппроксимация сложных контуров мультисплайнами.....	41
Демьянович Ю. К. Вложенные пространства сплайнов и их всплесковое разложение.	43
Дольников В. Л., Стрелков Н. А. Шкала неулучшаемых оценок погрешности интерполяционных сплайнов произвольного порядка на множествах суперсходимости	45
Задорин А. И. Аналог квадратического сплайна для функций с погранслошной составляющей.....	47
Иродова И. П. Об алгоритме склейки кусочно-полиномиальных функций.....	49
Исаев В. К. Ю. С. Завьялов и развитие аэрокосмических исследований (1970-1995 г.г.).....	51

Квасов Б. И. Изогеометрическая аппроксимация сплайнами с натяжением	53
Ким В. А. Точные константы Лебега для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов формально-самосопряженного дифференциального оператора	54
Ковалев С. Н., Фёдоров Е. А. Об одном алгоритме поиска ближайших соседей в многомерной сетке	56
Коновалов А. Н. Разностные схемы и законы сохранения	57
Кузоватов И. А., Суббочев Н. Г. Построение компактных разностных схем для численного решения одномерных сингулярных диффузионно-конвективных уравнений	58
Лабусов В. А., Мирошниченко В. Л., Селюнин Д. О. Применение метода наименьших квадратов для калибровки изме- рительных каналов МАЭС	60
Лукомский С. Ф. Всплесковые базисы на произведении нульмерных групп	62
Макаров А. А. О неполиномиальных B -кривых	64
Мальцева С. В. Численное исследование критерия горизонтальной однородности среды по кинематическим данным	65
Мирошниченко В. Л. Об алгоритмах и программах для построения кубических сплайнов	66
Новиков С. И. Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Ла- пласа на классах интерполируемых данных	68
Овчинникова Т. Э. О возможности использования линейного приближения для урав- нения состояния воды при моделировании гидрофизических про- цессов в водоемах с высокой минерализацией	69
Плавник А. Г., Сидоров А. Н. Анализ ошибок сплайн-аппроксимационного приближения в зада- чах геокартирования	71

Плавник А. Г., Сидоров А. Н. Оценка устойчивости геокартирования в рамках сплайн-аппроксимационного подхода	73
Полякова А. П. Восстановление векторных полей по их известным лучевым преобразованиям на основе метода наименьших квадратов с использованием B -сплайнов	75
Примаков С. С. Асимптотический анализ краевых условий для сплайнов пятой степени	77
Роженко А. И. О стратегии приближения функций многих переменных	79
Светов И. Е. Использование B -сплайнов при численном решении задачи векторной $2D$ -томографии	81
Стрелков Н. А. Точные константы в неравенствах для интерполяционных сплайнов произвольного порядка	83
Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т. Наследование свойства обобщенной k -монотонности при аппроксимации локальными \mathcal{L} -сплайнами	85
Строганов С. А. О применении диадических биортогональных дискретных всплесков для обработки изображений	87
Субботин Ю. Н. Некоторые экстремальные и аппроксимативные свойства сплайнов и интерполяционные регулярные и нерегулярные всплески	89
Фадеев С. И., Лихошвай В. А., Штокало Д. Н., Королев В. К. Об исследовании математических моделей многостадийного синтеза вещества	90
Фарков Ю. А. О диадических нестационарных всплесках	92
Фёдоров Е. А. Исследование задачи ранжирования документов	94

Черных Н. И. Всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций	96
Шайдоров Т. С., Рожено А. И. Об условной положительной определённости логарифмических мультиквадриков	97
Шумилов Б. М., Эшаров Э. А. Суперкомпактные кубические мультивсплески и алгоритмы с расщеплением	99
Эшаров Э. А., Шумилов Б. М. Алгоритмы построения и оптимизация прогнозов на основе рекуррентных сплайнов первой степени	101
Leus V., Taylor S. Mathematical modelling of a gravitational optical phenomenon in the Milky Way centre	103
Morozov V. A. On restoration of signals by a regularization method	105
Авторский указатель	106

Научное издание

МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

Тезисы докладов

Российская конференция,
посвящённая 80-летию со дня рождения
Юрия Семёновича Завьялова
31 января – 2 февраля 2011 г.

Редактор В. Л. Мирошниченко
Ответственный за выпуск Ю. С. Волков

Подписано в печать 18.01.2011 г. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7. Тираж 100 экз. Заказ № 415.

Издательство Института математики,
пр. Ак. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск
Отпечатано в РИЦ “Прайс-курьер”
ул. Ак. Кутателадзе, 4г, 630128 Новосибирск, тел. 330-72-02.