

Молодежная международная научная
школа-конференция

«Теория и численные методы
решения
обратных и некорректных задач»

Тезисы докладов.

Новосибирск, 2009

Содержание

А. Абдукаримов, Т. Ишанкулов. О неклассической задаче Коши для уравнения теплопроводности	8
А. Абдукаримов, О.И. Махмудов . Формула Карлемана для полигармонического уравнения	9
У.У. Абылкаиров, А.А. Абиев, С.Е. Айтжанов. Обратная задача для системы тепловой конвекции	10
А.Л. Агеев, Т.В. Антонова, В.В. Васин, Е.А. Пимонов, Ф.Дж. Кучук. Модифицированный метод Левенберга-Марквардта для решения задачи деконволюции	12
А.Н. Алимова.Регуляризация уравнения Фредгольма первого рода методом сингулярного разложения оператора	14
Э.В. Арбузов, А.Л. Бухгейм. О решении задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости с помощью интегрального оператора Коши	15
А. Асанов, С. Жокен кызы. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода	16
А.С. Астракова, Д.В. Банников, М.М. Лаврентьев-мл., С.Г. Чёрный. Численный метод решения обратных задач на основе генетического алгоритма	17
А.В. Баев. Применение оптимального восстановления в обратных задачах: классы задач	19
Р.Б. Балтабаева. Визуализация одной нелинейной задачи солепереноса с учетом конвективного переноса	21
Н.С.Беделова. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода	22
М.А. Белоносов. Применение интегрального преобразования Лагерра и метода декомпозиции области для численного моделирования волновых полей	23
С.Е. Бойченко. Численный метод решения обратных коэффициентных задач	24
О.Б. Бочаров. Проблемы физико-математического моделирования движения флюидов в пористых средах	25
А.Б. Бредихина. О наилучшем выборе параметра в методе проекционной регуляризации	26
Н. В. Важенцева. Новый алгоритм двумерной томографии в ограниченном диапазоне углов	27
В.В. Васин, Г.Г. Скорик, Е.А. Пимонов, Ф.Дж. Кучук Регулярные методы решения задачи деконволюции, возникающей в скважинной геофизике	28

И.С. Вахитов. Единственность решения обратной коэффициентной задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции	30
Р. А. Викентьев, А. А. Викентьев. Свойства расстояний на высказываниях экспертов с вероятностями	31
Д.М. Вишневецкий. Параллельная реализация численного моделирования трехмерного распространения волн в анизотропной среде	32
А.А. Власов (И.Н. Ельцов, А.Ю. Соболев, А.Н. Фаре, М.М. Лаврентьев, А.В. Авдеев, Н.И. Горбенко, В.А. Ефимов, S. Story). Высокопроизводительные решатели прямых и обратных задач каротажа в системе EMF Pro на основе технологий Intel.	33
В.П.Голубятников. Распознавание тел и тонких пленок по прямолинейным и круговым проекциям.	34
В.М. Гордиенко. О корректности смешанной задачи для волнового уравнения	35
А.В. Гочаков. Два подхода к построению частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов деконволюции интегрального уравнения	36
Г. Даирбаева. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности	37
Е.Ю. Деревцов. Интегральные преобразования как основной математический аппарат томографии	39
С.К. Джанабекова, С.Т. Мухамбетжанов, Н.К. Шаждекеева. Об одной обратной задаче типа Стефана	40
А. И. Дрегла. О решении систем нелинейных уравнений в теории формирования волокон	42
Д. К. Дурдиев. Задача определения нестационарного коэффициента поглощения в одном уравнении гиперболического типа	43
Е.В. Дутикова. Решение граничной обратной двухфазной задачи Стефана с неизвестной границей	44
А. Елеуов, Б.Е. Кангужин. Численный метод восстановления пяти диагональных симметричных матриц по спектральным данным	46
В. И. Ерохин, В. В. Волков. Построение модельных приближенных СЛАУ с известными решениями, являющимися точками минимума классического сглаживающего функционала	47
А.В. Ефимов. Восстановление симметричных тензорных полей малого ранга по томографическим данным методом сингулярного разложения	48
А.А. Жидков, А.В. Калинин, М.И. Сумин. О некоторых обратных задачах для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении	49

Д.С. Иващенко. Численные методы решения обратных задач теории аномальной диффузии.	50
Э.А. Илишева, М.М. Касымбекова. Про идентификации коэффициентов двумерного нелинейного уравнения	51
К.Т. Искаков. Обратная задача для модели противоточной капиллярной пропитки	52
З.А. Каденова. О единственности решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода	53
К.В. Ковбасов. Анализ алгоритмов решения прямых и обратных задач зондирования на постоянном токе	54
Н.Ю. Колесникова. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной граничной задачи для параболического уравнения	55
М.А. Короткий. Восстановление управлений методом динамической регуляризации с негладкими стабилизаторами	56
А.В. Красник. О разрешимости задачи Коши для нелинейного сингулярного дифференциально-операторного уравнения	58
А.С. Кутузов. О приближённом решении одной двумерной обратной задачи для уравнения теплопроводности	59
Г.Г. Лазарева, И.М. Куликов. Параллельная реализация численной модели столкновения галактик	60
Е.В. Лысь. Конечно-разностное моделирование акустического каротажа в трехмерных неоднородных трансверсально-изотропных средах с поглощением	61
Е.В. Маркова, И.В. Сидлер. О численном решении одной системы неклассических интегральных уравнений Вольтерра	62
А.Н. Марковский, В.Г. Лежнев. Алгоритм вычисления гармонической составляющей плотности ньютонова потенциала	63
О. Махмудов, И. Ниёзов. Задача Коши для системы уравнений упруго-колебательного состояния	64
К.Б. Матанова. О разрешимости обратной задачи для дифференциального уравнения с частными производными	65
С. И. Митрохин. О некоторых примерах изоспектральных операторов шестого порядка	66
Л.В. Мосенцова. Алгоритм решения уравнений Фредгольма I рода на основе метода модельных примеров	67
С.Т. Мухамбетжанов, Т.С. Кенжебаев. Об одном методе решения обратной задачи теории фильтрации	68

С.Т. Мухамбетжанов, Ж.О. Оралбекова, Идентификация коэффициентов в модели Маскета–Левретта	69
Д.В. Нечаев. Численный метод решения сферической задачи Радона с данными на полусфере	70
А.В. Новиков. Метод «вращающегося» параболического уравнения для расчета поля над неровной земной поверхностью	71
А.Т. Нурсейтова, Д.Б. Нурсейтов, Г.А. Тюлепбердинова. Метод Ландвебера в обратной задаче акустики	72
С.С. Орлов. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором при старшей производной	73
А.В. Пененко. Итерационное решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности с использованием дискретно-аналитических численных схем	74
В.В. Пикалов. Итерационные алгоритмы томографии: роль дифракции, диффузии и деформации	75
А.П. Полякова. Применение аналитически вычисленных образов лучевых преобразований 2-тензорных полей, построенных на основе В-сплайнов, при численном решении задач 2-тензорной томографии	76
А.О.Разумов.Параллельный алгоритм ветвей и границ для решения задач целочисленной линейной оптимизации	77
А.А. Рогалев, Вычисление границ множеств решений дифференциальных уравнений с помощью коэффициентов вариации решений	78
А.Д. Саспаева. Обратная задача динамики симметричного намагниченного спутника	80
Э.Н. Сатторов. Задача Коши для обобщенной системы Коши-Римана	81
Э.Н. Сатторов, К.О. Махмудов. Критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений Максвелла	82
А.М. Сатымбеков, А.К. Самбетбаева. Об одной задаче идентификации фильтрационных параметров водонапорного бассейна	83
Р.Р. Сафиуллова.Линейные обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка	84
И.Е. Светов. Приближенное решение одной задачи 2-тензорной томографии	85
М.В. Свиридов. Обратная задача для геонавигации и оценки параметров продуктивного пласта	86
А.А. Седипков. Прямые и обратные динамические задачи теории распространения волн в упругой неоднородной среде	88

Ю.В. Семилетко. Итерационный метод решения задачи о восстановлении параметров флюидо-насыщенности и горной породы по данным измерений импульсного нейтронного гамма каротажа. Численные эксперименты.	89
А.С.Сердюков. Оптимальная параметризация в обратной кинематической задаче теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды	90
С.М. Серебрянский. О методах приближенного решения одной обратной задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом	91
Н.А.Сидоров, Д.Н.Сидоров. О решении интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений	92
Е.В. Скокова. Численный метод решения обратной задачи распространения возбуждения в сердечной мышце.	93
М.С. Соппа. Численное решение задачи восстановления импедансного покрытия с заданной фазовой характеристикой диаграммы рассеяния	94
В.А. Спиряев. О некоторой мажорантной задаче Коши	96
Е.Н. Сукманова. Решение обратной коэффициентной задачи для процессов с фазовым переходом	97
М.А.Султанов, Г.Б.Баканов. Об устойчивости возмущенной разностной схемы связанной с обратной задачей для уравнения Шредингера	98
Е.В.Табаринцева. О решении одной обратной задачи для параболического уравнения	99
В.П. Танана, Т.Н.Рудакова. Оптимальность метода М.М.Лаврентьева	100
В.П. Танана, А.И. Сидикова. Об оценке точности решения задачи тепловой диагностики в неоднородной среде	101
В.П. Танана, Н.М. Япарова. Оценка конечномерных методов решения условно-корректных задач	102
Ф.С.Телгожаева. Устойчивость обратной задачи геоэлектрики	103
А.Б. Тмур. Определение параметров течения жидкости в трубопроводе на основании измерений давления в контрольных точках	104
Ф.Р.Турсунов. О задаче Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами	106
К.С. Фаязов, И.О. Хажиев. Некорректная краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка смешанного типа	108
В.В. Филатов, О.Ю. Светозерский. Об одной обратной задаче индукционного каротажа	109
А.Н. Чайко. О методе внутренних точек для решения задачи термодинамического равновесия	110

П.А. Чистяков. Регуляризация операторных уравнений в банаховых пространствах	111
А.А. Чубатов, В.Н. Кармазин. О выборе параметра регуляризации в задаче экспресс-контроля за источником загрязнения атмосферы	112
Е.Ф. Шарин. Об одной задаче для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами	113
А.А. Шибельгут, Р.В. Литвинов, А.В. Максимов. Обратная задача радиолокации слоистых сред рупорной антенной	114
К.М. Шияпов, К. Куспанова. Об одной модели неизотермической фильтрации с учетом фазовых переходов	116
М.С. Щербинин. Идентификация полиномов Вольтерра на базе численного метода интегрирования произведения	117
Н.М. Япарова, О.В. Ястребинская. Оценка регуляризованного решения одной обратной задачи физики твердого тела	118
E. Landa. How correct is a velocity model?	119
V.V. Vasin. Iterative methods for solving ill-posed problems with a priori information and its applications	120

О неклассической задаче Коши для уравнения теплопроводности

А. Абдукаримов, Т. Ишанкулов

Самаркандский филиал ТУИТ, Самаркандский государственный университет;

Abdukarimov54@mail.ru, itolib@rambler.ru

В работе рассматривается некорректная задача Коши для уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных с данными на временноподобной поверхности, в постановке М.М. Лаврентьева. Для области типа «шапочка» получена функция Карлемана.

Пусть D ограниченная односвязная область в пространстве (x_1, x_2, t) , $(\xi_1, \xi_2, t) \in R^3$ с границей ∂D , состоящая из квадрата $T = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$ плоскости $0x_1x_2$ и гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $t \geq 0$ $\partial D = S \cup T$, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $A(D)$ пространство функций $u(x, t)$, $(x, t) \in D$ непрерывных вместе со своими частными производными первого порядка по x_1, x_2 на $\bar{D} = D \cup \partial D$ и удовлетворяющих условию

$$\max \left(|u(x_1, x_2, t)|, \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) \right| \right) \leq M, \quad (x_1, x_2, t) \in \bar{D} \quad (1)$$

Задача. Пусть $u(x_1, x_2, t) \in A(D)$,

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}, \quad (x_1, x_2, t) \in D \quad (2)$$

$$u(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t), \quad \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} = g_1(x_1, x_2, t)$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = g_2(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in S \quad (3)$$

где $g_1(x_1, x_2, t)$, $g_2(x_1, x_2, t)$ и $f(x_1, x_2, t)$ заданные на S непрерывные функции.

Требуется восстановить $u(x_1, x_2, t)$ в области D . Единственность решения этой задачи доказана Хольмгреном. Пример некорректности приведен в работе [1].

Литература.

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, — 1986. — С. 286.

Формула Карлемана для полигармонического уравнения

А. Абдукаримов, О.И. Махмудов

Самаркандский филиал ТУИТ, Самаркандский государственный университет;
Abdukarimov54@mail.ru, makhmudovo@rambler.ru

Рассматривается задача Коши для полигармонического уравнения в ограниченной области с данными Коши, известными только на участке границы области. Для решения этой задачи выводится формула типа Карлемана и приводится критерий разрешимости для шара.

Пусть B_Q шар в \mathbb{R}^3 с центром в нуле радиуса $0 < Q < \infty$ и S гладкая замкнутая поверхность в B_Q , разделяющая шар на две компоненты $G^- = D$ и G^+ , таких что $0 \in G^+$ и ориентированная как граница G^- . Рассмотрим следующую задачу Коши для полигармонического уравнения.

Пусть $U(x) \in C^{2n}(D) \cap \bar{C}^{2n-1}(S)$ и

$$\Delta^n U(x) = 0, \quad x \in D, \quad (1)$$

$$U(y) = f_0(y), \quad \Delta U(y) = f_1(y), \dots, \Delta^{n-1} U(y) = f_{n-1}(y), \quad y \in S \quad (2)$$

$$\frac{dU(y)}{d\nu} = \varphi_0(y), \quad \frac{d\Delta U(y)}{d\nu} = \varphi_1(y), \dots, \frac{d\Delta^{n-1} U(y)}{d\nu} = \varphi_{n-1}(y), \quad y \in S \quad (3)$$

где $\frac{d}{d\nu}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали, $f_i(y)$ и $\varphi_i(y)$ — заданные на S непрерывные функции. Требуется восстановить $U(y)$ в D .

Для произвольных $f_i(y)$ и $\varphi_i(y)$ задача (1) - (3) неразрешима.

Если $f_i(y)$ и $\varphi_i(y)$ аналитичны и аналитично продолжаемы в D то решение задачи (1)-(3) существует, единственно, но неустойчиво. Поэтому задача (1)-(3) относится к числу некорректно поставленных задач [1, 2].

Литература.

1. Лаврентьев М.М. О задачи Коши для уравнения Лапласа. // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1956. т.20. С. 819-842
2. Ярмухаммедов Ш. Задачи Коши для полигармонического уравнения. Доклады РАН, том 388, №2, стр. 162- 165. 2003.

Обратная задача для системы тепловой конвекции

У.У. Абылкаиров, А.А. Абиев

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

U.Abylkairov@inbox.ru

С.Е. Айтжанов

Казахский Национальный Педагогический Университет имени Абая, Алматы, Казахстан;

SAitzhanov@mail.ru

В работе У.У. Абылкаирова исследована обратная задача для общего параболического уравнения с интегральным наблюдением.

В данной работе исследуется обратная задача для уравнений тепловой конвекции. В которой требуется определить скорость движения жидкости, давление, температуру, внешние силы и источник. Методом последовательных приближений доказаны теорема существования, единственности и устойчивости обобщенного решения.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega \subset R^2$ обратную задачу для уравнении конвекции, определить $\vec{v}(x, t)$, $\theta(x, t)$, $\nabla p(x, t)$, $f(t)$ и $\varphi(t)$, которые удовлетворяют:

$$\frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial t} + v_k \vec{v}_{x_k} + \nabla p(x, t) = v \Delta \vec{v}(x, t) + \beta(x, t) \vec{g}(x, t) \theta(x, t) + f(t) \vec{\lambda}(x, t) \quad (1)$$

$$c \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta \right] = \chi \Delta \theta + \varphi(t) \mu(x, t), \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (3)$$

начальным условиям

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x) \quad (4)$$

граничным условиям

$$\vec{v}|_S = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (5)$$

и интегральным условиям

$$\int_{\Omega} \vec{u}(x, t) \cdot \vec{v}(x, t) dx = e(t), \quad \int_{\Omega} k(x, t) \theta(x, t) dx = b(t) \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\vec{u}(x, t) \in C^1 \left(0, T; V^1(\Omega) \right), \quad e(t) \in W_2^1(0, T), \quad \vec{\lambda}(x, t) \in C(\overline{Q}_T), \quad \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\lambda} dx \neq 0, \quad \text{при } t \in [0, T]$$

$$\beta(x, t) \vec{g}(x, t) \in C^{1,1}(\overline{Q}_T), \quad \vec{v}_0(x) \in W_2^1(\Omega) \cap J^0(\Omega), \quad \theta_0(x) \in W_2^1(\Omega), \quad k(x, t) \in C^{1,1}(\overline{Q}_T), \quad b(t) \in W_2^1(0, T), \quad \mu(x, t) \in C(\overline{Q}_T), \quad \int_{\Omega} k \cdot \mu dx \neq 0 \quad \text{при } t \in [0, T],$$

тогда существует единственное обобщенное решение $\vec{v}(x, t) \in V_2(Q_T)$, $\theta(x, t) \in \tilde{V}_2(Q_T)$, $f(t) \in L_2(0, T)$, $\varphi(t) \in L_2(0, T)$ обратной задачи (1)-(6).

Теорема 2. Пусть \vec{v}_k , θ_k , f_k , φ_k , ($k = 1, 2$) обобщенные решения обратной задачи (1)-(6), тогда выполняется соотношение

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{V_2(Q_T)} + \|\theta_1 - \theta_2\|_{\tilde{V}_2(Q_T)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(0, T)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(0, T)} \leq$$

$$\leq C(T) \left[\|\vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\theta_{01} - \theta_{02}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|e_1 - e_2\|_{H^1(0,T)} + \|b_1 - b_2\|_{H^1(0,T)} \right]$$

Литература

1. *Абылкаиров У.У.* Обратная задача интегрального наблюдения для общего параболического уравнения. // Математический журнал. Алматы. 2003. Том 3, №4(10), С.5-12.

Модифицированный метод Левенберга-Марквардта для решения задачи деконволюции

А.Л. Агеев, Т.В. Антонова, В.В. Васин

Институт Математики и Механики УрО РАН;
vasin@imm.uran.ru

Е.А. Пимонов

Schlumberger Moscow Research;
epimonov@slb.com

Ф.Дж. Кучук

Schlumberger Riboud Product Centre;
kuchuk@slb.com

При интерпретации данных гидродинамических испытаний скважин возникает проблема решения уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки [1]

$$Ag \equiv \int_0^t q(t-\tau)g(\tau)dp = \Delta p(t), \quad (1)$$

где $\Delta p(t) = p - p(t)$ - наблюдаемое падение давления, p_0 - начальное давление в пласте, $p(t)$ и $q(t)$ - давление и расход скважинной жидкости соответственно, измеряемые в скважине; значение p_0 и функции $p(t)$ и $q(t)$ заданы. Функции $g(t) = dp_u(t)/dt$ (импульсный отклик пласта) и $p_u(t)$ (падение давления при постоянном единичном расходе скважинной жидкости) подлежат определению. В дальнейшем функции $p_u(t)$ и $tg(t)$ анализируются в билогарифмической шкале с целью извлечения информации о скважине и пласте.

Особенности задачи деконволюции (1), связанные с разрывностью функции $q(t)$, обращением $q(t)$ в ноль на некоторых промежутках временного интервала, наличием больших погрешностей (до 15%) в $q(t)$, а также разномасштабностью решения $g(t)$ (может изменяться на 5 порядков), не позволяют использовать традиционные регулярные алгоритмы (например, квадратурные схемы и регуляризация сдвигом).

В этих условиях более целесообразно с помощью замены $\sigma = \ln \tau$ и $z(\sigma) = \ln \tau g(t)$, предложенной в [2], перейти от линейной постановки (1) к нелинейному уравнению

$$\bar{A}(z) = \int_{-\infty}^{\ln t} q(t - e^\sigma) e^{z(\sigma)} d\sigma = \Delta p(t)$$

и использовать модифицированный метод Левенберга-Марквардта [3]

$$z^{k+1} = z^k - \beta [\bar{A}'(z^k)^* \bar{A}(z^k) + \alpha B_k]^{-1} \bar{A}'(z^k)^* (\bar{A}(z^k) - \Delta p(t)),$$

где B_k — некоторый положительно определенный оператор.

Алгоритм протестирован на синтетических (модельных) данных. Расчеты показали его перспективность для решения данного класса задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке компании Schlumberger, проект "Разработка решения задачи деконволюции применительно к скважинным тестам".

Литература.

1. *Van Everdingen A.F., Hurst W.* The application of the Laplace transformation to flow problem in reservoir. Trans. AIME, 1949, vol.186, p.305-324.
2. *Von Schroeter et al.* Analysis of well test data from parameter downhole gauges by deconvolution // SPE 77688, presented at the 2002 SPE Ann.Tech.Conf. and Exhibition, San Antonio, Texas, 29 Sept - 20 Oct., 2002.
3. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Москва-Ижевск: НИЦ «РХД», 2005.

Регуляризация уравнения Фредгольма первого рода методом сингулярного разложения оператора

А.Н. Алимова

Казахский национальный университет имени Абая (Алматы, Казахстан);
anic2002@mail.ru

Формула Карлемана для полигармонического уравнения Рассматривается некорректная задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода, вида

$$\int_G K(x, y)\varphi(y)dy = f(y),$$

где $K(x, y)$ - ядро интегрального уравнения, $f(x)$ - свободный член интегрального уравнения.

В данном докладе рассмотрим регуляризацию уравнения Фредгольма первого рода методом сингулярного разложения оператора. Рассмотрим свойства присущие компактному оператору. Покажем, как ошибки в задании f влияют на единственное нормальное псевдорешение. Построим пример Адамара, показывающий неустойчивость задачи, в которой оператор линейный и компактный. Покажем, как некорректность задачи непосредственно связана с характером убывания сингулярных чисел. Классифицируем некорректные задачи по степеням некорректности. Спроектируем метод регуляризации задачи на методе сингулярного разложения оператора.

Литература

1. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сибирское Научное издательство, 2009, 457с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 512с.

О решении задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости с помощью интегрального оператора Коши

Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм

Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
arbuzov@math.nsc.ru, bukhgeim@math.nsc.ru

Отождествляя \mathbb{R}^2 с комплексной плоскостью \mathbb{C} , рассмотрим

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial} & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},$$

где a, b и u_j являются комплексно-значными функциями.

Эллиптическое уравнение $\Delta u(x) + a_1(x)u_{x_1} + a_2(x)u_{x_2} + a_0(x)u(x) = 0$ в области Ω с границей класса C^2 сводится к уравнению $P\mathbf{u} = \mathcal{D}\mathbf{u} + A\mathbf{u} = 0$, если взять $\mathbf{a} = a_1 - ia_2$ и

$$u_1 = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{\mathbf{a}}}u, \quad u_2 = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\mathbf{a}}(2\bar{\partial}u + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{a}}u),$$

$$a = e^{\frac{1}{4}(\mathbb{P}\mathbf{a} - \mathbb{P}\bar{\mathbf{a}})}(a_0 - \partial\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{4}|\mathbf{a}|^2), \quad b = -e^{\frac{1}{4}(\mathbb{P}\bar{\mathbf{a}} - \mathbb{P}\mathbf{a})},$$

где

$$\mathbb{P}u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{u(y)}{x-y} dy_1 dy_2,$$

интегральный оператор Коши.

Пусть $M \subset \partial\Omega$ объединение конечного числа замкнутых дуг, матрица

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) & 0 \\ 0 & \bar{\psi}(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{\partial}\psi = 0, \quad \operatorname{Re} \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in M; \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus M. \end{cases}$$

Для $\tau > 0$ и $\varphi = 2\operatorname{Im}\psi$ определим $a_{\pm\tau} = e^{\pm i\tau\varphi}a$, и матрицу $A_{\tau}^t = \begin{pmatrix} 0 & a_{-\tau} \\ b_{\tau} & 0 \end{pmatrix}$.

Для решения задачи Коши $P\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u}|_M = \mathbf{f}$, получена формула

$$u_1(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_M e^{-\tau\psi(x_0)} (e^{\tau\Phi(x)} \mathbf{N}\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{w}) ds.$$

Здесь $a \in L_{\infty}$, $b \in W_{\infty}^1$, $x_0 \in \Omega$, $\tilde{\mathbf{v}}(x) = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial}\mathcal{E}(x-x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln(x_1^2 + x_2^2)$, и $\mathbf{w} \in W_p^1$, $1 < p < 2$, является решением уравнения

$$\mathcal{D}\mathbf{w} - A_{\tau}^t\mathbf{w} = A_{\tau}^t\tilde{\mathbf{v}},$$

$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}$, $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ — единичный вектор внешней нормали.

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00207 и Совета по грантам президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ - 7157.2006.1., второго автора - при поддержке NSF grant DMS-0505470.

Литература

1. Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л. Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости. Сиб. Мат. Ж., 2006, т.47, №3, с.518-526.
2. Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л. Формула Карлемана для системы уравнений электродинамики на плоскости. СЭМИ, Т.5 (2008), с.448-455. (<http://semr.math.nsc.ru/v5/p448-455.pdf>)

Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода

А. Асанов

Кыргызско-Турецкий университет Манас;
avyt.asanov@mail.ru

С. Жокен кызы

Исыккульский государственный университет;
dasbinich@yandex.ru

Пусть $\phi(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $G_0 = [t_0, T]$ ($t_0 < T < \infty$). Рассмотрим систему:

$$\int_{t_0}^t K(t, s, u(s))d\phi(s) = f(t),$$

где $t \in [t_0, T]$, $u(t)$ - n -мерная неизвестная вектор-функция, $f(t)$ и $K(t, s, u)$ - n -мерные известные вектор-функции, интеграл понимаем в смысле Стильтьеса.

Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса и их системы рассматривались в [1-5]. В [4] исследование систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода проводилось в предположении, что правая часть $f(t)$ известна приближенно.

Настоящая работа посвящена изучению систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода. Здесь решается вопрос регуляризации, доказывается единственность решений таких систем и рассматривается задача, аналогичная задаче в [4].

Литература.

1. Асанов А.А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода// Табигый Илимдер журналы.- Бишкек: КТМУ, 2002.- Вып. 2.- с. 79-95.
2. Асанов А.А. Система интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса// Табигый Илимдер журналы.-Бишкек: КТМУ, 2004.- Вып. 2.- с. 64-76.
3. Асанов А.А., Жокен кызы С. Линейные интегральные уравнения Вольтерра - Стилтьеса первого рода// Вест. Ысыккульского Университета.- Каракол,2003.- Вып. 9.-с. 73-79.
4. Жокен кызы С. Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода.// Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения».-Иркутск, 2005.- с.122-128.
5. Жокен кызы С. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра- Стилтьеса первого рода. // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек, 2004.-Вып.33.-с.111-117.
6. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной.-М: Наука, 1974.

Численный метод решения обратных задач на основе генетического алгоритма

А.С. Астракова, Д.В. Банников, М.М. Лаврентьев-мл., С.Г. Чёрный

Новосибирский государственный университет;
anna.astrakova@gmail.com

В работе рассматриваются вопросы, связанные с постановками некоторых актуальных обратных задач из различных научных областей и методом их решения. Все эти задачи сводятся к отысканию экстремумов функционалов по параметрам задачи. В основу метода нахождения экстремумов функционалов положен автоматический перебор различных комбинаций параметров, решения прямых задач на этих комбинациях и определение с помощью стратегии, которая называется генетическим алгоритмом (ГА), комбинации параметров, обеспечивающей экстремум функционалу. ГА улучшает заданное случайным образом множество комбинаций параметров в смысле достижения экстремума функционала путём операций селекции, рекомбинации и мутации [1]. В настоящей работе проведена модификация ГА, позволяющая избежать его сходимости к локальным минимумам и ускорившая саму сходимость. Во-первых, это достигнуто за счёт введения зависимости параметра селекции от количества рассматриваемых комбинаций параметров задачи. Во-вторых, видоизменён оператор рекомбинации. Модифицированные операторы рекомбинации рассматривают две или три конфигурации параметров с учётом значений функционалов на них.

Решены три обратных задачи. В первой - определяется форма проточной части гидротурбины, дающая минимум гидродинамических потерь энергии. Здесь прямой задачей является расчёт пространственного турбулентного течения в заданной проточной части и определения по нему потерь. В качестве комбинации варьируемых параметров берутся 16 переменных, задающих кривизну серединной поверхности лопасти рабочего колеса, и 8 величин, определяющих контуры меридионального сечения колеса. Во второй задаче отыскивается расположение заданного числа глубоководных датчиков гидростатического давления, обеспечивающее минимальное время обнаружения волны цунами, образовавшейся из некоторой заданной области водной акватории. Прямая задача заключается в нахождении минимального гарантированного времени обнаружения фиксированной конфигурацией датчиков возмущения из точек области возникновения волны цунами [2]. В качестве вектора варьируемых параметров берётся набор координат датчиков. В третьей задаче метод применяется для восстановления структуры прискважинной области по результатам высокочастотного индукционного каротажного изопараметрического зондирования (ВИКИЗ) [3]. Предполагается, что скважина окружена несколькими цилиндрическими слоями, каждый из которых характеризуется радиусом, удельным электрическим сопротивлением и диэлектрической проницаемостью. ВИКИЗ даёт набор разностей фаз и амплитуд вызванной магнитным полем электродвижущей силы индукции, однозначно отвечающих рассматриваемой слоистой структуре прискважинной зоны с соответствующими параметрами среды. Известно, что уравнения Максвелла хорошо описывают распространение магнитного поля в рассматриваемой слоистой среде и позволяют по радиусу, удельному электрическому сопротивлению и диэлектрической проницаемости каждого слоя рассчитывать разности фаз и амплитуд. Решение этих уравнений при фиксированной структуре прискважинной области будет в нашем случае прямой задачей. Варьируемые параметры - множество радиусов, удельных электрических сопротивлений, диэлектрических проницаемостей для всех слоёв. Минимизируемый функционал - норма разности векторов замеров и рассчитанных по прямой задаче значений разности фаз и амплитуд.

Предложенный в работе метод генетической оптимизации показал высокую точность и надёжность нахождения решения всех трёх обратных задач.

Литература

1. Черный С.Г., Чирков Д.В., Лапин В.Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. 202 с. .
2. Marchuk An.G. A method for determination of wave rays in non-homogeneous media. Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Mathematical Problems in Geophysics, 2005, issue 10, pp. 51-58.
3. Технология исследования нефтегазовых скважин на основе ВИКИЗ. Методическое руководство/ Ред. Эпов М.И., Антонов Ю.Н. Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, Издательство СО РАН, 2000, 122с.

Применение оптимального восстановления в обратных задачах: классы задач

А.В. Баев

Москва, «ОКБ ВН КОННАС», департамент прикладной гидродинамики;
 andrewbayev@mail.ru

Доклад посвящён применению теории задач оптимального восстановления для решения линейных обратных задач. Описаны классы обратных задач, для которых удалось построить оптимальные алгоритмы (для условно корректных задач) и оптимальные регуляризирующие алгоритмы (для некорректных задач).

подавляющее большинство обратных задач является некорректными, но если удаётся выделить для решения априорные ограничения определённого вида (например, компактное множество априорных ограничений), то задачу можно свести к задаче оптимального восстановления [1,2]. Эта методика позволяет решать задачу именно тем методом, который <лучше> всех возможных, а именно, тем, который обладает минимальной *априорной погрешностью*. До недавнего времени теория оптимального восстановления не имела алгоритмов решения достаточно широкого класса задач.

Пусть обратную задачу можно сформулировать в виде

$$\bar{z} \in M, \quad \|v - F\bar{z}\| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Здесь \bar{z} — восстанавливаемое точное решение, $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный непрерывный оператор из действительного нормированного пространства Z , $M \subset Z$ — известное множество *априорных ограничений*, $v \in \mathbb{R}^m$ — известное приближение для *правой части задачи*, $\varepsilon > 0$ — *погрешность задачи*. В разных задачах норма в \mathbb{R}^m может быть различной, но в любом случае существует выпуклое уравновешенное множество $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$, такое что второе условие в (1) эквивалентно включению $v - F\bar{z} \in \Omega_\varepsilon$. Пусть $\ell \in Z^*$ — любой фиксированный функционал. Если M выпукло и уравновешенно, то вместо задачи (1) можно решать задачу минимизации *априорной погрешности восстановления функционала* среди всех линейных методов восстановления $\varphi \in \mathbb{R}^m$:

$$\sup_{z \in M, y \in \mathbb{R}^m : y - Fz \in \Omega_\varepsilon} |\ell(z) - \langle \varphi, y \rangle| \rightarrow \min_{\varphi} \quad \varphi \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

Интерпретация решения $\hat{\varphi} \in \mathbb{R}^m$ задачи (2) такова: приближением для числа $\ell(\bar{z})$ считаем число $\langle \hat{\varphi}, v \rangle$, а погрешностью этого приближения будет значение задачи (2). Для большинства прикладных задач это значение равно $+\infty$, т.е. все методы восстановления $\varphi \in \mathbb{R}^m$ имеют бесконечную априорную погрешность. В этом случае можно искать оптимальный регуляризирующий алгоритм. Но если множество M достаточно узко, то минимум может быть конечным. В этом случае можно искать решение и значение задачи (2), т.е. искать оптимальный метод решения и его погрешность.

Методика решения достаточно широких классов задач (2) была предложена в [2]. Она основана на конечномерной аппроксимации исходной задачи. При этом задача сводится к задаче вида (2), где присутствуют только конечномерные объекты. Алгоритмы для конечномерных задач были предложены в [3]. Они применимы для множеств квадратичных (и как частный случай линейных) ограничений вида

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|G_\sigma x\|^2 \leq \rho_\sigma^2 \quad \forall \sigma \in \Sigma\}, \quad \Omega_\varepsilon = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \|\hat{G}_\sigma w\|^2 \leq \hat{\rho}_\sigma^2 \quad \forall \sigma \in \hat{\Sigma}\},$$

где Σ — конечное множество индексов, при любом $\sigma \in \Sigma$ $\rho_\sigma > 0$, $G_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_\sigma}$ — линейный оператор, $p_\sigma \in \mathbb{N}$. Аналогичным определениям удовлетворяют объекты $\hat{\Sigma}$, $\hat{\rho}_\sigma$, \hat{G}_σ .

В [4] построен оптимальный регуляризирующий алгоритм для некорректной задачи с $M = \text{Im}V$, где $V : W \rightarrow Z$ — известный линейный инъективный компактный оператор из действительного гильбертова пространства W . Этот алгоритм имеет смысл применять, если значение задачи (2) равно $+\infty$.

Работа была поддержана грантами РФФИ-ГФЕН № 07-01-92103 и РФФИ № 08-01-00160

Литература

1. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. Баев А. В. Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах // Матем. Сборник. 2008. **199**. № 12. 3-18.
3. Баев А. В. Принцип Лагранжа в задаче оптимального обращения линейных операторов в конечномерных пространствах при наличии априорной информации о решении // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2007. **47**. № 9. 1512-1523.
4. Баев А. В. Оптимальный регуляризирующий алгоритм восстановления функционала в линейных обратных задачах с истокорпредставимым решением // Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ. 2008. **48**. № 11. 1933-1941.

Визуализация одной нелинейной задачи солепереноса с учетом конвективного переноса

Р.Б. Балтабаева

Национальный Университет имени Мирзо Улугбека;
ranobadam06@mail.ru

Грунтовые воды всегда содержат то или иное количество растворимых солей. Некоторое количество солей находится в грунте твердой фазе, они могут быть сорбированными на частицах грунта и десорбироваться с их поверхности, или быть рассеянными внутри пор. Поэтому вопросы водно-солевого режима почв и грунтов имеют первостепенное значение для мелиорации [1]. В данной работе рассматривается следующая нелинейная задача со свободной границей

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - v(x, t) \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1)$$

$$c|_{t=0} = c_0(x) \geq 0, \quad x \in R$$

$$c|_{x=0} = \psi(t) > 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$c|_{x=l(t)} = 0$$

описывающая процесс солепереноса в нелинейной среде, при наличии конвективного переноса со скоростью $0 < v(t, x)$. Рассматривается случай когда $v(t, x) = v(t)$, и $v(t, x) = v(x)$. Линейная модель солепереноса и анализ решения приведена в [1].

Построены автомодельные и приближенно автомодельные решения задачи, а в отдельных случаях найдены различные точные решения, даны оценки решений и свободной границы. В случае, когда $D''(c) > 0$ найдены верхние решения задачи (1)-(2) и свободной границы, в предположение что $0 < \psi(t) \in C''(0, \infty)$. Приведена визуализация нелинейного процесса солепереноса, описываемой задачей (1)-(2) с учетом конвективного переноса со скоростью $v(t, x)$. Случай $v(t, x) = v(t)$ был рассмотрен в [2], где был получен новый нелинейный эффект. Для случая когда $v(t, x) = v(x)$ получены верхние и нижние оценки и условие локализации решений. Методами, использованными в [2]-[3] получена асимптотика решения вблизи свободной границы. На основе установленных свойств решений задачи производится численные расчеты. Для визуализации решений используется MATHCAD.

Литература

1. *Полубариново-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. - Москва: Наука. 1977. - 664 с.
2. *Арипов М.* Методы эталонных уравнений для решений нелинейных краевых задач. Ташкент: ФАН, 1988. 73-77с.
3. *Арипов М.* Asymptotic of the solutions of the non-Newton polytrophic filtration equation. ZAMM, vol. 80, Sup. 3, (2000), 767-768

Об одном классе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса третьего рода.

Н.С.Беделова

ОшГУ, Ош, Кыргызстан;
nura_78@mail.ru

Одновременно рассматриваются следующие нелинейные интегральные уравнения

$$m(t)v(t) + \int_{t_0}^t K(t, s, v(s))d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

$$[\varepsilon + m(t)]\vartheta(t) + \int_{t_0}^t K(t, s, \vartheta(s, \varepsilon))d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (2)$$

где $m(t)$, $K(t, s, v)$ и $f(t)$ известные функции, $m(t_0) = 0$, $v(t)$ и $\vartheta(t, \varepsilon)$ — искомые функции, $\varphi(t)$ — возрастающая известная непрерывная функция на $[t_0, T]$. $0 < \varepsilon$ — параметр. Здесь все интегралы понимаются в смысле Стильтьеса.

В общем случае интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса не сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра, так как интеграл Стильтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега[1]. Различные вопросы для интегральных уравнений первого и третьего рода исследованы в работах многих авторов. В частности, интегральные уравнения Вольтерра на конечном отрезке рассматривались в работах [2-4].

Здесь показаны, что решение $\vartheta(t, \varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[t_0, T]$ к решению $v(t)$ уравнения (1).

Список литературы

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной, Москва: Наука, 1974, 250 с.
2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // Журнал вычисл.мат. и матем.физики.-1979.-т.19, №4-с.970-980.
3. A.L.Bugheim, Volterra Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht,-1999, 204 p.
4. A.Asanov, Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the first kind, VSP, Utrecht, 1998, 276 с.

Применение интегрального преобразования Лагерра и метода декомпозиции области для численного моделирования волновых полей

М.А. Белоносов

Институт Нефтегазовой Геологии и Геофизики СО РАН;
belon@mail.ru

Рассматривается двумерное волновое уравнение во всей плоскости с нулевыми начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2(x, y)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)f(t),$$

где $c(x, y)$ — кусочно-непрерывная скорость, (x_0, y_0) — координаты источника, $f(t)$ — излучаемый им импульс Риккера. Для ограничения расчетной области используется ее окаймление идеально подходящим поглощающим слоем, далее — РМЛ (аббревиатура от английского Perfectly Matched Layer).

Аналогично тому, как это было сделано в [1], к этому уравнению применяется интегральное преобразование Лагерра по времени. В результате получается отрицательно определенное уравнение Гельмгольца. Его решение ищется с помощью метода альтернирования по Шварцу [2], который нашел широкое применение для решения уравнений эллиптического типа и основывается на пространственной декомпозиции расчетной области с перекрытием. Одним из основных достоинств этого подхода является возможность организации весьма эффективного распараллеливания исходной задачи.

В работе исследуется скорость сходимости этого метода с помощью серии численных экспериментов, а также ее зависимость от ширины перекрытия подобластей и параметров преобразования Лагерра. Показываются преимущества применения преобразования Лагерра по сравнению с преобразованием Фурье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 07-05-00538, 08-05-00265 и 09-05-00372.

Литература.

1. Г.В. Колюх, Б.Г. Михайленко. Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмологии // Труды ИВМ и МГ СО РАН, вып. 5, 1998.
2. T. Chan, T.P. Mathew. Domain decomposition // Acta Numerica 1994, pp. 61-143.

Численный метод решения обратных коэффициентных задач

С.Е. Бойченко

Адыгейский государственный университет;
boychenkos@mail.ru

Пусть в некоторой прямоугольной области $D = [a, b] \times [c, d]$ дано уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right] = f(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + h(x, t).$$

Функция $U(x, t)$ считается известной (аналитически, или таблично заданной). Требуется определить неизвестную функцию $K(x)$.

Для решения используется метод модулирующих функций [1], [2].

Получены численные решения для некоторых конкретных уравнений, а также дополнительные условия применимости метода для этих задач.

Предприняты попытки обобщить метод на другие уравнения второго и третьего порядка.

Литература.

1. *Шумафов М.М., Цей Р.* Метод модулирующих функций и его применение при решении обратных задач: Вестник АГУ. Выпуск 9 (37). Майкоп. 2008. с. 9-23.
2. *Юдин А. И., Юдина О. К.* Расчет фильтрационно-емкостных параметров по промышленным данным эксплуатации газового месторождения: Термодинамика кооперативных процессов в гетерогенных средах. Тюмень. 1985. с. 80-85.

Проблемы физико-математического моделирования движения флюидов в пористых средах.

О.Б. Бочаров

Российский научный центр Бейкер Хьюз Б.В., г. Новосибирск;

В гидродинамике под фильтрацией понимается процесс просачивания жидкостей или газов сквозь пористые среды. Математическое описание фильтрационных течений стало развиваться после появления закона А. Дарси (1856г.). Экспериментальным путём он установил линейную связь между расходом через пористый материал и перепадом давления. После этого методы математического моделирования стали интенсивно применяться в теории движения грунтовых вод и нефтегазовой промышленности.

Развитие физико-химических методов повышения нефтеотдачи пластов потребовало развития теории фильтрации на течения многофазных и многокомпонентных смесей. Причём достижения химии привели к тому, что концентрации примесей, вызывающих серьёзные изменения свойств раствора иногда находятся за пределами точности вычислительных методов. Это требует развития новых подходов при создании математических моделей соответствующих процессов.

Большая удельная поверхность пористых сред (площадь твердых поверхностей пор в единице объёма) способствовала их широкому применению в качестве катализаторов в химической промышленности. Взаимодействие между клетками в организмах через проницаемые и полупроницаемые стенки (мембраны) привело к методам теории фильтрации в медицину и биологию.

Разнообразие пористых сред, в которых происходят процессы фильтрации, приводит к изучению материалов с очень широким диапазоном пропускной способности. Масштабы взаимодействий в движущихся флюидах и взаимодействий последних с пористым скелетом становятся сопоставимы с размерами пор. В этой ситуации, зачастую уже не прямой перепад давления является основной движущей силой, а начинают преобладать молекулярные, электромагнитные, химические и другие взаимодействия. Возникает необходимость получения законов макропереноса в пористых из анализа микрокинетических закономерностей процессов, происходящих на границах раздела структур. При этом сами эти границы, находясь в мелких порах, обладают очень малым пространственным, а часто и временным масштабом. Однако количество таких структур столь велико, что они создают макроэффекты. Измерение, необходимых для моделирования коэффициентов переноса, прямым экспериментальным путём в этих условиях зачастую невозможно. Поэтому существенно возрастает роль методов определения параметров физико-математических моделей по косвенным данным, путём решения обратных задач.

О наилучшем выборе параметра в методе проекционной регуляризации

А.Б. Бредихина

Южно-Уральский государственный университет,
bredihina@prima.susu.ac.ru

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — самосопряженный, положительный оператор со спектром, целиком заполняющим отрезок $[0; \|A\|]$.

Рассмотрим операторное уравнение $Au = f$, $u, f \in H$.

Предположим, что при $f = f_0$ существует точное решение этого уравнения $u_0 \in M_r$, где множество $M_r = B\bar{S}_r$, а $\bar{S}_r = \{v : v \in H, \|v\| \leq r\}$.

Пусть оператор $B : H \rightarrow H$ — линейный ограниченный, такой что $B = g(A)$, где функция $g(\sigma)$ непрерывная, строго возрастающая на $[0; \|A\|]$ и $g(0) = 0$. Кроме того, вместо f_0 известен элемент $f_\delta \in H$, $\delta > 0$ такой, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$. Рассмотрим регуляризующее семейство операторов

$$P_{\alpha(\delta)}f = \int_{\alpha}^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_{\sigma}f, \quad \alpha \in (0; \|A\|],$$

где $\{E_{\sigma} : \sigma \in [0; \|A\|]\}$ — разложение единицы, порожденное оператором A . Параметр $\alpha(\delta)$ выберем из условия

$$\min_{\alpha} [\Delta_1^2(\alpha) + \Delta_2^2(\alpha, \delta)].$$

Определение. Метод $\{P_{\delta}\}$ называется оптимальным по порядку на классе M_r , если существует такая константа C , что

$$\Delta(P_{\delta}) \leq C\omega(\delta, r) = Cr\omega\left(\frac{\delta}{r}, 1\right).$$

Определение. Константа C называется точной, если для $\forall \varepsilon > 0$

$$\Delta(P_{\alpha(\delta)}) > (C - \varepsilon)\omega(\delta, r).$$

Теорема. Если $g(\sigma) = \sigma^p$ ($p > 0$), то метод проекционной регуляризации с параметром

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{\delta}{r\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

является оптимальным по порядку.

При этом точная константа $C(p)$, будет иметь вид

$$C(p) = \left[p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}\right]^{1/2},$$

причем $0 < C(p) < \sqrt{2}$ при $p > 0$, $p \neq 1$ и $C(p) = \sqrt{2}$ при $p = 1$.

Литература.

1. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
2. Иванов К.В., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

Новый алгоритм двумерной томографии в ограниченном диапазоне углов

Н. В. Важенцева

Институт автоматики и электрометрии СО РАН
Vazhentseva@ gmail.com

В данной работе исследуется актуальная задача томографии, которая возникает при использовании проекционных данных, определённых только в ограниченном диапазоне углов. Для её решения предложен новый метод, основанный на аналоге теоремы Пэли-Винера. Суть его состоит в следующем: моменты неизвестной проекции, заданной некоторым углом, находятся по аналогу теоремы Пэли-Винера, как значения полинома при аргументе, равном этому углу; по полученным моментам определяются недостающие проекции; далее производится томографическая реконструкция по полному набору данных.

Был разработан алгоритм, реализующий метод, и написана компьютерная программа. Исследования алгоритма проводились с помощью вычислительного эксперимента. По результатам можно заключить, что предлагаемый метод позволяет улучшить качество томографической реконструкции по проекционным данным, заключённым в ограниченном диапазоне углов.

Регулярные методы решения задачи деконволюции, возникающей в скважинной геофизике

В.В. Васин, Г.Г. Скорик,

Институт Математики и Механики УрО РАН, Россия, Екатеринбург;
vasin@imm.uran.ru, skorik@imm.uran.ru

Е.А. Пимонов,

Schlumberger Moscow Research, Россия, Москва;
epimonov@slb.com

Ф.Дж. Кучук

Schlumberger Riboud Product Centre, Франция, Париж;
kuchuk@slb.com

При интерпретации данных гидродинамических испытаний скважин возникает проблема решения уравнения Вольтерра 1-го рода [1]:

$$Ag \equiv \int_0^t q(t-\tau)g(\tau)d\tau = \Delta p(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1),$$

где $\Delta p(t) = p_0 - p(t)$ - наблюдаемое падение давления в пласте, p_0 - начальное давление в пласте; $p(t)$ и $q(t)$ - давление и расход скважинной жидкости соответственно, измеряемые в скважине; $g(t) = dp_u(t)/dt$ - функция отклика пласта; $p_u(t)$ - падение давления в пласте, которое было бы измерено, если бы скважина производила скважинную жидкость при постоянном единичном расходе. Уравнение (1) необходимо разрешить относительно функций $g(t)$ и $p_u(t)$ при условии, что функции $p(t)$ и $q(t)$, а также значение p_0 известны с некоторой ошибкой.

Специфика задачи заключается в том, что функция $q(t)$ может быть разрывной и обращаться в ноль, что не позволяет использовать традиционные методы регуляризации. При этом для реальных данных не только давления $p(t)$, но и расходы $q(t)$ измеряются с некоторой погрешностью, причем для $q(t)$ эта погрешность может быть на порядок больше, чем для $p(t)$. Кроме того, искомая функция $g(t)$ является разномасштабной и может изменяться на 5 порядков.

В настоящей работе для решения задачи деконволюции предлагаются два регулярных алгоритма, основанные на методах квазирешений Иванова и регуляризации Тихонова с использованием априорной информации о решении в форме знакоопределенности функции $g(t)$ и ее производных, а именно:

$$g(t) \in Q = \{g(t) : g(t) \geq 0, g'(t) \leq 0, g''(t) \geq 0, t \in [0, T]\} \quad (2).$$

Алгоритмы протестированы на трех множествах синтетических данных, содержащих начальное давление пласта p_0 и дискретные функции $p(t)$ и $q(t)$, заданные на своих сетках и с разным уровнем шума. Точные значения искоемых функций $p_u(t)$ и $g(t)$ известны, что позволяет оценить степень достоверности полученных решений. Численные эксперименты показали, что оба алгоритма дают удовлетворительные результаты в случае зашумленной правой части и точного ядра свертки $q(t)$. В будущем планируется модификация алгоритмов с целью возможности учета ошибок также и в ядре свертки.

Работа выполнена при финансовой поддержке компании Schlumberger, проект №TCSNTC-2008-000113 "Обратные некорректные задачи обработки данных, полученных в результате гидродинамических испытаний скважин", и частично поддержана грантом РФФИ, проект № 09-01-00053 "Обратные задачи с особенностями в решении: регулярные методы и их приложения".

Литература

1. *van Everdingen A.F., Hurst W.* The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs // Trans. AIME. - 1949. - Vol. 186. - P. 305-324.

Единственность решения обратной коэффициентной задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции

И.С. Вахитов

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
iv7180@gmail.com

Целью работы является теоретический и численный анализ решения обратной экстремальной задачи идентификации старшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения конвекции-диффузии-реакции, рассматриваемого в ограниченной области Ω . Рассматриваемая задача заключается в нахождении пары функций (φ, λ) из соотношений

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot r \varphi + k \varphi = f, \quad \varphi(x, y)|_{\Gamma} = \psi \quad (1)$$

и дополнительного условия $\varphi = \varphi_d$ в Q .

Здесь $\lambda(\mathbf{x}) > 0$ - коэффициент диффузии, зависящий от точки $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u, v)$ - вектор скорости, $k(\mathbf{x}) \geq 0$ - величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, $f(\mathbf{x})$ - плотность объемных источников, $\psi(\mathbf{x})$ - заданная на Γ функция, $\varphi_d(\mathbf{x})$ заданная в Q подобласти Ω функция.

Рассматриваемая обратная задача сводится к задаче нахождения минимума функционала

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (2)$$

На основе математического аппарата, разработанного в [1, 2], в работе исследуется разрешимость рассматриваемой обратной экстремальной задачи, обосновывается применение принципа неопределенных множителей Лагранжа, выводится система оптимальности. Основываясь на анализе свойств системы оптимальности для задачи (1), устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность ее решения. Указанные условия можно записать в виде

$$\mu_1 \geq \frac{1}{\lambda_*^2} M_\varphi^0 \mu_0 \gamma_1 (3\gamma_1 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q) 2\gamma_0^2,$$

$$\mu_2 \geq \frac{1}{\lambda_*^2} M_\varphi^0 \mu_0 \gamma_1 (3\gamma_1 M_\varphi^0 + 2\|\varphi_d\|_Q) 2\gamma_2^2,$$

Здесь λ_* - константа, задающая ограничение на функцию λ , $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ - константы, входящие в неравенства вложения.

На основе свойств системы оптимальности разрабатывается численный алгоритм, основанный на методе Ньютона. В заключение приводятся и анализируются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-2810.2008.1, РФФИ-"Дальний Восток" (проект 09-01-98518-р-восток-а).

Литература

1. Алексеев Г.В., Калинина Е.А. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции - диффузии - реакции // Сиб. журн. индустр. матем. 2007. Т. 11. №. 1. с. 3-16.
2. Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49. №. 4. С. 24-35.

Свойства расстояний на высказываниях экспертов с вероятностями

Р. А. Викентьев, А. А. Викентьев

Институт Математики имени С.Л. Соболева СО РАН Новосибирск
vikent@math.nsc.ru

Поскольку сейчас проявляется все больший интерес к анализу экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний экспертов, интересны также вопросы о высказываниях экспертов, представленных формулами Исчисления Высказываний (ИВ) с вероятностями. Возникают задачи об алгоритмах распознавания закономерностей, согласования таких знаний и кластеризации [1-4]. В работе рассматриваются логические высказывания экспертов, представленные формулами ИВ с вероятностями. Предлагаются способы задания расстояний на таких высказываниях. Доказываются свойства введенных расстояний. Для решения поставленной задачи используются вероятностный и теоретико - модельный подходы [2-4]. Будем рассматривать знания экспертов, представленные формулами ИВ с вероятностями (вероятностные высказывания), т.е. высказывания вида: « ϕ с вероятностью p_ϕ », где ϕ — формула ИВ. Используем запись для таких высказываний: $B_i = \langle \phi, p_\phi \rangle$, $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$. Пусть Σ - база знаний, состоящая из формул ИВ (в Σ содержатся все формулы, с которыми будут работать эксперты). $S(\phi)$ - носитель формулы ϕ , т.е. множество элементарных высказываний, используемых при написании формулы ϕ . $S(\Sigma) = \bigcup_{\phi \in \Sigma} S(\phi)$ - носитель совокупности знаний.

Рассмотрим множество $P(S(\Sigma)) = 2^{S(\Sigma)}$ — множество всевозможных подмножеств множества $S(\Sigma)$. Элементы множества $P(S(\Sigma))$ назовем моделями. Известно, что $|P(S(\Sigma))| = 2^{|S(\Sigma)|} = n$ (для простоты обозначения). Эксперты говорят о вероятностях формул на множестве всех n моделей, и каждое высказывание присутствует только с одной вероятностью. Интерпретируем вероятность, данную экспертом, следующим образом: $B = \langle \phi, p_\phi \rangle$ означает, что высказывание ϕ истинно на $n_\phi = [h \cdot p_\phi]$ моделях, где $n = 2^{|S(\Sigma)|}$ - всего моделей. Пусть дано два вероятностных логических высказывания $B_i = \langle \phi, p_\phi \rangle$ и $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$. Предложим способы вычисления расстояния $\rho(B_i, B_j)$ между такими высказываниями и докажем их свойства быть метриками. Результаты также переносятся на формулы языка 1-го порядка со свободными переменными.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00331а, 08-07-00136а

Литература

1. Блощицын В.Я., Лбов Г.С. О мерах информативности логических высказываний. // Доклады Республиканской Школы-Семинара "Технология разработки экспертных систем". Кишинев, 1978, с.12-14.
2. Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Издательство Института математики, 1999, 212 с.
3. Vikent'ev A.A., Lbov G.S. Setting the metric and informativeness on statements of experts. // Pattern Recognition And Image Analysis. 1997, v. 7 (2), p. 175-189.
4. Викентьев А.А., Лбов Г.С. О метризациях булевой алгебры предложений и информативности высказываний экспертов. // Доклады РАН, 1998, т. 361 (2), с.174-176.

Параллельная реализация численного моделирования трехмерного распространения волн в анизотропной среде

Д.М. Вишнеvский

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск ;
vishnevskydm@ipgg.nsc.ru

Для моделирования трехмерного распространения волн в анизотропной упругой среде используется конечно-разностная схема Лебедева, реализованная для многопроцессорной вычислительной системы. Данная конечно-разностная схема является обобщением на анизотропный случай схемы на сдвинутых сетках (Вирье) для изотропной упругой среды, и имеет ряд преимуществ над наиболее применяемой в геофизике конечно-разностной схемой для анизотропной среды - схемой на повернутых сдвинутых сетках.

Основной особенностью численного решения этой задачи является большой объем оперативной памяти компьютера, необходимый для хранения параметров среды и переменных состояния. Требуемый объем оперативной памяти таков, что решение задачи возможно только на достаточно крупных многопроцессорных компьютерных системах - кластерах. Используемая для решения конечно-разностная схема Лебедева явная, это позволяет естественным образом эффективно распараллелить ее. Для параллельной реализации область вычислений разбивается на некоторое число меньших подобластей, каждая из которых закрепляется за отдельным процессором системы. Вычисления включают в себя независимые вычисления внутри подобластей и обмен данными между соседними подобластями на границах их соприкосновения.

Численные расчеты производились на кластере **НКС-160** (Сибирский суперкомпьютерный центр), в составе 84 двухпроцессорных модулей **hp Integrity rx1620EC** суммарной пиковой производительностью 1 ТФлоп/с. Для вычислений использовалась однородная анизотропная модель среды. Результаты расчетов представлены на Рис. 1.

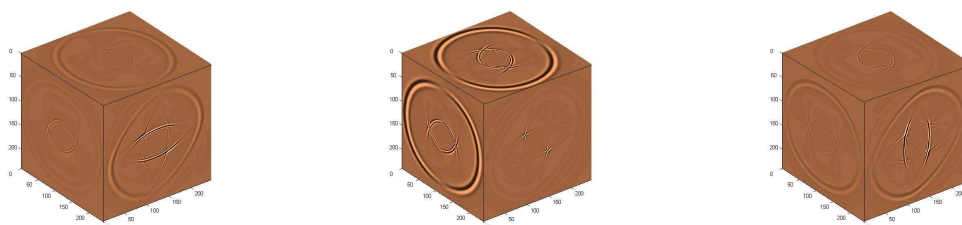


Рис. 1: Волновые поля для анизотропной ТТІ модели (x, y и z компоненты)

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ, проекты 07-05-00538 и 08-05-00265.

Литература:

1. *J. Virieux*, P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // *Geophysics*, - 1986. - Vol. 51. - pp. 889-901.
2. *V.V. Lisitsa*, Efficient Finite-difference scheme for anisotropic elastic problems // *Proceedings of the 8-th International Conference on theoretical and computational acoustics*. - 2008. - pp. 285-297.

Высокопроизводительные решатели прямых и обратных задач каротажа в системе EMF Pro на основе технологий Intel.

А.А. Власов (И.Н. Ельцов, А.Ю. Соболев, А.Н. Фаге, М.М. Лаврентьев, А.В. Авдеев, Н.И. Горбенко, В.А. Ефимов, S. Story)

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН;
alexander.a.vlasov@gmail.com

Для автоматизированной интерпретации данных ВИКИЗ - (взамен устаревшей многофункциональной системы МФС ВИКИЗ-98 [1]) Институтом нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН (ИНГГ) и Новосибирским государственным университетом (НГУ), совместно с Новосибирской лабораторией корпорации Intel разработан новый программный продукт EMF PRO. ИНГГ СО РАН отвечал за разработку пользовательского интерфейса и создание вычислительных модулей ВИКИЗ, в корпорации Intel и НГУ были существенно усовершенствованы и оптимизированы по ресурсоемкости решатели прямых и обратных задач БКЗ.

Прямая задача для БКЗ и ВИКИЗ решается в рамках осесимметрической модели геологической среды. Каждый пласт содержит несколько зон, границы которых параллельны оси скважины. Считается, что внутри любой зоны УЭС одно и то же. Математическая постановка для такого представления геологической среды приведена в [2]. Прямая задача БКЗ для данной постановки требует численного решения двумерного уравнения Пуассона в цилиндрических координатах. Достигнутое минимальное время решения прямой задачи - около 1.5 мс на Intel® Xeon® X5355 (2.66 GHz). При этом решение удовлетворяет приемлемой точности (относительная погрешность не более 1%).

Численное решение решателя прямой задачи БКЗ можно разбить на следующие этапы: генерация сетки, аппроксимация, решение системы уравнений с симметричной положительно определенной 5-диагональной матрицей.

Ранее достигнутые хорошие ресурсные характеристики решателя прямой задачи ВИКИЗ удалось улучшить за счет оптимизации посредством компилятора Intel® Visual Fortran Compiler 9.1 в среднем на 25% по сравнению с Compaq® Visual Fortran 6.6.

Большая производительность достигнута за счет использования современных алгоритмов численного решения возникающих уравнений, их эффективной программной реализации, а также применения оптимизированной библиотеки Intel® MKL и новых компиляторов: Intel® Visual Fortran Compiler, Intel® C++ Compiler.

В целом при совместной интерпретации данных ВИКИЗ и БКЗ на многоядерных системах при решении групповых задач на процессоре Intel® Core 2® Quad (Q6600), был получен следующий прирост производительности: 1 ядро — 100%, 2 ядра — 167.6%, 3 ядра — 211.2%, 4 ядра — 232.9%. Нелинейный прирост производительности объясняется наличием не параллельных участков кода (~25%) и законом Амдала.

Литература

1. Ельцов И.Н., Эпов М.И., Ульянов В.Н., Никитенко М.Н., Соболев А.Ю., Пестерев А.М. Анализ и инверсия каротажных диаграмм в системе МФС ВИКИЗ-98 // Каротажник, 2000, вып. 74, с. 70-84.
2. Эпов М., Ельцов И., Лаврентьев М., Авдеев А., Горбенко Н. Быстродействующие алгоритмы обработки данных электромагнитного каротажа нефтяных скважин // Технологии ТЭК, 2005, № 2, с. 99-105.

Распознавание тел и тонких пленок по прямолинейным и круговым проекциям.

В.П.Голубятников

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
glbntn@math.nsc.ru

Занимающий нас **вопрос** имеет алгебраическую формулировку:

«Пусть у двух компактных тел $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ проекции на любую гиперплоскость (или на любую плоскость фиксированной размерности $k > 1$) эквивалентны относительно преобразований из некоторой подгруппы $G \subset GL(k)$. Будут ли эти тела V_1, V_2 эквивалентными относительно какого-либо преобразования из группы $GL(n)$?»

Под проекциями мы будем обычно понимать обыкновенные ортогональные проекции на плоскость. Для гладких поверхностей в качестве проекционных данных будем рассматривать их «видимые контуры».

Фиксируем малое положительное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим некоторые естественные расширения класса выпуклых тел — « ε -выпуклые» тела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Компактное тело $K \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу K_1^ε , если каждая точка на границе тела K принадлежит некоторому внешнему опорному шару тела K , который имеет радиус $1/\varepsilon$.

Компактное тело $K \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу K_2^ε , если каждая точка $x \notin K$ принадлежит некоторому шару радиуса $1/\varepsilon$, непересекающемуся с внутренностью K .

Компактное тело $K \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу K_3^ε , если каждый опорный к K шар радиуса $r < 1/\varepsilon$ лежит внутри внешнего опорного к K шара радиуса $1/\varepsilon$.

ТЕОРЕМА. Имеют место строгие включения $K_3^\varepsilon \subset K_2^\varepsilon \subset K_1^\varepsilon$. [1].

В докладе рассматриваются широкие классы многомерных объектов (выпуклых и обзримых тел, тонких пленок и др., см. [1], [2].), для которых наш **вопрос** имеет положительный ответ. Для ε -выпуклых тел удается ответить на него и в случае рассмотрения «круговых проекций».

Работа была поддержана грантом 2.1.1/3707 АВЦП развития научного потенциала Высшей школы и грантом РФФИ 09-01-00070.

Литература

1. Golubyatnikov V.P., Rovenskii V.Yu. Some extensions of the class of convex bodies. arXiv:0808.1788v1 [mathDG] 17 Aug. 2008. 28 p.
2. Golubyatnikov V.P. On convexity of a planar domain with a pair of concave tomography projections. Siberian Advances in mathematics, 2009, v.19, N 2, pp. 85–90.

О корректности смешанной задачи для волнового уравнения.

В.М. Гордиенко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;

Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с двумя пространственными переменными в четверти пространства. На границе задается условие в виде линейной комбинации первых производных.

Выясняется при каких граничных условиях смешанная задача удовлетворяет равномерному условию Лопатинского. Критерий конструктивный — состоит в выяснении гурвицевости полинома второй степени, коэффициенты которого явно выписаны через коэффициенты граничного условия смешанной задачи.

Для задач удовлетворяющих равномерному условию Лопатинского доказывается корректность — строится диссипативный интеграл энергии, позволяющий легко получить априорную оценку. Построение диссипативного интеграла энергии тоже конструктивно — состоит в решении некоторой системы линейных алгебраических уравнений.

Возможно обобщение рассмотренных вопросов на случай когда вместо волнового уравнения рассматривается гиперболическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами и младшими членами. Также возможно обобщение на случай большего чем двух числа пространственных переменных.

Два подхода к построению частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов деконволюции интегрального уравнения

А.В. Гочаков

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин);
don@pogoda.nsk.su

Рассматривается задача решения интегрального уравнения вида

$$\int_a^b k(t-\tau)d\tau = f(t), \quad c \leq t \leq d,$$

которая в зарубежной литературе называется *задачей деконволюции*. Предполагается, что правая часть уравнения задана со случайной ошибкой. Большинство регуляризирующих алгоритмов, построенных на основе дискретного преобразования Фурье, являются линейными и включают в себя параметр регуляризации. Этим алгоритмам присуще *известное противоречие* - при увеличении параметра регуляризации уменьшается случайная ошибка регуляризованного решения, но увеличивается систематическая ошибка. При уменьшении параметра наблюдается обратное. Для устранения этого противоречия предложены комбинированные алгоритмы, представляющие собой соединение линейного регуляризирующего алгоритма и алгоритма фильтрации. Такие алгоритмы получили название *частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов*. Используемые алгоритмы фильтрации должны хорошо удалять случайную ошибку регуляризованного решения, не увеличивая (или незначительно увеличивая) при этом систематическую ошибку.

В данной работе рассматривается построение двух классов частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов. Первый класс использует локальные нелинейные алгоритмы фильтрации, а второй класс - вейвлет-разложение регуляризованного решения. Предлагается подход к выбору параметра регуляризации из условия требуемой разрешающей способности регуляризирующего алгоритма. Построены квазиоптимальные оценки для коэффициентов вейвлет-разложений, что позволяет достаточно эффективно фильтровать случайную ошибку регуляризованного решения.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что для «негладких» функций $\varphi(\tau)$ меньшую ошибку решения задачи деконволюции обеспечивает первый класс регуляризирующих алгоритмов, а для «гладких» решений $\varphi(\tau)$ лучшие результаты дает второй класс.

Показано, что использование предложенных частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов позволяет решать задачу деконволюции с существенно меньшей ошибкой по сравнению с линейным регуляризирующим алгоритмом, использующим оптимальный параметр регуляризации (вычисление которого на практике проблема-тично).

Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности

Г. Даирбаева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби;
Lazzat.Dairbaeva@kaznu.kz

1. Постановка задачи. В работе рассматривается одномерное уравнение теплопроводности

$$c(u)u_t = (\lambda(u)u_x)_x, \quad (x, t) \in (0, a) \times (0, T) \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, a) \quad (2)$$

$$u(0, t) = g_1(t) \quad (3)$$

$$u(a, t) = g_2(t), \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Обычно под прямой задачей понимают нахождение решения u задачи (1)-(4) по заданным функциям $c, \lambda, \varphi, g_1, g_2$.

Пусть выполняются следующие условия

$$\begin{cases} c(u) \in C^2[b, c], \\ \lambda(u) \in C^3[b, c], \\ g_1, g_2 \in W_2^1[0, T], \\ \varphi \in W_2^1[0, a], \quad g_1(0) = \varphi(0), g_2(0) = \varphi(a) \end{cases}$$

$[b, c]$ содержит область значений $u(x, t)$ при всех достаточно малых вариациях λ . В данном случае область определения функций $c(u), \lambda(u)$ фиксирована, поскольку в силу принципа максимума [1]: $b = \min\{\min_{[0, T]} g_1(t), \min_{[0, T]} g_2(t), \min_{[0, T]} \varphi(t)\}$, $c = \max\{\max_{[0, T]} g_1(t), \max_{[0, T]} g_2(t), \max_{[0, T]} \varphi(t)\}$.

Тогда существует решение задачи (1)-(4) $u \in W_2^{2,1}((0, a) \times (0, T))$ [1].

Однако не всегда коэффициенты c, λ заранее определены. Чаще возникает ситуация, когда они подлежат определению по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами для уравнения теплопроводности.

В настоящей статье рассматривается коэффициентная обратная задача в следующей постановке: по известным c, φ, g_1, g_2 найти пару функций (u, λ) так, чтобы выполнялось дополнительное условие

$$u(d(t)) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad 0 < d(t) < a \quad (5)$$

где $d(t), f(t)$ некоторые известные функции. Пусть $x = d(t)$ - кусочно-гладкая функция.

Задача определения (u, λ) (1)-(4) является некорректной, поскольку она неустойчива по отношению к малым изменениям входных данных. Вследствие чего при применении численных методов возникает проблема накопления погрешности. Чтобы избежать указанную трудность, вместо решения некорректной задачи (1)-(4) приходится привлекать устойчивые начально-краевые задачи для того же уравнения теплопроводности [2]-[4]. Подобный подход применялся в работах С.И. Кабанихина и его учеников [2]-[4]. В данной работе обратная задача (1)-(5) решается градиентным методом спуска.

Список литературы

1. Ладженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., Наука, 1967.

2. *Kabanikhin S.I., Koptug I.V., Iskakov K.T., Sagdeev R.Z.* Inverse problem for diffusion transport of water upon single pellet moisture sorption. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation Shanghai Universitet v.1, 2000, pp.31-42.
3. *Koptug I.V., Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Fenelonov V.B., Khitrina L.Yu., Sagdeev R.Z. and Parmon V.N.* A quantitative NMR imaging studi of mass transport in porous solids during drying. Chemical Engineering Science, Pergamon v.55, 2000. pp. 1559-1571.
4. *Kabanikhin S.I., Koptug I.V., Iskakov K.T. and Sagdeev R.Z.* Inverse problem for a quasilinear equation of diffusion. Journal of Inverse and Ill-Posed Problem (1998) vol. 6(4), The Netherlands, Utrecht, pp. 335-352.

Интегральные преобразования как основной математический аппарат томографии

Е.Ю. Деревцов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет;
dert@math.nsc.ru

Методы томографического исследования свойств неоднородных объектов интенсивно развиваются последние 30 лет. В настоящее время медицинская диагностика и биологические исследования немыслимы без использования различных средств томографии (рентгеновские и ультразвуковые томографы, ЯМР-томографы). Идеи, методы и алгоритмы томографии широко применяются в промышленности (интроскопия), геофизике и физике космоса, биологии и аналитической химии, технике физического эксперимента и диагностике плазмы, исследовании течений жидкости и газа, изучении структуры анизотропных сред.

Математические модели томографии, — от простых до очень сложных, — сочетают в себе глубокие идеи и развитый аппарат, характеризуются разнообразием подходов, численных методов и используемых алгоритмов. Говорят о трансмиссионной и эмиссионной томографии, томографии рефрагирующих и анизотропных сред, томографии векторных и тензорных полей. Вычислительная томография тесно связана с теорией обратных задач и интегральной геометрией, в ее арсенале многочисленны (от классических до новейших) методы приближенных вычислений, а созданные на их основе алгоритмы и программные комплексы являются неотъемлемой частью многочисленного семейства современных томографов.

Основопологающие работы П. Функа и И. Радона, послужившие источником математических методов томографии, были опубликованы в 1916 и 1917 году. В этих работах получены так называемые формулы обращения для плоского и пространственного случаев, а также случая сферы S^2 . Суть формул обращения заключается в определении неизвестной функции, заданной на плоскости, в пространстве или единичной сфере в R^3 , по известным интегралам от нее, вычисленным по пучкам параллельных прямых, пучкам параллельных плоскостей или большим кругам сферы.

В настоящее время класс интегральных преобразований, которые служат исходными данными в томографических исследованиях, очень широк. Прежде всего, это лучевые преобразования: продольные, поперечные, укороченные поперечные и смешанные, которые действуют не только на искомые скалярные величины, но и на подлежащие определению векторные и тензорные поля различной физической природы. Более того, эти преобразования могут быть вычислены не только вдоль прямых, но и вдоль различных семейств кривых. В частности, вдоль геодезических римановой метрики. Методы приближенного восстановления искомых величин по томографическим данным, интенсивно развиваются. В рамках этих задач большую роль играют и методы обращения интегральных преобразований, на которых основан широкий класс алгоритмов решения задач томографии.

Работа осуществлена при частичной поддержке Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН №14)

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С. Основы компьютерной томографии. Москва, 1999.
2. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000.

Об одной обратной задаче типа Стефана

С.К. Джанабекова, С.Т. Мухамбетжанов, Н.К. Шаждекеева

г. Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби;
mukhambetzhano@mail.ru

В работе изучаются свойства автомодельных решений и предельные переходы по параметрам одной задачи типа Стефана, описывающей кинетику замерзания грунта. Наряду с прямой задачей изучены методы определения коэффициентов теплопроводности, влагопереноса и малость времени релаксации.

Пусть Ω - ограниченная область в R^m с достаточно гладкой границей S , $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = S \times (0, T)$. Постановка прямой задачи: требуется найти функции $\theta(x, t)$, $w(x, t)$ (температуру и влажность грунта), определенные в области Q_T , удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\theta_t &= k\Delta\theta + \chi \cdot \alpha \cdot (w - H(\theta)), \\ w_t &= \lambda\Delta w - \alpha \cdot (w - H(\theta))\end{aligned}\tag{1}$$

начальным и граничным условиям:

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega,\tag{2}$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega,\tag{3}$$

$$\theta(x, t) = \theta_s(x, t), \quad (x, t) \in S_T,\tag{4}$$

$$w(x, t) = w_s(x, t), \quad (x, t) \in S_T,\tag{5}$$

где функция $H[\theta(x, t)] = 1$ при $\theta(x, t) > 0$, $H[\theta(x, t)] = 0$ при $\theta(x, t) < 0$, а на множестве $E_\theta = \{(x, t) \in Q_T | \theta(x, t) = 0\}$ функция $H[\theta(x, t)] = [0, 1]$ почти всюду. Всюду ниже коэффициенты k, λ, χ, α считаются положительными константами и в случае обратной задачи указанные коэффициенты считались функциями от искомых функций.

Переход от неравновесного состояния в равновесное состояние. Интересным является тот факт, что если перейти к пределу по $\alpha \rightarrow \infty$ в задачи (1) - (5), то предельная задача является задачи Стефана в автомодельной постановке:

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \cdot a(v) \cdot \frac{dv}{d\xi} = 0, \quad a = \phi'(v), \quad \xi \in (0, D_*),\tag{6}$$

$$v(0, \beta) = \beta, \quad v(D_*, \beta) = 0,\tag{7}$$

$$\frac{dv}{d\xi}(D_*, \beta) = -\frac{1}{2} \cdot D_*,\tag{8}$$

где функция $v(\xi, \beta)$ и параметр $D_* = D_*(\beta)$ подлежат определению из (6) - (8).

В (6) уравнение получено домножением второе уравнение в (6) относительно влажности на χ и сложив с первым уравнением относительно температуры в (6), а после предельного перехода по $\alpha \rightarrow \infty$ функция $w = H(\theta)$, т. е. предельная задача является равновесной.

Существование и единственность задачи (6) - (8) следует из результатов работы [1]. При дополнительных условиях типа (7) соответствующая задача имеет единственное решение. Построение решения проводится с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке. Однако в отличие от автомодельного решения, изложенного в пункте 1, автомодельное решение типа бегущей волны обладает, согласно физическому смыслу, следующими свойствами:

1) $\frac{\partial w}{\partial x} \leq 0$ при фиксированном t , т.е. влажность грунта уменьшается при удалении от источника;

2) $\frac{\partial w}{\partial t} \geq 0$, при фиксированном x , т. е. влажность на данном участке возрастает со временем.

Таким образом, при переходе к автомодельной типа бегущей волны $\eta = x - a \cdot t$ должно быть $\frac{\partial w}{\partial \eta} \leq 0$ и указанное свойство выполняется относительно температуры $\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \leq 0$, что соответствует предположению $a = const > 0$, a - скорость распространения бегущей волны в положительном направлении.

Отметим, что формально при $a = 0$ приходим к стационарной задаче, в которой $w = w(x)$, $\theta = \theta(x)$.

При определении коэффициентов уравнения были использованы модифицированный вариант вариационного метода, предложенный профессорами Отелбаевым М.О. и Смагуловым Ш.С. Кроме того, были изучены возможные варианты неидентифицируемых параметров.

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск: Наука, 1986.- 239.

О решении систем нелинейных уравнений в теории формирования волокон

А. И. Дрегля

Иркутский госуниверситет;
adreglea@gmail.com

Рассмотрены системы нелинейных уравнений в частных производных Глауэрта-Лайтхилла [1] и Блазиуса, описывающих течение в осесимметричном погранслое вязкой несжимаемой жидкости. Доказана теорема существования (см. [2, 3]) и единственности решения задачи Коши для системы Глауэрта-Лайтхилла. Для системы Блазиуса построено разрешающее уравнение относительно функции тока и найдены три точных решения.

Литература

1. *Glauert M. B., Lighthill M. J.*, The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. // Proc. R. Soc. London. 1955, 320. С.188–203.
2. *Дрегля А. И.* Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров. // Сиб. журн. ин- дустр. матем. 11(3), 2008, С. 61–70.
3. *Дрегля А. И.* Математическая модель формирования синтетического волокна. // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. 27-31 мая, 2005 г. Новосибирск, Россия, 2005. С. 44–45.
4. *Schlichting H.* Boundary Layer Theory, 7th edition, McGraw Hill, (1951).
5. *Farrel P. A., Hegarty A. F., Miller J. J. H. et al.* Robust Computational Techniques for Boundary Layers, Chapman and hall CRC, Florida, USA, (2000).

Задача определения нестационарного коэффициента поглощения в одном уравнении гиперболического типа

Д. К. Дурдиев

Бухарский Государственный университет
durdiev65@mail.ru

Рассматривается задача Коши

$$u_{tt} - u_{xx} - b(x, t)u_t = \delta(x, t - s), \quad (x, t) \in R^2, \quad s > 0, \quad (1)$$

$$u \Big|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

где $\delta(x, t)$ - дельта-функция Дирака, $b(x, t)$ - непрерывная функция, s является параметром задачи, $u(x, t, s)$.

Поставим обратную задачу: требуется найти коэффициент поглощения $b(x, t)$, если известны значения решения задачи (1), (2) при $x = 0$, т.е. задана функция

$$u(0, t, s) = f(t, s), \quad t > 0, \quad s > 0. \quad (3)$$

Под решением обратной задачи понимается такая функция $b(x, t)$, что соответствующее ей решение задачи (1), (2) удовлетворяет равенству (3).

Поставленная обратная задача (1) - (3) является двумерной. В случае, когда $b(x, t) \equiv b(x)$, вопросы разрешимости для различных постановок задач, близких к (1), (2), изучены [1, гл. 2]. Задача определения двумерного потенциала исследована в [2].

В этой работе доказывается, что если решение обратной задачи существует, то оно однозначно определяется информацией (3) в классе непрерывных и четных по x функций. Для решения выписывается оценка условной устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г. Романов, Обратные задачи математической физики, Наука, М., 1984.
2. Д.К.Дурдиев, Задача определения нестационарного потенциала в одном уравнении гиперболического типа // ТМФ. 156(2008), 2, с. 220-225.

Решение граничной обратной двухфазной задачи Стефана с неизвестной границей

Е.В. Дутикова

Челябинский государственный университет;
helenor@nm.ru

Данная задача возникает при математическом моделировании перемещения фронта разложения связующего композиционного теплозащитного материала при входе летательного аппарата в плотные слои атмосферы в рамках модели тонкого (плоского) слоя разложения [1].

Математическая постановка прямой двухфазной задачи Стефана в одномерном случае следующая: решить уравнения

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), t \geq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < l, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

при наличии краевых условий

$$u_1(0, t) = \Phi_1(t), t \geq 0, \quad (3)$$

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), 0 < x < \xi(0), \quad (4)$$

$$u_2(l, t) = \Phi_2(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \xi(0) < x < l, \quad (6)$$

причем $\xi(0) = \xi_0 \neq 0$, $\xi(0) \neq l$. На границе раздела фаз имеют место условия:

$$u_1(\xi(t), t) = u_2(\xi(t), t) = T_0 = 0, \quad (7)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1(\xi(t), t)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2(\xi(t), t)}{\partial x} = \xi'(t). \quad (8)$$

Допустим, что граничный режим при $x = l$ неизвестен (т.е. неизвестна функция $\Phi_2(t)$), но в некоторой внутренней точке $x = x_0$, $0 < x_0 < \xi(0)$, задана дополнительная информация о решении прямой задачи Стефана (1)–(8):

$$u_1(x_0, t) = f(t), t \geq 0. \quad (9)$$

Тогда возникает обратная задача Стефана: найти функции $\xi(t)$, $\Phi_2(t)$, удовлетворяющие условиям (1)–(8), где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\Phi_1(t)$, $f(t)$ предполагаются заданными. Данная обратная задача решается в два этапа. Сначала находим неизвестную границу $\xi(t)$, затем из условия (8) определяем дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial u_2(\xi(t), t)}{\partial x} = g_2(t), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Получим обратную задачу (2), (5)–(7), (10). На практике функция $g_2(t)$ задается приближенно с погрешностью δ , то есть известна функция $g_2^\delta(t)$. Задача определения функции $\Phi_2(t)$ является неустойчивой. Полагая, что $\Phi_2(t) \in W_2^1[0, \infty)$, $g_2^\delta(t) \in L_2[0, \infty)$, с помощью синус-косинус-преобразований Фурье сведем данную задачу к операторному уравнению первого рода

$$A\hat{\Phi}_2(z) = \hat{g}_2^\delta(z). \quad (11)$$

Уравнение (11) решается методом установления с выбором параметра регуляризации по принципу невязки, который, как показано в [2], является оптимальным по порядку на классе

$$Mr = \{v_0 \in W_2^1[0, \infty) : v_0(0) = v_0'(0) = 0, \|v_0\| \leq r, v_0'' \in L_1[0, a]\}.$$

Литература

1. *Полежаев, Ю.В.* Тепловая защита / *Ю.В. Полежаев, Ф.Б. Юревич.* — М., Энергия. 1976. — 392 с.
2. *Дутикова, Е.В.* Исследование оптимальности метода установления на различных классах равномерной регуляризации / *Е.В. Дутикова.* — Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург, 29 янв.–2 февр. 2007 г. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 150–153.

Численный метод восстановления пяти диагональных симметричных матриц по спектральным данным

А. Елеуов, Б.Е. Кангужин

Казахский национальный университет;
Eleuov@mail.ru, kanbalta@mail.ru

При дискретизации краевых задач для линейных дифференциальных уравнений на отрезке возникают ленточные матрицы. Алгоритм восстановления трех диагональных матриц по двум спектрам можно найти в работе [1]. Обратные спектральные задачи для пяти диагональных унитарных матриц рассмотрены в работе [2]. В данной работе указан алгоритм однозначного восстановления пяти диагональной симметричной матрицы. В начале работы исследуются свойства собственных значений симметричной пяти диагональной матрицы A . Диагональные элементы $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ считаем вещественными, а элементы третьей диагонали c_0, c_1, \dots, c_{n-2} положительными. Матрица B получается из матрицы A вычеркиванием первой строки и первого столбца. Матрица C получается из матрицы B вычеркиванием первой строки и первого столбца.

Теорема 1. Матрицы A и B , имеют вещественные простые собственные значения (являются существенно простыми матрицами), причем собственные значения матриц A и B перемежаются. Аналогичное утверждение верно и для матриц C и B

Теорема 2. Если три последовательности являются собственными значениями матриц A, B, C , а четвертая последовательность - нули некоторого многочлена $y_1(\lambda)$, то по указанным последовательностям элементы матрицы A восстанавливаются однозначно.

Причем дан алгоритм восстановления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hochstadt H. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data // Linear Algebra and its Applications. 1974. V.8, № 5. p. 435 - 446.
2. Голинский Л.Б., Кудрявцев М.А. Обратные спектральные задачи для одного класса пяти диагональных унитарных матриц // Докл. РАН. 2008. Т.423, № 1. с.11-18

Построение модельных приближенных СЛАУ с известными решениями, являющимися точками минимума классического сглаживающего функционала

В. И. Ерохин, В. В. Волков

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
Борисоглебский государственный педагогический институт;
erohin_v_i@mail.ru, volkov@fizmat.net

Рассмотрим задачу $P(\mu, \delta) : \|x\| \rightarrow \min_{\|b-Ax\|=\mu\|x\|+\delta}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$ содержат приближенные значения и отвечают условиям $\|A_0 - A\| \leq \mu$ и $\|b_0 - b\| \leq \delta < \|b\|$, символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма. Известные $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b_0 \in \mathbb{R}^m$, $b_0 \neq 0$ задают гипотетическую точную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), неизвестный вектор x_0 — ее нормальное решение. Решение задачи $P(\mu, \delta)$ будем обозначать $x_{\mu\delta}^*$.

В работах А.Н. Тихонова [1, 2] показано, что решение задачи отыскания вектора x_1 , являющегося устойчивым приближением к вектору x_0 при $\mu, \delta \rightarrow 0$, может быть получено как решение задачи $P(\mu, \delta)$ при $\mu, \delta \rightarrow 0$.

В настоящей работе рассматривается частный случай задачи $P(\mu, \delta)$ для $\delta = 0$, $\mu > 0$, для которого будем использовать обозначение $P(\mu, 0)$.

Приведенное ниже утверждение позволяет конструировать модельные точные и приближенные системы для задачи $P(\mu, 0)$ с заданным решением $x_{\mu\delta}^*$.

Теорема. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — произвольная матрица, $x_{\mu\delta}^* | A^+ A x_{\mu\delta}^* = x_{\mu\delta}^*$ (где A^+ — псевдообратная матрица к матрице A), $0 < \alpha \leq \frac{\mu \|x_{\mu\delta}^*\|}{\|A^{+T} x_{\mu\delta}^*\|}$, $b_0 = A x_{\mu\delta}^* + \alpha A^{+T} x_{\mu\delta}^* + \Delta b$ (где Δb такой, что $A^T \Delta b = 0$, $A^T \Delta b = 0$, $\|\alpha A^{+T} x_{\mu\delta}^* + \Delta b\| = \mu \|x_{\mu\delta}^*\|$), $A_0 = A + (b_0 - A x_0) x_0^+ + Z$, вектор x_0 и матрица $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ отвечают условиям $\frac{\|b_0 - A x_0\|^2}{\|x_0\|^2} + \|Z\|^2 = \mu^2$, $Z x_0 = 0$.

Тогда система $A_0 x = b$ совместна, x_0 — ее нормальное решение, выполняется условие $\|A_0 - A\| = \mu$, $x_{\mu\delta}^*$ — является единственным решением задачи $P(\mu, 0)$ и точкой минимума функционала $\Phi(x) = \|b_0 - A x\|^2 + \alpha \|x\|^2$, СЛАУ $A_0 x = b$ и $A x = b_0$ являются соответственно точной и приближенной системами, отвечающими условиям задачи $P(\mu, 0)$.

Численный пример

$$A_0 = \begin{bmatrix} 9.02448359 & 8.04447372 \\ 7.99197591 & 7.08858519 \\ 6.95017307 & 6.1450902 \\ 5.89907507 & 5.21398876 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 25.5222206 \\ 21.89206512 \\ 18.64920798 \\ 15.79364917 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \\ 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, b = b_0$$

$$\mu = 0.3, \delta = 0; \quad x_0 = \begin{bmatrix} -15 \\ 20 \end{bmatrix}; \quad x_{\mu\delta}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \alpha = 0.14285714.$$

Литература

1. Тихонов А.Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254. №3. С. 549-554.
2. Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. №6. С. 1373-1383.

Восстановление симметричных тензорных полей малого ранга по томографическим данным методом сингулярного разложения

А.В. Ефимов

Новосибирский государственный университет
eprant@gmail.com

В работе рассматривается подход к решению актуальной в томографии задачи восстановления симметричного тензорного поля малого ранга по томографическим данным методом сингулярного разложения, широко используемым при решении обратных задач математической физики.

Для скалярных функций подобная задача решена в [1]. В работе для скалярного случая так же получен идентичный результат, хотя и в несколько ином виде. Исследуются операторы продольного и поперечного лучевого преобразований тензорного поля (до второго ранга включительно), для которых методом потенциалов получены сингулярные разложения при помощи специальным образом построенных ортогональных полиномиальных базисов.

На основании полученных разложений предложен способ приближенного восстановления симметричного тензорного поля по его лучевому преобразованию методом усеченного сингулярного разложения. Написана программа, реализующая этот алгоритм, проведены численные эксперименты, показывающие применимость метода SVD.

Литература

1. *Наттерер. Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. // М.: Мир, 1990.

Научный руководитель — канд. физ.-мат. наук, Е.Ю. Деревцов

О некоторых обратных задачах для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении

А.А. Жидков, А.В. Калинин, М.И. Сумин

Нижегородский государственный университет
Artem.Zhidkov@gmail.com

В настоящее время можно отметить растущий интерес к изучению электромагнитных явлений в атмосфере [1]. Исследование достаточно широкого класса задач атмосферного электричества может быть проведено в рамках квазистационарного электрического приближения, в котором предполагается потенциальность напряжённости электрического поля. В частности, такие задачи возникают при моделировании глобальной электрической цепи в атмосфере Земли.

В настоящей работе изучаются вопросы корректности прямых задач для системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(x, t) + 4\pi\sigma \vec{E}(x, t) + 4\pi \vec{J}^{CT}(x, t) = \text{crot} \vec{H}(x, t), \quad \text{rot} \vec{E}(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $x \in \Omega \subset R^3$, $t \in [0, T]$. Предполагается, что Ω – открытое ограниченное подмножество R^3 , диффеоморфное шаровому слою, с границей $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 – компоненты связности границы, каждая из которых диффеоморфна сфере в R^3 .

При постановке прямых задач предполагается, что выполнены начальные и граничные условия для напряжённости электрического поля

$$\vec{E}_\tau(x, t) \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \vec{E}(x, t) \Big|_{t=0} = \vec{E}_0(x). \quad (2)$$

В работах [2–3] показано, что задача (1)–(2) об определении вектора напряжённости электрического поля и вихря магнитного поля при заданных сторонних токах $\vec{J}^{CT}(x, t)$ и проводимости атмосферы $\sigma(x, t)$ является корректно поставленной в функциональных классах, определённых постановкой задачи.

Также в работе рассматриваются некоторые обратные задачи, решаемые в предположении, что на поверхности Земли измерена нормальная компонента электрического поля

$$E_n(x, t) \Big|_{x \in \Gamma_1} = u(x, t). \quad (3)$$

Для решения обратных задач обосновываются регуляризирующие алгоритмы, основанные на теории двойственности [4].

Литература

1. Шестая Российская конференция по атмосферному электричеству. Сборник трудов. Под. ред. Мареева Е.А. –Н. Новгород, 2007.
2. Калинин А.В., Жидков А.А. Задача об определении электрического потенциала в квазистационарном электрическом приближении для системы уравнений Максвелла // Обозрение прикладной и промышленной математики. –Т.14, Вып.4. –М.: ОПИПМ, 2007. –С.712–714.
3. Жидков А.А., Калинин А.В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, №3. – Н.Новгород, 2009.
4. Сумин М.И. Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. –Т.47, №4. 2007. –С.602–625.

Численные методы решения обратных задач теории аномальной диффузии

Д.С. Иващенко

ООО «РН-УфаНИПИнефть»
stanger@ngs.ru

Рассматривается обратная задача восстановления параметров неоднородной среды - обобщенного коэффициента диффузии $q(x)$ и показателя аномальной диффузии α , характеризующего «фрактальную» размерность среды и связанные с ней эффекты остаточной памяти и нелокальности, присущие диффузионным процессам, протекающим в таких средах (см. [1] и цитированную там литературу).

В качестве математической модели аномального диффузионного процесса используется дифференциальное уравнение с дробной производной [2] по времени вида

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right),$$

где D_t^α — оператор дробного дифференцирования Капуто и $0 < c_1 \leq (x) \leq c_2$. Обратные задачи рассматриваются в разностной постановке, дробная производная Капуто заменяется своим разностным аналогом - дискретной производной Грюнвальда-Летникова. Метод конечных разностей дробного порядка, разработанный для решения прямых задач теории аномальной диффузии, представлен в работе [1].

При решении обратных задач, следуя А.Н.Тихонову, предполагается, что обобщенный коэффициент диффузии $q(x)$ является функцией некоторого известного класса и его вид определяется набором параметров, отыскание которых и представляет основной интерес. Решение обратных задач доставляет минимум функционалу невязки, где невязка понимается как разность вектора данных обратной задачи и вектора модельных данных. В качестве инструментов численного решения обратных задач используются генетические алгоритмы (для построения начального приближения) и метод Левенберга-Марквардта, реализованные в стандартных функциях MATLAB.

Литература.

1. Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С. Методы численного решения краевых задач теории аномальной диффузии. Сибирские электронные математические известия, 2008, том 5, стр. 581-594
2. Podlubny I. Fractional Differential Equations. — CA: Academic, San Diego, 1999.

Про идентификации коэффициентов двумерного нелинейного уравнения

Э.А. Илишева, М.М. Касымбекова

КазНПУ им.Абая, Алматы, Казахстан
bonita2713@mail.ru

В настоящей работе рассматриваются условия нарушения взаимнооднозначного соответствия между температурным полем и параметрами среды, которые зависят от температуры. найдены функциональные свойства решения нелинейного двумерного уравнения теплопроводности, которое является инвариантным относительно группы переноса его коэффициентов. В области $Q_T = \{(x, y, t) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, 0 < t < T\}$ рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности с краевыми условиями первого рода:

$$a_1(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_2(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (x, y, t) \in Q_T \quad (1)$$

с начальными:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y) \quad (2)$$

и краевыми условиями:

$$u|_{x=x_i} = \gamma_i(y, t), \quad u|_{y=y_i} = \mu_i(x, t), \quad i = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

где $a_1(u)$ и $a_2(u)$ – положительные, соответственно, непрерывная и дифференцируемые функции. Относительно начально-краевых условий (2)–(3) предполагается, что они удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решения $u(x, y, t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ для заданных коэффициентов $a_i(u)$, $i = 1, 2$. Введем следующие обозначения: $k_1 = a_1^1(u) - a_1^2(u)$, $k_2 = a_2^1(u) - a_2^2(u)$, причем $a_i^j \neq const$, $i, j = 1, 2$. Доказано следующая:

Теорема. Пусть существуют вектор-функции $A^1 \neq A^2$, где $A^j = \{a_1^j(u), a_2^j(u)\}$, $j = \overline{1, 2}$, которым отвечает одно и то же решение $U(x, y, t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, причем $A^j \neq const$, $i = \overline{1, 2}$. Тогда M –подмножество «неидентифицируемых» в целом решение задачи имеет меру отличную от нуля.

В работе проведены численные расчеты

Список литературы

1. С.И.Кабанихин, К.Т.Искаков. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Изд-во НГУ, Новосибирск. 2001. 315 с.
2. М.Р.Романовский Идентифицируемость в целом нелинейного уравнения теплопроводности и автомоделные решения. //ИФЖ. 1983. Т.45. N2. с.309-316.

Обратная задача для модели противоточной капиллярной пропитки.

К.Т. Искаков

КазНПУ им.Абая, Алматы, Казахстан;
kazizat@mail.ru

В работе рассматривается прямая и обратная задача противоточной капиллярной пропитки в одномерном случае по пространственным переменным. Для решения прямой задачи использованы переменные Мизеса. Обратная задача решается оптимизационным методом.

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ ищется функция $S(x, t)$ – водонасыщенность, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) + F(S, x), \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

со следующими начальными и краевыми условиями:

$$S \Big|_{t=0} = S_0, \quad (2)$$

$$a(S) \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad S \Big|_{x=l} = \mu_2(t). \quad (3)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1)-(3) известно дополнительная информация:

$$S(x_m, t_k) = f_{m,k}; \quad m, k = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где: (x_m, t_k) – точки расположение скважин, $N < N_h$, $N < N_\tau$, где N_h , N_τ – число разбиений по осям x, t соответственно.

Обратная задача: Найти $a(S)$, $S(x, t; a)$ по известной дополнительной информации (4) из соотношений (1)-(3).

Для решения обратной задачи применен оптимизационный метод, по аналогии как в работах [1, 2].

Рассмотрен функционал

$$J(a(S)) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[S(r_m, t_k; a(S)) - f_{m,k} \right]^2 \quad (5)$$

Через функцию $S(r_m, t_k; a)$ обозначена зависимости решения от искомого коэффициента $a(S)$, $f_{m,k}$ – результаты измерений (наблюдений).

Градиент функционала (5) имеет вид:

$$J'(a(S)) = - \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \psi \right) \varphi(S, \tau) d\tau,$$

где: $S \in [S_0, S_1]$, $\tau \in [0, T]$ – решение соответствующей сопряженной задачи.

Для вычисления градиента функционала применены алгоритмы приведенные в работе [2].

Список литературы

1. A quantitative NMR imaging study of mass transport in porous solids during drying. Koptuyug I.V., Kabanikhin S.I., Iskaikov K.T., Fenelonov V.B., Khitrina L.Yu., Sagdeev R.Z., Parmon V.N. // Chem. Engineering Science. 2000. V.55. P.1559-1571.
2. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. С.И.Кабанихин, К.Т.Искаков. Изд-во НГУ. Новосибирск. 2001. 315 с.

О единственности решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода

З.А. Каденова

Кыргызско-Узбекский Университет, Кыргызстан;
Kadenova71@mail.ru

Рассмотрим систему

$$Ku \equiv \int_a^b K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (1)$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} A(t, s), & a \leq s \leq t \leq b, \\ B(t, s), & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \quad (2)$$

$K(t, s) = (K_{ij}(t, s))$, $A(t, s) = (A_{ij}(t, s))$, $B(t, s) = (B_{ij}(t, s))$ - известные $n \times n$ - мерные матричные функции. $u(t) = (u_i(t))$, $f(t) = (f_i(t)) \in L_2([a, b]; E_n)$ - n - мерные соответственно искомые и известные вектор-функции. С помощью метода, примененного в работе [1], доказывается теорема единственности решения системы уравнения (1) в классе $L_2([a, b]; E_n)$.

Введем новую матричную функцию $M(t, s) = \begin{cases} H(t, s) & a \leq s \leq t \leq b \\ H(s, t) & a \leq t \leq s \leq b \end{cases}$

где $H(t, s) = A(t, s) + B^*(s, t)$ B^* - сопряженная матрица к матрице B . В силу замечания 9.1 [2] справедлива формула

$$M(t, s) = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\nu)}(t) \\ \dots \\ \varphi_n^{(\nu)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\nu)}(s) \dots \varphi_n^{(\nu)}(s) \end{pmatrix}, \quad m \leq \infty$$

Из условия а) следует, что все λ_{ν} положительны и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$

Предположим выполнение следующего условия:

а) Все собственные значения λ_{ν} матричного ядра $M(t, s)$ положительны. Теорема 2.1.1. При выполнении условия а) решение системы (1) в пространстве $L_2([a, b]; E_n)$ единственно (здесь E_n - n -мерное вещественное евклидово пространство).

Литература

1. Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // Функциональный анализ и его приложения., 1983.-Е.17, Вып.4.-С.73-74.
2. Талдыкин А.Т. Векторные функции и уравнения. -Л.: Издательство ЛГУ, 1977.

Анализ алгоритмов решения прямых и обратных задач зондирования на постоянном токе

К.В. Ковбасов

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН;
kovbasov@gmail.com

Рассматривается задача идентификации слабопроводящих подобластей во вмещающей среде, состоящей из пластов с различными электрическими характеристиками. Источниками электрического поля является система электродов с заданным током или разностью потенциалов.

Прямое моделирование проводится с использованием скалярного метода конечных элементов на линейных базисных функциях и нерегулярном тетраэдральном разбиении расчётной области.

Обратная задача решается при помощи метода регуляризации [1], рассматриваются условная и безусловная минимизация функционала методами второго и первого порядков [2].

На этом классе методов были выполнены серии вычислительных экспериментов, ориентированных на работу с областями, имеющими конкретные геометрические особенности, определяющие алгоритмы генерации симплицальных разбиений: горизонтально-слоистые среды, среды с локальными неоднородностями. Для решения обратных задач в горизонтально-слоистых средах наиболее эффективным оказался алгоритм триангуляции области, разработанный на базе метода тиражирования сечений.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.- 2 изд.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. *Haber E., Asher U. M., Oldenburg D.* On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems // *Inverse Problems*.- 2000.- Vol. 16.- Pp. 1263-1280.

Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной граничной задачи для параболического уравнения

Н.Ю. Колесникова

Южно - Уральский государственный университет;
natasha720221@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a(x)u(x, t), \quad (1)$$

в котором $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $a(x) \leq 0$ и $a(x) \in C^2[0, 1]$. Предположим, что

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

и

$$u(x_0, t) = f(t); \quad 0 < x_0 < 1, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

а граничное значение $u(1, t)$ функции $u(x, t)$ требуется определить. Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, где $f_0 \in L_2[0, \infty)$, существует точное решение $u_0(1, t) \neq 0$ нашей задачи, которое принадлежит пространству $C^1[0, \infty)$, $u_0(1, 0) = 0$ и существует число $T > 0$ такое, что при $t \geq T$

$$u_0(1, t) = 0, \quad (5)$$

кроме того, $u_0(1, t) \in M_r$, где $M_r = \{u_0 : u_0 \in C^1[0, \infty), \|u_0\|_{L_2}^2 + \|u_0'\|_{L_2}^2 \leq r^2\}$. Точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$ и уровни погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Методом проекционной регуляризации $\{P_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$ построено приближенное решение $u_\delta(1, t)$ задачи (1)-(4), для которого получена точная по порядку оценка $\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{L_2} \sim \ln^{-2}\delta$ при $\delta \rightarrow 0$.

Восстановление управлений методом динамической регуляризации с негладкими стабилизаторами

М.А. Короткий

Уральский государственный университет
m_korotkii@list.ru

Рассматривается обратная задача о восстановлении априори неизвестных управлений, функционирующих в управляемой динамической системе. Управляющие воздействия в динамической системе могут быть заранее неизвестны и должны быть определены по результатам наблюдений за объектом. Восстановленные управляющие воздействия далее могут быть использованы для оценки характеристик управляемого объекта, оперативного принятия решений или более адекватного моделирования. Хорошо известно, что рассматриваемая задача некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации [1-3]. Подобного рода задачи восстановления для динамических систем изучались в разных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации.

Для решения задачи предлагается использовать метод динамической регуляризации [4,5]. Исходной информацией для решения служат результаты мгновенных приближенных измерений текущих фазовых положений системы, которые поступают наблюдателю в динамике в течение какого-либо заданного промежутка времени. Здесь измерения и восстановления осуществляются в динамике по ходу процесса по мгновенно поступающей информации. Особенность динамического подхода состоит в том, что данные для расчетов могут поступать только по ходу процесса и зависеть в настоящем от того, как проводилось восстановление в прошлом. Развитие такого подхода связано с тем, что в некоторых инженерных и научных разработках часто возникает необходимость осуществить восстановление синхронно с развитием процесса. С подобными задачами имеют дело в механике управляемого полета, в проблемах оперативной обработки информации при создании технологических и производственных процессов. Для решения задачи восстановления динамическим методом привлекаются понятия и методы теории позиционного управления [6] и теории некорректных задач. При этом регуляризация осуществляется локально на малом промежутке времени. Для решения задачи построены конструктивные устойчивые регуляризирующие алгоритмы. Динамические алгоритмы, кроме того, обладают свойством физической осуществимости и способны работать в режиме реального времени, обрабатывая поступающую по ходу движения системы информацию и выдавая результат в динамике по мере развития движения.

Показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и нормы пространства L_2 можно получить поточечную сходимость, сходимость в L_2 , сходимость вариаций и равномерную сходимость на участках непрерывности искомого восстанавливаемого управления. В этом смысле можно говорить о возможности численного восстановления тонкой структуры искомого управления.

Автор благодарит В.В.Васина за постановку задачи и внимание к работе. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№09-01-00053) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1).

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

4. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983, № 2, стр. 51-60.
5. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

О разрешимости задачи Коши для нелинейного сингулярного дифференциально-операторного уравнения

А.В. Красник

Иркутский государственный университет
krasnik_andrey@mail.ru

Рассматривается нелинейное дифференциально-операторное уравнение с условием Коши

$$B\dot{u}(t) = R(u(t), t) \quad (1)$$

$$Bu(0) = v_0 \quad (2)$$

здесь B фредгольмов оператор с конечномерным ядром действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 , $R(\cdot, \cdot) : E_1 \oplus R \rightarrow E_2$ — нелинейный оператор, $v_0 \in E_2$. На основе редукции задачи Коши (1), (2) к интегрально-операторному уравнению вида

$$G(v(t), t) = \int_t^0 K(v(t), t, s) \quad (3)$$

и принципа сжимающих отображений [1] были получены условия однозначной локальной разрешимости задачи (1), (2). Был построен процесс последовательных приближений для уравнения (3). Абстрактная теория для задачи Коши (1), (2) проиллюстрирована конкретными начально-краевыми задачами математической физики.

Литература.

1. *Треногин В.А.* Функциональный анализ: Учебник. 4-е издание. М.: Физматлит, 2007.

О приближённом решении одной двумерной обратной задачи для уравнения теплопроводности

А.С. Кутузов

Челябинский государственный университет;
thething84@mail.ru

Рассматривается осесимметричная граничная задача

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \Delta u(x, y, t); \quad u(x, y, 0) = 0; u|_{\Gamma_1} = 0; u|_{\Gamma_0} = f(t) : \quad (1)$$

где $x, y \in K$, K — кольцо, ограниченное окружностями Γ_1 и Γ_2 с радиусами r_1 и r_2 , $t \geq 0$, $\Gamma_0 = \{x, y \in K : x^2 + y^2 = r_0^2; r_1 < r_0 < r_2\}$, а граничное значение $u|_{\Gamma_2}$ подлжит определению.

Переходя к полярным координатам, получаем некорректно поставленную задачу

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}; u|_{t=0} = 0; u|_{z=r_1} = 0; u|_{z=r_0} = f(t); t \geq 0; r_1 \leq z; r_0 \leq r_2; \quad (2)$$

в которой требуется определить $u|_{z=r_2} = u_0(r_2, t); t \geq 0$.

Пусть при $f(t) = f_0(t) \in L_2[0, \infty)$ существует точное решение $u_0(r_2, t) \in W_2^1[0, \infty)$, причём $u_0(r_2, t) \in Mr = \{u_0 \in W_2^1[0, \infty) : \|u_0\|_{W_2^1}^2 \leq r^2\}$. Однако точное значение $f_0(t)$ неизвестно, вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Требуется, используя исходные данные f_δ , δ и M_r задачи (2) построить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|u_0 - u_\delta\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t) = u_0(r_2; t)$.

В качестве рабочего пространства \bar{H} возьмем комплексный вариант $L_2[0, \infty)$ над полем действительных чисел, его элементы и норма стандартны. Изометричное преобразование Фурье на нём определим, как $F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) e^{-i\tau t} dt; \tau \geq 0$.

Применяя к (2) введённое преобразование и выполняя известные замены переменных, сводим исходную задачу к следующей операторной форме:

$$A \hat{w}(r_2 - r_1, \tau) = \frac{1}{e(r_2 - r_1, \tau)} \hat{w}(r_2 - r_1, \tau) = l_\delta(\tau); A : \bar{H} \rightarrow \bar{H}; \tau \geq 0.$$

Здесь $\hat{w}(\theta, \tau) = \hat{v}(\theta + r_1, \tau)$, $\theta = z - r_1$, $\hat{u}(z, \tau) = \hat{v}(z, \tau) \cdot z^{-\frac{1}{2}}$, $l(\tau) = \frac{f(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0 - r_1, \tau)}$. Функция $e(\theta, \tau)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d^2 e(\theta, \tau)}{d\theta^2} + \frac{1}{4(\theta + r_1)^2} e(\theta, \tau) = i\tau e(\theta, \tau); e(0, \tau) = 0; e'_\theta(0, \tau) = 1.$$

Теорема 1. При условии $r_0/r_1 < 2\pi + 1$ функция $l(\tau)$, непрерывна при $\tau \geq 0$.

Теорема 2. Существуют числа $\tau_0 > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что для любого $\tau \geq \tau_0$ выполняется неравенство: $c_1 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}} \leq |e(\theta, \tau)| \leq c_2 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}}$.

Точное решение задачи лежит в классе $B\bar{S}_a$, где $\bar{S}_a = \{\hat{\gamma} : \hat{\gamma} \in \bar{H}, \|\hat{\gamma}\| \leq a\}$, $B\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \hat{\rho}(\tau)$, $\hat{\rho}(\tau) \in H$, тогда применяя метод проекционной регуляризации, предложенный в [1], получаем оптимальную по порядку на классе $B\bar{S}_a$ оценку $\|\hat{w}\delta - \hat{w}_0\| \leq c_3 \ln^{-2} \frac{1}{c_4 \delta}$, откуда следует оценка для исходной функции \hat{u} . Приближенное решение задачи определим как $u_\delta(t) = Re \{F^{-1} [\hat{u}_\delta(\tau)]\}$.

Литература.

1. Танаева В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач. Сиб. журн. индустр. матем., 2004, Т. 7, №2, С. 117–132.

Параллельная реализация численной модели столкновения галактик

Г.Г. Лазарева

ИВМиМГ СО РАН
lazareva@ssd.sccc.ru

И.М. Куликов

НГТУ
kulikov@ssd.sccc.ru

Целью работы является численное моделирование столкновения газовых компонент двух одинаковых дисковых галактик в процессе центрального столкновения последних в полярном направлении. Движение галактик в плотных скоплениях превращает столкновения между ними в важный эволюционный фактор, поскольку за хаббловское время рядовая галактика может испытать до десятка столкновений с другими галактиками своего скопления. Наблюдательное и теоретическое изучение взаимодействующих галактик - незаменимый метод исследования их свойств и эволюции. Компоненты галактик, взаимодействуя друг с другом, обнаруживают свои физические свойства и объясняют появление наблюдаемых "аномальных" объектов. Таким образом, взаимодействующие астрофизические объекты являются единственными "экспериментальными установками доступными для изучения многих аспектов физики основных астрономических объектов. Это обстоятельство привлекает внимание к всестороннему изучению физики взаимодействующих галактик всеми доступными на сегодня наблюдательными и теоретическими средствами, в том числе и с привлечением компьютерного моделирования.

В докладе представлены результаты разработки параллельной программы для моделирования динамики самогравитирующих газовых структур на многопроцессорных компьютерах с распределенной памятью. Модель основана на решении системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением для внутренней энергии и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Исходная система газодинамических уравнений решается методом крупных частиц с коррекцией баланса энергий. Задача решалась с учетом вращения, самосогласованного гравитационного поля, центрального тела сложной геометрии, с учетом температуры газа, в трехмерной постановке в декартовых координатах. Созданная параллельная реализация позволяет получать адекватные результаты для трехмерной модели гравитационной газовой динамики. Главные трудности при этом состоят в вычислении гравитационного потенциала, который задается трехмерным уравнением Пуассона и правильным распределением массивов сеточных переменных между процессорными элементами. Тестовые вычисления, проведенные на суперкомпьютерах НКС-160 ССКЦ СО РАН, МВС-6К МВСКЦ РАН показали, что при решении системы уравнений газовой динамики линейного ускорения не происходит, т.к. имеет место насыщение в результате обменов. Реализация трехмерной модели гравитационной газовой динамики на многопроцессорной вычислительной системе позволило использовать для расчетов подробные сетки, а следовательно дало возможность решать более широкий класс задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00615), Интеграционного проекта СО РАН №103, Интеграционного проекта СО РАН №26.

Конечно-разностное моделирование акустического каротажа в трехмерных неоднородных трансверсально-изотропных средах с поглощением

Е.В.Лысь

ИНГГ СО РАН, Новосибирск;

lysev@ipgg.nsc.ru

Ключевое предназначение метода акустического каротажа это детальное определение структуры и механических свойств пород в околоскваженной зоне, посредством измерения и изучения волнового поля генерируемого источником сейсмоакустических волн расположенным в скважине. Эта задача в упрощённой постановке(скважина в однородной изотропной среде) впервые была исследована в работе [2]. Впоследствии множество авторов внесло свой вклад в изучение этой проблемы [1][3]. Однако и в настоящее время существует острый дефицит детальных описаний(определений, законов) акустических волновых полей для реалистичных неоднородных трехмерных сред с анизотропией и поглощением. Поэтому численное моделирование с высоким разрешением и учётом реалистичных механических характеристик среды в первую очередь анизотропии и поглощения, является на сегодняшний момент важнейшим подходом к изучению волнового поля возникающего при акустическом каротаже. В работе представлен метод конечно-разностного моделирования акустического каротажа для системы уравнений упругости, где тензор упругих модулей не имеет квазидиагональной структуры, что позволяет моделировать задачи с произвольной анизотропией и ТТИ в частности. При таком виде тензора упругих модулей появляется необходимость использовать специальные схемы (схема на повернутых сетках, схема Лебедева) поскольку сдвинутая сетка Верьё не позволяет аппроксимировать решение такой системы. Авторами было принято решение использовать схему Лебедева, поскольку она обладает рядом преимуществ в сравнении со схемой на повернутых сетках.

Список литературы:

1. *Becache, E.* Stability of Perfectly Matched Layers, Group Velocities and Anisotropic Waves/ Becache, E. Fauqueux, S. Joly P. // INRIA, Rapport de recherche n° 4304, Novembre 2001, 35p.
2. *Biot, M.A.* Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid/ *Biot, M.A.* // *Journal of Applied Physics*, 1952, 23, 997 -1005.
3. *Blanch, J.O.* Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique. / *Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Symes W.W.* // *Geophysics*, 1995, 60(1), 176 - 184.

О численном решении одной системы неклассических интегральных уравнений Вольтерра

Е.В. Маркова, И.В. Сидлер

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
markova@isem.sei.irk.ru

Рассматривается двухсекторная модель развития экономической системы типа В.М. Глушкова [1], описываемая системой уравнений Вольтерра с переменными пределами интегрирования

$$p(t) = \int_{a_1(t)}^t \beta(t, s)[1 - y(s)]x(s)ds, \quad (1)$$

$$x(t) = \int_{a_2(t)}^t \alpha(t, s)y(s)x(s)ds + g(t), t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ — общий продукт, производимый системой в момент t , $y(t)$ — относительная доля продукта, созданного в момент t , направляемого на развитие самой системы. Внутренние функции системы направлены на обеспечение и развитие самой системы, а внешние — на производство внешнего продукта $p(t)$. Неубывающие функции времени $a_1(t)$, $a_2(t)$ в нижних пределах интегрирования задают динамику выбытия производственных мощностей. Параметры $\alpha(t, s)$, $\beta(t, s)$, $g(t)$ — известные функции. Искомые функции $x(t)$, $y(t)$ заданы на предыстории $[\min\{a_1(t_0), a_2(t_0)\}, t_0]$.

Заметим, что мы имеем дело со смешанной системой интегральных уравнений (1), (2), в которой (1) — билинейное уравнение Вольтерра I рода, (2) — билинейное уравнение Вольтерра II рода относительно переменной $x(t)$ и I рода относительно переменной $y(t)$.

Вопросы существования решения систем уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования рассмотрены в монографии [2]. Там же показана применимость численных методов, предназначенных для классических уравнений, к решению неклассических уравнений Вольтерра I рода. Для численного решения смешанной системы (1), (2) используются методы, основанные на переходе от исходного уравнения к условию согласования в точке стыковки предыстории с основным отрезком t_0 начальных функций $x^0(t)$, $y^0(t)$ с исходными данными [3]. На примерах показано, что построенные численные схемы сохраняют порядок сходимости равным порядку аппроксимации базовой квадратуры.

Работа поддержана грантом РФФИ №09-01-00377.

Литература

1. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983, 350 с.
2. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999, 193 с.
3. Караулова И.В. Численное решение систем неклассических уравнений Вольтерра в двухсекторных моделях развивающихся систем // Труды IX Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007, т. 5, с. 118–125.

Алгоритм вычисления гармонической составляющей плотности ньютонова потенциала

А.Н. Марковский, В.Г. Лежнев

Кубанский государственный университет
mark@kubsu.ru, lzhnv@mail.kubsu.ru

Рассматривается задача: по внешним значениям ньютонова потенциала

$$\nu(x) = \int_Q f(y)E(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3$$

вычислить гармоническую составляющую $g(x)$ его плотности $f(x) \in L_2(Q)$. Где $E(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, Q - ограниченная односвязная область в \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$. Алгоритм опирается на метод базисных потенциалов, который может быть эффективно использован в различных задачах математической физики.

Следующее утверждение будем называть леммой Новикова (Новиков П.С. 1938): справедливо разложение

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций, а $h(x)$ принадлежит $N(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_Q h(y)E(x-y)dy = 0, \quad x \in Q^+ = \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}, \quad n = 2, 3$$

Функция $f(x)$ представляется в виде суммы $f(x) = g(x) + h(x)$ согласно разложению. Тогда

$$\nu(x) = \int_Q [g(y) + h(y)]E(x-y)dy = \int_Q g(y)E(x-y)dy, \quad x \in Q^+.$$

Пусть последовательность точек $z^m \in Q^+$, $m = 1, 2, \dots$, ограничена, удовлетворяет условию единственности гармонических функций.

Лемма. Последовательность базисных потенциалов $\gamma_m(x) = E(z^m - y)$, $m = 1, 2, \dots$, полна в $G(Q)$ и линейно независима.

Обозначим $g^N(x)$ проекцию функции $g(x)$ на подпространство $\{\gamma_m(x)\}_{m=1}^N \subset G(Q)$,

$$g^N(x) = \sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(x),$$

тогда

$$\nu(z^k) = \int_Q \left[\sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(y) \right] E(z^k - y)dy = \sum_{m=1}^N c_m \int_Q \gamma_m(y) \gamma_k(y)dy, \quad \forall z^k \in Q^+.$$

Коэффициенты c_m , $m = 1, 2, \dots, N$, определяются решением системы линейных уравнений с невырожденной матрицей

$$\sum_{m=1}^N c_m (\gamma_m, \gamma_k) = \nu(z^k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Работа выполнена в рамках проекта № 2.1./3828 целевой программы Минобрнауки «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)».

Задача Коши для системы уравнений упруго-колебательного состояния

О. Махмудов, И. Ниёзов

Самаркандский государственный университет
makhmudovo@rambler.ru, iqboln@mail.ru

В работе рассматривается задача Коши для системы уравнений упруго-колебательного состояния в трехмерном евклидовом пространстве. По данным на части границы области восстанавливается решения внутри области. Рассматриваемая система эллиптическая. Задача Коши для таких систем некорректно, т.е., предполагаемая решения неустойчиво относительно данных Коши. Существенно используя результаты работ [1], [2] по задаче Коши для уравнения Лапласа и работ [3]-[7] нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на её основе регуляризованное решение задачи Коши.

Литература

1. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.
2. *Ярмухамедов Ш.Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР. 1977. Т.235. №2. С.281-283.
3. *Makhmudov O., Niyozov I.* Regularization of a solution to the Cauchy Problem for the System of Thermoelasticity. Contemporary Mathematics.AMS, Primary V382, 2005,74F05, 35Q72.
4. *Махмудов О., Ниёзов И.* О задаче Коши для многомерной системы уравнений Ламэ. Изв.ВУЗ.Математика. 2006. №4(527).с.41-50.
5. *Makhmudov O., Niyozov I.* The Cauchy problem for the Lamé system in infinite domains in . Journal of inverse and Ill-Posed Problems.V14.N9.2006.pp.905-924(20).
6. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy Problem of Couple-Stress Elasticity. Contemporary Mathematics.AMS, V455, 2008.
7. *Махмудов О., Ниёзов И.* Задача Коши для системы уравнений установившихся колебаний моментной теории упругости. Узб. математический журнал. 2008. №4. с.104- 116

О разрешимости обратной задачи для дифференциального уравнения с частными производными

К.Б. Матанова

Кыргызско-Турецкий университет "Манас Бишкек, Кыргызстан
kalys_26@mail.ru

Рассматривается обратная задача для дифференциального уравнения четвертого порядка с частными производными

$$u_t' = a_0(Au)_t + a_1(Au) + \sum_{i=0}^3 b_i(t, x) \frac{\partial^{3-i} u}{\partial x^{3-i}} + a(t, x)\lambda(t)u(t, x) + f(t, x), \quad (1)$$

с начальным, краевыми и дополнительным условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = u_x'(t, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(t, x_0) = g(t), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, 1], \quad (4)$$

где $a_0 \neq 0$, a_1 - заданные числа, $b_i(t, x)$, $i = \overline{0, 3}$, $a(t, x)$, $f(t, x)$ - известные функции. Требуется найти функции $u(t, x)$, $\lambda(t)$ по следу решения (4). Здесь A - дифференциальный оператор, который имеет вид $Au = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 u$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - заданные постоянные, также выполняются условия согласования $u_0(0) = u_0(1) = u_0'(0) = 0$, $g(0) = u_0(x_0)$. Методом интегральных уравнений и с помощью функции Грина [1] для дифференциального уравнения $Au - \frac{1}{a_0} u = f(x)$ с краевыми условиями (3) [2] данная задача сводится к системе операторных уравнений Вольтерра второго рода. Приведены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи (1)-(4).

Список литературы

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. - М.: Наука, 1968. - 504 с.
2. Матанова К. Б. Об одной обратной задаче для псевдопараболического уравнения // Научные труды ОшГУ, Ош, 1999. - Вып.2. - С.137-145.

О некоторых примерах изоспектральных операторов шестого порядка

С. И. Митрохин

В работе [1] Готтлиб привёл несколько примеров изоспектральных операторов (т. е. операторов, имеющих одинаковый спектр) второго и четвёртого порядков. Некоторые обобщения его результатов даны автором в [2].

Рассмотрим дифференциальный оператор с весовой функцией, разрывной в точке x_1 :

$$-y_1^{(6)}(x) = \lambda a_1^6 y_1(x), \quad 0 \leq x < x_1, \quad a_1 > 0, \quad (1)$$

$$-y_2^{(6)}(x) = \lambda a_2^6 y_2(x), \quad x_1 < x \leq \pi, \quad a_2 > 0, \quad (2)$$

с граничными условиями

$$y_1(0) = y_1''(0) = y_1^{(4)}(0) = y_2(\pi) = y_2''(\pi) = y_2^{(4)}(\pi) = 0 \quad (3)$$

с условиями «сопряжения» в точке разрыва x_1

$$a_2^m y_1^{(m)}(x_1-0) = a_1^m y_2^{(m)}(x_1+0), \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (4)$$

Теорема. В случае $a_1 = a\pi/kx_1$, $a_2 = (k-1)/k \cdot a\pi/(\pi-x_1)$, $0 < x_1 < \pi$, $a > 0$, $k = 2, 3, 4, \dots$, все дифференциальные операторы (1)–(4) изоспектральны, их спектр определяется уравнением

$$f(s) = \prod_{m=1}^3 (e^{a\omega_m \pi s} - e^{-a\omega_m \pi s}) \cdot \delta_0 = 0,$$

где $\lambda = s^6$, $s = \sqrt[6]{\lambda}$, $\omega_m^6 = -1$, $\omega_1 = e^{i\pi/6}$, $\omega_2 = i$, $\omega_3 = e^{5i\pi/6}$, $\delta_0 = \det W(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2) \neq 0$.

1. *Gottlieb H. P. W.* Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients // *Journal of Math. Anal. and Appl.* — 1988. — 132. — P. 123–137.
2. *Митрохин С. И.* О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной положительной весовой функцией // *ДАН РАН.* — 1997. — Т. 356. — № 1. — С. 13–15.

Алгоритм решения уравнений Фредгольма I рода на основе метода модельных примеров

Л.В. Мосенцова

Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
 mosentsovalv@mail.ru

Многие задачи восстановления сигналов сводятся интегральным уравнениям Фредгольма I рода. Для решения может быть применен метод моделирования [1], [2], согласно которому значение параметра регуляризации α выбирается, основываясь на решении модельного примера. Методу соответствует следующий численный алгоритм.

1. Заданы ядро $\tilde{K}_p(x_i, s_j)$ и правая часть $\tilde{f}_p(x_i)$, $i = \bar{1}, l$, $j = \bar{1}, n$, исходного уравнения P :

$$Ay = \int_a^b K(x; s)y(s)ds = f(x), \quad c \leq x \leq d \quad (1)$$

Выбираются сетки $c = x_1, x_2, \dots, x_l = d$, $a = s_1, s_2, \dots, s_n = b$.

2. Формируется модельный пример Q в виде (1) с ядром $K_Q(x_i, s_j)$ и точным решением $y_Q(s_j)$ на сетках $c = x_1, x_2, \dots, x_l = d$, $a = s_1, s_2, \dots, s_n = b$.
3. Определяется $K_Q(x_i, s_j) = g \cdot K(x_i, s_j)$, $g = \text{const}$.
4. Вычисляется правая часть модельного примера

$$f_Q(x_i) = f_Q(x_i) + \sum_{j=1}^n r_j \cdot \tilde{K}_Q(x_i, s_j)y_Q(s_j), \quad f_Q(x_1) = 0,$$

$$r_1 = \frac{s_2 - s_1}{2}, \quad r_j = \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2}, \quad r_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{2}.$$

5. Находится $\tilde{f}_Q(x) = f_Q(x) + \Delta f_Q$ такое, что $\frac{\max|\Delta f_i|}{\max|f_Q(x_i)|} = \delta$, $0 < \delta < 1$.
6. Для $\alpha_i = \alpha_{i-1}\theta$, $\alpha_1 > 0$, $0 < \theta < 1$, решается

$$\alpha[y_\alpha(t) - qy_\alpha''(t)] + \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{K}(x, s)dx \right] y_\alpha(s)ds = \int_c^d \tilde{K}(x, t)\tilde{f}(x)dx, \quad a \leq t \leq b \quad (2)$$

методом конечных сумм и разностей при $\tilde{K}(x_i, s_j) = \tilde{K}_Q(x_i, s_j)$, $\tilde{f}(x_i) = \tilde{f}_Q(x_i)$ относительно $[y_\alpha(s)]_Q$.

7. Определяется α_{opt} такое, при котором функция $\frac{\max_j |y_{\alpha_i Q}(s_j) - y_Q(s_j)|}{\max_j |y_Q(s_j)|}$ принимает минимальное значение.
8. Находится $y_p(s_j)$ - решение оригинала из (2) при $\alpha = \alpha_{opt}$, $\tilde{K}(x_i; s_j) = \tilde{K}_p(x_i; s_j)$, $\tilde{f}(x_i) = \tilde{f}_p(x_i)$.

Литература

1. А.Ф. Верлянь, В.С. Сизиков. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие, Киев: Наукова думка, 1986, 544 с.
2. А.Ф. Верлянь, В.С. Сизиков. О способе модельных примеров при реализации методов решения некорректных задач. Электронное моделирование, 1979, 1, стр. 86-89.

Об одном методе решения обратной задачи теории фильтрации

С.Т. Мухамбетжанов

Казахский национальный педагогический университет имени Абая
mukhambetzhano@mail.ru

Т.С. Кенжебаев

Казахстанско-Британский технический университет
TKenzhebaev@mail.ru

Работа посвящена исследованию обратной задачи неравновесной фильтрации, описывающей процесс вытеснения нефти полимерными растворами. С помощью дополнительных условий восстановлены коэффициенты уравнения, которые зависят от искомым функций.

Постановка задачи. Рассматривается фильтрационное течение с активной примесью в заданной конечной области Ω с кусочно - гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. В соответствии с различными видами граничных условий граница Γ может разбиваться на несколько связанных компонент Γ^i . Пусть $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $S_T^i = \Gamma^i \times [0, T]$, n - внешняя нормаль к границе Γ

$$m \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \text{div}(K_0 \cdot a \nabla \cdot s + b \cdot \vec{v} + \vec{F}), \quad (1)$$

$$\text{div}(K \cdot \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad -\vec{v} = K \cdot \nabla P + \vec{f}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot c \cdot s + a) = \text{div}(D \cdot \nabla c - c \cdot \vec{v}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (\chi(c) - a), \quad (4)$$

где функция $\chi(c)$ равна единице, если $c > c_*$, $\chi(c)$ равна нулю, если $c < c_*$ и принимает значения из промежутка $[0, 1]$, если $c = c_*$, m - пористость, $K = K_0(x)$ - тензор фильтрации для однородной жидкости. Требуется найти функции $\{s, p, \vec{v}, c, a\}$ (соответственно водонасыщенность, давление, скорость течения, концентрация активной примеси, функция адсорбции), определенные в Q_T , удовлетворяющие уравнениям (1)-(4), начальным:

$$s|_{t=0} = s_0(x), \quad c|_{t=0} = c_0(x), \quad a|_{t=0} = a_0(x), \quad (5)$$

а также следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \vec{v}\vec{n} = \vec{v}_1\vec{n} = 0, \quad c(x, t) = 0 \text{ при } (x, t) \in S^0 = \Gamma^0 \times [0, T], \quad p = p_0(x, t), \quad s = s_0(x, t) \\ -D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \vec{v}_{1n} \cdot c = \vec{v}_{1n} \cdot \tilde{c}, \quad \text{при } (x, t) \in S^2 = \Gamma^2 \times [0, T] \\ -(K\nabla p + \vec{f})\vec{n} \equiv \vec{v}\vec{n} = R(x, t), \quad \text{при } (x, t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0, T], \quad (6) \\ -(K_0 a_1 \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0)\vec{n} \equiv \vec{v}_1\vec{n} = bR(x, t), \quad (x, t) \in S^1 \\ -D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \vec{v}_{1n} \cdot c = q_n \cdot c^*, \quad \text{при } (x, t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0, T], \end{aligned}$$

где q_n - заданный расход на единицу площади, \tilde{c} и c^* - известные значения концентрации примеси.

Литература

1. Жумагулов Б.Т., Мухамбетжанов С.Т., Шыганаков Н.А. Моделирование вытеснения нефти с учетом массообменных процессов: Монография. - Алматы: КазгосИНТИ, 2004. - 252 с.

Идентификация коэффициентов в модели Маскета–Леверетта.

С.Т. Мухамбетжанов, Ж.О. Оралбекова

КазНПУ им.Абая, Алматы, Казахстан
mukhambetzhanov@mail.ru, oralbekova@bk.ru

В работе исследована прямая и обратная задача для насыщенности и приведенного давления (s, p) в заданной конечной области $\Omega \in R^n (n = 2)$ с границей $\partial\Omega, Q = \Omega \times [0, T], G = \partial\Omega \times [0, T]$:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (2)$$

$$s(x, t) = s_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (3)$$

$$p(x, t) = p_0(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (4)$$

$$s(x, 0) = s^0(x, 0), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

где m –пористость, $K = K_0(x)$ – тензор фильтрации для однородной жидкости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, $p_2 - p_1 = p_c(x, s)$ –капиллярное давление.

Параметры модели Маскета–Леверетта определяются следующим образом:

1) $k = k_{01}(s) + k_{02}(s) = \text{const}$ –преположение с достаточной степенью точности реализуется для смешивающихся жидкостей, для которых $k_{01}(s) = \lambda \cdot s, k_{02}(s) = \lambda \cdot (1 - s), \lambda = \text{const}$.

2) $\frac{1}{m(x)} \det K_0(x) = \text{const}$, при этом имеем $\frac{\partial p_c}{\partial x_i} = 0$.

3) Не учитывается силы тяжести $\vec{g} = 0$ или жидкости имеют одинаковые плотности $\rho_1 = \rho_2$.

Исходя из предположений относительно коэффициентов задачи (1)–(5) в работе исследованы:

- 1) численно исследована задача (1)–(5);
- 2) для определения коэффициентов использованы фактические данные и были проведены сравнительные анализы с данными реального нефтяного месторождения;
- 3) определены возможные варианты неидентифицируемых параметров уравнений (1)–(2);
- 4) применен модифицированный вариант вариационного метода для определения коэффициентов уравнения.

Численный метод решения сферической задачи Радона с данными на полусфере

Д.В. Нечаев

Институт гидродинамики СО РАН;
nechaev@hydro.nsc.ru

Рассматривается сферической задачи Радона в случае, когда данные известны на полусфере. В [1] предложена формула решения, использующая данные на всей сфере. В [2] данная формула, после некоторого упрощения, была использована для разработки алгоритма численного решения. Также в [2] предложена методика оценки параметра регуляризации. В данной работе метод решения сферической задачи Радона, предложенный в [2], обобщается на случай, когда данные обратной задачи известны лишь на полусфере.

Литература.

1. *D. Finch, S. K. Patch, Rakesh*. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM J. Math. Anal.* 2004. V. 35, N 5. P. 1213-1240
2. *Нечаев Д.В.* Численный метод решения сферической задачи Радона с данными на сфере // Тезисы Международной конференции "Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics", посвященной 75-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева, Новосибирск, Россия, 21-24 августа, 2007.

Метод «вращающегося» параболического уравнения для расчета поля над неровной земной поверхностью

А.В. Новиков

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)
ANovikov@ms.tusur.ru

В данной работе исследуется вопрос применимости метода «вращающегося» параболического уравнения («rotating parabolic equation» по [1]) к решению задачи определения зон радиовидимости при распространении СВЧ радиоволн над неровной земной поверхностью. Идея (поворот системы координат на малый угол) данного метода была заимствована из [1]. Рассматривается скалярное двумерное стандартное параболическое уравнение. Методика решения поставленной задачи основана на численном решении этого уравнения по стандартной схеме Кранка-Николсон [2] с применением поправки (фазовой коррекции) к вектору поля, вызванной наличием неровностей земной поверхности. Земная поверхность моделируется ломаными линиями (линейная аппроксимация на одной ячейке расчетной сетки). Получены адекватные результаты расчета множителя ослабления в области полутени (ошибка ± 2 дБ по сравнению с [3]) при распространении радиоволны над модельной поверхностью в виде 2D-треугольного холма (длина трассы - 15 км, длина волны 30 см, высота источника поля над поверхностью - 100 м). Однако положение максимумов и минимумов в зоне интерференции разнится на 20 м (период лепестков 22,5 м) по сравнению с [3]. Сравнительные расчеты, проведенные по разработанному методу для плоской и неровной земной поверхности, показали, что в зоне интерференции период и положение лепестков совпадают с теоретическими значениями (с погрешностью 1 м). Это говорит о применимости использования разработанного метода для расчета зон радиовидимости над неровной земной поверхностью. Дальнейшее совершенствование данного метода связано с возможностью учета любого реально допустимого коэффициента отражения земной поверхности и с реализацией верхнего дискретного нелокального граничного условия с нулевым коэффициентом отражения.

Литература.

1. *Zaporozhets Andrew A., Levy M. F.* Bistatic RCS Calculations with the Vector Parabolic Equation Method // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. - 1994. - Vol. 47. - № 11. - P. 1688 - 1696.
2. *Mireille Levy.* Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. The Institution of Electrical Engineers, London, United Kingdom, 2000. - 336 p.
3. *Janaswamy R. A.* Curvilinear Coordinate-Based Split-Step Parabolic Equation Method for Propagation Predictions over Terrain // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. - 1998. - Vol. 46. - № 7. - P. 1089 - 1097.

Метод Ландвебера в обратной задаче акустики

А.Т. Нурсейтова, Д.Б. Нурсейтов, Г.А. Тюлепбердинова

КазНПУ имени Абая, г. Алматы, Казахстан
tyulepberdinova@mail.ru, ndb80@mail.ru, altyn_gold@yahoo.com

Рассматривается одномерная обратная задача акустики

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} u_x, \quad x > 0, t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

$$u_x|_{x=+0} = \gamma \delta(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u|_{x=+0} = g(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

где $\sigma(x) > 0, x > 0, \sigma \in C^1[0, \infty)$. Требуется найти решение прямой задачи (1)–(3) $u(x, t)$ и акустическую жесткость $\sigma(x)$ по дополнительной информации (4).

Основным результатом данной работы является численный эксперимент, подтверждающий оценку скорости сходимости итераций Ландвебера [1]. Сведем исходную задачу к операторной форме $Aq = f$. Здесь q, f – вектор-функции, A – векторный оператор. Будем искать $q_2(x) = \frac{1}{s(x)}$, где $s(x) = -\gamma \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(+0)}}$.

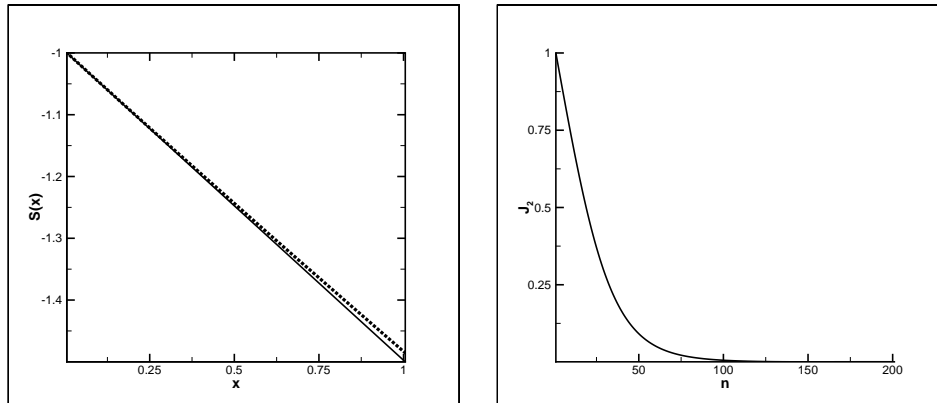


Рис. 1: Графики точной и восстановленной функции $s(x)$ и график функционала $J(q_2) = \|Aq_2 - f_2\|^2$

Список литературы

1. Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсейтова А. Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. — Алматы: Международный фонд обратных задач, 2006.

Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором при старшей производной

С.С. Орлов

Иркутский государственный университет;
OrlovSergey@inbox.ru

Рассматривается интегро-дифференциальное операторное уравнение следующего вида:

$$B\ddot{x}(t) - A_1\dot{x}(t) - A_0x(t) - \int_0^1 k(t-s)x(s)ds = f(t), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \quad (2)$$

где $B, A_1, A_0, k(t)$ - замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из E_1 в E_2 ; E_1, E_2 - банаховы пространства; $D(B) \subset D(A_1) \cap D(A_0) \cap D(k(t))$, $D(B) = D(A_1) \cap D(A_0) \cap D(k(t)) = E_1$; $x(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow E_1$, $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow E_2$ - неизвестная и заданная функции; оператор B - фредгольмов: $R(B) = R(B)$, $\dim N(B) = n$.

Изучаются вопросы существования единственного классического и обобщенного решений данной задачи Коши. Исследования проводятся методами теории обобщенных функций Соболева-Шварца в банаховых пространствах. В частности, существенно используется конструкция фундаментальной оператор-функции вырожденных интегро-дифференциальных операторов, введенная в рассмотрение М.В. Фалалеевым [1] как расширение и обобщение на случай банаховых пространств понятия фундаментального решения (функции влияния) дифференциальных операторов [2].

Сформулированы достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши (1)-(2) в классах $\mathcal{K}'(\mathbb{R}_+, E_1)$ - распределений с ограниченным слева носителем и $C^2(\mathbb{R}_+, E_1)$ - дважды сильно непрерывно дифференцируемых функций, установлена связь между этими решениями, а также получены явные формулы для их восстановления. Абстрактные результаты проиллюстрированы конкретным примером [3] начально-краевой задачи, возникающей в теории вязкоупругости.

Литература.

1. *Sidorov N.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / *N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev.* - Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002
2. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике / *В.С. Владимиров.* - М.: Наука, 1979.
3. *Орлов С.С.* Об одном вырожденном интегро-дифференциальном уравнении в частных производных / *С.С. Орлов* // Тезисы всех присланных докладов международной научной конференции "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики посвященной памяти академика А.А. Самарского [Электронный ресурс]. - режим доступа: <http://vm.cs.msu.su/samarski2009>

Итерационное решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности с использованием дискретно-аналитических численных схем

А.В. Пененко

Институт математики им. Соболева СО РАН

a.penenko@gmail.com

Рассматривается обратная задача о поиске коэффициента в начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - (k(x)u_x(x, t))_x &= 0, & (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\k(0)u_x(0, t) = \alpha(t), & \quad k(1)u_x(1, t) = 0, & t \in [0, T], \\u(x, 0) &= 0, & x \in [0, 1],\end{aligned}$$

по известной функции $\alpha(t)$ и дополнительной информации о решении $f(t)$:

$$u(0, t) = f(t), \quad t \in [0, T]$$

Исследование свойств обратной задачи посредством теории сопряженных уравнений [1], [2] показало, что она может быть переформулирована в виде операторного уравнения, для решения которого можно применить модификацию подхода, разработанного в [3] для нелинейных некорректных операторных уравнений с достаточно гладкими операторами. С его помощью доказана локальная сходимость итерационного метода проекции градиента на заданное конечномерное подпространство $L_2(0, 1)$

Используемые в алгоритме конечномерные операторы и градиенты функционалов представляют собой аппроксимации соответствующих объектов, выделенных в процессе анализа обратной задачи. Чтобы точно учесть граничные условия по пространству был использован метод построения дискретно-аналитических численных схем с привлечением локально-сопряженных задач, разработанный в [4]. Теми же средствами удалось обеспечить согласованность всех элементов алгоритма и показать разрешимость начально-краевой задачи в классах гладких функций.

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований №16 Президиума РАН и №3 Отделения математических наук РАН, проектом РФФИ 07-05-00673.

Литература.

1. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Ленинград: Гидрометеоздат, 1974.
2. Пененко В.В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 61-76.
3. Бакушинский А.Б. Кокурин М.Ю. Козлов А.И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений. Москва: ЛКИ, 2007.
4. Penenko V., Tsvetova E. Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. T. 226. С. 319-330.

Итерационные алгоритмы томографии: роль дифракции, диффузии и деформации

В.В. Пикалов

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.Христиановича СО РАН
pickalov@itam.nsc.ru

В работе дан обзор модификаций алгоритма Гершберга-Папулиса (Г-П) в различных постановках задач вычислительной томографии. В основе этого класса алгоритмов лежат итерации между Фурье-пространством и пространством томограммы. Рассмотрены малоракурсные схемы регистрации проекций и итерационное восстановление решения в условиях неполноты данных с максимальным учетом априорной информации. Излагаются особенности алгоритма Г-П в задачах дифракционной томографии, когда длина волны просвечивающего излучения становится сравнимой с масштабом исследуемых неоднородностей.

В задачах ЯМР-томографии, где сигнал измеряется сразу в Фурье-пространстве, необходимость существенного сокращения времени сбора данных также приводит к алгоритмам обработки сигналов типа Г-П. В настоящее время подобные подходы проникают в новое направление ЯМР-томографии: ДТГ-изображения, или изображения тензора диффузии анизотропных сред. Данный метод сейчас активно развивается в трактографии нервных волокон головного мозга.

Показано, как с помощью деформации томограмм можно перейти от задач веерной или конусной томографии к постановке лучевой томографии в параллельных лучах.

Для ряда алгоритмов приводятся примеры численного моделирования, обсуждаются характерные погрешности реконструкции, степень их помехоустойчивости.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 07-01-00318.

Литература.

1. Пикалов В.В., Казанцев Д.И. Свойства регуляризованного алгоритма Гершберга - Папулиса в задаче веерной томографии. // Вычислительные технологии, 2008, том 13, No.6, стр. 121-133.
2. Пикалов В.В., Казанцев Д.И., Голубятников В.П. Обобщение теоремы о центральном сечении на задачу веерной томографии. // Вычислительные методы и программирование, 2006, том 7, No.2, стр. 180-184.
3. Pickalov V., Bassar P.J. 3-D tomographic reconstruction of the average propagator from MRI data. // Proceedings of the 3rd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro (ISBI-2006, April 6-9, 2006, Arlington, USA). IEEE, 2006, pp. 710-713; doi: 10.1109/ISBI.2006.1625015

Применение аналитически вычисленных образов лучевых преобразований 2-тензорных полей, построенных на основе B -сплайнов, при численном решении задач 2-тензорной томографии

А.П. Полякова

Новосибирский государственный университет
SeaGirl1987@gorodok.net

Получены аналитические выражения для образов симметричных потенциальных 2-тензорных полей вида

$$B_m^p = ((B_m^p)_{11}, (B_m^p)_{12}, (B_m^p)_{22}) = \left(\frac{\partial^2 B_m}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 B_m}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 B_m}{\partial y^2} \right),$$

построенных на основе двумерных B -сплайнов B_m порядка $m > 2$, при поперечном лучевом преобразовании \mathfrak{F}^\perp , и аналитические выражения для образов симметричных соленоидальных 2-тензорных полей, построенных на основе двумерных B -сплайнов, при продольном лучевом преобразовании \mathfrak{F} . Соленоидальные 2-тензорных поля строятся по формуле

$$B_m^s = ((B_m^s)_{11}, (B_m^s)_{12}, (B_m^s)_{22}) = \left(\frac{\partial^2 B_m}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 B_m}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 B_m}{\partial x^2} \right).$$

Ниже приведены формулы в случае, когда центр носителя 2-тензорного поля, построенного на основе B -сплайна, находится в начале координат. Пусть h — шаг носителя B -сплайна, p — расстояние до луча и θ угол между лучом и осью x . Тогда

$$[\mathfrak{F}B_m^s](p, \theta) = [\mathfrak{F}^\perp B^s m](p, \theta) = K_m(\theta) \sum_{i,j=1}^{m+2} C_{ij}^m \chi_{ij}^m(p, \theta),$$

где

$$K_m(\theta) = \frac{1}{(2m-1)! h^{2m} \cos^{m+1}(\theta) \sin^{m+1}(\theta)};$$

$$C_{ij}^m = (-1)^i + j C_{m+1}^{i-1} C_{m+1}^{j-1};$$

$$\chi_{ij}^m(p, \theta) = \begin{cases} p_{ij}^m(\theta) - p)^{2m-1}, & \text{при } p_{ij}^m(\theta) - p > 0, \\ 0, & \text{при } p_{ij}^m(\theta) - p \leq 0; \end{cases}$$

$$p_{ij}^m(\theta) = h((m+3)/2 - i) \cos \theta + ((m+3)/2 - j) \sin \theta.$$

Эти формулы были применены при реализации численного метода решения задачи 2-тензорной двумерной томографии, поставленной в среде с прямолинейным характером пространства лучей. По поперечным и (или) продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль прямых, находится симметричное 2-тензорное поле, расположенное в единичном круге. Решение ищется посредством метода наименьших квадратов с использованием в качестве аппроксимирующей последовательности локальных базисов, построенных на основе B -сплайнов. Полученные формулы позволили не только значительно сократить время вычислений, но и показали лучшую точность восстановления искомого 2-тензорного поля.

Работа осуществлена при частичной поддержке Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН и УрО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, совместный проект СО РАН и УрО РАН №14)

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн функций. М.: Наука. 1980.

Параллельный алгоритм ветвей и границ для решения задач целочисленной линейной оптимизации

А.О.Разумов

Новосибирский государственный университет;
anton.razumov@gmail.com

Данная работа посвящена численному решению целочисленной линейной задачи оптимизации $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$ с помощью параллельного алгоритма (p -алгоритма) ветвей и границ. Параллельный алгоритм строится на основе алгоритма из доклада [1].

Через S_0 обозначим множество допустимых решений перейдем к следующей записи задачи $\max\{cx \mid x \in S_0\}$. Тогда вершина v_0 дерева перебора соответствует сформулированной задаче, а вершины v_l — задачам $\max\{cx \mid x \in S_l \subseteq S_0\}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$).

Существует много возможных правил ветвления. Поэтому различают одноветвевую и многоветвевую схемы перебора (см. работу [1]). Предлагаемый параллельный p -алгоритм заключается в том, что одновременно рассматриваются p путей (текущих ветвей дерева), выходящих из вершины v_0 . Вершины дерева, пройденные m -й текущей ветвью, обозначаются через $v_{m,k}$, где индекс k указывает порядок, в котором вершины были рассмотрены на m -й текущей ветви ($m = \overline{1, p}; k = 1, 2, \dots$). В вершине $v_{m,k}$ задача $\max\{cx \mid x \in S_{m,k}\}$ не решается, а решается релаксированная задача $\max\{cx \mid x \in T_{m,k} \supseteq S_{m,k}\}$ и проверяется условие целочисленности. Таким образом если исходная задача:

$$\max\{cx = c_1x_1 + c_2x_2 \mid (x_1, x_2) \in S_0\}, \quad \text{где} \\ S_0 = \{(x_1, x_2) \mid A_1x_1 + A_2x_2 \leq b, x_1 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}_{n_1}, x_2 \geq 0, x \in \mathbb{Z}\},$$

Тогда для этой задачи можно записать $S_{m,k}, T_{m,k}$ следующим образом:

$$S_{m,k} = \{(x_1, x_2) \mid A_1x_1 + A_2x_2 \leq b, x_1 \in \mathbb{Z}_{n_1}, x_1 \geq 0, l_{m,k} \leq x_2 \leq u_{m,k}, x_2 \geq 0, x_2 \in \mathbb{Z}\} \\ T_{m,k} = \{(x_1, x_2) \mid A_1x_1 + A_2x_2 \leq b, x_1 \in \mathbb{Z}_{n_1}, x_1 \geq 0, l_{m,k} \leq x_2 \leq u_{m,k}, x_2 \geq 0\}$$

Здесь $l_{m,k}, u_{m,k}, l_{m,k} \leq u_{m,k}$ — неотрицательные целочисленные векторы, задающие границы. Таким образом, релаксированная задача представляет собой линейную задачу оптимизации с двусторонними ограничениями на отдельные переменные. Если оптимальное решение $(x_1^0(k), x_2^0(k))$ линейной задачи в вершине $v_{m,k}$ не является элементом множества $S_{m,k}$, то строится покрытие.

Планируется: расширить класс решаемых задач данным методом (алгоритмом), добавлением класса смешанных целочисленных задач; создать (улучшить) пользовательский интерфейс предложенной программы, которая реализует данный алгоритм и алгоритм из работы [1].

1. Разумов А.О. Многоветвевый алгоритм ветвей и границ для решения задач целочисленной оптимизации. "Программа и тезисы IX Всероссийской конференции молодых ученых". г. Кемерово, 2008, 28—30 октября.
2. Хохлюк В.И. Алгоритмы целочисленной оптимизации. Вспомогательные АЛГОЛ-процедуры. Учебное пособие, Новосибирск, 1982.

Вычисление границ множеств решений дифференциальных уравнений с помощью коэффициентов вариации решений

А.А. Рогалев

Сибирский Федеральный университет, Красноярск, Россия;
ran@akadem.ru

Для многих задач, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, невозможно точно определить коэффициенты системы, начальные данные или краевые условия. Это связано с влиянием различных неопределенных факторов: внешних возмущающих сил, неконтролируемых вариаций параметров, погрешностей в определении начальных условий и некоторых других причинах. Среди классов задач, на решения которых влияют неопределенности, следует отметить задачи количественного оценивания областей устойчивости систем с постоянно действующими возмущениями, задачи описания множеств достижимости управляемых систем.

Во всех подобных случаях возможно применение двух подходов к описанию неопределенных величин. В первом из них, неопределенному вектору сопоставляется некоторое распределение вероятностей с заданной плотностью, математическим аппаратом служит теория случайных процессов. Второй подход, называемый гарантированным или минимаксным, оперирует с множествами, в которых лежат неопределенные векторы. При этом предполагается, что неизвестные помехи локализованы в известных множествах, а в остальном произвольны. Отметим, что итоговая оценка в гарантированном подходе применима к любой из реализаций решения поставленной задачи. В докладе будут рассмотрены задачи, постановки которых содержат дифференциальные уравнения, характеризующиеся неточно заданными данными. Решения подобных задач называются иногда минимаксными или гарантированными решениями, а сам подход к постановке и решению задач — гарантированным подходом. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \in Y_0$$

Правые части f системы (1) удовлетворяют условиям существования, единственности решений, продолжимости на всю вещественную ось и непрерывной зависимости от начальных данных всех решений $y(t)$ задачи Коши (1). Для системы (1) требуется построить множество всех решений задачи (1) для любого фиксированного момента времени t . Для многих задач ограничения на возмущающие воздействия могут носить только геометрический характер. Методы, строящие гарантированные границы множеств решений систем дифференциальных уравнений с интервальными данными, основаны на символьном представлении формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории. После нахождения символьных формул вычисляются множества включения (множественные или интервальные расширения), содержащие каждое приближенное решение при варьировании параметров значений, затем строятся включения глобальных ошибок для всех приближенных решений, соответствующих этим символьным формулам. Завершает алгоритм операция объединения этих множеств включений, реализуемая, например, как сложение множеств. В докладе будет представлено описание реализации гарантированного метода, использующей частные производные от решения по начальным данным. Приводятся примеры расчетов.

Литература

1. *Рогалев А.А.* <Символьные вычисления для распараллеливания при компиляции> // Молодёжь и наука: начало XXI века: Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, Красно-ярск, 2007 - Ч.1.
2. *Рогалев А.А.* <Использование сетей Петри для анализа параллельных алгоритмов>, // Материалы XLV международной студенческой конференции <Студент и научно-технический прогресс>, Новосибирск, 2007.
3. *Рогалев А.А.* <Исследование параллельных алгоритмов для задач оценки множеств достижимости> // VIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск СО РАН, НГУ, 2007, с.23-24.
4. *Рогалев А.А.* <Оценка множеств достижимости и вопросы распараллеливания вычислений> // Материалы XLVI международной студенческой конференции <Студент и научно-технический прогресс>, Новосибирск, 2008.
5. *Рогалев А.А., Сажин Н.С.* <Оценка погрешности приближенного интегрирования рациональных функций по двумерному тору> // Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, Красноярск, 2008.
6. *Рогалев А.А.* <Параллельный алгоритм расчета растворенного кислорода для неточно заданных данных> // XIV Всероссийский симпозиум с международным участием: Материалы XIV Всероссийского симпозиума с международным участием. Сложные системы в экстремальных условиях, - Красноярск: природный парк <Ергаки>, 2008, С. 90-91
7. *Рогалев А.А., Сажин Н.С.* <Оценка погрешности интегрирования рациональных функций по тору> // Материалы Международной конференции <Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений>, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. - Новосибирск: ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН. - С. 551-552.
8. *Рогалев А.Н., Рогалев А.А.* <Вычисление областей допустимых отклонений динамических систем с помощью параллельных алгоритмов> // Труды IV международной конференции <Параллельные вычисления и задачи управления> института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), ISBN 978-5-91450-016-7 - ИПУ имени Трапезникова РАН, Москва - 2008 -С.999-1009.
9. *Рогалев А.А.* <Анализ модели содержания кислорода в водоеме с неточно заданными данными> // Материалы XLVII международной студенческой конференции <Студент и научно-технический прогресс>, Новосибирск, 2009. - С.268-269

Обратная задача динамики симметричного намагниченного спутника

А.Д. Саспаева

АО «Национальный центр космических исследований и технологий» Республики
Казахстан;
altynas@mail.ru

В данной работе рассматривается обратная задача динамики намагниченного экваториального динамически симметричного спутника с переменными моментами инерции, движущегося на круговой орбите в магнитном поле Земли, которое моделируется прямым диполем.

На борту спутника имеются сильные магниты, поэтому его движение вокруг центра масс определяется в основном взаимодействием магнитного момента спутника с магнитным полем Земли. Другие силы различной природы, действующие на спутник, а также намагничивание оболочки спутника рассматриваются как возмущающие и считаются в явном виде неопределенными.

Ставится следующая задача: по заданному интегральному многообразию построить уравнения движения рассматриваемого спутника.

Решение обратной задачи динамики спутника в нашем случае сводится к построению дифференциальных уравнений движения по заданным первым интегралам и к определению в дальнейшем из них искомым сил и моментов, а также других параметров, необходимых для осуществления движения спутника с предварительно заданными свойствами.

Для решения этой задачи составляются необходимые и достаточные условия того, что заданные выражения являются первыми интегралами. Эти условия составляют систему уравнений относительно правых частей строящихся уравнений, решив которые, получаем искомую систему динамических уравнений Эйлера.

Таким образом, по заданным интегралам определяются динамические свойства спутника и силовое поле, в котором движение спутника обладает указанными свойствами.

Исследована устойчивость частного решения и установлено, что намагничивание оболочки спутника зависит только от угла собственного вращения и нутации, а от других кинематических параметров не зависит.

Построенные уравнения движения могут быть применены для решения задачи устойчивости и управления движениями спутника. В частности, полученные результаты позволяют обеспечить управление, так, чтобы намагниченность оболочки не влияла на устойчивость движения.

Список литературы:

1. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. - М.: Наука, 1980. - 260 с.
2. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. - М.: Наука, 1986. - 224 с.
3. Karlyga Zhilisbaeva, Asem Saspaeva. Inverse problem for a symmetrical satellite in geomagnetical field. // 6-th International ISAAC Congress, 13 -18 august 2007, Ankara, Turkey.
4. Жилисбаева К.С., Саспаева А. Д. Обратная задача динамики спутника с переменным моментом инерции в магнитном поле.// Казахстанско-Украинская научно- практическая конференция <Современные космические технологии>, Алматы, 7-9 октября 2008 г. С.150-152.

Задача Коши для обобщенной системы Коши-Римана

Э.Н. Сатторов

Самаркандский государственный университет

Sattorov-e@rambler.ru

В работе предлагается явная формула продолжения решения задачи Коши для следующей системы с переменными коэффициентами в многомерном евклидовом пространстве [1]:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + a_k u_k = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - b_k u_j + b_j u_k = 0, \quad (k, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Найденные формулы продолжения являются полными аналогами классических формул Римана, Вольтерра и Адамара, построенных ими для решения задачи Коши для в теории линейных гиперболических уравнений второго порядка.

Если $a_k = b_k \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то (1) является системой Рисса [2]. При $n = 2$ (1) является обобщенной системой Коши-Римана [3]. Поэтому, (1) является с одной стороны обобщением системы Рисса, с другой стороны - многомерным аналогом обобщенной системы Коши-Римана.

D_ρ - односвязная область с границей ∂D_ρ , состоящей из части поверхности конуса ∂G_ρ (в двумерном случае отрезки лучей с общим началом) и гладкого куска поверхности S (гладкой дуги кривой), лежащего в $\bar{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho$,

$$G_\rho = \{y : y \in R^n, |y'| < \tau y_1, \tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho}, \rho > 1\}$$

$$\partial G_\rho = \{y : y \in R^n, |y'| < \tau y_1, \tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho}, \rho > 1\}, \quad \bar{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho$$

Пусть $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ вектор-функции. Вводим следующие обозначения:

$$L_{kj}U = L_{jk} = (X_j - b_j)u_k - (X_k - b_k)u_j \delta_{ij}(X_l + b_l)u_l (k \leq j),$$
$$L_k(X; A, B)U = (l_{k1}, \dots, l_{kn})U (k, l, j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

где δ_{kj} - символ Кронекера. Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$L_k \left(\frac{\partial}{\partial x}; A, B \right) U = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

З а д а ч а (з а д а ч а К о ш и). Пусть ,

$$L_k \left(\frac{\partial}{\partial x}; A, B \right) U = 0, \quad x \in D_\rho \quad (3)$$

$$U(y) = f(y), \quad y \in S \quad (4)$$

где $f(y)$ — заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить $U(x)$ в D_ρ .

Работа частично финансирована грантом ОТ -Ф1-044 РУз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оболашвили Е.И.* Обобщенная система Коши-Римана в многомерном пространстве // Труды Тбилисского Математического института, Т. 58. 1978. с.168-174.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974. 333 с.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз. 1988. 512 с.

Критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений Максвелла

Э.Н. Сатторов, К.О. Махмудов

Самаркандский государственный университет
Sattorov-e@rambler.ru

В работе рассматривается систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H;$$

$$\operatorname{rot} H = -i\omega\varepsilon E$$

в ограниченной области.

Задача 1.

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H;$$

(1)

$$\operatorname{rot} H = -i\omega\varepsilon E$$

$$[n(y), E(y)] = f(y), \quad [n(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S, \quad D = \partial D \setminus T \quad (2)$$

По заданным $f(y)$ и $g(y)$ на S вычислить $E(x)$, $H(x)$, $x \in D$.

Задача 2. Пусть на S заданы функции $f(y)$ и $g(y)$. Указать условия на $f(y)$ и $g(y)$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало решение системы (1) класса $A(D) \cap C(D \cup S)$, удовлетворяющее условию (2).

Задача (1), (2) относится числу некорректно поставленных задач.

Доказываем формулы продолжения, представляющие решения задачи 1 и 2, основаны на построении матрицы Карлемана системы (1), зависящей от положительного параметра σ и исчезающей при $\sigma \rightarrow \infty$ вместе со своими производными на границе, когда полюс фундаментальной матрицы лежит внутри области.

Об одной задаче идентификации фильтрационных параметров водонапорного бассейна.

А.М. Сатымбеков, А.К. Самбетбаева

КазНПУ им.Абая, Алматы, Казахстан;
Satymbekov@mail.ru

Работа посвящена обратной задаче восстановления границ питания и разгрузки и идентификации фильтрационных параметров водонапорного бассейна. Алгоритмы решения обратных задач базируются на алгоритмах решения прямых краевых задач. Поэтому в работе рассматриваются постановки и алгоритмы решения как прямых, так и обратных задач теории фильтрации. Пусть G - произвольная область с границей Γ_0 и Γ_1 : точнее: Γ_i - есть непрерывно дифференцируемое многообразие, G находится по одну сторону от Γ_i , $i = 0, 1$. Предположим, что граница $\Gamma_0 = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$. Фильтрация воды в неоднородном по коллекторским свойствам водоносном пласте с выделенной газовой (нефтяной) залежью описывается следующим образом дифференциальным уравнением эллиптического типа относительно приведенного давления P^* :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, y)h(x, y) \frac{\partial P^*}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(x, y)h(x, y) \frac{\partial P^*}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

при следующих краевых условиях:

$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \Gamma_2; \quad (2)$$

$$P^* = P_n^* = const, \quad (x, y) \in \Gamma_3; \quad P^* = P_p^* = const, \quad (x, y) \in \Gamma_4; \quad (3)$$

Итак, для естественного фильтрационного потока в водоносном пласте с выделенной газовой (нефтяной) залежью справедлива прямая краевая задача (1)-(3), где - $P^* = P \pm \rho_B g l$; P - давление в точке с координатами x и y ; ρ_B - плотность воды; g - ускорение свободного падения; l - расстояние по вертикали от данной точки с координатами x и y до плоскости приведения; n - внешняя по отношению к G нормаль; k - коэффициент проницаемости пласта; h - толщина пласта; Γ_1 - граница газовой (нефтяной) залежи; Γ_2 - непроницаемые границы водоносного пласта; Γ_3 - контур области питания; Γ_4 - контур области разгрузки. Для решения прямой краевой задачи (1)-(3) необходимо задать также зависимости $k(x, y)$ и $h(x, y)$. Для единственности решения задачи об определении параметра проводимости $b(x, y) = k(x, y)h(x, y)$ вдоль некоторой линии тока необходимо, чтобы в одной из точек этой линии было известно значение параметров b . Поэтому до решения рассматриваемой нами задачи необходимо по результатам исследования пьезометрических скважин или с помощью эмпирических формул, либо по выражениям, получаемым после обработки результатов экспериментальных исследований керной определить параметр b , задать приближенно построенную карту значений проводимости пласта. В результате решения прямой краевой задачи (1)-(3), при заданном распределении фильтрационного параметра b , можно установить распределение приведенного давления P по всей площади водоносного пласта.

Линейные обратные задачи для гиперболических уравнений второго порядка

Р.Р. Сафиуллова

Стерлитамакская государственная педагогическая академия
Regina-SAF@yandex.ru

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n , $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$, $a(x, t)$, $b(x, t)$, $h_1(x, t)$, ..., $h_m(x, t)$, $f(x, t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции $u(x, t)$, $q_1(x)$, ..., $q_m(x)$ связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + b(x, t)u = f(x, t) + \sum_{k=1}^m q_k(x)h_k(x, t).$$

В качестве условий переопределения в рассматриваемой задаче предлагаются либо условия

$$u(x, t_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad 0 < t_1 < \dots < t_m \leq T,$$

либо же условия

$$u(x, t_i) = 0, \quad u_t(x, t_i) = 0, \quad 0 < t_1 < \dots < t_{m_1} \leq T, \\ u(x, t_j^*) = 0, \quad 0 < t_1^* < \dots < t_{m_2}^* \leq T, \quad t_i \neq t_j^*,$$

где $i = 1, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m_2$, $2m_1 + m_2 = m$.

Помимо условий переопределения, задаются также естественные условия первой или второй начально-краевой задачи.

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и устойчивости регулярных решений.

Приближенное решение одной задачи 2-тензорной томографии

И.Е. Светов

Новосибирский государственный университет;
svetoy@gorodok.net

Математические формулировки задач восстановления векторных и тензорных полей возникли сравнительно недавно. Появились постановки обратных задач с томографическими данными, как приложения интегральной геометрии скалярных и тензорных полей на римановом многообразии [1]. Метод восстановления скалярных свойств объектов по томографическим данным общеизвестен и изучен в деталях, в то время как конструктивные и численные методы решения задач тензорной (в том числе и векторной) томографии развиты не в полной мере.

Предлагается численный метод решения задачи 2-тензорной двумерной томографии, поставленной в среде с прямолинейным характером распространения лучей. По поперечным и (или) продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль прямых, находится симметричное 2-тензорное поле, расположенное в единичном круге. Решение ищется посредством метода наименьших квадратов с использованием в качестве аппроксимирующей последовательности локальных базисов, построенных на основе B -сплайнов [2]. Ранее задача решалась с использованием полиномиального базиса [3].

По продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть 2-тензорного поля. Соленоидальные 2-тензорные поля строятся по формуле

$$u = (u_{11}, u_{12}, u_{22}) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

По поперечному лучевому преобразованию можно восстановить потенциальную часть 2-тензорного поля, имеющую вид

$$v = (v_{11}, v_{12}, v_{22}) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right).$$

Было проведено всестороннее тестирование данного алгоритма с целью определения пределов его применимости. Исследовано влияние на точность восстановления таких факторов как степень дискретизации данных, степень и количество элементов аппроксимирующей последовательности, гладкость искомого 2-тензорного поля.

Работа осуществлена при частичной поддержке Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН и УрО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, совместный проект СО РАН и УрО РАН №14)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharafutdinov V.A.* Integral Geometry of Tensor Fields. Utrecht: VSP, 1994. 271 p.
2. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн функций. М.: Наука. 1980.
3. *Деревцов Е.Ю., Кашина И.Г.* Приближенное решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Том 5, №1(9). С. 39-62.

Обратная задача для геонавигации и оценки параметров продуктивного пласта

М.В. Свиридов

Baker Hughes B.V.

Mikhail.Sviridov@bakerhughes.com

В настоящее время для задач геонавигации (процесс корректировки траектории скважины в ходе ее бурения для достижения определенных геологических целей) и оценки параметров резервуара (в частности, для определения нефтенасыщенности пласта) начали применять многокомпонентные и многочастотные приборы. Новые дополнительные измерения способны не только обнаружить присутствие более проводящих слоёв, но также чувствительны к анизотропии, расстояниям до границ этих слоёв, углу наклона скважины по отношению к границам слоёв и азимутальному углу.

Знание расстояний до границ проводящих слоёв является важной характеристикой при определении местоположения и ориентации скважины внутри резервуара. Сейчас это расстояние определяется посредством решения обратной задачи всего по трем сигналам, подающимся в реальном времени на пульт управления бурением. Существующий алгоритм инверсии основывается на простой двухслойной модели среды, которая не всегда в состоянии адекватно описать истинную геологическую модель.

Представленный алгоритм был разработан, чтобы, используя более сложную модель среды, исследовать точность определения расстояния до проводящего слоя, основываясь на большем числе измерений. При этом нужно было ответить на вопрос - помогут ли дополнительные измерения в подборе остальных параметров усложненной модели.

Алгоритм инверсии опирается на горизонтально-слоистую модель среды с произвольным количеством слоев. Определяемыми параметрами являются горизонтальное и вертикальное сопротивления каждого слоя, координаты границ этих слоёв, азимутальный угол и угол наклона прибора.

Алгоритм решения обратной задачи основывается на методе наиболее вероятного ансамбля (НВА), который занимает промежуточное место между регуляризацией Тихонова и методом фильтра Калмана. Метод НВА состоит в оптимизации функционала специального вида, содержащего невязку, штрафное слагаемое, отвечающее за предотвращение выхода параметров задачи из рассматриваемой области и слагаемое, играющее роль стабилизирующего функционала.

Для выбора параметра регуляризации используются два метода, не требующие точного знания о погрешностях в сигналах: метод квазиоптимального выбора и метод согласования по независимым наборам данных.

Для локальной оптимизации использовались два метода:

1. Метод поиска - метод комплексов Бокса, который является модификацией метода симплексов Нелдера-Мида
2. Метод спуска - метод Гаусса-Ньютона, записанный в форме Левенберга-Маркварта. Длина шага этого метода подбирается в соответствии с техникой Морэ согласно подходу «модель - доверительная область».

Для поиска глобального минимума функционала используется алгоритм, осуществляющий сканирование заданной области.

Для останова процесса сканирования и локальных оптимизационных процедур используется статистический критерий Хи-квадрат.

Литература.

1. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. К: Наук. думка, 1986. 542 с.

Прямые и обратные динамические задачи теории распространения волн в упругой неоднородной среде

А.А. Седипков

Новосибирский государственный университет;
sed@gorodok.net

Рассматривается процесс распространения плоских волн в упругом евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , механические свойства которого зависят только от одной пространственной координаты z . Считается, что волны поляризованы вдоль некоторой прямой, параллельной плоскости $z = 0$. При этих условиях волновой процесс описывается уравнением акустики

$$(\rho v^2 u_z)_z = \rho u_{tt}, \quad z \in \mathbb{R} \setminus 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

где $u = u(t; z)$ — смещение точек среды относительно положения равновесия, $\rho = \rho(z)$ — плотность, $v = v(z)$ — скорость распространения возмущений. Предполагается, что волновой процесс порожден неоднородными граничными условиями вида

$$u_z(t, +0) - u_z(t, -0) = f(t), \quad (2)$$

$$u(t, +0) - u(t, -0) = g(t), \quad (3)$$

а при $t \leq 0$ среда считается неподвижной, т.е.

$$u|_{t \leq 0} = 0. \quad (4)$$

Задачу (1)-(4) об определении функции u при известных ρ , v , f и g назовем "прямой". Наряду с ней можно рассмотреть следующую "обратную" задачу об определении механических параметров среды ρ и v , если известны четыре функции $u(t, +0)$, $u(t, -0)$, $u_z(t, +0)$, $u_z(t, -0)$, причем по крайней мере одна из разностей в условиях (2)-(3) не равна тождественно нулю.

В работе доказана теорема об однозначной разрешимости прямой задачи. Кроме того, показано, что по исходным данным обратной задачи можно однозначно определить так называемый акустический импеданс среды, т.е. величину $\sigma = \rho v$ как функцию переменной $\tau = \int_0^z \frac{ds}{v(s)}$. Физический смысл величины $|\tau|$ — время пробега волны от начала координат до точки z .

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования, проект №2.1.1.4918 1

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Белоносов.

Итерационный метод решения задачи о восстановлении параметров флюидонасыщенности и горной породы по данным измерений импульсного нейтронного гамма каротажа. Численные эксперименты.

Ю.В. Семилетко

Новосибирский государственный университет
semiletko@ngs.ru

Рассматривается обратная задача восстановления параметров флюидонасыщенности и горной породы по данным измерений импульсного нейтронного гамма каротажа. В математической постановке задача состоит в нахождении параметров коэффициентов системы двух уравнений переноса по данным измерений совокупности функционалов от фазовой плотности γ -квантов. Принимается кварц-полевшатовая модель минерального скелета пласта, вводятся неизвестные параметры (объемные доли), которые затем определяются как решения системы уравнений идентификации. В работах А. И. Хисамутдинова и М. А. Федорина (2006, 2009) для решения поставленной задачи предложен итерационный процесс, основанный на «характерных взаимодействиях» и обнаружена трудность - плохая восстанавливаемость калиевого и натриевого шпатов. Для её разрешения было предложено использовать данные измерений естественной радиоактивности калия. Цель работы - анализ причин плохой восстанавливаемости калиевого и натриевого шпатов, проведение численных экспериментов реализующих итерационный процесс, с использованием информации о содержании калия в породе. Результаты экспериментов показывают сходимость процесса к некоторой области вокруг точного значения объемных долей, определяемой, по-видимому, в первую очередь стохастической погрешностью вычисления матрицы характерных взаимодействий.

Список литературы

1. А.И. Хисамутдинов, В. Н. Стариков, А. А. Морозов. Алгоритмы Монте-Карло в ядерной геофизике / Новосибирск, - 1985. 157 с.
2. А.И. Хисамутдинов. Методы Монте-Карло в ядерной геофизике / Новосибирск, 1983, 128 с.
3. А.И. Хисамутдинов. Последовательные приближения по характерным взаимодействиям в двух задачах о восстановлении коэффициентов уравнений переноса (и концентраций компонент среды) / Новосибирск, 2007, 20 с.
4. А. Н. Коновалов. Введение в вычислительные методы линейной алгебры. / Новосибирск, 1993, 5-17 с.
5. А.И. Хисамутдинов, М.А. Федорин. О численном методе восстановления состава нефтеводонасыщенных пластов по данным импульсного нейтронного-гамма каротажа неупругого рассеяния / доклад на Российской нефтегазовой конференции 2006 г.
6. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач / М. "Наука 1986, 37-43 с.
7. С. И. Кабанихин. Обратные и некорректные задачи. / С. И. Кабанихин, Новосибирск, 2008, 38-43 с.

Оптимальная параметризация в обратной кинематической задаче теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды

А.С.Сердюков

ИНГГ СО РАН, аспирант НГУ;
sashkaserdyukov@yandex.ru

Исследована задача томографии по проходящей волне данных ВСП со многими выносными источниками на предмет восстановления параметров в трансверсально-изотропной среде. Рассмотрена линейная постановка. Проведён анализ SVD матричной аппроксимации данного линейного оператора в трёх случаях: трансверсально-изотропная среда параметризована упругими модулями; скоростью продольной волны вдоль оси симметрии и параметрами Томсена ε , δ ; скоростью продольной волны вдоль оси симметрии и параметрами Шонберга E_p , E_a . Установлено, что оптимальной для решения данной задачи является параметризация Шонберга. В этом случае восстановлению подлежат скорость продольной волны вдоль оси симметрии и эллиптичность E_p . В случае, когда среда параметризована упругими модулями, восстановлению подлежит только один из трёх параметров - c_{33} , тогда как остальные практически недоступны для восстановления. Аналогичная ситуация в случае параметризации Томсена: восстановлению подлежит скорость вдоль оси симметрии. Такое поведение сингулярного разложения данного оператора объясняется тем, что эллиптичность влияет на отклонение геометрии фронта волны анизотропной среды от изотропной со вторым порядком, тогда как все остальные параметры - либо с четвёртым порядком, либо и со вторым, и с четвёртым. Поэтому, как следует из расчётов, если к влияниям со вторым порядком оператор ещё чувствителен, то к изменениям с четвёртым - уже нет.

Тот факт, что при параметризации Шонберга возможно восстановление не только скорости продольной волны вдоль оси симметрии, но и эллиптичности, следует использовать как рекомендацию: делать обращение относительно именно этих параметров. При этом не нужно забывать, что данное исследование проведено именно для геометрии ВСП со многими выносными источниками.

О методах приближенного решения одной обратной задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом

С.М. Серебрянский

Челябинский государственный университет
Serebrianskysm@mail.ru

Рассматривается задача тепловой диагностики

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq x_2, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}; \quad x_2 \leq x \leq 1, t \geq 0, \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u_1(0, t) = f(t); \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$u_1(x_1, t) = \psi(t); \quad 0 < x_1 < x_2, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$u_1(x_2, t) = u_2(x_2, t); \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(x_2, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial x}; \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где λ_1 , λ_2 и \varkappa некоторые известные положительные константы.

Задача (1) - (7) следуя [1] является некорректно поставленной. Поэтому введем класс корректности

$$Mr = \left\{ \varphi(t) : \varphi(t) \in L_2[0, \infty), \int_0^{\infty} (\varphi^2(t) + [\varphi'(t)]^2) dt \leq r^2 \right\},$$

где r известно.

Пусть точные значения $f(t)$ и $\psi(t)$ нам не известны, а вместо них даны некоторые приближения $f_\delta(t)$ и $\psi_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$ и уровень их погрешности δ такие, что $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, $\|\psi - \psi_\delta\| \leq \delta$.

Требуется, используя исходную информацию f_δ , ψ_δ , δ и r задачи, определить приближённые решения $u_{2\delta}(1, t)$, $\frac{\partial u_{2\delta}(1, t)}{\partial x}$ задачи (1) - (7) и оценить их отклонения от точных решений.

Последовательно изменяя в задаче (1) - (7) граничное условие (5) на условие следующих видов:

$$u_1(x_2, t) = k(t), \quad u_2(x_3, t) = l(t); \quad x_2 < x_3 < 1, \quad t \geq 0,$$

мы получим две модифицированные задачи, аналогичные задаче (1) - (7), которые могут быть решены методом проекционной регуляризации, рассмотренном в [2].

Для найденных приближенных решений

$$u_{2\delta}(1, t) = Re \left\{ F^{-1}[\hat{u}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\tau)] \right\}, \quad v_\delta(t) = Re \left\{ F^{-1}[\hat{v}_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)}(\tau)] \right\},$$

получены оценки погрешности этого решения

$$\sqrt{\|u_{2\delta}(1, t) - u_2(1, t)\|^2 + \left\| v_\delta(t) - \frac{\partial u_2(1, t)}{\partial x} \right\|^2} \leq \frac{2r}{\bar{\alpha}(\delta)}.$$

Литература.

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена//М.: Машиностроение, 1988.- 279с.
2. Тачана В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач//Сиб.журн.инд.математики., 2004, т.7, №2, с.117-132.

О решении интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений

Н.А.Сидоров, Д.Н.Сидоров

Иркутский госуниверситет Институт систем энергетики СО РАН
dsidorov@isem.sei.irk.ru

Ветви решения нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int_a^b K(x, s)q(s, u(s), \lambda)ds,$$

где $q(s, u, \lambda) = u(s) + \sum_{i=2}^{\infty} q_{i0}(s)u^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(s)u^i \lambda^k$, λ - параметр, строятся методом последовательных приближений. Рассмотрен случай, когда 1 является характеристическим числом ядра $K(x, s)$ ранга $n \geq 1$, точка $\lambda = 0$ является точкой ветвления решения. Главный член построенной в работе асимптотики используется как начальное приближение. Равномерная сходимости метода в окрестности точки ветвления устанавливается с помощью теоремы о неявном операторе и леммы Шмидта.

Литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М: Физматлит, 2007.
2. Сидоров Н.А. Параметризация простых разветвляющихся решений полного ранга и итерации в нелинейном анализе. // Изв. ВУЗов, Математика, 2001, 9, С.59-65.
3. Тихонов А.Н., Иванов В.К., Лаврентьев М.М. Некорректно поставленные задачи // Тр. симпозиума, посвященного 60-летию ак. Со-болева, М: Наука, 1970, С. 224-239.

Численный метод решения обратной задачи распространения возбуждения в сердечной мышце.

Е.В. Скокова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
helenskokova@mail.ru

Рассматривается обратная задача распространения возбуждения в сердечной мышце на основе предложенной Алиевым и Панфиловым [1] простой двухкомпонентной модели возбудимой среды.

Математическая постановка задачи такова. Рассмотрим область Ω в пространстве R^2 : $\Omega = \{x | x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < L, \alpha = 1, 2\}$. Обозначим через $\partial\Omega$ границу области Ω .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - kU(U - \alpha)(U - 1) - UW; \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon(U, W)(-W - kU(U - \alpha - 1)), \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \Omega \\ \varepsilon(U, W) = \varepsilon_0 + \frac{\mu_1 W}{U + \mu_2} \\ U(x, t = 0) = U_0(x), \quad x \in \Omega \\ W(x, t = 0) = W_0(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ U(x_m, t) = g(x_m, t), \quad 0 < t \leq T, \quad x_m \in \Omega \end{array} \right.$$

где n - внешняя по отношению к Ω нормаль, U - потенциал в биологической возбудимой ткани и W - медленной ток восстановления.

Известны коэффициенты $k > 0, 0 < \alpha < 1$.

Требуется определить нелинейный коэффициент $\varepsilon(U, W)$ по дополнительно заданной функции $g(x_m, t), x_m \in \Omega$.

Численное решение коэффициентной обратной задачи основано на параметризации искомой функции. В результате обратная задача сводится к поиску вектора неизвестных параметров, в состав которого включены коэффициенты параметрического представления искомой функции, из условия минимизации невязки [2].

Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению искомого коэффициента. Они свидетельствуют о качественном воспроизведении.

Литература.

1. *Aliev R., Panfilov A.* // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. V. 7. N. 3. P. 293-301.
2. *Самарский А.А., Вабичевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. - 480 с.

Численное решение задачи восстановления импедансного покрытия с заданной фазовой характеристикой диаграммы рассеяния

М.С. Соппа

Новосибирский государственный архитектурно - строительный университет (Сибстрин);
soppa@ngs.ru

При проектировании объектов, обладающих близкими заданным радиоотражательными характеристиками, возникает задача синтеза электромагнитного рассеивателя с фазовой характеристикой, удовлетворяющей определенным условиям. Условия технической реализации или какие-либо прикладные соображения могут порой приводить к необходимости подчинения решения некоторым ограничениям, например, на его фазовые характеристики.

Пусть на цилиндрическую замкнутую поверхность S падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. Вне S для ненулевой компоненты поля $u(x, y) = H_z(x, y)$, выполняется уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (1)$$

с граничным условием [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial n} - ik \frac{W}{W_0} u_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь W - импеданс поверхности, u_0 - решение прямой задачи в случае идеальнопроводящей поверхности ($W = 0$); $W_0 = 120 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ - волновое сопротивление свободного пространства; $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны.

Постановка обратной задачи предполагает, что в некотором конечном наборе точек $(x, y) \in S_d = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, m\}$ окружающего пространства заданы значения фазы бистатической (двухпозиционной) диаграммы рассеяния ϑ_{ζ} . В данной задаче начало координат связано с зондируемым телом.

Требуется при известной геометрии тела S найти распределение поверхностного импеданса W , обеспечивающее приближение с достаточной точностью к заданным значениям характеристик рассеянного поля. Это значит, что искомая функция W должна доставлять минимум функционалу .

$$J = \sum_{(x_i, y_i) \in S_d} |\theta^s(x_i, y_i) - \theta_{\zeta}(x_i, y_i)|^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

Для решения обратной задачи делается переход к интегральным уравнениям. Получив, аналогично [2], линейное интегрооператорное уравнение, проводим дискретизацию задачи согласно схеме метода граничных элементов. Таким образом, численное решение обратной задачи сводится к системе *линейных* алгебраических уравнений. При этом следует учитывать, что задача определения поверхностного импеданса по значениям как полной, так и фазовой диаграммы рассеянного поля относится к классу некорректно поставленных ([3]). С целью устранения этой проблемы вводится регуляризирующее слагаемое нулевого порядка по А.Н. Тихонову с параметром регуляризации α и проводится симметризация путем умножения обеих частей системы на транспонированную матрицу. К преимуществам предлагаемого подхода относятся: линейность системы уравнений, получение решения за конечное число шагов, отсутствие проблемы выбора начального приближения, эффективная регуляризация и возможность построения решения в широком классе комплекснозначных распределений импеданса.

Литература

1. *Сопна М.С.* Численное решение задачи восстановления формы для системы импедансных поверхностей // Известия вузов. Радиофизика. - 1999. - Т.42. - №5. - С. 452 - 458.
2. *Сопна М.С.* Компьютерная система обработки данных в задачах радиолокационного распознавания и диагностики формы импедансной поверхности // Вычислительные технологии. 2004.- Т. 9, часть IV.- С. 53-58.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. - М.: Наука. - 1979. - 288 с.

О некоторой мажорантной задаче Коши

В.А. Спиряев

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
eldin@mail.ru

В теории полилинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода важную роль играют неумлучшаемые оценки нелинейных интегральных неравенств. Получение таких оценок сводится к решению соответствующих мажорантных уравнений [1]. Рассмотрим следующую мажорантную задачу Коши ($L_i > 0, M_i > 0, i = \overline{1, N}$):

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F + L_1\theta(t) + L_2\theta^2(t) + L_3\theta^3(t) \cdots L_N\theta^N(t)}{1 - 2M_2\theta(t) - 3M_3\theta^2(t) - \dots - NM_N\theta^{N-1}(t)}, \quad \theta(0) = 0. \quad (1)$$

Согласно методу разделения переменных и формуле

$$\int \frac{P_n(\theta)}{(\theta - a)^{n+1}} d\theta = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)!(\theta - a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|\theta - a| + C$$

($P_n(\theta)$ - полином n -ой степени), исходная задача при специальном выборе констант F, L_1, L_2, \dots, L_N сводится к решению следующего уравнения:

$$-\frac{1}{L_N} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{P_{N-1}^{(k)}(a)}{k!(N-1-k)!(\theta - a)^{N-1-k}} + \frac{P_{N-1}^{(N-1)}(a)}{(N-1)!L_N} \ln(\theta - a) + C = t$$

где C определяется из условия $\theta(0) = 0$.

Выбирая теперь $M_i, i = \overline{1, N}$ таким образом, чтобы любых $N - 2$ слагаемых суммы (2) обратились в 0, можно получить решение уравнения (2) в аналитической форме в терминах функции Ламберта [2]. Такие решения получены для случая $N = 3, 4$, при этом свойства функции Ламберта позволяют определить максимальную область существования решения задачи (1).

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00377.

Литература

1. *Апарцин А.С.* Неумлучшаемые оценки решений некоторых классов нелинейных интегральных неравенств // Труды IX международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н.Г. Четаева // Иркутск. - 2007. - Т. 5. - С. 60-72.
2. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Advances Computational Maths. - 1996. - Vol. 5. - P. 329-359.

Решение обратной коэффициентной задачи для процессов с фазовым переходом

Е.Н. Сукманова

yeka@ngs.ru

Новосибирский государственный технический университет

Задачи теплопереноса с фазовым переходом часто встречаются в физике и технике. Они описывают, например, процессы таяния, сварки, литья металлов. Для всех этих процессов характерно наличие подвижной границы между твёрдым и жидким состоянием вещества.

Математическая формализация этих процессов рассматривается как задача Стефана. Рассмотрим эту задачу в одномерной постановке в области $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_L$

$$\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = \frac{c_p s p_S}{k_S} \frac{\partial T_S}{\partial t} \text{ на } \Omega_S,$$

$$\frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} = \frac{c_p l p_L}{k_L} \frac{\partial T_L}{\partial t} \text{ на } \Omega_L,$$

$$T_S|_{t=0} = T_0 \text{ на } \Omega_S, T_S = T_L = T_m \text{ на } \Gamma_2,$$

$$\frac{\partial T_S}{\partial n} - \frac{k_L}{k_S} \frac{\partial T_L}{\partial n} = \frac{1}{Ste} \nu \text{ на } \Gamma_2,$$

где Ω_L - область, занятая веществом в жидкой фазе, Ω_S - область занятая веществом в твёрдой фазе, Γ_2 - граница между подобластями Ω_S и Ω_L , T - температура, c_p - удельная теплоёмкость, k - теплопроводность, p - плотность, Ste - число Стефана, ν - скорость движения фронта.

Будем рассматривать постановку обратной задачи в следующем виде:

$$A(k)T = f,$$

где $A(k)$ - оператор решения прямой задачи, T - вектор решения, f - правая часть. Модель наблюдения имеет вид:

$$b = F[k] + \varepsilon,$$

где $F[k]$ - оператор моделирования прямой задачи, k - неизвестный вектор параметров, b - измеряемая величина, ε - шум измерений. Для получения единственного решения обратной задачи восстановления неизвестных коэффициентов k по наблюдениям b можно воспользоваться методом минимизации функционала Тихонова[1]:

$$\phi = \frac{1}{2} \|F[k] - b\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|W(k - k_0)\|,$$

где W - постоянная весовая матрица, k_0 - начальные значения вектора параметров, α - коэффициент регуляризации.

В работе рассматриваются алгоритмы решения обратной коэффициентной задачи, основанные на градиентных методах минимизации функционала Тихонова. Исследуется влияние степени зашумления данных измерений на точность оценивания коэффициента теплопроводности.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука - 1979 - 288 с.

Об устойчивости возмущенной разностной схемы связанной с обратной задачей для уравнения Шредингера

М.А.Султанов, Г.Б.Баканов

Академический инновационный университет, Кызылординский государственный университет (Казахстан);

muratsul@rambler.ru , Gbakan58@mail.ru

В работе рассматриваются вопросы построения безусловно устойчивых трехслойных разностных схем с двумя весами σ, q аппроксимирующие некорректную задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным как сверху, так и снизу самосопряженным оператором в главной части. Условия устойчивости исходной задачи получено на основе метода факторизации. При соответствующих отрицательных σ и положительных q все условия устойчивости выполняется и таким образом получается широкий набор безусловно устойчивых разностных схем зависящих от двух параметров σ и q . При этом отрицательные играют сглаживающую роль. Используемая нами при доказательстве техника есть разностный аналог весовых априорных оценок карлемановского типа.

Основной результат работы составляет теорема устойчивости решения для следующей трехслойной схемы с двумя весами $\sigma, q \in R$:

$$Pu \equiv u_{tt} - A_1(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u}) - A_2(q\hat{u} + (1 - 2q)u + q\check{u}) = f,$$

$$u_0 = g, \quad u_1 = u_0,$$

где A_1, A_2 - произвольные коммутирующие, ограниченные, самосопряженные, не зависящие от t операторы в гильбертовом пространстве H ; g - заданный элемент пространства H ; $f \in l_2(1, N; H)$.

Доказана также устойчивость возмущенной схемы $Qu = Pu - Ku = f$. На их основе проведено исследование устойчивости решения обратной коэффициентной задачи для уравнения Шредингера.

О решении одной обратной задачи для параболического уравнения

Е.В.Табаринцева

Южно-Уральский государственный университет
elt@csu.ru

Рассматривается задача восстановления функции $z(t) = u(1, t) + h_1 u_x(1, t)$, $z(t) \in L_2[0, \infty)$ (граничного условия третьего рода), где функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, a(x) \geq 0, a(x) \in C^2[0, 1], \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, u(0, t) + h_0 u_x(0, t) = 0$$

и дополнительному условию

$$u(x_0, t) = p(t), \quad x_0 \in (0, 1). \quad (2)$$

Рассматривая вспомогательную прямую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, a(x) \geq 0, a(x) \in C^2[0, 1], x \in (0, x_0), t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) + h_0 u_x(0, t) = 0, \quad u(x_0, t) = p(t),$$

определим функцию $q(t) = u_x(x_0, t)$. Следовательно, исходная задача сведется к задаче восстановления функций $v(t) = u(1, t)$ и $w(t) = u_x(1, t)$, где $u(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, a(x) \geq 0, a(x) \in C^2[0, 1], x \in (x_0, 1), t > 0 \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x_0, t) = p(t), \quad u_x(x_0, t) = q(t).$$

Пусть вместо точных исходных данных $p(t)$, $q(t)$ в задаче (3) известны только δ -приближения $p_\delta(t)$, $q_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|p(t) - p_\delta(t)\| < \delta$, $\|q(t) - q_\delta(t)\| < \delta$. Требуется найти приближенное решение $(v_\delta(t), w_\delta(t))$ задачи (3) и оценить его отклонение от точного решения. Пусть известно также, что при точно заданных исходных данных $p(t)$, $q(t)$ задача (3) имеет решение, принадлежащее классу равномерной регуляризации

$$Mr = \{(v, w) \in Y : (v', w') \in Y, \|(v', w')\|_Y \leq r\},$$

где $Y = L_2[0, \infty) \times L_2[0, \infty)$. Приближенное решение задачи (3) строится методом проекционной регуляризации. Доказано, что оценка погрешности рассмотренного метода приближенного решения задачи (3) имеет при $\delta \rightarrow 0$ порядок -

$$\Delta \simeq \frac{1}{\ln^2 \delta}.$$

Показано, что полученная оценка погрешности является точной по порядку.

Работа поддержана грантом р_урал_a N 07-01-96001

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.
2. Танака В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1982

Оптимальность метода М.М.Лаврентьева

В.П. Танана, Т.Н.Рудакова

Южно-Уральский государственный университет;
tvpa@susu.ac.ru, rtn@susu.ac.ru

Пусть H - гильбертово пространство, A - линейный ограниченный самосопряженный и положительный оператор, отображающий H в H со спектром $Sp(A) = [0, \|A\|]$, $B = G(A)$, $G(\sigma) \in C^1[0, \|A\|]$, $G(0) = 0$ и $\forall \sigma \in (0, \|A\|) G'(\sigma) > 0$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f \quad (1)$$

и предположим, что искомое решение u_0 этого уравнения принадлежит $M_r = B\bar{S}r$, но вместо $f_0 = Au_0$ нам известно $f_\delta \in H$ и $\delta > 0$ такое что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$.

Требуется, используя априорную информацию f_δ , δ и M_r , определить приближенное решение u_δ уравнения (1) наиболее близкое u_0 и оценить его уклонение $\|u_\delta - u_0\|$.

Метод М.М.Лаврентьева, следуя [1], заключается в определении приближенного решения формулой

$$u_\delta^\alpha = B[AB + \alpha E]^{-1} f_\delta; \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

в которой $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ выбирается из условия минимума уклонения $\|u_\delta^\alpha - u_0\|$. Для определения $\bar{\alpha}(\delta)$ рассмотрим уравнение

$$rG(\sigma)\sigma = \delta,$$

решение которого обозначим через $\bar{\sigma}(\delta)$.

Теорема. Пусть функция $\frac{G^2(\sigma)}{G'(\sigma)}$ возрастает, $\bar{\alpha}(\delta) = \frac{G^2(\bar{\sigma}(\delta))}{G'(\bar{\sigma}(\delta))}$. Тогда

$$\|u_\delta^{\bar{\alpha}}(\delta) - u_0\| \leq rG[\bar{\sigma}(\delta)]. \quad (3)$$

Оценка (3) является точной, а метод М.М.Лаврентьева - оптимальным на M_r . Теорема обобщена на случай несамосопряженных операторов A и B .

Литература.

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. Доклады АН СССР, 1959, том 127, №1, стр.31-33

Об оценке точности решения задачи тепловой диагностики в неоднородной среде

В.П. Танана, А.И. Сидикова

Южно-Уральский государственный университет,
tanana@csu.ru, 7413604@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение с разрывными коэффициентами

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$a(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_1 \\ \chi, & x_1 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \chi \neq 1 \text{ положительное число,}$$

а также начальное и граничные условия

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - ku(0,t) = 0; \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где k известное число

$$u(x_1,t) = f(t); \quad t \geq 0, \quad (4)$$

а функцию $h_0(t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}$ требуется определить.

Предположим, что при $f_0(t) \in L_2[0, \infty)$ существует функция $h_0(t)$ такая, что $h_0 \in C^2[0, \infty)$, $h_0(t) = 0$ при $t \geq t_0 > 0$ и

$$\int_0^\infty |h_0(t)|^2 dt + \int_0^\infty |h_0'(t)|^2 dt \leq r_2, \quad (5)$$

но точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\|_{L_2} \leq \delta$. Требуется, используя условие (5), f_δ и δ , определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1-4) и оценить уклонение $\|h_\delta - h_0\|$. Методом проекционной регуляризации [1] построено приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1-4) и получена точная по порядку оценка погрешности

$$\|h_\delta - h_0\|_{L_2} \leq c \ln -2\delta,$$

где c -некоторая константа.

Работа поддержана грантом р-урал-а N 07-01-96001.

1. Танана В.П., Данилин А.Р. Об оптимальности регуляризирующих алгоритмов при решении некорректных задач // Дифференциальные уравнения, 1976, Т.12, №7, С.1323-1326.

Оценка конечномерных методов решения условно-корректных задач

В.П. Танана, Н.М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет;
tvpa@susu.ac.ru, ddjy@math.susu.ac.ru

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство, $(H \rightarrow H)_1$ — множество неотрицательно определенных самосопряженных вполне непрерывных операторов, а $(H \rightarrow H)_2$ — линейное многообразие линейных конечномерных операторов. $B : H \rightarrow H$ — линейный вполне непрерывный оператор, и $M_r = B\bar{S}_r$, где $\bar{S}_r = \{v : v \in H; |v| \leq r\}$.

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au = f; \tag{1}$$

где $u \in M_r$; $f \in H$; $A \in (H \rightarrow H)_1$.

Предположим, что при некотором $f_0 \exists u_0 \in M_r$ — точное решение уравнения (1), но вместо f известны некоторые приближения $f_\delta \in H$, и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f\| \leq \delta$.

Пусть оператор $A_h \in (H \rightarrow H)_2$ такой, что $\|A_h - A\| \leq h$, $h > 0$, тогда уравнению (1) будет соответствовать конечномерное уравнение

$$A_h u = f_\delta; \tag{2}$$

где $\bar{f}_\delta = pr[f_\delta; R(A_h)]$, а $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$

В качестве регуляризирующего семейства операторов выберем сильно непрерывное по α семейство $\{P_\alpha(A) : 0 < \alpha \leq \alpha_0\}$, определяемое формулой

$$P_\alpha(A) = \Phi(A; \alpha)Q; \quad 0 < \alpha \leq \alpha_0;$$

где $Q = pr[\cdot; R(A)]$, а $\Phi(\sigma; \alpha)$ — непрерывная по σ неотрицательная функция, тогда элемент $u_{\delta h}^\alpha = P_\alpha(A_h)\bar{f}_\delta$ назовем регуляризованным решением уравнения (1).

Для оценки отклонения $u_{\delta h}^\alpha$ от точного решения u_0 на классе M_r , используют функцию

$$\Delta[P_\alpha(A)] = \sup_{u, f_\delta, A_h} \{\|P_\alpha(A_h)\bar{f}_\delta - u\| : u \in M_r; \|A_h - A\| \leq h; \|Au - f_\delta\| \leq \delta\}$$

и функцию модуля непрерывности обратного оператора в нуле, заданную соотношением $w(\tau, r) = \sup\{\|u\| : u \in M_r; \|Au\| \leq \tau\}$.

Доказано, что для произвольного регуляризирующего семейства $\{P_\alpha(A)\}$ справедлива оценка

$$\Delta[h; \delta] \geq c\omega(\|B\|h + \delta); \tag{3}$$

где $c = \text{const}$.

Для конечномерного аналога метода установления при специально выбранной зависимости $\alpha = \alpha(\delta; h)$ получена оценка сверху того же порядка, что оценка (3).

Работа поддержана грантом р_урал_а №07-01-96001.

Устойчивость обратной задачи геоэлектрики.

Ф.С.Телгожаева

КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
Faridats@mail.ru

В области $\Delta(l) = \{(z, t), 0 < z < t < l\}$ рассмотрим обратную задачу

$$u_{tt}(z, t) = u_{zz}(z, t) - Pu(z, t), \quad (z, t) \in \Delta(l), \quad (1)$$

$$u(z, z) = S(z), \quad 0 \leq z \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad u_z(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 2l, \quad (3)$$

в которой функция $b(z)$ известна, а функция $a(z)$ искомая. Здесь

$$Pu(z, t) = \frac{b'(z)}{b(z)}u_z(z, t) + a(z)u_t(z, t) + (\lambda b(z))^2u(z, t), \\ f(t) = f_{(1)}(t), \quad \varphi(t) = \mu f_{(2)}(t).$$

Функции $S(z)$ есть решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$S(z) = \frac{1}{2}\gamma_0 + \frac{1}{2} \int_0^z \left[\frac{b'(\xi)}{b(\xi)} - a(\xi) \right] S'(\xi) d\xi, \quad z \in (0, l).$$

Вывод постановки задачи (1)-(3) изложена в монографии [1]. Нами исследуется постановка обратной задачи (1)-(3) в интегральной постановке, в векторной форме имеющий вид: ;

$$Y = F + K(Y) \quad (4)$$

Здесь F – вектор данных обратной задачи, Y – искомый вектор, K – вектор, компоненты которой есть функции в интегральных операторах.

Следуя работе [1], изучена корректность в окрестности точного решения для обратной задачи геоэлектрики. Подобного сорта оценки используются для доказательства теоремы сходимости метода наискорейшего спуска при решении обратной задачи оптимизационным методом.

В заключении автор выражает свою благодарность профессору Исакову К.Т. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. *С.И.Кабанихин, К.Т.Исаков*, Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. Изд-во НГУ. Новосибирск. 2001. 325 с.

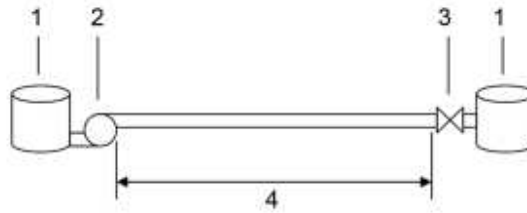
Определение параметров течения жидкости в трубопроводе на основании измерений давления в контрольных точках.

А.Б. Тмур

Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет);
 anton.tmur@gmail.com

В приведенной работе решается следующая обратная задача.

Рассматривается течение жидкости в трубопроводе. В каждый момент времени, $t = n\tau$, $n \in Z$ производятся измерения давлений с датчиков, установленных в контрольных точках линейной части трубопровода. Задача состоит в том, чтобы на основании этих измерений восстановить профили давления и скорости вдоль трубопровода в начальный момент времени $t = 0$.



Рассматривается схема трубопровода, изображенная на рис. 1 (1 - резервуары, 2 - насос, 3 - задвижка, 4 - трубопровод, расчётная область). Расчетная область задачи заключена между насосом и задвижкой. В качестве граничных условий рассматриваются: на левой границе - напорная характеристика насоса, на правой границе - уравнение для местного сопротивления. За основу берется модель одномерного изотермического течения слабосжимаемой жидкости в протяженном канале круглого сечения [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = -\rho g \sin \gamma - \frac{\partial P}{\partial x} - \lambda \frac{\rho u |u|}{2D},$$

где ρ - плотность, u - скорость, P - давление, t - время, x - пространственная координата, g - ускорение свободного падения, γ - угол наклона трубопровода относительно горизонта, D - диаметр трубопровода, λ - коэффициент гидравлического сопротивления.

В работе используется метод квазилинеаризации[1], который заключается в следующем. Если расчетная сетка имеет M узлов по пространству на каждом временном слое n , $n = 1, \dots, N$, то разностная схема [2] для перехода с одного временного слоя на другой может быть записана, как некоторое правило:

$$\bar{z}_{n+1} = \varphi(\bar{z}_n, \xi), \quad (1)$$

где n - номер временного слоя, $\bar{z}_n = (u_1^n, \dots, u_M^n, P_1^n, \dots, P_M^n)$ - вектор, состоящий из скоростей и давлений на n -ом временном слое, ξ - граничные условия. Функция φ является нелинейной функцией \bar{z}_n . Метод квазилинеаризации является итеративным методом. На каждой итерации μ функция φ линеаризуется, и для всех n получаются линейные зависимости $\bar{z}_{n+1}^{\mu+1}$ от $\bar{z}_n^{\mu+1}$ при известных $\bar{z}_n^{\mu} \forall n = 1, \dots, N$:

$$\bar{z}_{n+1}^{\mu+1} = \varphi(\bar{z}_n^{\mu}, \xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_n^{\mu}, \xi) \left(\bar{z}_n^{\mu+1} - \bar{z}_n^{\mu} \right).$$

Тогда на каждой новой итерации $\mu + 1$ любое давление, измеренное в контрольной точке, можно выразить линейно относительно $\vec{z}_0^{\mu+1}$. Рассматривается случай, когда число подобных измерений превышает число неизвестных, т.е. система линейных уравнений является переопределенной. Далее реализуется метод наименьших квадратов[2], где в качестве уравнений регрессии используются уравнения относительно $\vec{z}_0^{\mu+1}$. Определив $\vec{z}_0^{\mu+1}$, все последующие состояния $\vec{z}_n^{\mu+1} \forall n = 1, \dots, N$ определяются, используя (1). Затем производится переход на новую итерацию. В работе представлены основные результаты идентификации стационарных и нестационарных режимов перекачки нефти в трубопроводе на основе измерений давления в контрольных точках.

Литература.

1. Гликман Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем. - М.: Наука, 1986.
2. Грон Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979.

О задаче Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами

Ф.Р.Турсунов

Самаркандский государственный университет;
 faridun22@rambler.ru

В работе предлагается задача Коши для некоторых систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Строится матрица Карлемана на основе которых строится регуляризованное решение данной задачи, а также доказывается существование решения задачи Коши.

Пусть, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ точки m мерной Евклидова пространства R^m , $m \geq 3$ и $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ транспонированный вектор x .

Введем следующее обозначения:

$$y' = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1}), \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), \quad r = |y - x|, \alpha = |y' - x'|, \alpha^2 = s,$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m, u \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))^T, \quad u^0 = (1, 1, \dots, 1) \in R^n$$

$E(x)$ - диагональная матрица, ω_m площадь поверхности единичной сферы R^m .

Через $A_{l \times n}(x)$ обозначим класс матриц $D(x^T)$, элементами состоящими из линейных формы с постоянными коэффициентами из C который удовлетворяет условию:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E(|x|^2 u^0)$$

где $D^*(x^T)$ - сопряженная эрмитова матрица $D(x^T)$.

Пусть, G ограниченная область в R^m граница которой, состоит из части плоскости $y_m = 0$ и некоторой гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $y_m > 0$.

В области G рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = 0, \tag{1}$$

где $D(x^T) \in A_{l \times n}(x)$.

Если $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ и является решением системы (1), тогда верно следующие интегральное представление:

$$u(x) = \int_{\partial G} M(y, x) u(y) dS_y,$$

где

$$M(y, x) = \left(E \left(\frac{\bar{C}_m}{r^{m-2}} u^0 \right) D^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) D(t)^T, \quad \bar{C}_m = \frac{1}{(m-2)\omega_m};$$

$t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y на поверхности ∂G .

Постановка задачи: Пусть $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ удовлетворяет системе (1) в G и

$$u|_S = f(x).$$

Требуется восстановить вектор функцию в области G , используя данные Коши.

Теорема 1. Пусть вектор-функция $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ является решением системы (1) и удовлетворяет условию $|u(y)| \leq 1$, на $y \in T = \partial G/S$, если

$$u_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(y, x) u(y) dS_y, \quad x \in G,$$

то верна следующая оценка:

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq C(x) \bar{C}(\sigma) \exp(-\sigma x_m),$$

где $C(x)$ - некоторая функция от x ,

$$C(x) = C_\rho \int_{y_m=0} \frac{ds}{r^{m-1}};$$

$$C(\sigma) = \begin{cases} \sigma^m, & \text{если } m = 2k - 1, k \geq 1, \\ \sigma^{m-1}, & \text{если } m = 2k, k \geq 2. \end{cases}$$

Литература

1. *Н.Н. Тарханов.* Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторые приложения. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск -1980, стр. 147- 160.
2. *М.М. Лаврентьев.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР Новосибирск, 1962 г.
3. *Ш.Ярмухамедов.* Интегральные представления гармонических функций многих переменных. ДАН СССР, Т.204, № 4, 1972, 799-802 стр.
4. *Ш.Ярмухамедов, А. Абдукаримов, З. Маликов.* О задачи Коши для системы эллиптического типа первого порядка. Докл. Росс. Акад. Наук. Том 323 (1992) №1.

Некорректная краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка смешанного типа

К.С. Фаязов, И.О. Хажиев

Национальный университет Узбекистана
kfayazov@yahoo.com, hajiev_79@rambler.ru

В области $\Omega = \{-1 < x < 1, x \neq 0, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\operatorname{sgn}x \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\operatorname{sgn}x \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x, t) = 0 \quad (1)$$

Постановка задачи. Найти решение уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее следующим условиям: начальным

$$u(x, 0) = p_1(x), \quad u_t(x, 0) = p_2(x), \quad u_{tt}(x, 0) = p_3(x), \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (2)$$

граничным

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad u_{xx}(-1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (3)$$

склеивания

$$\begin{aligned} u(-0, t) &= u(+0, t), & u_x(-0, t) &= u_x(+0, t), \\ u_{xx}(-0, t) &= u_{xx}(+0, t), & u_{xxx}(-0, t) &= u_{xxx}(+0, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ заданные функции.

Задача (1)-(4) относится к некорректно поставленным задачам математической физики. В задаче (1)-(4) отсутствует непрерывная зависимость решения от данных, т.е. задача неустойчива.

В качестве примера можно рассмотреть задачи приложения связанные с колебаниями волн в акустической среде.

Исследуется единственность и условная устойчивость задачи, а также строятся приближенные решения двумя способами: методом квазиобращения и регуляризации. Получены оценки погрешности между точным и приближенными решениями по приближенным данным. Получены формулы для параметров регуляризации.

Заметим, что данный метод может быть обобщен и для более общего дифференциального уравнения в частных производных высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.С. Фаязов. Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. *Узбекский математический журнал*, 1995г., №2
2. И.О. Хажиев. Приближенные решения некорректной краевой задачи для уравнения в частных производных третьего порядка смешанного типа. *Узбекский математический журнал*, 2009 г., №1.

Об одной обратной задаче индукционного каротажа

В.В. Филатов, О.Ю. Светозерский

Сибирский НИИ геологии геофизики и минерального сырья (ФГУП «СНИИГГиМС»)
filatov@sniiggms.ru

Традиционная интерпретация данных электромагнитного каротажа сводится к восстановлению удельного сопротивления околоскважинного пространства. В процессе бурения под влиянием внедрения бурового раствора эта проводимость меняется со временем. Эти изменения представляют собой отдельный процесс, зависящий от целого ряда параметров, в частности, от коллекторских свойств разреза и сопротивления заполняющего его флюида. Исследование динамики этого процесса позволяет сделать вывод не только об изменении сопротивления, но и, например, о виде флюида, заполняющего поровое пространство.

В работе рассматривается обратная задача приближенного восстановления динамики процесса изменения сопротивления прискважинной зоны и прогноза флюидозаполнения по данным высокочастотного индукционного каротажа (ВИКИЗ).

В качестве алгоритма восстановления параметров динамической системы, управляющей изменением свойств околоскважинного пространства, используется известный метод моделирования динамической системы по наблюдаемому временному ряду.

Идея реконструкции дифференциальных уравнений или отображений на основании анализа реализаций (Broomhead and King, 1986) вкратце состоит в следующем (Кузнецов, 2001). Сначала определяется размерность вложения, т.е. размерность фазового пространства конструируемой модели. Далее берется за основу некоторая форма уравнений, содержащая набор неопределенных коэффициентов, например, коэффициентов разложения правых частей уравнений в ряд Тейлора по динамическим переменным. Накладывается условие, чтобы наблюдаемая реализация оптимальным образом описывалась данной моделью, для чего привлекается, например, метод наименьших квадратов. Именно, формулируется условие минимума некоторой положительной величины типа суммы квадратов невязок. Из условия минимальности этой величины получается система уравнений, позволяющая найти неопределенные коэффициенты. Этим и завершается процедура построения модели.

Для различных участков скважины поведение модели отличается. Эти отличия, как правило, не укладываются в рамки простых зависимостей. Но на основе их изучения можно построить фильтры (динамические характеристики), позволяющие выделять в разрезе зоны, соответствующие различным параметрам среды.

В частности можно отличить и зафиксировать в разрезе участки, соответствующие газонасыщенным, нефтенасыщенным, водонасыщенным или глинистым пластам.

Это подтверждается рядом практических результатов, полученных на различных скважинах.

Литература

1. *Broomhead D.S., King G.P.*, 1986. Extracting qualitative dynamics from experimental data // *Physica*, V.D20.P. 217-235
2. *Кузнецов С.П.*, 2001. Динамический хаос. М. Изд. Физико-математической литературы, 296 с.

О методе внутренних точек для решения задачи термодинамического равновесия

А.Н. Чайко

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН;
alexander.chaiko@gmail.com

Рассматривается математическая проблема определения компонентного распределения многофазной системы по заданному валовому составу [1] как традиционная обратная задача, для решения которой применяется классический оптимизационный алгоритм — метод внутренних точек [2]. Типичными для соответствующих приложений являются системы с наличием растворов, в которых присутствует процесс диссоциации, описываемый уравнением электронейтральности, которое наряду с системой уравнений баланса масс задает множество допустимых значений.

Предлагается модификация оптимизационной постановки исходной задачи термодинамического равновесия, для которой на базе метода внутренних точек разработан и реализован двухуровневый итерационный процесс, эффективно учитывающие специфику и параметризацию целевого функционала.

Предложенный алгоритм успешно апробируется на практических и методических задачах определения равновесного состава разнообразных термодинамических систем. Результаты численных экспериментов подтверждают высокие точность и скорость сходимости метода, а также показывают его более широкую область применения по сравнению с аналогами.

Литература

1. *Karpov I.K., Chudneneko K.V., Kulik D.A.* Modeling chemical mass transfer in geochemical process: thermodynamic relations, conditions of equilibria, and numerical algorithms// American Journal of Science. 1997. V. 297. P. 767-806.
2. *Gay D.M., Overton M.L., Wight M.H.* A primal-dual interior method for nonconvex nonlinear programming // Advances in nonlinear programming. Dordrecht: Kluwer. 1998. P. 31-56

Регуляризация операторных уравнений в банаховых пространствах

П.А. Чистяков

Уральский государственный университет им. А.М. Горького
p_a_v_e_1@isnet.ru

Рассматривается задача решения операторного уравнения $Ax = y_0$ с B -симметричным и B -положительным оператором A . Метод регуляризации заключается в замене исходного уравнения на вариационную задачу

$$\min_{x \in X} \{ \langle Ax, Bx \rangle - 2 \langle y_\delta, Bx \rangle + \alpha \|x - x^0\|^2 \},$$

где y_δ — известное с погрешностью δ значение правой части. Доказана теорема о том, что при соответствующем выборе параметра регуляризации $\alpha(\delta)$ имеет место сходимость регуляризованных решений к нормальному решению исходного уравнения. Разработана схема дискретной аппроксимации регуляризующего алгоритма в соответствии с подходом [3, 4, 5]. Доказана теорема о дискретной аппроксимации метода регуляризации. Приводится модельный пример решения интегрального уравнения первого рода с разрывным ядром для представленной теоретической схемы регуляризации. Решение регуляризованной вариационной задачи находилось при помощи субградиентных итерационных методов [6]. Проведённый численный эксперимент показал, что после около 10^3 итераций разрывное нормальное решение уравнения восстанавливается с погрешностью порядка $\sqrt{6}\delta$.

Список литературы

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962, - 92 с.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978, - 206 с.
3. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов. — Тарту: Изд-во Тарт. ун-та, 1976, - 161 с.
4. Stummel F. Diskrete Konvergenz Linear Operatoren. I; II // Math. Ann. 1970. Vol. 190, №1. S. 45-92 ; Math. Z. 1971. Vol. 120.
5. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: УИФ "Наука 1993, - 264 с.
6. Демьянов В. Ф., Васильев В. П. Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981, - 384 с.

О выборе параметра регуляризации в задаче экспресс-контроля за источником загрязнения атмосферы

А.А. Чубатов, В.Н. Кармазин

Кубанский государственный университет
chaa@inbox.ru, karmazin@kubsu.ru

Работа продолжает исследования, представленные в [1]. Для описания процессов распространения примеси в атмосфере используем линейное уравнение турбулентной диффузии [2] с однородными начальными и граничными условиями. Обратная задача идентификации интенсивности выбросов источника состоит в последовательном определении функции интенсивности $g(t)$ по данным измерений концентрации в стационарных пунктах контроля, расположенных в точках (x_j, y_j, z_j) , $j = 1, \dots, J$. Измерения проводятся через промежутки времени Δt . Будем считать, что ошибка замеров концентрации аддитивна [1]. Для решения задачи использовались методы шаговой регуляризации и последовательной функциональной аппроксимации при r последующих шагах по времени [1,3]. Пусть известны ступенчатые коэффициенты чувствительности ϕ_{ji} [1,3], а также задан шаг между замерами концентрации Δt . Необходимо подобрать r , при котором погрешность восстановления интенсивности минимальна.

Среднеквадратичная погрешность σ_{g_N} восстановления интенсивности $g(t_N)$ равна $\sigma_{g_N} = \sqrt{D^2 + Var}$ [3], где D — детерминированное смещение, обусловленное погрешностью аппроксимации, Var — дисперсия, зависящая от погрешности замеров концентрации $\Delta c_{ji} = c_{ji} - q_{ji}$. С возрастанием параметра r дисперсия Var уменьшается, но одновременно растет детерминированное смещение D [3]. Для оценки влияния D и Var на погрешность σ_{g_N} оценивается точность восстановления импульса интенсивности и исследуется поведение отклика интенсивности на импульс концентрации $\delta g_i = \delta c_{jr}$. Анализ информации о коэффициентах чувствительности позволяет выбрать для заданного шага Δt значение параметра регуляризации r , обеспечивающего устойчивую оценку интенсивности $g(t)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (грант _09-01-96506-р юга, "Разработка экспрессных методов мониторинга источников загрязнения атмосферы").

Литература

1. Чубатов А. А., Кармазин В. Н. Экспресс-контроль за источником загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2008. — №2(17). — С. 210–214.
2. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
3. Бек Дж., Блакуэлл Б., Чент-Клэр С., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.

Об одной задаче для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами

Е.Ф. Шарин

Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова;
eugene_sharin@mail.ru

В работе рассматривается случай односторонних спутных потоков, на границе раздела которых выполняются общие условия согласования.

Пусть $D = \Omega \times (0, T)$, где либо Ω область в R , либо $\Omega \equiv R$, причем $0 \in \Omega$. В области D рассмотрим уравнение

$$f(x)u_t = u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t). \quad (1)$$

Пусть в уравнении (1) функция $f(x) > 0$ и терпит разрыв в точке 0. Решение уравнения (1) в классе ограниченных функций будет единственным при выполнении начальных условий

$$u(x, 0) = u_0(x)(x \in \Omega^+), u(x, 0) = u_1(x)(x \in \Omega^-), \quad (2)$$

и условий непрерывности производных до 1-го порядка. В работе будет рассматриваться общий случай сопряжения потоков

$$\begin{pmatrix} u(+0; t) \\ u_x(+0; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(-0; t) \\ u_x(-0; t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где a_{ij} - элементы невырожденной матрицы.

Методом параболических потенциалов простого слоя с неизвестными плотностями α, β построенных при помощи фундаментального решения краевая задача (1) - (3) приводится к решению системы двух уравнений.

Если решение поставленной задачи разыскивать из пространства Гельдера $H_{xt}^{p, p/2}$, $p = 2l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, $l \geq 1$, то для однозначной разрешимости краевой задачи (1) - (3), необходимо и достаточно, в зависимости от элементов a_{ij} матрицы условий сопряжения, выполнение $[p] + 1$ или $[p]$ условий на данные задачи вида:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0; s = 1, \dots, [p] + 1, \quad (4)$$

где L_s — интегральные операторы от функций u_0, u_1 .

Обратная задача радиолокации слоистых сред рупорной антенной

А.А. Шибельгут, Р.В. Литвинов, А.В. Максимов

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
ShibelgutAA@rzi.tusur.ru

В данной работе представлены результаты решения обратной задачи рассеяния электромагнитных волн слоистой средой с масштабом неоднородности $1 \div 3$ см. В качестве экспериментальных данных использовались данные частотной зависимости комплексного коэффициента отражения $R_{exp}(\omega)$, полученные при зондировании слоистой среды широкополосной рупорной антенной в диапазоне частот $1,3 \div 2,9$ ГГц. Для восстановления профиля диэлектрической

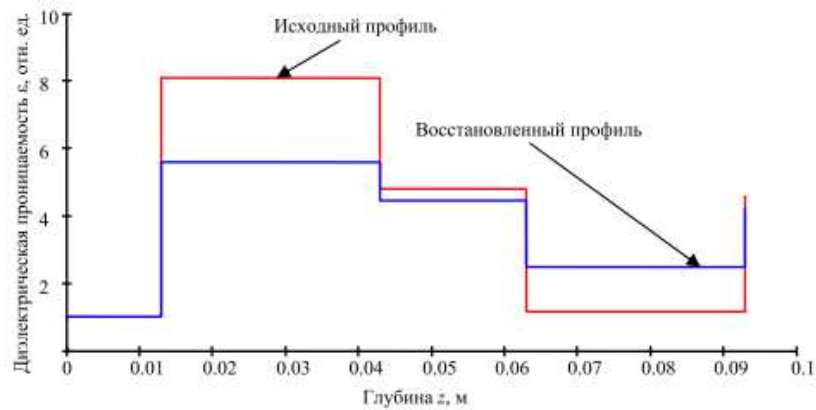


Рис. 1: Исходный и восстановленный профиль диэлектрической проницаемости слоистой среды.

ческой проницаемости $\varepsilon(z)$ слоистой среды некорректная обратная задача рассеяния на ней плоских волн была решена методом минимизации регуляризирующего функционала *А.Н. Тихонова* [1], который может быть представлен в форме:

$$T^\alpha(\varepsilon) = \sum_s |R[\omega_s, \varepsilon(z)] - R_{exp}|^2 + \alpha \Omega[\varepsilon(z)],$$

где ω_s - частотный диапазон $1,3 \div 2,9$ ГГц, α - параметр регуляризации. Стабилизирующий функционал $\Omega[\varepsilon(z)]$ получен в работе [2] в следующем виде:

$$\Omega[\varepsilon(z)] = \sum_{j=1}^{10} p_j |R(\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j) - R(\varepsilon_{0j-1}, \varepsilon_{0j})|^2 + r_j \varepsilon_j^2$$

где $R(\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j)$ — формулы Френеля для коэффициента отражения от границы раздела однородных сред; числа p_j и r_j - специально подобранные весовые коэффициенты; ε_{0j} - рандомизированные начальные приближения для диэлектрической проницаемости слоев. Результаты решения обратной задачи, представленные на рис. 1, показывают хорошее совпадение исходного и восстановленного профилей диэлектрической проницаемости слоистой среды. Таким образом, описанный выше алгоритм, можно эффективно использовать для радиолокации слоистых сред рупорной антенной.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. - 285 с.
2. *Shibelgut A., Litvinov R., Zadorin A.* Inverse Problem Solution of Radio-Waves Scattering on Soil by Minimization of Regularizing Functional. ISBN 978-3-8007-3152-7, EuCAP 2009 [Elektronische Ressource] / 3rd European Conference on Antennas and Propagation, 23 - 27 March 2009, Berlin, Germany - Berlin ; Offenbach : VDE-Verl., 2009. - 1 CD-ROM.

Об одной модели неізотермической фильтрации с учетом фазовых переходов

К.М. Шияпов, К. Куспанова

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан
himirankadr@mail.ru, kalipa@mail.ru,

В работе исследована математическая модель неізотермической фильтрации с учетом фазовых переходов. Относительно насыщенности, давления и температуры получена система уравнений составного типа. Схема исследования состоит из корректности рассматриваемой математической модели, обратной задачи по восстановлению коэффициентов уравнения с помощью дополнительных условий и построения эффективных вычислительных алгоритмов.

Законы сохранения механики сплошной среды в дивергентной форме можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F \cdot \vec{v} - G) = X \quad (1)$$

В случае обобщенного движения уравнений (1) понимаются в смысле теории распределений. Тогда на границе раздела должно выполняться следующее условие:

$$[F \cdot (\vec{v} \cdot \nu - V_\nu) - G \cdot \nu] = 0 \quad (2)$$

где V_ν - скорость перемещения сечения $\Gamma(t)$. В качестве $F = \rho \cdot U$, $v = -\vec{k} \cdot \nabla P$ - закон Дарси, $G = -q$ - поток, $q = -\chi \cdot \nabla \theta$ - закон Фурье, $X = 0$, где ρ - плотность, U - удельная внутренняя энергия, θ - температура, P - давление, $\chi = \chi_1 \cdot s + (1-s) \cdot \chi_2$ - коэффициент теплопроводности. Тогда функцию F можно представить в следующем виде:

$$\rho \cdot U = (1-m)\rho_{gp} \cdot U_{gp} + m\rho_e s U_e + m\rho_n(1-m)U_n \quad (3)$$

где m - пористость грунта, ρ_{gp} - плотность грунта, ρ_e - плотность воды, ρ_n - плотность нефти, U_{gp} - удельная внутренняя энергия грунта, U_e - удельная внутренняя энергия воды, U_n - удельная внутренняя энергия нефти, причем в каждой фазе удельные внутренние энергии зависят от температуры линейным образом:

$$U_i = \alpha_i(s) \cdot \theta + \beta_i(s), \quad i = \overline{1,3} \quad (4)$$

Тогда из (3) получим

$$\rho \cdot U = b(s)\theta + c(s) \quad (5)$$

Пусть $\Omega_T \subset R_T^n = R^n \times (0, T)$ область, заключенная между известной поверхностью $F_T = F \times (0, T)$, $F \subset R^n$ и искомой поверхностью $\Gamma_T = \{(x, T) | x \in \Gamma(t) \subset R^n, t \in (0, T)\}$ так, что $\Omega_T = \{(x, T) | x \in \Omega(t) \subset R^n, t \in (0, T)\}$

Требуется определить Γ_T и пару функций $\{\theta, P\}$ - температуру и давление, удовлетворяющую в области Ω_T нелинейным уравнениям:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(a(s) \cdot \nabla P), \quad (6)$$

$$(7)$$

где водонасыщенность s определяется следующим образом: равна 1 при $\theta > \theta_*$, равна 0 при $\theta < \theta_*$ и $[0,1]$ при $\theta = \theta_*$. θ_* - температура плавления (кристаллизации) парафинированной высоковязкой нефти. При определенных начально-краевых условиях изучены разрешимость и свойства решений относительно систем уравнений (6)-(7).

Идентификация полиномов Вольтерра на базе численного метода интегрирования произведения

М.С. Щербинин

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск;
sm-baikal@mail.ru

В [1], [2] развита методика идентификации полиномов Вольтерра, согласно которой, если нелинейная динамическая система, рассматриваемая как черный ящик со скалярным входным возмущением $x(t)$ и откликом $y(t)$, моделируется с помощью полинома Вольтерра N -ой степени в форме

$$y(t) = \sum_{m=1}^N f_m(t), \quad f_m(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_m(s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(t-s_i) ds_i, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

то, используя метод интегрирования произведения [3], переходим к конструкции

$$y(ih) = \sum_{m=1}^N f_m(ih), \quad i = \overline{1, n}, \quad nh = T,$$
$$f_m(ih) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^i g_{i_1, \dots, i_m} \prod_{k=1}^m x\left(\left(i - i_k + \frac{1}{2}\right)h\right)$$
$$g_{i_1, \dots, i_m} = \int_{(i_1-1)h}^{i_1h} \dots \int_{(i_m-1)h}^{i_mh} K_m(s_1, \dots, s_m) ds_1, \dots, ds_m, \quad i_1, \dots, i_m = \overline{1, n} \quad (2)$$

Набор (2) подлежит идентификации с помощью откликов системы на физически реализуемые тестовые кусочно-постоянные возмущения вида

$$x_{\omega_1 \dots \omega_m}^{\alpha_i} = \alpha_i \left(e(t) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k \left(t - \sum_{i=1}^k \omega_i \right) + (-1)^m \left(t - \sum_{i=1}^m \omega_i \right) \right) \quad (3)$$

$e(t)$ - функция Хевисайда, $\omega_i \in [0, T]$, α_i - вещественные числа, $i = \overline{1, m}$.

В данной работе предлагается использовать, в отличие от (3), возмущения с носителем ширины h . Это значительно упрощает вид формул обращения, дает меньшую ошибку на определенных видах входных сигналов, а также позволяет обобщить данную методику на векторный случай.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00377.

Литература.

1. Апарцин А.С., Спиряев В.А. Об одном подходе к идентификации полиномов Вольтерра // Оптимизация, управление, интеллект. - 2006. - № 2(10). - С. 109-117.
2. Солодуша С.В., Спиряев В.А., Щербинин М.С. Применение кубичного полинома Вольтерра к моделированию динамики теплообмена // Вестник ИрГТУ.-2006, №2(26), Т.3. - С. 179-185.
3. Linz P. Product integration method for Volterra integral equations of the first kind // BIT, 1971. - Vol. 11. - P. 413 - 421.

Оценка регуляризованного решения одной обратной задачи физики твердого тела

Н.М. Япарова, О.В. Ястребинская

Южно-Уральский государственный университет
ddjy@math.susu.ac.ru

Связь энергетического спектра кристалла с его теплоемкостью описывается интегральным уравнением первого рода

$$Kn(\varepsilon) = \int_0^{\infty} S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \frac{\varepsilon}{\theta} n(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{C(\theta)}{\theta} \quad (1)$$

где $S(x) = x^2/2\text{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $C(\theta)$ - теплоемкость системы, $\theta = kT$, T - абсолютная температура, а k - константа, определяемая системой, $n(\varepsilon)$ - спектральная плотность, удовлетворяющая условиям $n(\varepsilon) \geq 0$, $n(0) = 0$, $\int_0^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon = 1$.

Если $C(\theta)/\theta$ и $n(\varepsilon) \in L_2[0, \infty)$, то уравнение (1) становится некорректной задачей, кроме того, вместо $C(\theta)$ известны приближения $C_{\delta}(\theta)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\left\| \frac{C(\theta)}{\theta} - \frac{C_{\delta}(\theta)}{\theta} \right\| \leq \delta. \quad (2)$$

Уравнение (1) с помощью метода регуляризации может быть сведено к вариационной задаче

$$\inf_{n(\varepsilon)} \left\{ \left\| Kn(\varepsilon) - \frac{C_{\delta}(\theta)}{\theta} \right\|^2 + \alpha \int_0^{\infty} \frac{n^2(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon + \alpha \int_0^{\infty} [n'(\varepsilon)]^2 \varepsilon d\varepsilon | n(\varepsilon) \geq 0; \int_0^{\infty} n(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \right\}; \quad (3)$$

где $\alpha > 0$ - некоторый параметр регуляризации, а $C_{\delta}(\theta)$ удовлетворяет (2). Выберем параметр регуляризации α из условия невязки

$$\left\| Kn(\varepsilon) - \frac{C_{\delta}(\theta)}{\theta} \right\|^2 \leq \delta^2, \quad (4)$$

и обозначим решение неравенства (4) через $\alpha = \bar{\alpha}(\delta)$. Доказано, что при $\alpha = \bar{\alpha}(\delta)$ задача (3) имеет единственное решение $n_{\delta}^{\bar{\alpha}(\delta)}(\varepsilon)$, которое является регуляризованным решением уравнения (1). Для регуляризованного решения $n_{\delta}^{\bar{\alpha}(\delta)}(\varepsilon)$ получена следующая оценка

$$\|n_{\delta}^{\bar{\alpha}(\delta)}(\varepsilon) - n(\varepsilon)\| \leq c \ln^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right), c = const.$$

Работа поддержана грантом р_урал_а №07-01-96001.

How correct is a velocity model?

E. Landa

OPERA, France

evgeny.landa@univ-pau.fr

The mathematical term well-posed problem stems from a definition given by Hadamard (1902). He postulated that mathematical models of physical phenomena should have the properties that

1. A solution exists.
2. The solution is unique.
3. The solution depends continuously on the data.

Verification of these conditions often is not a trivial task. An apparently reasonable result can mistakenly create an illusion that the problem is solved. Problems that are not well-posed in the sense of Hadamard are termed ill-posed. In Hadamard's opinion, ill-posed problem have no physical sense. It is generally agreed today that many ill-posed problems have so-called wellposed extensions which are very meaningful. These extensions introduce a priori assumptions about the unknowns. If a problem is well-posed, then it stands a good chance of finding a solution on a computer using a stable algorithm. If it is not well-posed, it needs to be re-formulated before numerical treatment. Typically this involves including additional assumptions, such as smoothness of the solution. This process is known as regularization (Tikhonov, 1963). It is well-known that geophysical inverse problems are as a rule ill-posed. Nevertheless, we still need to try to develop methods for extracting information about the subsurface from geophysical data. For a long time such methods have been merely heuristic. In his book, Tarantola (1987) took the viewpoint that the most general formulation of inverse problem can be obtained by using the language of probability calculus and the popular Bayesian. According to the Bayesian approach, the data is used in inversion to constrain the a priori model, and not the opposite as when the inversion is constructed from the data and the a priori model serves as a constraint. In his commentary, Tarantola (2006) presents an even more extreme view in which 'observations cannot produce models, they can only falsify models'. In this view, derived from Popper's philosophy, the inverse problem is to be solved by generating large numbers of random models, discarding those that are disqualified by the data and keeping the others. However, while Bayes's theorem is in itself indisputable, the main problem with the Bayesian or probabilistic approach is that in practice our a priori information of the Earth's interior is very poor and solutions are limited by the well known least-squares method. If different models provide the same results with reasonable accuracy, there should be a way either to select the true model or to admit that a unique depth-velocity model cannot be obtained- even when the required characteristics of the wavefield have been accurately modeled. In fact, the most difficult point of the inverse seismic problem is how to distinguish between two "correct" models. (It is not too difficult to distinguish a correct model from an incorrect one).

In the talk will not be propose or described a new inversion algorithm or scheme. We will not compare different methods and algorithms between them as well. We will rather discuss the following questions: what the solution of inverse kinematic problem means, and which properties of the inversion it is important to understand in order to obtain a geologically meaningful solution?

Iterative methods for solving ill-posed problems with a priori information and its applications

V.V. Vasin

Institute of Mathematics and Mechanics UR RAS, 620219 Ekaterinburg GSP-384, RUSSIA
vasin@imm.uran.ru

In applied problems along with a linear or nonlinear base equation $A(u) = f$ given on a pair of Hilbert spaces U, F , we often have an additional a priori information on solution: $u \in Q$, where Q is a convex closed subset of the space U . This additional constraint $u \in Q$ represented in the form of equalities, inequalities or inclusion describe important characteristics of the solution that are connected with subtle structure and have not been revealed by the basic equation.

The usage of a priori constraints about the solution u in resolving algorithm is especially important in considering the ill-posed setting with a nonunique solution of the base equation, since such information allows one to localize the solution to be found and select one corresponding to the physical content of the problem.

So, we have to solve the system

$$Au = f, \quad u \in Q. \quad (1)$$

For this purpose we suppose to use iterative methods of the form [1,2]

$$u^{k+1} = P(V(u^k)) \text{ or } u^{k+1} = \lambda P(u^k) + (1 - \lambda)V(u^k) \quad 0 < \lambda < 1; \quad (2)$$

where V is a M - pseudo-contractive (M-Fejer) mapping responsible for approximation of the solution set of equation (1), and P is a Q - pseudo-contractive (Q-Fejer) mapping responsible for constraints (2).

In this talk we construct a family of pseudo-contractive (Fejer) mappings V, P , formulate the convergence theorems, investigate regularizing properties and analyze the efficiency of the iterative algorithms (2) for the real inverse problems, which arise in structure investigation of materials, image reconstruction, radiolocation of ionosphere, thermic sounding of atmosphere, testing wellbore/reservoir system, acoustic, and exploring geophysics.

References

1. *Vasin V.V. and Ageev A.L.* Ill-Posed Problems with A Priori Information. VSP, Utrecht, The Netherland, 1995.
2. *Vasin V.V., Eremin I.I.* Operators and Iterative Processes of Fejer type. NIZ "RCD Moscow - Izhevsk, 2005 (in Russia).