

Регуляризация метода установления

А. А. Абеева

Новосибирский Государственный Университет

Пусть дано уравнение

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \quad (1)$$

Метод установления заключается в том, что в качестве приближенного решения уравнения

(1) берется некоторое значение решения дифференциального уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = -A_h^*(A_h u(t) - f_\delta) \equiv -J' u(t), \quad u(0) = u_0. \quad (2)$$

Метод установления сходится при точных исходных данных к решениям уравнения (1) и

порождает регуляризующее семейство операторов с параметром регуляризации t .

Теорема 1. *При точных исходных данных*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^0,$$

где u^0 - нормальное относительно u^0 решение уравнения (1).

Теорема 2. *Метод установления порождает регуляризующее семейство операторов, в*

котором параметром регуляризации является t .

Теорема 3. *Метод установления с выбором параметра регуляризации t_H из условия*

$$\Delta(t_H) = \psi(\Delta_H) \quad (6)$$

является регуляризующим алгоритмом, причем $\lim_{\sigma \rightarrow 0} u(t_H) = u^0$.

**Обратная задача восстановления правой части для уравнения
Буссинеска-Лява**

Б.С.Аблабеков, А.А.Касымалиева

*КГТУ им. И.РАЗЗАКОВА,
ИГД и ГТ им.У.А.АСАНАЛИЕВА
пр. Чуй, 215,
720001 Бишкек, КЫРГЫЗСТАН
E-MAIL: ABLABEKOV_63@MAIL.RU

В последнее время возрос интерес к исследованию задач, связанных с уравнениями стратифицированных жидкостей. Это обусловлено большой практической важностью этих задач: исследование мирового океана, перевозки нефти в танкерах и другие.

Одномерные и многомерные обратные задачи для уравнения Буссинеска-Лява изучались в работах [1-3].

В данной работе рассматривается задача Гурса и обратные задачи восстановления правой части в одномерном уравнении Буссинеска-Лява. Доказаны соответствующие теоремы существования решения рассматриваемых обратных задач.

В области $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u_{xx} - u] + u_{xx} = F(x,t), \quad (1)$$

рассмотрим следующие задачи:

Задача 1. Найти в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть $u_0(x), u_1(x) \in C^2([0, l])$, $\mu_1, \mu_2 \in C^2([0, T])$,

$F(x, t) \in C(\bar{\Omega}_T)$ и выполнены условия согласования (5). Тогда существует единственное решение задачи 1.

Задача 2. Пусть $F(x, t) = f(x)h(x, t) + g(x, t)$.

Найти пару функций $\{u(x, t), f(x)\}$, если решение задачи (1)-(3) при заданных функциях $u_0, u_1, \mu_1, \mu_2, h, g$ удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x, T) = u_2(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

Для исходных данных выполнены условия согласования.

$$u_0(0) = \mu_1(0), \quad u_1(0) = \mu_1'(0), \quad u_0'(0) = \mu_2(0), \quad u_1'(0) = \mu_2'(0). \quad (5)$$

Для обратной задачи 2 справедлива

Теорема 2. Пусть для функций u_0, u_1, μ_1, μ_2 выполнены условия

теоремы 1. Кроме того $h, g \in C^1(\bar{\Omega}_T)$, $u_2(x) \in C^2([0, l])$ и

$u_2(0) = \mu_1(T)$, $u_2'(0) = \mu_2(T)$. Тогда существует единственное решение задачи 2.

Задача 3. Пусть $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$. Найти пару функций $\{u(x, t), f(t)\}$ из условий

$$\frac{\partial^2}{\partial^2} [u_{xx} - u] + u_{xx} = f(t)h(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

$$u(x_0, t) = \mu_3(x), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leq t \leq l.$$

Задача 4. Пусть $F(x, t) = f(t)h(x, t) + g(x, t)$. Найти пару функций $\{u(x, t), f(t)\}$ из условий

$$\frac{\partial^2}{\partial^2} [u_{xx} - u] + u_{xx} = f(t)h(x, t) + g(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

$$\int_0^l u(x,t)w(x,t)dx = \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Аналогичным образом можно исследовать обратные задачи 3 и обратные задачи восстановления правой части по интегральным переопределениям.

Литература

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики: Бишкек. 1997.-184с.
2. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 180с.
3. Аблабеков Б.С. Интегральные уравнения Вольтерра и их приложения. Бишкек. 2009.-148с.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Б.С.Аблабеков, А.К.Курманбаева

*КГТУ им. И.РАЗЗАКОВА,
ИГД и ГТ им.У.А.АСАНАЛИЕВА
пр. Чуй, 215,
720001 Бишкек, КЫРГЫЗСТАН
E-MAIL: ABLABEKOV_63@MAIL.RU

В области $Q_T = \{(x,t) | 0 < x < h, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим уравнение вязкоупругости

$$u_{tt} = a(t)(u_{xxt} + u_{xx}) + f(x,t) \quad (1)$$

с неизвестным коэффициентом $a(t)$, начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq h, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и условием переопределения вида

$$a(t)(u_{xt} + u_x)(0,t) = \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Требуется определить пары функций $\{u(x,t), a(t)\}$.

Ранее аналогичные задачи для параболических уравнений были изучены в работе [1].

Определение. Решением обратной задачи (1)-(4) будем называть пару функций $\{u(x,t), a(t)\}$ если она удовлетворяют следующим условиям:

1) $u(x,t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, 2) $a(t) \in C[0,T]$,

3) условие (1)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Для прямой задачи (1)-(3) имеет место

Теорема 1. Пусть выполняется следующие условия

1) $\varphi \in C^2[0,h]$, $\psi \in C^1[0,h]$, $\mu_i(t) \in C^2[0,T]$, $i = 1,2$,
 $f \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$,

2) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\psi(0) = \mu_1'(0)$, $\psi(h) = \mu_2'(0)$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(3).

Для доказательства существования и единственности решения задачи (1)-(3) введем новую неизвестную функцию $\mathcal{G} = u_t + u$, и сведем ее к задаче определения функции $\mathcal{G}(x, t)$ из условий

$$\mathcal{G}_t - a(t)\mathcal{G}_{xx} - \mathcal{G} - \int_0^t e^{-(t-\tau)} \mathcal{G}(x, \tau) d\tau = f(x, t) - e^{-t} \varphi(x) \quad (5)$$

$$\mathcal{G}(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (6)$$

$$\mathcal{G}(0, t) = \mu_1'(t) + \mu_1(t), \quad \mathcal{G}(h, t) = \mu_2'(t) + \mu_2(t) \quad (7)$$

Обозначим теперь через $G_n(x, t, \xi, \tau)$, $n = 1, 2$ функцию Грина первой и второй краевой задачи для уравнения теплопроводности $u_t - a(t)u_{xx}$:

$$G_n(x, t, \xi, \tau) = N(x - \xi, t - \tau) + (-1)^n N(x + \xi, t - \tau),$$

$$N(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(x + 2m, t), \quad K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))}\right),$$

$$\text{где } \theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Тогда решение задачи (5)-(7) записываем с помощью функции Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, t) = & \int_0^h G_1(x, t, \xi, 0) [\varphi(\xi) + \psi(\xi)] d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x, t, 0, \tau) a(\tau) (\mu_1'(\tau) + \mu_1(\tau)) d\tau - \\ & - \int_0^t G_{1\xi}(x, t, h, \tau) a(\tau) (\mu_2'(\tau) + \mu_2(\tau)) d\tau + \int_0^t \int_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) \left[\mathcal{G}(\xi, \tau) + \int_0^\tau e^{-(\tau-\tau_1)} \mathcal{G}(\xi, \tau) d\tau_1 \right] d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^h G_1(x, t, \xi, \tau) [f(\xi, \tau) - e^{-\tau} \varphi(\xi)] d\xi d\tau \end{aligned}$$

или

$$\mathcal{G}(x, t) = \int_0^t \int_0^h K_1(x, t, \xi, \tau) \mathcal{G}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t K_2(x, t, \tau) a(\tau) d\tau + F(x, t), \quad (8)$$

где

$$K_1(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t G_1(x, t, \xi, \tau_1) e^{-(\tau_1-\tau)} d\tau_1 + G_1(x, t, \xi, \tau),$$

$$K_2(x, t, \tau) = G_{1\xi}(x, t, 0, \tau) (\mu_1'(\tau) + \mu_1(\tau)) - G_{1\xi}(x, t, h, \tau) (\mu_2'(\tau) + \mu_2(\tau)),$$

$$F(x,t) = \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)(\varphi(\xi) + \psi(\xi))d\xi + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)[f(\xi,\tau) - e^{-\tau}\varphi(\xi)]d\xi d\tau.$$

Уравнение (8) представляет собой интегральное уравнение типа Вольтера второго рода относительно функции $\mathcal{G}(x,t)$. Так как

$$G_1(x,t,\xi,\tau) = (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} H(x,t,\xi,\tau)$$

где $H(x,t,\xi,\tau)$ - достаточно гладкая функция, то отсюда следует однозначная разрешимость интегрального уравнения (8), и, следовательно, прямая задача (5)-(8) имеет единственное решение.

Далее пользуясь методикой работы [2], доказывается теорема 1.

Литература

1. Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В. Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении// Сиб.мат.журн. 2002. Т.43., №2. С.406-413.
- 2.Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек, Илим. – 2001.- 183с.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА: НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ¹

А.С. Апарцин, Е.В. Расторгуева

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

E-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru, zhuzhu1987@gmail.com

1. Полином Вольтерра N -й степени $P_N(x(t))$, отображающий (скалярный) входной сигнал $x(t)$ нелинейной динамической системы типа чёрного ящика в (скалярный) выходной сигнал $y(t)$, имеет вид

$$y(t) = P_N(x(t)) \equiv \sum_{m=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(s_i) ds_i, t \in [0, T], \quad (1)$$

где непрерывные по совокупности переменных и симметричные по s_1, \dots, s_m функции K_m (ядра Вольтерра) подлежат идентификации по откликам системы на те или иные наборы тестовых входных возмущений.

Пусть $K_m, m = \overline{1, N}$, уже идентифицированы и ставится задача нахождения такого $x(t)$, которому отвечает заданный выход $y(t)$. Тогда при $N = 1$ (1) есть стандартное линейное относительно $x(t)$ интегральное уравнение Вольтерра I рода. При $N > 1$ естественно трактовать (1) как полиномиальное (N -степенное) уравнение Вольтерра I рода. Теория таких уравнений далека от завершения. Не существует пока даже их общепринятого названия. Ещё менее изучен векторный случай, когда $x(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t)), y(t) = (y_1(t), \dots, y_l(t))$,

$$y_j(t) = \sum_{\nu=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\nu \leq k} \int_0^t \dots \int_0^t K_{j, i_1 \dots i_\nu}(t, s_1, \dots, s_\nu) \prod_{\mu=1}^{\nu} x_{i_\mu}(s_\mu) ds_\mu, t \in [0, T], j = \overline{1, l}.$$

Некоторые результаты, относящиеся к скалярному случаю, приведены в обзорной статье [1].

2. Принципиальное отличие (1) при $N > 1$ от линейного уравнения – локальность его (единственного) вещественного непрерывного решения. В линейном случае хорошо известным приёмом доказательства существования решения в $C_{[0, T]}$ при любом $T < \infty$ является переход к эквивалентной норме

$$\|x(t)\|_* = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-Lt} |x(t)|, L > 0. \quad (2)$$

Оказывается, аналогом (2) в нелинейном случае является эквивалентная норма

$$\|x(t)\|_{**} = \max_{0 \leq t \leq T} \frac{\|x(t)\|}{\dot{\theta}(t)}, \quad (3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00377

где $\bar{\theta}(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(1 + L\theta(t))^N}{1 - Q_{N-1}(\theta(t))}, \theta(0) = 0, t \in [0, T]. \quad (4)$$

В (4) коэффициенты полинома $(N - 1)$ -ой степени $Q_{N-1}(\theta)$ вместе с константой L являются соответствующими характеристиками ядер $K_m, m = \overline{1, N}$. При $N = 1$ (4) переходит в задачу Коши $\dot{\theta}(t) = 1 + L\theta(t), \theta(0) = 0$, а (3) – в (2). Вопросы представления $\bar{\theta}(t)$ в аналитическом виде через вторую вещественную ветвь функции Ламберта рассмотрены в [2]. Для $N = 2$ некоторые частные случаи использования (3) при применении принципа сжимающих отображений исследовались в [3].

3. В [4] отмечен эффект возникновения погранслоя ошибок численного решения (1) при $N = 2$ методом квадратур. Расчёты модельных примеров [5] показывают, что, как правило, момент начала расходимости численного метода связан с нарушением ограничения на T , возникающего из принципа сжимающих отображений, причём в случае квадратуры средних прямоугольников область сходимости по сравнению с квадратурой правых прямоугольников увеличивается примерно в два раза.

Литература

1. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы / А.С. Апарцин // Известия Иркутского государственного университета. «Серия Математика». Специальный выпуск, посвященный столетию со дня рождения проф. В.В. Васильева. – Иркутск: Госуниверситет, 2007. – №1. – С.13-41.
2. Апарцин А.С., Спиряев В.А. О неулучшаемых ламберт-оценках решений одного класса нелинейных интегральных неравенств / А.С. Апарцин, В.А. Спиряев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т.16, №2. – С.3-12.
3. Апарцин А.С. Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Известия Иркутского государственного университета. «Серия Математика». – Иркутск: Госуниверситет, 2010. – Т.3, №1. – С.19-29.
4. Апарцин А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // ЖВМиМФ. – 2007. – Т.47, №8. – С.1380 - 1388.
5. Расторгуева Е.В. Теоретическое и численное исследование тестовых полиномиальных уравнений Вольтерра I рода / Е.В. Расторгуева // Материалы XI конференции-конкурса научной молодежи «Системные исследования в энергетике» 22 мар. - 4 апр. 2010 г. – Иркутск, 2010 (в печати).

О сходимости трехслойной разностной схемы к решению абстрактной некорректной задачи Коши

Г.Б.Баканов, М.А.Султанов

*Кзылординский государственный университет им. Коркыт-Ата,
Южноказахстанский государственный университет им. М.Ауезова*

e-mail.: Gbakan59@mail.ru, muratsul@rambler.ru

(Казахстан)

В работе рассмотрено сходимость трехслойной возмущенной разностной схемы к точному решению абстрактной некорректной задачи Коши.

Пусть v - решение следующей задачи:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = Av + Kv, \quad (1)$$

$$v(0) = v_0, \quad v_t(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $A = A_1 + A_2$, $A_1 \geq 0$, $A_2 \leq 0$ - линейные, неограниченные, не зависящие от t операторы с областью определения $D(A) \subseteq H$, H - гильбертово пространство; оператор K действует из пространства $L_2([0, T]; H)$ в $L_2([0, T]; H)$; функция $v: [0, T] \rightarrow H$ четырежды непрерывно дифференцируема в сильном смысле, т.е. $v \in C^4([0, T]; H)$, причем $v(t) \in D(A)$ для всех $t \in [0, T]$. Поставим в соответствие задаче (1), (2) двухпараметрическое семейство разностных схем:

$$u_{\bar{t}} - A_{1h}(\sigma \bar{t} + (1 - 2\sigma)u + \sigma u) - A_{2h}(q \bar{t} + (1 - 2q)u + qu) - \tilde{K}u = 0, \quad (3)$$

$$u_0 = g, \quad u_1 = u_0. \quad (4)$$

Предполагается, что $A_{1h}, A_{2h} \in L(H_h)$, $\tilde{K} \in L(l_2(0, N; H_h))$, $A_{1h} = A_{1h}^* \geq 0$, $A_{2h} = A_{2h}^* \leq 0$, операторы A_{1h} , A_{2h} , \tilde{K} а определенном ниже смысле аппроксимируют операторы A_1 , A_2 , K . В свою очередь гильбертово пространство H_h , зависящее от параметра $h > 0$, аппроксимирует пространство H . Для конкретизации понятия аппроксимации предположим, что существует семейство линейных операторов:

$$P_h: V \rightarrow H_h,$$

определенных на плотном в H линейном многообразии $V \supseteq D(A) \cup R(A)$, где $R(A) = AD(A)$ - область значений оператора A таких, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|P_h v\| = \|v\|_H, \quad \forall v \in H.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ - норма в H_h .

Рассмотрим вопрос о сходимости u к v , понимая под этим, что

$$\|u - P_h v\|_{l_2(1, N-1; H_h)} \rightarrow 0,$$

при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$.

Разложим пространство H_h на прямую сумму подпространств H_h^\pm , т.е. $H_h = H_h^+ \oplus H_h^-$. Пусть Q^\pm ортопроекторы пространства H_h на подпространства H_h^\pm .

Теорема. Пусть выполнены

1. Условия аппроксимации операторов A_1 , A_2 , K и начальных данных v_0 :

$$\|A_{jh} P_h v - P_h A_j v\| \leq c_1 h^p, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}P_h v - P_h K v\|_{l_2(1,N;H_h)} &\leq c_1(h^{p_1} + \tau^d), \\ \|g - P_h v_0\| &\leq \delta. \end{aligned}$$

2. Условия устойчивости:

$$\begin{aligned} E - \tau^2 \sigma A_1 - \tau^2 q A_2 &\geq \delta_0 E, \quad \delta_0 > 0, \\ 4E + \tau^2(1-4q)A_2 &\geq 0, \quad (1-4\sigma)A_1 \geq 0, \\ E + \tau^2(1-\sigma)A_1 + \tau^2(1-q)A_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3. Условия гладкости решения задачи (1), (2):

$$\|A_{jh} P_h v_{ii}\| \leq c_1, \quad \|P_h v^{(4)}\| \leq c_1, \quad \|\tilde{K}P_h v_i\|_{l_2(1,N;H_h)} \leq c_1, \quad j=1,2, \quad l_1(v) \leq m.$$

Здесь

$$l_1(v) = \|A_h Q^+ P_h v_{N-1}\| + \|A_{1h}^{1/2} Q^+ P_h v_{N-1}\| + \|Q^+ P_h v_N\| + \|A_{1h}^{1/2} Q^+ P_h v_N\| + \|Q^+ P_h v_{iN}\| + \|A_{1h}^{1/2} Q^+ P_h v_{iN}\|.$$

4. Условия согласования параметров:

$$l_1(u) \cdot \delta \leq \Psi(h, \sigma, q) \cdot \delta \leq c_2.$$

Тогда имеет место оценка сходимости решения u разностной схемы (3), (4) к точному решению v задачи (1), (2)

$$\|u - P_h v\|_{l_2(1,N-1;H_h)} \leq \omega_{m+c_2}(\tau + \tau^2 + \tau^d + h^p + h^{p_1} + \delta), \quad \delta, \tau, h \rightarrow 0,$$

где $\omega_m(\delta) = O(1/\ln(1/\delta))^{1/2}$.

Доказательство теоремы основано на оценке [1] устойчивости разностной схемы

$$Pu \equiv u_{ii} - A_{1h}(\sigma \overset{\vee}{u} + (1-2\sigma)u + \sigma \overset{\vee}{u}) - A_{2h}(q \overset{\vee}{u} + (1-2q)u + q \overset{\vee}{u}) = f$$

и с применением его к разностной схеме $Qu \equiv Pu - K \overset{\vee}{u} = f$, полученной в результате возмущения разностной схемы оператором K , $K \in L(l_2(0, N; H))$.

Литература

1. Султанов М.А., Баканов Г.Б. Об устойчивости трехслойной разностной схемы с двумя весами. // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, №2 (61), 37-51с, 2009.

А. Х. Бегматов

СЛАБО И СИЛЬНО НЕУСТОЙЧИВЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Новосибирский государственный технический университет,

Новосибирский государственный университет

E-mail: BegAH@ngs.ru

Интегральная геометрия занимается изучением преобразований, ставящих в соответствие функциям на многообразии X их интегралы по подмногообразиям некоторого семейства M . Эта область современной математики тесно связана с теорией дифференциальных уравнений и математической физикой, геометрическим анализом и имеет многочисленные приложения при математическом исследовании проблем сейсморазведки, медицинской и промышленной томографии, интерпретации данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, при решении обратных задач астрофизики и гидроакустики.

Задача восстановления функции по известным интегралам от нее вдоль всевозможных гиперплоскостей в евклидовом пространстве рассматривалась в классической работе Радона. Им были получены формулы обращения для четно- и нечетномерных пространств, разработаны методы решения задачи, а также было указано на возможность рассмотрения различных аналогов этого интегрального преобразования.

Первые существенные результаты для одномерной обратной кинематической задачи сеймики были получены М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым. Благодаря этой работе было привлечено внимание к случаям, когда интегрирование ведется по многообразиям более сложной геометрической структуры.

В настоящем докладе исследуются вопросы единственности решения нового широкого класса задач интегральной геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве. Теорема единственности доказана при достаточно общих предположениях о кривых (поверхностях), по которым ведется интегрирование.

Далее изучаются классы слабо некорректных задач интегральной геометрии на кривых и поверхностях, в том числе с особенностями в вершине и с разрывными весовыми функциями. Получены теоремы существования и единственности решения, явные формулы обращения и оценки устойчивости в пространствах Соболева. Приводятся также теоремы существования решения.

Наконец, рассматривается задача восстановления функции, если известны

интегралы от нее по одному семейству прямых в трехмерном пространстве, являющихся образующими конусов. Интегральные преобразования подобного вида называются лучевыми преобразованиями и имеют широкие приложения при исследовании задач компьютерной томографии. Задача, которая изучается в настоящей работе, связана со вспомогательными задачами аналитического продолжения и является сильно некорректной. Сформулирована и доказана теорема единственности решения задачи в классе непрерывных финитных функций. Получена оценка условной устойчивости решения задачи логарифмического вида.

Приведем формулировки основных задач.

1. Рассмотрим семейство кривых $\{\Gamma(x)\}$ в полосе L , кривая семейства $\Gamma(x)$ определяется уравнением $\xi_2 = \psi(x, \xi_1)$. Рассмотрим задачу восстановления функции двух переменных $u(x)$, если известны интегралы от нее с заданной весовой функцией $p(x, \xi_1)$ на семействе кривых $\{\Gamma(x)\}$, т. е. задачу решения операторного уравнения относительно функции $u(x)$:

$$\int_{\Gamma(x)} p(x, \xi_1) u(\xi) d\xi_1 = f(x). \quad (1)$$

Уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_{x_1-h_1}^{x_1+h_2} p(x, \xi_1) u(\xi) d\xi_1 = f(x),$$

где $h_1 = h_1(x)$, $h_2 = h_2(x)$.

От параметризации кривой семейства $\Gamma(x)$ с помощью координат x_1, x_2 ее вершины можно перейти к параметризации с помощью трех параметров x_1^0, x_2^0, t_1 . Аналогично $g(x, \xi_1) = g(\varphi_1, \varphi_2, \xi_1) = g_1(x^0, t_1, \xi_1)$, где g_1 – гладкая функция.

2. Обозначим через Ω полосу

$$\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}^1, y \in (0, l), l < \infty\}.$$

Рассмотрим операторные уравнения относительно функции $u(x, y)$:

$$\int_0^y [u(x+h, \eta) + u(x-h, \eta)] d\eta = f_0(x, y) \quad (2)$$

и

$$\int_0^y [u(x+h, \eta) + u(x-h, \eta)] d\eta + \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \quad (3)$$

В докладе исследуются вопросы единственности и устойчивости решения уравнений (2) и (3) при различных значениях параметра h , определяющего форму кривой, а также при различных предположениях о весовой функции возмущения.

3. Обозначим через $K(x)$ семейство двуполостных конусов с вершинами в точках (x) :

$$K(x) = \left\{ \xi \in \mathbf{R}^3 : |x_3 - \xi_3| = |\bar{x} - \bar{\xi}| \right\}.$$

Рассмотрим операторное уравнение относительно функции $u(x)$

$$\int_{\mathbf{R}^1} u(x_1 + s \cos \alpha, x_2 + s \sin \alpha, x_3 + s) ds = f(x, \alpha). \quad (5)$$

Функция $f(\cdot)$ предполагается известной для всех $(x, \alpha) \in Q$.

Таким образом, мы рассматриваем задачу интегральной геометрии на семействе прямых, являющихся образующими двуполостных конусов $K(x)$. Искомая функция $u(\cdot)$ является функцией трех переменных, а правая часть уравнения (5) зависит от четырех параметров x_1, x_2, x_3 и α . Тем не менее задача решения уравнения (17) не является переопределенной, поскольку его правая часть удовлетворяет уравнению с частными производными первого порядка.

Более того, имеет место утверждение о единственности решения уравнения (5).

Представлена оценка условной устойчивости решения задачи интегральной геометрии (5) логарифмического типа.

Задача интегральной геометрии с возмущением на семействе полуэллипсов

Акб. Х. Бегматов, Н.Н. Петрова

Новосибирский государственный технический университет,

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача восстановления функции в полосе, если известны суммы интегралов от нее по полуэллипсам, опирающимся на ось $x_2 = 0$, и по областям, ограниченными полуэллипсами и осью $x_2 = 0$, с заданной весовой функцией. В докладе формулируется теорема единственности решения этой задачи интегральной геометрии в случае, когда возмущение тождественно равно 0. Получено аналитическое представление для образа Фурье по первой переменной от искомой функции, из которого вытекает утверждение о сильной некорректности решения задачи. Далее приводится теорема единственности решения задачи интегральной геометрии с возмущением при достаточно общих предположениях о весовой функции возмущения.

Введем обозначения: $\xi = (\xi_1, \xi_2)$; $x = (x_1, x_2)$; $S = \{x : 0 < x_2 < h\}$; $\bar{S} = \{x : 0 \leq x_2 \leq h\}$; $\mathcal{A} = \{x : |x_1| \leq a_1, a_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq h\}$; $\{\mathcal{P}(x)\}$ — семейство кривых эллиптического типа в полосе S , каждая из которых однозначно параметризуется с помощью своей вершины x (наиболее удаленной от оси OX_1 точки кривой):

$$\mathcal{P}(x) = \left\{ \frac{(\xi_1 - x_1)^2}{a^2} + \xi_2^2 = x_2^2, 0 \leq \xi_2 \leq h, a > 0 \right\};$$

$\Pi(x)$ — область, ограниченная кривой $\mathcal{P}(x)$ и осью $\xi_2 = 0$. Через $\widehat{V}(\lambda, \cdot)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $V(x_1, \cdot)$ по переменной x_1 .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ:

Найти функцию $u(\xi_1, \xi_2)$ из уравнения

$$\int_{\mathcal{P}(x)} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 + \int_{\Pi(x)} W(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad (1)$$

где W - заданная весовая функция.

Первое слагаемое в левой части уравнения (1) есть оператор интегральной геометрии на семействе кривых $\{\mathcal{P}(x)\}$, второе слагаемое представляет собой возмущение оператора интегральной геометрии.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ известна для всех $x \in \bar{S}$, $W(x, \xi) \equiv 0$. Тогда решение задачи (1) в классе $C_0^2(\mathcal{A})$ единственно и имеет место представление:

$$\hat{u}(\lambda, x_2) = \frac{1}{a\pi x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{\xi_2 \operatorname{ch}(a\lambda\sqrt{x_2^2 - \xi_2^2})}{\sqrt{x_2^2 - \xi_2^2}} \hat{f}(\lambda, \xi_2) d\xi_2. \quad (2)$$

Пусть функция $f(x)$ известна для всех $x \in \bar{S}$, весовая функция $W(x, \xi)$ имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными на кривой $\mathcal{P}(x)$.

Рассмотрим функцию

$$q(x, y) = a \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_2} \left[u(x_1 - a\sqrt{1 - y\rho}, \xi_2) + u(x_1 + a\sqrt{1 - y\rho}, \xi_2) \right] \frac{\xi_2}{\rho} d\xi_2,$$

где $\rho = \sqrt{x_2^2 - \xi_2^2}$, $y \in [0, 1]$.

Функции $q(x, y)$ и $q_0(x)$, как вытекает из их определения, непосредственно связаны с оператором интегральной геометрии и его возмущением. Исследование свойств этих функций, а также их образов Фурье сс специальными весовыми функциями позволяют сформулировать основной результат работы — теорему единственности

решения задачи интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ известна для всех $x \in \bar{S}$, весовая функция $W(x, \xi)$ имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими производными на кривой $\mathcal{P}(x)$.

Тогда решение уравнения (1) в классе $C_0^4(\mathcal{A})$ единственно.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕССА АЛЬТЕРНИРОВАНИЯ ПО ШВАРЦУ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Белоносов М. А.

Институт Нефтегазовой Геологии и Геофизики СО РАН
belon@mail.ru

Численное моделирование сейсмических волновых полей для реалистичных трёхмерных моделей невозможно без привлечения современных вычислительных систем с параллельной архитектурой. Наиболее распространённым способом организации таких вычислений является декомпозиция расчётной области на элементарные подобласти с последующим использованием явных конечно-разностных схем. Обладая неоспоримыми преимуществами, такими как простота и эффективность реализации, этот подход имеет и ряд недостатков, к которым относится необходимость выполнения обменов между соседними процессорными элементами на каждом шаге по времени, выбор шага дискретизации по времени исходя из максимальной скорости распространения волн, а шага дискретизации по пространству, наоборот, исходя из минимального её значения. Тем самым моделирование волновых полей в средах с резкими контрастами становится весьма ресурсоёмким.

Необходимость повышения уровня извлечения углеводородов из сложенностроенных трещиновато-кавернозных карбонатных коллекторов Восточной Сибири привела к постановке нового класса задач - моделирования процессов возникновения и распространения сейсмических волн, рассеянных на микронеоднородностях в таких коллекторах. Естественно, что для их описания требуется чрезвычайно мелкая сетка, как по пространству, так и по времени. Использование такой сетки во всём пространстве выдвигает абсолютно нереалистичные требования на вычислительные ресурсы. Альтернативой этому являются сетки с локальным измельчением по времени и пространству. Надо отметить, что реализация такого подхода для явных конечно-разностных схем весьма сложна и связана со значительными накладными расходами (см. например [1]). В то же время, при реализации метода декомпозиции и последующего применения метода альтернирования по Шварцу [2] такое локальное измельчение может быть выполнено именно в отдельно взятой элементарной подобласти, лежащей на специально выделенном для этого процессорном элементе.

Преодоление проблем, описанных выше возможно, если решать за-

дачу с отделением времени. Именно реализации этого подхода посвящена настоящая работа. При этом отделение по времени выполняется посредством интегрального преобразования Лагерра [3] и мы имеем дело с отрицательно определённым дифференциальным оператором. Это свойство очень существенно, поскольку благодаря ему, возможно организовать эффективное распараллеливание, основываясь на методе альтернирования по Шварцу.

Подход реализован в случае двумерной системы уравнений теории упругости для вычислительных систем с параллельной архитектурой. Приводятся результаты численных расчётов для реалистичной модели одного из районов Северного моря, которые показывают высокую эффективность предлагаемого алгоритма. Исследована зависимость числа итераций метода альтернирования по Шварцу в зависимости от количества подобластей. Также показывается хорошая эффективность и масштабируемость разработанного программного продукта.

Работа была выполнена совместно с Московским Научно-исследовательским центром компании Schlumberger и частично при поддержке грантов РФФИ 08-05-0265, 10-01-92604, 10-05-00233, 10-05-00337.

Литература.

1. Гилбо Ж., Ланда Е., Решетова Г.В., Хайдуков В.Г., Чеверда В.А. Численное моделирование сейсмических волновых полей в двумерно-неоднородных упругих разномасштабных средах (карстовые включения) // Технологии сейсморазведки. - 2008. - №3. - с.19-28.
2. Chan T. and Mathew T.P. Domain decomposition // Acta Numerica, 1994, v.3, p.61-143.
3. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G. Application of the Laguerre Integral Transforms for solving Dynamic Seismic Problems // Bull. of the Novosibirsk Computing Center, Series: Mathematical Modeling in Geophys., 1998, №5, p.71-92.

Конечно-разностный метод решения обратной задачи для P_5 - приближения кинетического уравнения переноса.

Бобоев К. С

Новосибирский Государственный Архитектурно Строительный университет (СИБСТРИН), Россия, Новосибирск, Бобоев К.С.

boboev@mail.ru

Рассмотрим кинетическое уравнение переноса нейтронов для анизотропного рассеяния в случае плоскопараллельной геометрии ([2])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u = Su + \delta(x, t)\delta(\mu' - \mu^*), x \in R, t \in R_+$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0$$

Здесь $\mu', \mu \in (-1, 1), R_+ = \{t \in R^+ | t > 0\}$, R – множество вещественных чисел, δ -дельта-функция Дирака

$$S_u = \frac{\sigma_s(x)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(x, \mu_0) u(x, t, \mu') d\mu' d\varphi,$$

$$\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos\varphi,$$

$u(x, t, \mu)$ -плотность потока нейтронов, $\sigma(x), \sigma_s(x)$ – полное сечение и сечение рассеяния, $g(x, \mu_0)$ -индикатрисса рассеяния.

В соответствии с методом сферических гармоник ([2]), предположим, что решение $u(x, t, \mu)$ достаточно приближается конечным рядом

$$u(x, t, \mu) \approx \sum_{j=0}^5 \left(j + \frac{1}{2}\right) u_{j+1}(x, t) P_j(\mu),$$

$$u_k(x, t) = \int_{-1}^1 u(x, t, \mu) P_k(\mu) d\mu,$$

где $P_j(\mu)$ - полиномы Лежандра

Тогда для вектор - функции $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ получим симметрическую t -гиперболическую систему уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial z} + A\right) V = \Phi \delta(z, t), t \in R_+$$

$$V|_{t < 0} \equiv 0,$$

где $M = \text{diag}(1, -1, \alpha, -\alpha, \beta, -\beta)$ и α, β – корни полинома Лежандра P_6 , матрицы A, Φ также имеют специальный вид

Обратная задача заключается в определении функции V, σ и σ_s по дополнительной информации $F(t)$ о решении прямой задачи ([3], [4], [5])

$$V|_{z=0} = F(t), t \in R_+$$

Для решения поставленной обратной задачи воспользуемся конечно-разностными соотношениями ([1], [2]), в результате чего получим систему разностных уравнений относительно решения и неизвестных коэффициентов σ, σ_s . Доказана сходимость системы разностных уравнений. Существенно используется идея обращения разностной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1971
2. Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.
3. Романов В.Г., Кабанихин С.И., Бобоев К. Обратная задача для P_n -приближения кинетического уравнения переноса. ДАН СССР т.276, №2, 1984 г.
4. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984
5. Бобоев К. С. Задача определения коэффициентов кинетического уравнения переноса в P_5 -приближении // Международная Конференция по Математическим Методам в Геофизике «ММГ» 2008; Россия, Новосибирск, Академгородок, 13-15 октября 2008

Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для волнового уравнения.¹

В.М. Гордиенко

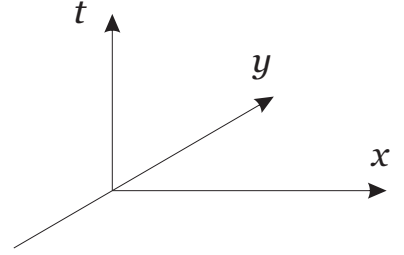
Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$pu_t - qu_x - ru_y = 0 \quad x = 0 \quad (2)$$

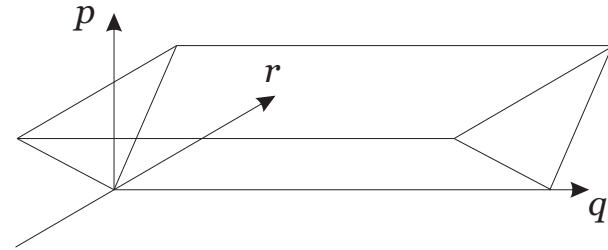
$$u = \varphi(x, y), \quad u_t = \psi(x, y) \quad t = 0 \quad (3)$$

p, q, r — вещественные числа или гладкие функции от t, y .



Равномерное условие Лопатинского выполнено

$$\iff |r| < p; \quad q > 0 \quad (4)$$



Обозначим

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ -u_x \\ -u_y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} k & l & m \\ l & k & 0 \\ m & 0 & k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} l & k & 0 \\ k & l & m \\ 0 & m & -l \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} m & 0 & k \\ 0 & -m & l \\ k & l & m \end{bmatrix};$$

k, l, m, n — вещественные числа или гладкие функции от t, x, y .

Легко проверить что, если функция u удовлетворяет соотношениям (1 – 3), то вектор-функция U удовлетворяет системе с симметричными матрицами

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} + C \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

граничному условию

$$pu_0 + qu_1 + ru_2 = 0 \quad x = 0 \quad (6)$$

и начальному условию

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ -\varphi_x \\ -\varphi_y \end{bmatrix} \quad t = 0.$$

Системе (5) является симметрической гиперболической по Фридрихсу, если матрица A положительно определена;

$$A = \begin{bmatrix} k & l & m \\ l & k & 0 \\ m & 0 & k \end{bmatrix} > 0. \quad (7)$$

¹Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарные проекты №40, №107).

Граничное условие (6) является диссипативным для системы (5), если

$$\begin{aligned} \langle BU, U \rangle \Big|_{pu_0 + qu_1 + ru_2 = 0} &\equiv \\ &\equiv \left\langle \begin{bmatrix} l & k & 0 \\ k & l & m \\ 0 & m & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\rangle \Big|_{pu_0 + qu_1 + ru_2 = 0} < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

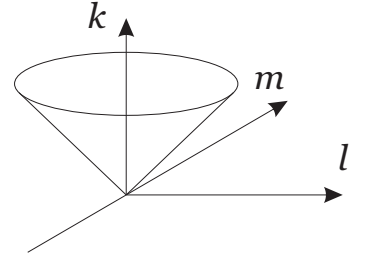
Для симметрических гиперболических систем с диссипативным граничным условием легко доказывается априорная оценка, а с её помощью и корректность смешанной задачи, см. [1].

В данной работе показано, что задача (1–3) при выполнении условия (4) может быть сведена к симметрической гиперболической системе с диссипативным граничным условием, то есть, найдутся такие числа k, l, m , при которых выполнены соотношения (7, 8), более того, описаны все такие допустимые наборы.

Подробнее.

Условие гиперболичности $A > 0$ находится легко:

$$k > 0; \quad l^2 + m^2 < k^2. \quad (9)$$



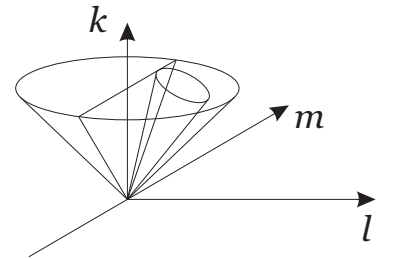
Множество (k, l, m) , удовлетворяющих условию (9) образуют конус, обозначим его \mathcal{K} .

Обозначим
$$Q = \begin{bmatrix} -r^2 & pq & pr \\ pq & r^2 - p^2 - q^2 & -qr \\ pr & -qr & -p^2 \end{bmatrix}.$$

Оказывается, множество (k, l, m) , удовлетворяющих условию диссипативности (8), тоже образуют конус, его мы обозначим \mathcal{Q} . Конус \mathcal{Q} задаётся неравенствами:

$$\left\langle Q \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} \right\rangle > 0; \quad l > 0.$$

Конус \mathcal{Q} содержится в конусе \mathcal{K} и касается плоскости $l = 0$. Если $q^2 + r^2 > p^2$ конусы \mathcal{Q} и \mathcal{K} касаются по двум лучам, если $q^2 + r^2 < p^2$ конусы \mathcal{Q} и \mathcal{K} не имеют общих точек.



Можно вычислить собственные числа и собственные векторы матрицы Q .

$$\lambda_1 = \frac{-(p^2 + q^2 + r^2) + \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)^2 + 4q^2(p^2 - r^2)}}{2}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} p + \frac{q^2 + \lambda_1}{p} \\ q \\ r \end{bmatrix};$$

$$\lambda_2 = \frac{-(p^2 + q^2 + r^2) - \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)^2 + 4q^2(p^2 - r^2)}}{2}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} p + \frac{q^2 + \lambda_2}{p} \\ q \\ r \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 = -(p^2 - r^2), \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{bmatrix}.$$

Собственный вектор \mathbf{u}_1 , отвечающий единственному положительному собственному числу, задаёт ось конуса \mathcal{Q} . Собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, определяют форму конуса \mathcal{Q} .

В [2] показано, если в смешанной задаче (5-6) для начального условия

$$U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{выполнено} \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad \text{то,}$$

$$\text{найдётся функция } u(t, x, y) \text{ такая что, } U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ -u_x \\ -u_y \end{bmatrix}$$

и $u(t, x, y)$ удовлетворяет (1–3).

Литература

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М, 1979 г.
2. Гордиенко В.М. Гиперболические системы, эквивалентные волновому уравнению // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, №1. С. 19–27.

АНАЛИЗ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ТОЧНОСТЬ ЛОКАЦИИ МИКРОСЕЙСМИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

П.А. Дергач

Научный руководитель: к.ф. - м.н. Дучков А. А.

Новосибирский государственный университет

Процесс образования трещин в горном массиве (микросейсмических источников) порождает упругие волны, которые могут быть зарегистрированы сейсмоприемниками на земной поверхности в ходе проведения микросейсмического мониторинга. Сейсмические записи могут быть использованы для решения обратной задачи определения положения источников микросейсмических событий (их локации). В данной работе проводится анализ факторов, влияющих на точность локации методом когерентного суммирования. Рассматривается случай поверхностной профильной системы наблюдений. Одной из областей применения микросейсмического мониторинга является слежение за процессом гидроразрыва газонефтяного пласта.

Для локации микросейсмических событий был использован метод эмиссионной томографии, т.е. когерентного суммирования сейсмических трасс [1]. Скоростная модель в среде считается известной. Сам метод состоит в переборе возможных положений источника по регулярной сетке (возможно проводить перебор в несколько этапов с постепенным сгущением сетки). Для каждого положения источника рассчитывается годограф прямой волны вдоль косы приемников и производится суммирование сейсмограмм вдоль этого годографа (мера когерентности сигнала). Положение источника идентифицируется с положением максимума когерентности.

Алгоритм локации был реализован программно и проведено его тестирование на синтетических данных, рассчитанных для точечных микросейсмических источников в однородной среде. Были исследованы следующие факторы, влияющих на точность локации:

1. Случайный шум в данных. В данные добавлялся нормально распределенный случайный шум (отношение сигнал/помеха $SNR=0.5, 0.1, 0,075, 0,05$). Результаты локации зашумленных данных показали, что в широком диапазоне интенсивности шума (включая $SNR=0,075$), единичные события лоцируются точно. Шум создает ложные максимумы малой амплитуды, но не смещает положение главного максимума.

2. Конфигурация системы наблюдений. Были рассмотрены разные варианты профильной системы наблюдений - изменялась длина профиля, ее расположение над источником, расстояние между приемниками. Увеличение длины наиболее заметно повышает точность локации; разбиение сейсмоприемников на две группы не оказывает заметного влияния на точность локации.

3. Вид функции когерентности данных. В стандартном подходе (см. [1]) при расчете коэффициента когерентности сеймотрассы интегрируются в длинном временном интервале. В данной работе было предложено использовать время в качестве дополнительной переменной при построении спектра когерентности. Это позволяет лоцировать индивидуальные события, а также повышает надежность локации при высоком уровне шума в данных. Такой подход также позволяет разделять события, имеющие одинаковые координаты источника, но разделенные по времени.

4. Локация нескольких источников. При расположении источников в непосредственной близости друг от друга точность локации ухудшается (главным образом, по глубине), близко расположенные максимумы как бы "отталкиваются" друг от друга, т.е. определяемое расстояние между близкими источниками эмиссии всегда будет больше истинного. Заметим, что дополнительную трудность в данном случае составляет сам процесс локации, т.к. спектр когерентности имеет несколько максимумов.

Предложенный алгоритм может быть использован при планировании работ по микросейсмическому мониторингу. Для заданного уровня шумов, предполагаемого расположения и концентрации микросейсмических источников можно определить при какой системе наблюдений возможна их локация с заданной точностью.

Работа была поддержана в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК П1178 от 03.06.10).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колесников Ю.И., Хогоев Е.А., Полозов С.В., Донцов М.В., 2004, Применение сейсмоэмиссионной томографии для локализации сейсмических источников. // Сборник докладов Международной конференции, посвященной 90-летию академика Пузырева Н.Н. «Сейсмические исследования Земной коры», г.Новосибирск, Академгородок, с.129-134.

Формулы обращения для продольных, поперечных и смешанных лучевых преобразований тензорных полей

Деревцов Е.Ю.¹

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
dert@math.nsc.ru

Наряду с интенсивным развитием численных методов и алгоритмов решения задач томографии, ставящих своей целью восстановление тех или иных функций, описывающих внутренние свойства объекта, в 70–90 гг. прошлого столетия появились работы, в которых приведены практические постановки, связанные с восстановлением векторных характеристик сред по известным данным томографического типа. В настоящее время направление в томографии, ориентированное на исследования векторных и тензорных характеристик сред неразрушающими методами, интенсивно развивается, а области его приложений очень широки. Это исследование потоков жидкости или газа; физический эксперимент и астрофизика; изучение анизотропных свойств промышленных материалов и земных пород; медицинские и биологические приложения.

Задача томографии (интегральной геометрии) состоит в определении скалярного, векторного или тензорного поля по его интегральным преобразованиям. Хорошо известно, что преобразование Радона, действующее на функции, имеет тривиальное ядро. Следовательно, этот оператор обратим для достаточно широкого класса функций. В то же время операторы лучевых преобразования, действующие на симметричные тензорные поля, обладают ненулевыми ядрами. Так, в случае векторных полей ядро оператора продольного лучевого преобразования состоит из потенциальных полей; ядром же поперечного лучевого преобразования является множество соленоидальных полей. Принимая во внимание разложение векторного поля на потенциальную и соленоидальную части [1–2], приходим к выводу, что по известному продольному лучевому преобразованию векторного поля можно однозначно восстановить лишь его соленоидальную часть. Если же известно поперечное лучевое преобразование поля, то однозначно восстановить можно лишь его потенциальную часть.

Общая теорема разложения симметричного m -тензорного поля на соленоидальную и потенциальную части получена в [3] в предположениях задания поля на римановом многообразии размерности n . Показано, что по продольному лучевому преобразованию можно восстановить лишь соленоидальную часть поля. При этом, если $m \geq 2$, даже в случае $n = 2$ и евклидовой метрики оставался открытым вопрос, можно ли восстановить потенциальную часть и если можно, то по какой информации. Оказывается, тесная связь между ядрами различных типов лучевых преобразований и разложением векторного поля сохраняется и в случае симметричных m -тензорных полей. При этом увеличивается количество различных типов лучевых преобразований, совпадающее с количеством членов в разложении тензорного поля. Найденное детальное разложение послужило основой и для получения формул обращения для различных типов лучевых преобразований симметричных тензорных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*. М.: Из-во Академии наук СССР, 1936, 426 с.
2. Weyl H. *The method of orthogonal projection in potential theory*. Duke Math. J., 1940, No. 7, p. 411–444.
3. Шарафутдинов В. А. *Интегральная геометрия тензорных полей*. Новосибирск: Наука, 1993, 233 с.

¹Работа осуществлена при частичной поддержке Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН (Проект совместных фундаментальных исследований СО РАН и УрО РАН № 14)

Ограничение расчётной области с помощью M-PML: устойчивость и уровень артефактов

Дмитриев М.Н., Лисица В.В.

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

В настоящее время наиболее распространенным и эффективным инструментом изучения волновых процессов является прямое численное моделирование. В задачах геофизики большой практический интерес представляет расчет волновых полей в трехмерно-неоднородных анизотропных средах. Моделирование таких волновых процессов зачастую проводится в некоторой целевой подобласти неограниченной области (пространства, полупространства). По этой причине возникает необходимость введения искусственных слабоотражающих граничных условий для ограничения расчетной области. В данной работе мы остановимся только на так называемых идеально согласованных слоях или PML (от англ. Perfectly Matched Layers). PML – специальным образом сконструированный слой, окаймляющий расчетную область и обеспечивающий затухание решения по мере его распространения в нём. Данный подход получил широкое распространение при моделировании волновых процессов в изотропных упругих средах (Collino et al. 2001). Однако как показано в работе (Becache et al. 2003) использование PML в случае анизотропных сред может приводить к неустойчивости. Мы рассматриваем модификацию PML, известную как M-PML (от англ. Multiaxial Perfectly Matched Layers). Она была предложена в работе (Meza-Fajardo et al. 2009) и основана на введении дополнительного стабилизирующего параметра. Данная модификация обеспечивает устойчивость численного решения для любого типа анизотропии при корректном выборе стабилизирующего параметра. В силу того, что M-PML относится к искусственным слабоотражающим граничным условиям, важным этапом его исследования является изучение коэффициентов отражения, возникающих при прохождении волны через границу расчетная область – PML. В настоящей работе показана линейная зависимость коэффициента отражения, как от величины стабилизирующего параметра, так и от значения демпфирующих функций. По этой причине, для минимизации отражений необходимо либо уменьшать демпинг, что приводит к увеличению вычислительных затрат (увеличению ширины поглощающего слоя), либо минимизировать значения стабилизирующего параметра. Для уменьшения вычислительных затрат формулируется необходимое условие устойчивости M-PML, позволяющее оценивать минимальные значения стабилизирующего параметра. Результаты подтверждаются серией численных экспериментов.

Работа выполнена совместно с научно-исследовательским центром компании Шлюмберже (Schlumberger Moscow Research), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты №08-05-00265, 10-05-00233.

Список литературы

1. Collino F., Tsogka C. Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media// *Geophysics*, 2001, Vol. 66, pp. 294-307.
2. Becache E., Fauqueux S., Joly P. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves// *J. Comput. Phys.*, 2003, Vol. 188, pp. 399-433.
3. Kristel C. Meza-Fajardo, Apostolos S. Papageorgiou A nonconvolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: stability analysis// *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2008, Vol. 98, pp. 1811-1836.

**Некоторые аспекты численного решения прямых и обратных задач
для системы уравнений теории упругости и уравнений Максвелла
в частотной области для горизонтально-слоистых сред**

А. Л. Карчевский

*Новосибирск, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
E-mail: karchevs@math.nsc.ru*

В докладе будут представлены численные алгоритмы для решения прямых задач для системы дифференциальных уравнений теории упругости и уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых сред любого вида анизотропии. Для решений соответствующих прямых задач будут даны аналитические выражения. Основа метода решения — послойный пересчет, основанный на решении соответствующих дифференциальных матричных уравнений Риккати. Так же будут представлены некоторые математические свойства и особенности решения обратных задач сейсмологии и геоэлектрики.

Основной материал доклада содержится в следующих работах:

1. A.L.Karchevsky. Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem. *Journal Inverse and Ill-Posed Problems*, 2002, v. 10, n. 4, p. 361-384.
2. E.Kurpinar, A.L.Karchevsky. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media. *Inverse Problems*, 2004, v.20, n.3, p.953-976.
3. A.L.Karchevsky. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers. *Journal Inverse and Ill-Posed Problems*, 2004, vol. 12, No. 5, pp. 519-634.
4. А.Л.Карчевский. Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды. *Геология и Геофизика*, 2005, т. 46, е 3, с. 339-351.
Перевод: A.L. Karchevsky. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2005, v. 46, n. 3, p. 339-351.
5. А.Л.Карчевский. Прямая динамическая задача сейсмологии для горизонтально-слоистых сред. *Сибирские Электронные Математические Известия*, 2005, т.2, с. 23-61.
pdf-файл: <http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>
6. А.Л.Карчевский. Анализ решения обратной динамической задачи сейсмологии для горизонтально-слоистой анизотропной среды. *Геология и Геофизика*, 2006, т. 47, е 11, с. 1170-1184.
Перевод: A.L. Karchevsky, Analysis of solving of the inverse dynamical problem of seismics for horizontally stratified anisotropic media, *Russian Geology and Geophysics*, 2006, v. 47, n 11, p. 1150-1164.
7. А.Л.Карчевский, Алгоритм восстановления упругих постоянных анизотропного слоя, находящегося в изотропной горизонтально-слоистой среде. *Сибирские Электронные Математические Известия*, 2007, т. 4, с. 20-51. pdf-файл: <http://semr.math.nsc.ru/v4/p20-51.pdf>
8. А.Л.Карчевский, Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред. *Геология и Геофизика*, 2007, т. 48, е 8, с. 889-898.
Перевод: A.L. Karchevsky, A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media. *Russian Geology and Geophysics*, 2007, v. 48, n. 8, p. 689-695
9. E.Kurpinar, A.L.Karchevsky. Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer. *Applicable Analysis*, 2008, v. 87, Issue 10 and 11, p. 1179-1212.
10. A.L.Karchevsky. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2009, v. 17, n. 4, p. 385-402.
11. М.А.Пудова, И.Н.Ельцов, А.Л.Карчевский. Оценка возможности одновременного определения удельной электропроводности и диэлектрической проницаемости разреза скважины по данным ВИКИЗ, *Каротажник*, 2010, т. 194, с.83-98.
12. A.L.Karchevsky, Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2010, v. 18 (to appear)

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00312 и 09-01-00746.

Адаптивный метод решения обратных задач геофизики: постановка, метод решения, опыт применения

Кочнев В.А. д.т.н., ИВМ СО РАН

Многие обратные задачи геофизики сводятся к решению алгебраических систем (линейных или нелинейных) уравнений, в которых неизвестными являются параметры изучаемой модели среды. Например, для слоистых сред, которые чаще всего изучают в нефтяной геофизике, параметрами являются глубины, мощности слоев и распределение в них физических свойств, таких как скорость пробега упругих волн, плотность, проводимость, магнитная восприимчивость и других. В общем случае, предполагается, что имеется некоторая модель, характеризующаяся набором параметров. Это может быть вектор или набор векторов, матрица (2D или 3D) или набор матриц и векторов. Обозначим значения неизвестных параметров $X \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$.

Имеется математическая модель, связывающая неизвестные значения параметров с некоторым наблюдением, или преобразованным результатом наблюдения $U\{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n\}$, представленная в виде системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений

$$U=AX \text{ или } U=f(X)$$

Предполагается, что известны начальные приближения параметров модели X_0 и погрешности начальных приближений и погрешности данных, используемых для решения обратной задачи. Такая постановка называется статистической и известно много методов ее решения. В частности, известна полная статистическая постановка, в которой задаются не только погрешности, но и ковариационные матрицы [10].

Из общей статистической постановки нетрудно получить рекуррентный алгоритм, позволяющий уточнять оценки параметров, переходя последовательно от уравнения к уравнению. Достоинством рекуррентного метода является то, что он за один проход всех уравнений позволяет получить искомое решение и оценку ковариационной матрицы, а следовательно, и погрешности решений. Однако он, как и многие другие методы, связанные с обращением и умножением матриц, позволяет решать системы с небольшим числом неизвестных (до 100). Это обусловлено следующими причинами.

1. С ростом числа уравнений растут ошибки, связанные с умножением матриц
2. Время счета растет пропорционально n^3 .
3. Память, необходимая для хранения ковариационных матриц, растет пропорционально n^2 .

В связи с этим возникла необходимость создания метода (в классе итерационных), который был бы лишен указанных недостатков. Толчком к этому послужила острая необходимость решения нелинейной обратной кинематической задачи сейсморазведки при многократных наблюдениях отраженных волн, в которой неизвестными являются и статические поправки (вектора) и значения нулевых времен и скоростей пробега волн (матрицы). В роли U выступают времена прихода отраженных волн, которые, естественно, содержат погрешности, не учитывать которые означает обрывать алгебраическую постановку решения на неудачу. Никакой метод, в том числе и в статистической постановке, и методы регуляризации по А.Н.Тихонову (в силу причин, указанных выше), не могли решать кинематическую задачу, в которой число неизвестных было около 10^3-10^4 , а сейчас при 3D-наблюдениях 10^5 и более. Обоснование такого итерационного (адаптивного) метода впервые сделано в 1977 г. и в 1983 г. опубликовано в работе [1]. История дальнейшего развития приведена в [2]. Алгоритмы, приведенные ниже, получены с помощью метода максимально правдоподобия.

Обсуждая особенности метода, следует заметить следующее.

Исследованный нами метод обобщает детерминированный метод проекций, известный математикам как метод Качмажа. В адаптивном методе каждое неизвестное на $k+1$ шаге решения будет равно:

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}(D_{0j})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (D_{xj})^k} (u_i - f(X^k)) \quad (1)$$

где $k=i+m(l-1)$ – номер шага уточнения (не является показателем степени),

i – порядковый номер уравнения,

l – номер итерации,

m – число уравнений в системе,

j – порядковый номер неизвестного,

n – число неизвестных,

a_{ij} – коэффициент в l -ом уравнении j -го неизвестного. В случае нелинейной системы он будет зависеть от k ,

$D_{xj}^k = (\sigma_{xj}^2)^k$ – оценка дисперсии неизвестного на k -ом шаге,

$D_u = \sigma_{uj}^2$ – оценка дисперсии ошибки измерения параметра u в i -ом уравнении.

Оценка дисперсии x_j на каждом шаге уменьшается следующим образом.

$$D_{xj}^{k+1} = D_{xj}^k \left(1 - \frac{a_{ij}^2 (D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (D_{xj})^k}\right) \quad (1)$$

Если $\sigma_{ui}^2 = 0$, а $\sigma_{xj}^2 = 1$, то получим

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}}{\sum a_{ij}^2} (u_i - f(x^k)) \quad (2)$$

А это метод проекций или метод Качмажа.

С использованием адаптивного метода удастся решать многие сложные задачи геофизики. Перечислим некоторые из них: обратные кинематические задачи отраженных и преломленных волн [1, 2], обратная динамическая задача отраженных волн в сейсморазведке [3, 4, 5], обратные задачи гравиметрии и магнитометрии [5, 6, 7, 8], обратной задачи магнитотеллурического зондирования (МТЗ) [9], а также задачи комплексной (интегральной) интерпретации геофизических данных, используемые в настоящее время для совместной интерпретации геофизических данных (сейсморазведки, гравиметрии, магнитометрии) и данных геофизического исследования скважин, полученных в Восточной Сибири. Кратко перечислим результаты, полученные с их применением.

- Решение обратной кинематической задачи метода отраженных волн. Частично об этом было сказано выше. С использованием пакета "Адапта", созданного для БЭСМ-6 Г.А.Устюжаниным на ВЦ Главтюменьгеологии, было обработано несколько площадей Хантымансийскгеофизики с наиболее сложными поверхностными условиями, осложненными неоднородной мерзлотой.
- Решение обратной кинематической задачи по волнам в первых вступлениях (разработка А.В.Антоненко) по данным Богучанской экспедиции. По полученным результатам в 1983 г. были показаны возможности уточнения модели ВЧР.
- Обратная одномерная динамическая задача. Разработка в модели Баранова-Кюнеца была реализована на первых персональных компьютерах Поляковым В.С. и использовалась при решении производственных задач по данным, полученным "Тюменьнефтегеофизикой", "Енисейгеофизикой".

- Прямая и обратная 3D задача гравиметрии, реализованная в пакете ADG-3D, используется при совместной интерпретации данных бурения, сейсморазведки, гравиметрии и магнитометрии.
- Обратная 3D задача магнитометрии, реализованная в пакете ADM-3D, используется при совместной интерпретации данных бурения и геофизики.
- Обратная одномерная задача МТЗ программно реализована О.Кашафутдиновым и решалась в опытном варианте на модельных и реальных данных. При реализации адаптивного метода обратных задач МТЗ отмечены следующие особенности, ранее не встречавшиеся в других методах:
 - прямая задача решается рекуррентным методом
 - обратная задача является существенно нелинейной
 - обратная задача решается одновременно по двум типам данных: кажущимся сопротивлениям и фазам. Оценивается проводимость и мощность слоя.

В лекции будут детально даны особенности постановки и решения некоторых наиболее интересных задач.

Литература

1. Кочнев В.А., 1983. Адаптивное прослеживание сейсмических волн и оценка их параметров. Геология и геофизика, №2, 1983, с 95-104.
2. Кочнев В.А., 2000. Путь осознания возможностей математических моделей и алгебраических уравнений в геофизике. Геофизика, №5, 2001 г.
3. Кочнев В.А., 1988. Адаптивные методы интерпретации сейсмических данных (монография) Наука. Сиб.отд. Новосибирск., 152 с.
4. Кочнев В.А., Иванькина И.В., 1989. Исследование адаптивного подхода к задаче деконволюции. Геология и геофизика, №11, с. 128-135. Новосибирск.
5. Кочнев В.А., 1995. Адаптивные методы решения обратных задач геофизики. (Учебное пособие). Красноярский государственный университет, ВЦК СО РАН (г.Красноярск). 130 с.
6. Кочнев В.А., 1997. Итерационный (адаптивный) подход к решению обратных геофизических задач. Математическое обеспечение и структура ЭВМ. Сб.научн.работ Красноярского технического ун-та. Красноярск.
7. Kochnev V.A., Vasiliev D.V., Sidorov V.Y., 2002. The technique of solving 3-D gravity problems. – SEG International Exposition and Annual Meeting, Salt Lake City, 2002.
8. Kochnev V.A., Goz I.V., 2003. The technology of forward and inverse modeling for 3D and 2D magnetic data. Exp.Abstr. of International Geophysical Conference & Exhibition, Moscow 2003.
9. Кочнев В.А., Кашафутдинов О.К., 2005. Исследование на моделях решения обратных задач МТЗ с применением адаптивного метода. Межд.сем. «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей» им.Успенского. Пермь, 2005.
10. Tarantola A., Valette B. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion // Reviews of Geophysics and space Physics, vol. 20., N 2, p. 219–232, 1982.

Развитие устойчивых методов решения обратных задач молекулярной спектроскопии

Г.М.Курамшина

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Химический факультет,
кафедра физической химии, лаборатория молекулярной спектроскопии
email: kuramshi@phys.chem.msu.ru

Задача нахождения силовых полей многоатомных молекул по экспериментальным данным, получаемым методами колебательной и микроволновой спектроскопии, газовой электронографии и др., относится к классу некорректно поставленных обратных задач. Следствиями этого являются возможная неединственность или даже отсутствие решения, а также неустойчивость решения по отношению к ошибкам экспериментальных данных. Таким образом, для решения обратной колебательной задачи нельзя использовать классические методы типа метода наименьших квадратов и оперировать утверждениями типа «число определяемых параметров равно числу экспериментальных данных».

При решении некорректной обратной задачи необходимо:

1. построить физическую модель рассматриваемого явления;
2. построить соответствующую математическую модель и сформулировать математическую задачу;
3. подобрать устойчивые численные методы, позволяющие получить искомое решение.

В докладе будут представлены результаты, полученные при рассмотрении некорректно поставленных обратных задач молекулярной спектроскопии в различных модельных постановках, и практические примеры использования разработанных алгоритмов.

Исследования проведены с частичной поддержкой гранта РФФИ № 03-08-00415а.

О структуре зоны внедрения бурового раствора

Д.Ю. Кушнир, О.Б. Бочаров, В.Я. Рудяк

Компания “Бейкер Хьюз”, Российский научный центр, Новосибирск, 630090, Россия
Dmitry.Kushnir@bakerhughes.com

Для создания плана разработки месторождения необходимо иметь информацию о его характеристиках. Эти данные получают, в частности, обрабатывая результаты исследования прискважинной зоны в период бурения. В основе этого процесса лежит решение обратной задачи для некоторой математической модели, реализующей наши представления о процессах распространения возмущений в прискважинной зоне. При этом чем лучше мы знаем свойства решения прямой задачи, тем успешнее будет решена обратная задача по определению свойств исследуемой среды.

Бурение сопровождается многими физическими процессами. В частности, в продуктивный пласт, содержащий, как правило, воду, газ и нефть, проникает фильтрат бурового раствора. Образуется зона внедрения. Основные измерения характеристик пористой среды и флюидов происходят в этой зоне. Данная работа посвящена решению прямой задачи описания параметров зоны внедрения и их зависимостей от (i) сжимаемости пласта, (ii) его проницаемости, (iii) физических характеристик внедряемого и вытесняемого флюидов, (iv) температуры флюидов.

Для описания двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в деформируемом пласте в случае осесимметричной скважины используется модель Баклея-Левретта [1]

$$\begin{cases} \varepsilon_f r \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left[rk_f \left(\frac{f_{mf}(S)}{\mu_{mf}} + \frac{f_{ff}(S)}{\mu_{ff}} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \right] = 0 \\ r \frac{\partial(m(p)S)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left[rk_f \frac{f_{mf}(S)}{\mu_{mf}} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь r – расстояние до оси скважины, p – перепад давления относительно первоначального давления в пласте, k_f – проницаемость пласта, μ_{ff} – вязкость пластового флюида, μ_{mf} – вязкость фильтрата бурового раствора, S – приведённая насыщенность порового пространства фильтратом бурового раствора, $f_{ff}, f_{mf}(S)$ – относительные фазовые проницаемости, $m(p) = m^0(1 + \varepsilon_f p)$ – пористость пласта, ε_f – коэффициент сжимаемости.

В рамках модели (1) изучено влияние сжимаемости пласта ε_f и отношения вязкости внедряемого и вытесняемого флюидов μ_{ff} / μ_{mf} . Установлено, что:

- Коэффициент сжимаемость пласта существенно влияет на продвижение фронта бурового раствора в случае, когда вязкость пластового флюида μ_{ff} больше, чем вязкость фильтрата бурового раствора μ_{mf} : чем больше отношение μ_{ff} / μ_{mf} , тем больше проявляется различие в продвижении фронта бурового раствора и распределении порового давления при разных значениях коэффициента сжимаемости (см. рис.1).
- При большом отношении вязкостей пластового флюида и фильтрата бурового раствора сжимаемость породы целесообразно учитывать при медленно протекающих фильтрационных процессах, которые характерны для пластов с низкой проницаемостью, $1 \div 10 mD$ и при малых перепадах давления (разница между внутрискважинным и первоначальным пластовым давлением $1 \div 5 bar$);

- При $\mu_{ff} / \mu_{mf} \leq 1$ сжимаемость пласта практически не влияет на длину зоны внедрения. Однако отношение вязкостей флюидов продолжает оказывать существенное влияние на структуру распределения насыщенности (см. рис.2).

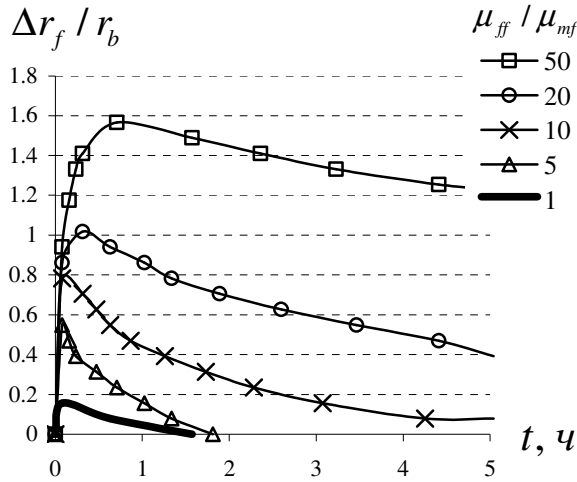


Рис. 1. Разница в продвижение фронта бурового раствора при учёте и без учёта сжимаемости пласта

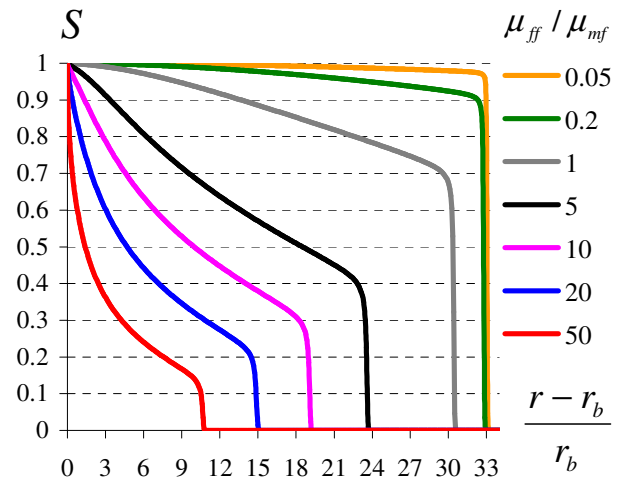


Рис. 2. Профили насыщенности через 2 часа фильтрации при различном отношении вязкостей

На рис.1,2 обозначено: r_b – радиус скважины, $\Delta r_f = |r_{f1} - r_{f0}|$, r_{f1} – координата фронта бурового раствора при максимальном коэффициенте сжимаемости пласта, r_{f0} – координата фронта бурового раствора при фильтрации в недеформируемом пласте.

Для описания процессов вытеснения несмачивающей жидкости (нефти) смачивающей (фильтрат бурового раствора) с учётом капиллярных сил и температурных эффектов в случае осесимметричной скважины использовалась неизотермическая модель Маскета-Левретта [2]

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(rk_f a_p(S, \theta) \frac{\partial p}{\partial r} + rk_f a_\theta(S, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \equiv - \frac{\partial}{\partial r} (rv) \\ r \frac{\partial (mS)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-rk_f a_c(S, \theta) \frac{\partial (p_c)}{\partial r} - rb(S, \theta)v \right) \\ r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(S) \frac{\partial \theta}{\partial r} - rv\theta \right) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь θ – приведённая температура, p – “эффективное давление”, имеет вид

$$p = p_{mf} (1 - b_{ff}) + p_{ff} b_{ff} + \int_s^1 p_c(\xi, \theta) \frac{\partial}{\partial \xi} b_{ff}(\xi, \theta) d\xi, \quad b_{ff} = \frac{f_{ff} / \mu_{ff}}{f_{ff} / \mu_{ff} + f_{mf} / \mu_{mf}}, \quad (3)$$

$p_c(S, \theta) = p_{mf} - p_{ff}$ – капиллярное давление, p_{ff}, p_{mf} – давления в фазах, $b(S, \theta) \equiv b_{ff}$ – функция Баклея-Левретта, v – суммарная скорость фильтрации, $a_p, a_\theta, a_c, \lambda$ – функциональные физические параметры задачи.

На рис. 3,4 видно, что в окрестности продвижения температурного фронта может возникнуть немонотонность профиля насыщенности как в случае горячего вытеснения (температура бурового раствора выше температуры пластового флюида), так и в случае холодного вытеснения (температура бурового раствора ниже температуры пластового флюида).

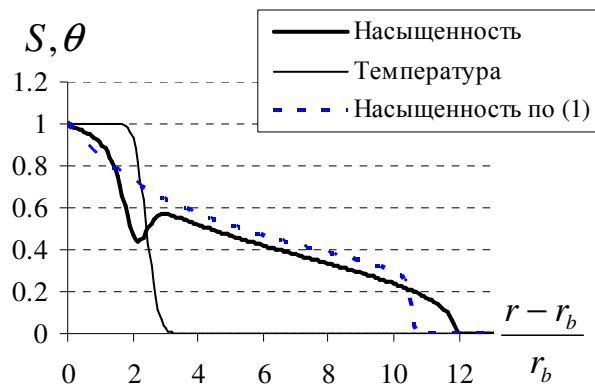


Рис. 3. Профили насыщенности и температуры в случае горячего вытеснения с учётом капиллярных сил

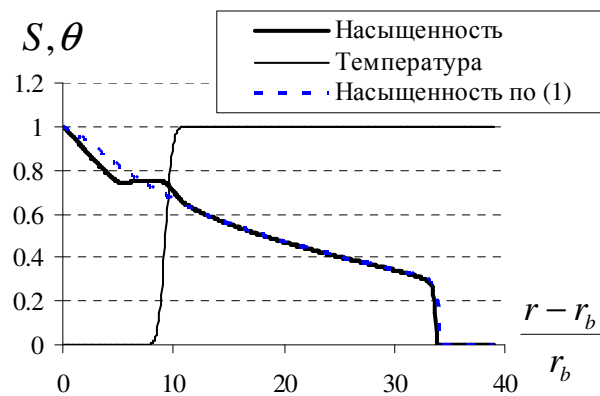


Рис. 4. Профили насыщенности и температуры в случае холодного вытеснения при отсутствии капиллярного взаимодействия

Расчёты на длительные временные промежутки показали, что возникающая в режиме динамической фильтрации немонотонность в профиле насыщенности внедряющейся фазы не исчезает и в последующем режиме статической фильтрации. Это может оказать влияние на интерпретацию измерений.

Литература.

1. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. Москва: Мир, 1964. С. 207.
2. Бочаров О.Б., Монахов В.Н. Краевые задачи неизо термической двухфазной фильтрации в пористых средах // Динамика сплошной среды, сб. науч. тр. ИГИЛ СО АН СССР, 1988. Вып. 86. С. 47–59.

Итеративный метод решения уравнения Гельмгольца без использования конечно-разностных аппроксимаций для задач построения сейсмических изображений и обращения полного волнового поля

Неклюдов Д.А., Чеверда В.А., ИНГГ СО РАН
NeklyudovDA@ipgg.nsc.ru

Одной из основных процедур обработки сейсмических данных является построение изображений с использованием миграции в обратном времени (Reverse Time Migration - RTM). Реализация этой процедуры во временной области приводит к необходимости вычисления корреляции двух волновых полей и, следовательно, невозможна без сохранения значений одного из них в каждой точке целевой области. При построении трёхмерных изображений это приводит к необходимости хранить массивы гигантской размерности, что может быть сделано только на внешней памяти. Альтернативой этому подходу является построение изображений в частотной области, где корреляция переходит в произведение двух решений уравнения Гельмгольца (одно берётся с комплексным сопряжением). Типичная целевая область в трёхмерном случае содержит примерно 10^9 точек, что делает невозможным использование прямых методов решения возникающих систем линейных алгебраических уравнений. В то же время прямолинейное применение итерационных методов их решения также не приемлемо в виду их чрезвычайно низкой скорости сходимости для типичных скоростных моделей, используемых в сейсмике.

В работе строится правый предобуславливатель для итерационного метода крыловского типа. Действие этого предобуславливателя сводится к вычислению решения уравнения Гельмгольца для вертикально-неоднородных сред. При этом мы исходили из того, что, как правило, все геологические среды имеют существенно большую изменчивость в вертикальном направлении, чем в горизонтальном. Это позволяет представить их в виде суперпозиции двух составляющих - вертикально-неоднородной среды и её возмущения.

Ключевым моментом в применении итерационных методов крыловского типа является эффективное вычисление действия матрицы предобусловленной системы на вектор. В нашем случае эта операция сводится к следующему:

- применению двумерного быстрого преобразования Фурье по горизонтальным переменным;

- решению набора обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой пары пространственных частот k_x, k_y ; Мы используем подход без использования конечно-разностных аппроксимаций. После дискретизации задачи коэффициент семейства ОДУ внутри каждого интервала можно считать постоянным. Тогда общее решение на каждом интервале можно записать в явном виде как сумму восходящих и нисходящих волн. Используя условия непрерывности искомого решения и его производной на концах каждого интервала можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Полученная система легко приводится к трёхдиагональному виду и решается методом прогонки.

- выполнению обратного двумерного быстрого преобразования Фурье.

Основное преимущество, которое мы ожидаем получить по сравнению с традиционными подходами – возможность использовать как можно более редкую сетку в дискретизованной задаче. Из теории конечно-разностных схем известно, что для того чтобы избежать в решении достаточно сильных артефактов, вызванных численной дисперсией, необходимо использовать достаточно мелкую сетку. Её шаг определяется числом отсчётов на длину волны (доминирующей или минимальной). Например, в том

случае, когда производные аппроксимируются со вторым порядком, требуется не менее 12 пространственных отсчётов на минимальную длину волны. Для того, чтобы уменьшить количество узлов сетки (и тем самым снизить требование к затрачиваемой оперативной памяти), как правило, стараются использовать схемы высокого порядка аппроксимации пространственных производных (в настоящее время уже типичными стали схемы 8-10 порядков). Однако при этом возникает некое противоречие: при увеличении порядка схемы можно использовать более крупный шаг по пространству, уменьшить число узлов сетки, но при этом существенно возрастает количество операций с плавающей точкой, затрачиваемых на каждую точку. Начиная с какого-то уровня (8-10 порядок аппроксимации) выигрыш, полученный уменьшением числа точек, компенсируется возрастающими вычислительными затратами на каждую точку.

Предлагаемый нами подход позволяет использовать дискретизацию, обусловленную теоремой Котельникова (т.е. ~ 2.5 отсчёта на минимальную длину волны). При этом вычислительные затраты оказываются существенно меньше, чем при использовании конечно-разностных схем соответствующего порядка.

Результаты численных экспериментов, выполненные для ряда двумерных моделей, в том числе для широко распространённой модели Magmousi, вот уже в течение многих лет являющейся своего рода пробным камнем для апробации новых алгоритмов расчёта волновых полей и построения изображений наглядно подтверждают эффективность предложенного подхода.

Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении

С. С. Павлов

Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова

В теории обратных задач тепло- и массопереноса [1, 2] часто возникают проблемы восстановления плотностей неизвестных источников загрязнения. Во многих случаях считают, что неизвестной является зависимость правой части от времени [3]. Рассматриваемые обратные задачи в ряде случаев формулируют как проблемы управления [4].

Целью настоящей работы является исследование разрешимости обратной задачи определения внешнего воздействия для волнового уравнения.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n ($\Omega \subset R^n$) с гладкой границей Γ , $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \Gamma \times (0, T)$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$. Далее, пусть $f_k(x, t)$, $\psi_k(t)$, $k = 1 \dots m$, $g(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ —точки области Ω такие, что $x^{(k)} \neq x^{(m)}$ при $k \neq m$.

В области Q рассмотрим обратную задачу: найти функции $u(x, t)$, $q_1(t), \dots, q_m(t)$, связанные уравнением

$$u_{tt} - \Delta u = \sum_{k=1}^m f_k(x, t)q_k(t) + g(x, t), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

а также с условиями переопределения:

$$u(x^{(k)}, t) = \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

В изучаемой обратной задаче условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка, условия (4) есть условия переопределения; наличие этих

условий объясняется тем, что помимо неизвестного решения $u(x, t)$, требуется найти также еще неизвестные функции $q_1(t), \dots, q_m(t)$.

Пусть

$$\begin{aligned} V &= \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)), \\ v_t(x, t) &\in L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}, \\ V_0 &= \{v(x, t) : v(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)), v_t(x, t) \in \\ L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)), v_{tt}(x, t) &\in L_2(Q)\}. \end{aligned}$$

В работе доказаны теоремы.

Теорема 1. Пусть $n < 4$ и выполняются условия

$$\begin{aligned} g(x, t) &\in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad g_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ f_k(x, t) &\in L_2(0, T; W_2^3(\Omega)), \quad f_{kt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \\ u_0(x) &\in W_2^3(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega), \\ \psi_k(t) &\in C^3(0, T), \\ f_k(x, t)|_S &= g(x, t)|_S = 0, \quad \Delta f_k(x, t)|_S = 0, \\ \det(f_j(x^{(i)}, t)) &\neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ u_0(x_k) &= \psi_k(0), \quad u_1(x_k) = \psi_k'(0), \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Тогда существует функция $u(x, t)$ из пространства V_0 и функция $q_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, из пространства $L_2([0, T])$, которые являются решением обратной задачи (1)–(4).

Теорема 2. Пусть $4k \leq n < 4k + 4$, $k = 1, 2, \dots$ и выполнены условия

$$\begin{aligned} g(x, t) &\in L_2(0, T; W_2^{2k+2}(\Omega)), \quad g_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^{2k+2}(\Omega)), \\ f_l(x, t) &\in L_2(0, T; W_2^{2k+3}(\Omega)), \quad f_{lt}(x, t) \in L_2(0, T; W_2^{2k+2}(\Omega)), \\ u_0(x) &\in W_2^{2k+3}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{2k+1}(\Omega), \quad u_1(x) \in W_2^{2k+2}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{2k+1}(\Omega), \\ \psi_l(t) &\in C^{2k+3}(0, T) \quad l = 1, \dots, m, \\ \Delta^i f_l(x, t)|_S &= 0, \quad \Delta^i g(x, t)|_S = 0, \quad i = 0, \dots, k + 1. \\ \det(f_j(x^{(i)}, t)) &\neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ u_0(x^{(l)}) &= \psi_l(0), \quad u_1(x^{(l)}) = \psi_l'(0), \quad l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Тогда существует функция $u(x, t)$ из пространства V_2 и функция $q_l(t)$ $l = 1, \dots, m$ из пространства $L_2([0, T])$, которые являются решением уравнения (1) и удовлетворяют условиям (2)–(4).

1. *Кожанов А.И.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в одномерном уравнении нелинейной диффузии. Матем. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15, Вып.2. С. 31-47.
2. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Васильев В.И.* Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Математическое моделирование. 1997. Т.9, №5. С.119–127.
3. *Калинина Е.А.* Численное исследование обратной задачи восстановления плотности источника двумерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т.5, №1. С.89–99.
4. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Доклады РАН. 2000. Т.375, №3. С.315–319.

Алгоритм определения температуропроводности слоистой среды на основе сингулярного разложения оператора чувствительности модели теплопроводности

Пененко А.В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим краевую задачу в области $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$u_t(x, t) - (k(x)u_x(x, t))_x = 0, \quad x \in [0, 1], t \in [0, 1], \quad (1)$$

$$k(0)u_x(0, t) = \alpha(t), \quad k(1)u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

определяющую оператор $A[k] : K \rightarrow L^2(0, 1)$, который ставит в соответствие коэффициенту $k(x)$ из множества K кусочно-постоянных функций, отделенных от нуля и ограниченных сверху, след решения корректной краевой задачи (1)-(3) на границе $x = 0$: $A[k] := u(0, \cdot; k, \alpha)$. Для этой краевой задачи формулируется обратная: найти коэффициент $k^* \in K$ по известному значению оператора $A[k^*]$.

Для оператора $A[k]$ с использованием сопряженных задач вычисляется линейный оператор чувствительности $\mathcal{L}[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющий соотношению

$$\mathcal{L}[k_2, k_1](k_2 - k_1) = A[k_2] - A[k_1]. \quad (4)$$

На основе соотношения (4) строится итерационный алгоритм Ньютоновского типа, в котором применяются квази-обратные операторы по отношению к $\mathcal{L}[\cdot, \cdot]$, построенные посредством сингулярной срезки (см., например, [1]). Количество восстанавливаемых алгоритмом компонент решения, соответствующих сингулярным числам оператора чувствительности, зависит от точности данных и от скорости убывания сингулярного спектра $\mathcal{L}[\cdot, \cdot]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных исследований №4 Президиума РАН и №3 Отделения математических наук РАН, а также проектом РФФИ 07-05-00673.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaltenbacher B.* Some Newton-type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems // *Inverse problems*. 1997. Т. 13. С. 729–753.

Применение преобразования Радона в обработке изображений: извлечение структур

Пикалов В.В.

**Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А.Христиановича СО РАН, Новосибирск
www.itam.nsc.ru/lab17/**

Аннотация

В задачах томографии очень важным этапом является постобработка и анализ томограмм, полученных после решения соответствующей обратной задачи. В данной лекции дается обзор различных методов применения преобразования Радона в обработке изображений. В частности, рассматриваются отдельные примеры выделения на двумерном изображении линейчатых структур, кругов, определения выделенного направления. Показано, что в некоторых случаях и на трехмерных изображениях возможно автоматическое определение выделенных направлений с помощью последовательного применения трехмерного, а потом и двумерного обратного преобразований Радона.

С использованием хорошо известных инвариантов преобразования Радона иллюстрируется возможность присвоения изображениям сигнатур, инвариантных относительно сдвига, вращения и изменения масштаба. Такие сигнатуры можно использовать в задачах быстрого поиска по базам данных изображений, или применять в задачах привязки друг к другу немного отличающихся изображений одного и того же объекта (в англоязычной литературе – registration problem).

Развитие методов обработки проекций изображений в пространстве Радона позволяет продвинуться в задачах исправления искажений в приемной аппаратуре (задачи устранения аппаратной функции, деконволюции). В ряде постановок возможно использования подобных методов в задачах получения подпиксельного разрешения по набору сдвинутых изображений низкого разрешения.

Литература.

1. Пикалов В.В., Казанцев Д.И. Итерационное восстановление возмущения синограммы в пространстве Радона для задачи стеганографии. // Вычислительные методы и программирование. -2008. -Т.9, No.1. -С. 1-9.
2. Бойко В.М., Оришич А.М., Павлов А.А., Пикалов В.В. Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте. -Новосибирск: НГУ, 2009. -450 с.
3. Лихачев А.В., Пикалов В.В. Новый метод определения неизвестного аддитивного фона в проекционных данных в задаче трехмерной томографии. // ЖВММФ. -2002. -Т.42, No.3. -С. 357-369.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н. С. Попов

Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова

Пусть Ω есть конечный интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение

$$u_t - a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u - u_{xxt} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$u_{xt}(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t) + \alpha_3(t)u_t(0, t) + \alpha_4(t)u_t(1, t) + \alpha_5(t)u(0, t) + \alpha_6(t)u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u_{xt}(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t) + \beta_3(t)u_t(0, t) + \beta_4(t)u_t(1, t) + \beta_5(t)u(0, t) + \beta_6(t)u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

где $a(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$ ($k = 1, \dots, 6$) — заданные функции определенные при $x \in \bar{\Omega} = [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача: найти функцию $u(x, t)$ являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются нелокальные краевые условия (2), (3), а также начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

В работе методом продолжения по параметру (см. [1]) доказывается регулярная разрешимость нелокальных краевых задач (1)–(4).

Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)", мероприятие 2 (код проекта 3443).

-
1. *А.И. Кожанов* О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2008. №3(62). С.165–174.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Прокопьев
Северо-Восточный федеральный университет
имени М.К. Аммосова

Целью настоящей работы является исследование разрешимости линейной обратной задачи для эллиптического-параболического уравнения.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства \mathbb{R}^n ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) с гладкой границей Γ , $\Gamma = \partial\Omega$, $S = \Gamma \times (0, T)$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$.

В работе рассматривается уравнение эллиптического-параболического типа:

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij}(x) u_{x_j} \right) + a(x)u = f(x, t) + \sum_{k=1}^m q_k(x) h_k(x, t), \quad (1)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обратная задача: в области Q найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, связанные с уравнением эллиптического-параболического типа (1), начальным и граничным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

а также с условием переопределения:

$$0 < t_1 < \dots < t_m \leq T \quad (3)$$

заданные моменты времени такие, что

$$u(x, t_j) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Методами регуляризации, продолжения по параметру доказывается регулярная разрешимость поставленной обратной краевой задачи.

Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)", мероприятие 2 (код проекта 3443).

УДК 517.95

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН, КАЖДАЯ ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ¹

Т.А. Ротанова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск,
e-mail: t.stekina@gmail.com

Теория вариационных неравенств возникла из практической задачи (известной теперь как задача Синьорини, 1933) и тесно связана с приложениями. С развитием вариационных неравенств и применением вариационного подхода связано значительное продвижение в исследовании задач со свободными границами в последние годы. Задачи со свободными границами — это задачи, в которых неизвестная заранее функция в разных частях области удовлетворяет качественно различным условиям. Граница раздела этих зон, называемая свободной границей, также является неизвестной. Большое число физических и инженерных задач со свободной границей могут быть сформулированы как вариационные, в частности, задачи о контакте упругих и неупругих тел.

В связи с активным изучением в последние годы композитных материалов в настоящее время представляет огромный интерес исследование нового класса контактных задач со свободной границей, а именно, задач о контакте упругих тел, содержащих жесткие включения.

Одной из особенностей, возникающих при анализе пластин, содержащих жесткие включения, является то, что в области жесткого включения не выполняется уравнение равновесия, несмотря на то, что внешние силы приложены ко всем точкам пластин. Таким образом, математическая постановка данного класса задач требует принципиально нового подхода. В ряде недавних работ, см. [1], [2], [6], [7], посвященных описанию и анализу контактных задач о об упругих телах, содержащих жесткие включения, был предложен метод, позволяющий выписать полную систему краевых условий на границе жесткого включения, а также в случае контакта жестких зон. Влияние внешних сил на жесткую часть пластины описывается с помощью уравнения и неравенства в соответствии с принципом виртуальных перемещений. Оказывается, что работа на истинных перемещениях точек тела обращается в ноль, а для всех возможных перемещений имеем соответствующее неравенство.

Задача о контакте двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу, под действием внешних сил (модель Кирхгофа-Лява) исследовалась в работах [3] — [5]. Особенностью данной работы является то, что каждая из пластин содержит жесткое включение, выходящее на область возможного контакта, и таким образом, выполняется принцип виртуальных перемещений. Предполагаем, что нижняя пластина G деформируется в своей плоскости, а верхняя пластина подвергается изгибу. Область контакта

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН N 90, гранта РФФИ N 10-01-00054 и гранта Президента РФ (МК-222.2010.1).

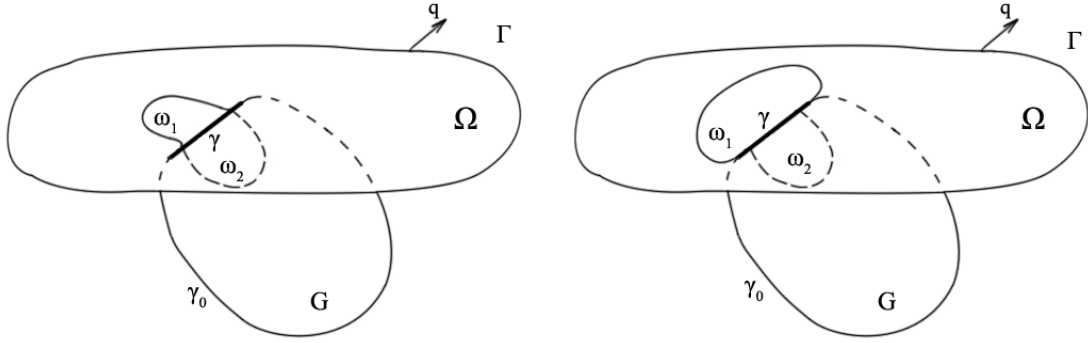


Рис. 1: Контакт пластин, содержащих жесткие включения

заранее неизвестна и подлежит определению. Обозначим ω_1 и ω_2 — жесткие включения в верхней и нижней пластинах соответственно. Для описания перемещения точек области ω_1 вводится пространство жестких перемещений:

$$L(\omega_1) = \{l \mid l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, a_i = \text{const}, i = 0, 1, 2; x = (x_1, x_2) \in \omega_1\}.$$

Таким образом, перемещения точек жесткого включения представляют собой элементы пространства аффинных непрерывных функций. Для описания перемещения точек области ω_2 используется пространство инфинитезимальных жестких перемещений:

$$R(\omega_2) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Cx + D, x \in \omega_2\},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, D = (d^1, d^2), \quad \text{где } c, d^1, d^2 = \text{const}.$$

В работе проанализированы возможные случаи расположения жестких включений, см. (1). Для каждого случая сформулирована вариационная постановка задачи, доказаны существование и единственность решения, выписана полная система краевых условий в предположении гладкости решения, показана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок. Решение принадлежит пространству Соболева $H_{\gamma_0}^1(G) \times H_0^2(\Omega)$, где

$$H_{\gamma_0}^1(G) = \{\mathbf{u} \in [H^1(G)]^2 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0\},$$

$$H_0^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial q} = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Кроме того, показано, что если жесткая часть нижней пластины кроме области контакта пластин захватывает часть границы G , не контактирующую с верхней, то нижнюю пластину можно интерпретировать как тонкое препятствие для верхней пластины, и мы получим задачу о контакте верхней пластины, содержащей жесткое включение, с жестким препятствием. Рассмотрен симметричный случай, в котором жесткое включение в верхней пластине Ω выходит на границу Γ и представляет собой жесткое препятствие для нижней пластины.

Список литературы

- [1] *Г.В. Алексеев, А.М. Хлуднев*, Трещина в упругом теле, выходящая на границу под нулевым углом, Вестник НГУ, **9**, №2 (2009), С. 15-29.
- [2] *Г. Лойгеринг, А.М. Хлуднев*, О равновесии упругих тел, содержащих жесткие включения, ДАН, **430**, №1 (2010), С. 1-4.
- [3] *Н.В. Неустроева*, Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин, СибЖИМ, **12**, №4 (2009), С. 92-105.
- [4] *Н.В. Неустроева*, Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением, Вестник НГУ, **9**, №4 (2009), С. 51-64.
- [5] *А.М. Хлуднев*, Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу, журнал ПМТФ, **49**, №4 (2008), С.553-567.
- [6] *А.М. Хлуднев*, Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине, Известия РАН, №5 (2009), С.98-110.
- [7] *А.М. Khludnev, A.A. Novotny, J. Sokolowski, A. Zochowski*, Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **57**, №10 (2009), P. 1718-1732.

Задача Коши для однородной системы уравнений Максвелла в шаре

Саторов Э.Н., Махмудов К.О.

Самаркандский государственный университет, Узбекистан

Sattorov-e@rambler.ru

В работе предлагается явная формула восстановления решение однородной системы уравнений Максвелла в области по ее известным значениям на части границы, т.е. дается явная формула продолжения решения задачи Коши

Пусть R^3 – вещественное трехмерное евклидово пространство, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$, B_r шар с центром в нуле радиуса $0 < r < \infty$ и S гладкая замкнутая поверхность в B_r , разделяющая шар на две компоненты $\Omega^- = D$ и Ω^+ , таких, что $0 \in \Omega^+$ и ориентированная как граница Ω^- .

Рассмотрим в области однородности среды, для монохроматического поля при отсутствие сторонние токи и сторонние заряды уравнения Максвелла [1]

$$\operatorname{rot} E = i w \mu H; \quad \operatorname{rot} H = \sigma_1^* E, \quad (1)$$

где ε , μ – электромагнитные постоянные (диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость); $\sigma_1^* = \sigma_1 - i w \varepsilon$ – комплексная электропроводность, σ_1 – электропроводность среды, обратная к ее удельному электрическому сопротивлению ρ ,

$\sigma_1 = \frac{1}{\rho}$, $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ – напряженность электрического и

магнитного полей, w – частота электромагнитного колебания.

Уравнения (1) сводятся к однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad \Delta H + k^2 H = 0, \quad (1^*)$$

где коэффициент k – волновое число среды: задается выражением

$$k^2 = i w \mu \sigma + w^2 \mu \varepsilon = i w \mu \sigma_1^*.$$

Значение k выбирают с положительной вещественной частью: $\operatorname{Re} k > 0$.

Задача 1. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S :

$$[n(y), E(y)] = f(y), \quad [n(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S. \quad (2)$$

По заданным $f(y)$ и $g(y)$ на S вычислить $E(x)$, $H(x)$, $x \in D$.

Задача 2. Пусть на S заданы функции $f(y)$ и $g(y)$. Указать условия на $f(y)$ и $g(y)$ необходимые и достаточные для того, чтобы существовало решение системы (1) класса $A(D) \cap C(D \cup S)$, удовлетворяющее условию (2).

Задача (1), (2) относится к числу некорректно поставленных задач. Ж.Адамар [2] заметил, что решение задачи 1 неустойчиво. Чаще всего в приложениях вместо вектор-функций $f(y)$ и $g(y)$ задаются на S их приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ соответственно с заданным уклоном $\delta > 0$ и требуется по $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ построить решение в точках области D с заранее заданной точностью. Поскольку решение задачи неустойчиво, то построение приближенного решения невозможно.

Для того, чтобы построить устойчивое решение, необходимо сузить класс рассматриваемых решений [3], [4]-[6]. Чаще всего это компакт в известных функциональных пространствах. Если известно число, характеризующее компакт (размеры компакта, которому принадлежат решения), то речь идёт о построении семейства вектор-функции $E_\sigma(x) = E_\sigma(x, f_\delta, g_\delta)$, $H_\sigma(x) = H_\sigma(x, f_\delta, g_\delta)$ (регуляризация), зависящих от положительного параметра $\sigma > 0$ (параметр регуляризации). При подходящем выборе параметра σ в зависимости от δ и размера компакта сходится к решению задачи, когда $\delta \rightarrow 0$. Введение положительного параметра σ в зависимости от погрешности исходных данных здесь обусловлено свойством задачи. Это обстоятельство впервые замечено М.М.Лаврентьевым [4]. Явная формула для регуляризации задачи (1), (2) даны в [7]. Приводим решение задачи 1 и 2, когда $f(y)$ и $g(y)$ задаются на S точной формулой.

Будем предполагать, что решение задачи существует (тогда оно единственно [8], с.58) и принадлежит классу $A(D)$ и данные Коши заданы точно. В этих условиях устанавливается явная формула продолжения, которая является аналогом классической формулы Б.Римана, В.Вольтера и Ж.Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений.

Список литературы

1. Жданов М.С. Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.:Наука, 1984. -328 с.
2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – С. 38-70.
3. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. –92 с.
4. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв.АН СССР Сер. Мат. 1956. Т.20, №6, С.819-842.
5. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

7. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области // Мат. заметки. – 2009. –Т. 86. –вып. 3. сентябр. – С. 445-455.

8. Берс А., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. –М.: Мир, 1966. – 351 с.

Работа частично финансирована грантом ОТ –Ф1-044 РУз.

Задача Коши для обобщенной системы уравнений Коши-Римана
Э.Н. Сатторов, М.Э.Эрмаматова
Самаркандский государственный университет, Узбекистан
Sattorov-e@rambler.ru

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений, которая является обобщением системы Коши-Римана в пространственной ограниченной области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши. Как известно, уравнений Коши-Римана, важность в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [1]-[3].

Рассматриваемая система эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т.е. некорректна [4]. В некорректных задачах теорема существования предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному, ([5], с.4). Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена ([6], с.58).

После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризующих операторов. В 1926 г. Т.Карлеман ([5], с. 41) построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы в ([5], с.34) введено понятие функции Карлемана задача Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах XX века в работах [5], [7]-[9] и развивалось впоследствии в [10]-[15].

Из выше сказанного нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на её основе регуляризованное решение задачи Коши и критерий разрешимости для шара.

Литература

1. Brackx F., Delanghe K., Sommen F. Clifford analysis. L.: Pitman, 1982. V.76. 308 pp.
2. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 59. №1. С.3-27.
3. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 60. №2. С.169-198.
4. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – С. 38-70.
5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. –92 с.
6. Берс А., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 351 с.
7. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР. – 1957. –Т.112. №2.– С. 195-197.

8. Мергелян С.Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. – 1956. – Т. 11. – Вып. 5. – С. 3-26.
9. Иванов В.К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т.1. - №1. – С. 131-136.
10. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. - №2. – С. 281-283.
11. Tarkhanov N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995.
12. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. Абстрактная формула Карлемана // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. - №6. – С. 1292-1296.
13. Makhmudov O., Niyozov I Regularization of a solution to the Cauchy Problem for the System of Thermoelasticity. Contemporary Mathematics. AMS, Primary V382, 2005, 74F05, 35Q72
14. Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N. The Cauchy Problem of Couple-Stress Elasticity. Contemporary Mathematics. AMS, V 455, 2008
15. Сатторов Э.Н. О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана в пространстве // Мат. заметки. – 2009. –Т. 85. –вып. 5. май. – С. 768-781.

Работа частично финансирована грантом ОТ –Ф1-044 РУз.

Алгоритмы послойного восстановления векторных и симметричных 2-тензорных полей, заданных в \mathbb{R}^3 , по неполным данным

Светов И.Е.

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
svetoy@gorodok.net

Задача восстановления соленоидальной части симметричного m -тензорного поля (тензорного поля m -ой валентности), заданного в \mathbb{R}^n , по его известным лучевым преобразованиям, была исследована в работе В.А. Шарафутдинова [2]. Были получены формулы обращения, которые используют полные данные. Следует отметить, что если размерность пространства больше 2, то задача переопределена по размерности данных. Так, в трехмерном пространстве многообразие всех прямых имеет размерность 4. В то же время эта задача недоопределена по числу неизвестных функций. Например, в случае векторного поля, заданного в \mathbb{R}^3 , три неизвестные функции ${}^s u_j$ связаны одним дифференциальным уравнением $\delta^s u = 0$ (оператор дивергенции). Это означает, что ${}^s u$ зависит от двух некоторых функций. Нам нужно восстановить две эти функции по единственной функции — продольному лучевому преобразованию.

В работе А. Денисюка [1] впервые доказана возможность восстановления соленоидальной части m -тензорного поля, заданного в \mathbb{R}^3 , по “неполным” данным, т.е. по многообразию размерности 3, с использованием конусной схемы сбора данных. Там же были приведены некоторые соображения, на основании которых выражались сомнения о возможности восстановления соленоидальных частей векторных и симметричных 2-тензорных полей по данным, имеющим ту же размерность 3, но при параллельной схеме сбора данных. В работе В.А. Шарафутдинова [3] сомнения были рассеяны и была предложена послойная схема сбора данных, по которым восстанавливаются соленоидальные части соответствующих полей. В работе [3] рассматривается задача восстановления соленоидальной части векторного или симметричного 2-тензорного поля в \mathbb{R}^3 по его известным продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых, параллельных каждой из заданного конечного набора плоскостей, находящихся в общем положении. Доказано, что для единственности восстановления соленоидальной части векторного поля достаточно набора, состоящего из двух координатных плоскостей, но для устойчивого восстановления, вообще говоря, необходим набор, состоящий из трех координатных плоскостей. В случае симметричного 2-тензорного поля, для единственности восстановления достаточно набора, состоящего из трех координатных плоскостей. Для устойчивого же восстановления, нужен набор, состоящий из трех координатных плоскостей и трех плоскостей с нормальными векторами $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$ и $e_1 + e_3$. Здесь e_1 , e_2 , e_3 — единичные нормальные вектора для координатных плоскостей. Основными элементами в формулах обращения, полученных в работе [3], являются $3D$ преобразование Фурье и $2D$ оператор обратной проекции.

Рассматриваются две постановки задачи восстановления соленоидальной части векторного поля, заданного в единичном шаре в \mathbb{R}^3 : 1) по известным продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых параллельных одной из двух координатных плоскостей ($2P$ -задача); 2) по известным продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых параллельных одной из трех координатных плоскостей ($3P$ -задача). Для 2-тензорного случая, также рассматриваются две постановки задачи восстановления соленоидальной части: 1) по известным продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых параллельных одной из трех координатных плоскостей ($3P$ -задача); 2) по известным продольным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых

параллельных одной из трех координатных плоскостей или одной из плоскостей с нормальными векторами $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$ и $e_1 + e_3$ ($6P$ -задача). Для каждой из поставленных задач предложены алгоритмы восстановления, основанные на формулах из работы В.А. Шарфутдинова [3].

Численная реализация каждого из алгоритмов состоит из следующих шагов: 1) вычисление продольных лучевых преобразований вдоль лучей параллельных плоскости из определенного семейства; 2) нахождение значений $2D$ оператора обратной проекции от производной по s (параметр задания прямой, вдоль которой вычисляется продольное лучевое преобразование) для продольных лучевых преобразований (векторный случай) или от самих продольных лучевых преобразований (2 -тензорный случай); 3) применение $3D$ -преобразования Фурье; 4) использование явных формул для нахождения $\widehat{s}u$; 5) применение обратного $3D$ -преобразования Фурье.

Проведено всестороннее тестирование предложенных алгоритмов с целью определения пределов их применимости. В частности, исследовано влияние на точность восстановления таких факторов, как степень дискретизации данных и гладкость компонент восстанавливаемого поля.

Приведем результаты одного из численных экспериментов. Восстанавливалось соленоидальное векторное поле

$$v(x) = \begin{cases} 4(0.49 - |x|^2) \left((x_3 - x_2), (x_1 - x_3), (x_2 - x_1) \right), & \text{при } |x|^2 < 0.49, \\ (0, 0, 0), & \text{иначе,} \end{cases}$$

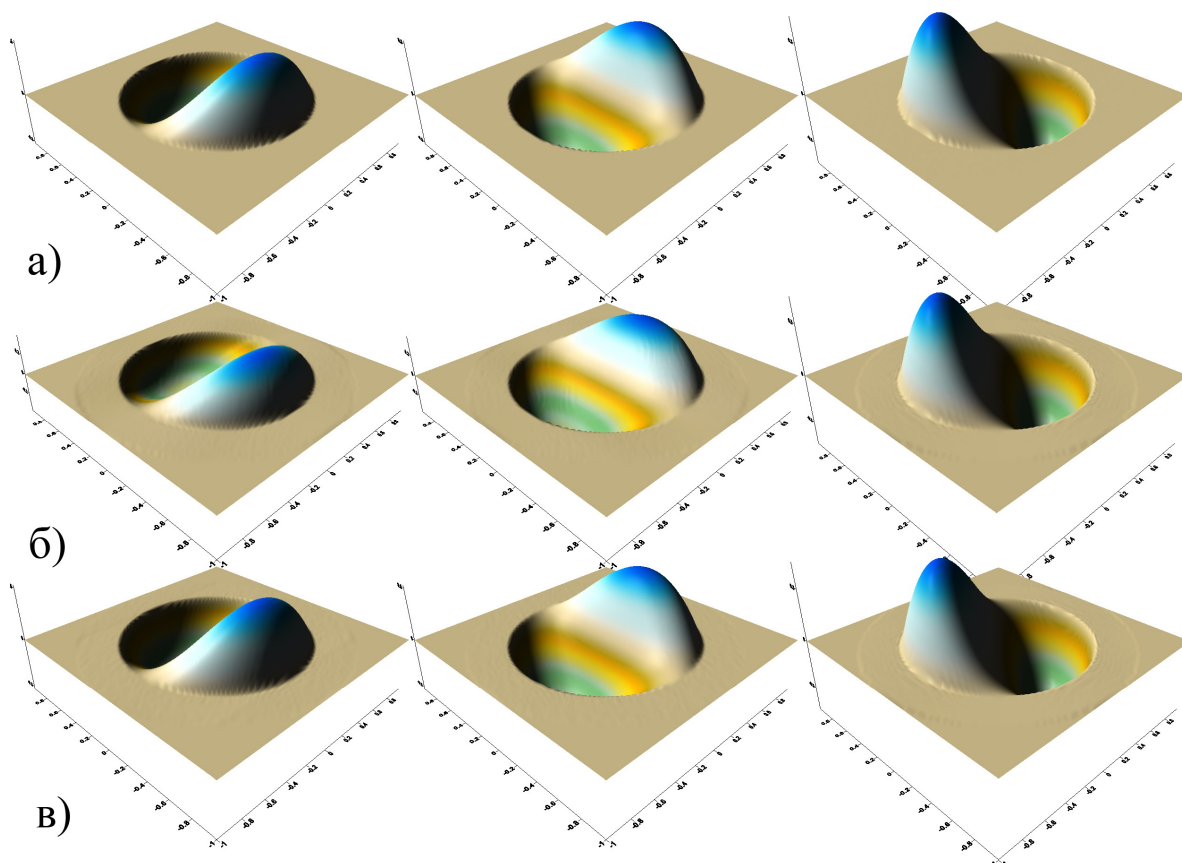


Рис. 1: Компоненты векторного поля (а) и компоненты его приближений для $2P$ -задачи (б) и для $3P$ -задачи (в) для слоя $\{x_3 = 0\}$.

На рис. 1 изображены (в строках) компоненты восстанавливаемого векторного поля v (а), а также его аппроксимации с использованием предлагаемых алгоритмов для $2P$ -задачи (б) (относительная погрешность восстановления 27.77%) и для $3P$ -задачи (в) (относительная погрешность восстановления 0.97%). Графический вывод результата восстановления приводится для слоя $\{x_3 = 0\}$.

Работа осуществлена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-01-92001-ННС_а), Отделения математических наук РАН (проект 1.3.8), СО РАН (проект фундаментальных исследований, выполняемых совместно со сторонними научными организациями, проект СО РАН и УрО РАН № 14)

ЛИТЕРАТУРА

1. Denisjuk A. *Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve.* // Inverse Problems. №22 (2006), p. 399–411.
2. Sharafutdinov V. A. *Integral Geometry of Tensor Fields.* // Utrecht: VSP. 1994, 271 p.
3. Sharafutdinov V. *Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data.* // Inverse Problems. №23 (2007), p. 2603–2627.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

А. А. Седипков

Новосибирский государственный университет

Рассматривается классическая обратная спектральная задача Штурма-Лиувилля, которая состоит в определении коэффициента $A(x)$ дифференциального оператора в пространстве $L_2(0, \infty)$, порожденного дифференциальным выражением

$$A(x)^{-1}(A(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x > 0 \quad (1)$$

с краевым условием

$$w_x|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

и условиями склейки

$$\begin{pmatrix} w \\ w_x \end{pmatrix} (x_k - 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_x \end{pmatrix} (x_k + 0), \quad k = 1 \dots n, \quad (3)$$

где $A(x)$ — кусочно-непрерывный коэффициент с разрывами в точках $0 < x_n < \dots < x_1 < \infty$, $A_k = A(x_k+0)/A(x_k-0)$ — величины скачков. Перейдя от функции u к функции $w = u/\sqrt{A(x)}$, получим, что уравнения (1)–(3) перепишутся в виде

$$-u_{xx} + q(x)u = \lambda u, \quad x > 0 \quad (4)$$

с краевым условием

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

и условиями склейки

$$\begin{pmatrix} u \\ u_x \end{pmatrix} (x_k - 0) = \begin{pmatrix} a_k^{-1} & 0 \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_x \end{pmatrix} (x_k + 0), \quad k = 1 \dots n. \quad (6)$$

где $q(x) = \frac{(\sqrt{A(x)})_{xx}}{\sqrt{A(x)}}$, $h = \frac{A_x(0)}{2A(0)}$, $a_k = \sqrt{A_k}$, $b_k = \frac{A_x(x_k+0)/\sqrt{A_k} - A_x(x_k-0)}{A(x_k-0)}$.

Обозначим через $E(x, \omega)$ кусочно-гладкое решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям склейки (4) и условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(x, \omega) \exp(-i\omega x) = 1.$$

Функцию $E(x, \omega)$ будем называть кусочно-гладким решением Йоста.

Известно [1], что если коэффициент $A(x)$ непрерывен, то $A(x)$ однозначно восстанавливается по значению решения Йоста в нуле $E(0, \omega)$. Случай коэффициента $A(x)$ с

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00221), Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований №2), АВЦП Рособразования (проект 2.1.1.4918).

одним разрывом исследован в работе [2]. И случай кусочно-постоянного коэффициента $A(x)$ с разрывами в точках x_1, \dots, x_n исследован в работе [3].

В данной работе обратная задача состоит в восстановлении точек разрыва x_1, \dots, x_n и величин скачков A_1, \dots, A_n по асимптотике значения решения Йоста в нуле $E(0, \omega)$ при $|\omega| \rightarrow \infty$.

Введем систему специальных обозначений. Рассмотрим множество мультииндексов J , элементами которых являются числа 1, 0, 1, подчиненных следующему правилу: знаки ненулевых элементов J чередуются, а первый ненулевой элемент равен 1. Такие мультииндексы условно будем называть подходящими и через M_n будем обозначать множество всех подходящих мультииндексов длины n .

Для $J = (j_1, \dots, j_n) \in M_n$ положим $C(J) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k^{-1} + a_k}{2}\right)^{1-|j_k|} \left(\frac{a_k^{-1} - a_k}{2}\right)^{|j_k|}$ и $Jx = j_1 x_1 + \dots + j_n x_n$.

Теорема 1 При $|\omega| \rightarrow \infty$ справедливо $E(x, \omega) = \sum_{J \in M_n} C(J) \exp(2i\omega Jx)[1]$, где $[1] = 1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$.

Из этой теоремы получаем, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ значение решения Йоста в нуле имеет вид

$$E(0, \omega) = C_1 \exp(T_1 i\omega)[1] + \dots + C_N \exp(T_N i\omega)[1].$$

Привлекая теорию почти периодических функций или применяя преобразование Фурье, найдем совокупность всех отвечающих функции $E(0, \omega)$ пар чисел $\{[T_k, C_k]\}_{k=1, \dots, N}$. Числа $\{T_k\}$ условно будем называть периодами, а числа $\{C_k\}$ — амплитудами. Все периоды с амплитудами образуют полный спектр пар $SP = \{[T_k, C_k]\}_{k=1, \dots, N}$ — множество, которое мы можем найти. В частности, мы найдем спектр периодов $Sp = \{T_k\}_{k=1, \dots, N}$.

Теорема 2 Если точки разрыва x_1, \dots, x_n несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то точки разрыва x_1, \dots, x_n восстанавливаются по спектру периодов Sp с точностью до перестановки.

Теорема 3 Если точки разрыва x_1, \dots, x_n несоизмеримы, то полный спектр SP однозначно определяет все точки разрыва x_1, \dots, x_n и величины скачков A_1, \dots, A_n .

Таким образом, если точки разрыва x_1, \dots, x_n несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то асимптотика значения решения Йоста $E(0, \omega)$ в нуле при $|\omega| \rightarrow \infty$ однозначно определяет все точки разрыва x_k и величины скачков A_k . Найден алгоритм, позволяющий находить величины x_k, A_k за конечное число шагов.

Список литературы

- [1] А. С. Алексеев, В. С. Белоносов, “Спектральные методы в одномерных задачах теории распространения волн”, *Труды ИВМиМГ. Мат. модел. в геофизике*, **6** (1998), Новосибирск, 7–39.

- [2] D. G. Shepelsky, “The inverse problem of reconstruction of the medium’s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions”, *Advances in Soviet Math*, **19** (1994), 209–231.
- [3] А. И. Шестаков, “Обратная спектральная задача для операторов Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами” *Сибирский математический журнал*, **44**:5 (2003), 1142-1162.

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКАНАЛА И ДВУХТОЧЕЧНОЙ ТРАССИРОВКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

А. С. Сердюков, ИНГГ СО РАН
AleksanderSerdyukov@yandex.ru

При решении обратных кинематических задач геофизики возникает необходимость решения прямой кинематической задачи расчёта времён пробега сейсмических волн в среде с заданными свойствами. При решении задачи сейсмической томографии в рамках модели геометрической сейсмологии достаточно построить всевозможные лучи, соединяющие источники с приёмниками и вычислить время пробега вдоль каждого луча. Традиционно прямая кинематическая задача решается при помощи методов, использующих трассировку лучей. Возможны два варианта постановки задачи: 1) задача Коши заключающаяся в построении луча, выходящего из заданной точки в заданном направлении; 2) двухточечная краевая задача построения луча соединяющего две фиксированные точки. При решении задачи Коши возникает одномерная система уравнений луча, которая быстро и точно интегрируется методом Рунге-Кутты. Сложности при построении лучей таким способом возникают лишь для сред с резкими контрастами скорости. Существуют методы, позволяющие решить эту проблему.

Для задачи сейсмической томографии необходимо строить лучи, соединяющие источники с приёмниками, то есть много раз решать задачу двухточечного трассирования. Решение двухточечной задачи является более сложной задачей. Естественный способ её решения - метод пристрелки, суть которого заключается в многократном решении задачи Коши для источника с целью подбора направления для которого луч попадёт в приёмник [1], [2]. Широкое распространение получили методы изгиба лучей, позволяющие подбирать геометрию луча для фиксированной пары источник-приёмник с помощью минимизации функционала Ферма [3],[4],[2]. Плохая устойчивость в средах с большими контрастами скорости и большие вычислительные затраты не позволяют применять традиционные алгоритмы двухточечного трассирования в сложных трёхмерных средах [1],[5].

Конечноразностные методы решения [6],[7] уравнения эйканала лишены недостатков, присущих методам двухточечного трассирования. Для того чтобы решить прямую кинематическую задачу, то есть вычислить времена прихода волны, необходимо решить уравнение эйканала и для этого не обязательно строить лучи. После того, как в некоторой области уже известны времена прихода, построение лучей представляет собой уже более простую задачу.

В нашей работе рассматриваются различные методы численного решения уравнения эйканала для изотропных и анизотропных упругих сред и предлагаются алгоритмы решения двухточечной задачи трассировки лучей. Приводятся примеры расчётов времён и лучей для изотропной среды с высокими контрастами скорости и трансверсально изотропной среды.

Литература

- [1] Peryra V., Lee W.H.K., Keller H.B. Solving two-point seismic-ray tracing problems in a heterogeneous medium. //Bull. Seismol. Soc. Am. - 1980. - V.70. - P.79-99.
- [2] Sun, Y. Ray tracing in 3-D media by parameterized shooting. //Geophys. J.Int. - 1993. - V.114, - P.145-155.
- [3] Um J. and Thurber C. A. fast algorithm for two-point seismic ray tracing. //Bull. Seismol. Soc. Am. - 1987. - V.77. - P.972-986.
- [4] Moser T.J., G.Nolet and R.Snieder. Ray bending revisited. //Bull. Seismol. Soc. Am. - 1992. - V.82. - P.259-288.
- [5] Thurber, C.H. and E.Kissling. Advances in travel-time calculations for 3-D structures. // "Advances in seismic event location". Kluwer Academic Publishers. - 2000. - P.71-99.
- [6] Sethian J.A. Fast marching level set method for monotonically advancing fronts. //Proc. Natl. Acad. Sci. USA. - 1996. - V.93. - P.1591-1595.
- [7] Jianliang Qian and W.Symes. Finite-difference quasi-P traveltimes for anisotropic media. //Geophysics. - 2002. - V.67. - n.1. - P.147-155.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ М. М. ЛАВРЕНТЬЕВА

М. С. Серикбол

Новосибирский Государственный Университет

В докладе рассматривается численный метод решения системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{m,n}q_n = f_m \quad (1)$$

на основе метода регуляризации М.М. Лаврентьева

$$B_{n,n}q_n + A_{m,n}q_n = f_{\delta,m} \cdot \quad (2)$$

Здесь $B_{n,n}$ – некоторая заданная положительно определенная матрица.

Рассмотрим случай, когда A – симметричная положительно полуопределенная матрица. Перейдем к регуляризованной системе

$$(A + \alpha I)q = f + \alpha q^0 \quad (3)$$

где α – положительный параметр, I – единичная матрица, q^0 – пробное решение, т. е. некоторое приближение к искомому решению.

При принятых условиях система (3) имеет единственное решение q^α , которое сходится при $\alpha \rightarrow 0$ к нормальному относительно q^0 решению q_n^0 исходной системы (1).

Приводятся результаты численных расчетов.

Литература:

Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск. Сибирское Научное Издательство, 2009, 457 с.

Применение анализа сингулярного разложения для исследования обратной динамической задачи сейсмоки

*И.Ю. Сильвестров, В.А. Чеверда
Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН*

В данной работе рассматривается численное решение обратной задачи динамической теории упругости, которая заключается в определении коэффициентов соответствующей системы дифференциальных уравнений по дополнительной информации о режиме колебаний, записанной в некоторых точках среды. Областью применения этой задачи, которая будет рассматриваться в работе, является определение внутреннего строения земной коры по данным сейсмических наблюдений в целях разведочной геофизики.

Одним из стандартных подходов к численному решению поставленной задачи является ее представление в виде нелинейного операторного уравнения, в правой части которого стоят данные наблюдений[1]. Оператор при этом неявно задается уравнениями динамической теории упругости, а неизвестными величинами являются упругие константы в каждой точке среды, такие как, например, скорости продольных и поперечных волн и плотность. Решение этого нелинейного уравнения в смысле наименьших квадратов ищется градиентными методами, либо методами типа Ньютона. В последнем случае организовывается итерационный процесс, на каждом шаге которого решается линейная задача, оператором которой является производная по Фреше исходного нелинейного оператора. Основная проблема при этом заключается в компактности возникающей производной, что означает некорректность задачи. При численном решении это проявляется в очень плохой обусловленности матрицы системы и, следовательно, в неустойчивости решения относительно помех в данных. Кроме того, присутствие в сингулярном спектре очень малых чисел означает, с точки зрения машинных вычислений, наличие у матрицы ненулевого ядра, что проявляется в неединственности решения. Как известно, компонентной решения, которая может быть восстановлена с заданной точностью при известном уровне помех в данных, является проекция искомого решения на базис из правых сингулярных векторов, соответствующих большим сингулярным числам[2]. В силу этого анализ сингулярного разложения линеаризованного оператора является мощным инструментом для исследования свойств обратной задачи и для выбора путей ее решения.

В данной работе будет проведен такой анализ для случая двух систем наблюдений, используемых в разведочной сейсморазведке – вертикальное сейсмическое профилирование (ВСП) с выносным источником и межскважинное просвечивание. Изучая сингулярный спектр линеаризованного оператора, будут обоснованы в рамках одного подхода все эффекты, наблюдаемые при практическом решении обратной задачи, такие как сложность определения гладкой (трендовой) составляющей решения, влияние выбора параметризации среды на достоверность решения задачи, невозможность определить некоторые из упругих констант, например плотность. При этом будут определены наборы параметров, восстановление которых возможно в рассматриваемых системах наблюдений, а также изучен характер получаемого решения в зависимости от уровня помех во входных данных.

[1] Bamberger A., Chavent G., Lailly P. 1979. About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations. Application to the interpretation of seismic profiles. Appl. Math. Optim, 5, 1–47.

[2] Clement F., Khaidukov V., Kostin V. and Tcheverda V. 1998. Linearized inversion of multi-offset data for vertically-inhomogeneous background. Journal of Inverse and Ill-posed Problems 6, 455–477.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА¹

С.В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
E-mail: solodusha@isem.sei.irk.ru

Полиномиальное уравнение

$$\sum_{m=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(s_i) ds_i = f(t), \quad t \in [0, T], \quad N = 2, 3 \quad (1)$$

возникает в приложениях, когда нелинейная динамическая система типа вход-выход аппроксимируется полиномом Вольтерра N -ой степени, входное возмущение $x(t)$ является скалярной функцией времени, ядра Вольтерра K_m (симметричные по переменным s_1, \dots, s_m) идентифицированы тем или иным способом (например, по методике [1], [2]) и ставится задача отыскания входного сигнала $x(t)$, которому соответствует заданный (желаемый) выход $f(t)$.

В случае нескольких входов разной физической природы, так что $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$, (1) включает дополнительные слагаемые, отражающие вклад в выходной сигнал одновременного изменения двух, трех и т.д. компонент вектор-функции $x(t)$.

Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Одна из типовых задач автоматического управления техническими (энергетическими) объектами связана с определением управляемого входного сигнала, для определенности $x_1(t)$, по известному $x_2(t)$ и заданному выходу $f(t)$. Рассмотрим наиболее интересный для приложений случай $N = 2$. Для простоты положим $K_{22} = 0$ (это выполняется, в частности, для некоторых моделей теплофизических процессов). Теперь вместо (1) имеем

$$\int_0^t \tilde{K}_1(t, s_1) x_1(s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_{11}(t, s_1, s_2) x_1(s_1) x_1(s_2) ds_1 ds_2 = \tilde{f}(t), \quad (2)$$

$$\tilde{K}_1(t, s_1) = K_1(t, s_1) + \int_0^t K_{12}(t, s_1, s_2) x_2(s_2) ds_2, \quad \tilde{f}(t) = - \int_0^t K_2(t, s_1) x_2(s_1) ds_1 + f(t), \quad t \in [0, T].$$

Согласно [3] - [8], основная специфика уравнений вида (1), (2) связана с локальностью области существования его вещественного непрерывного решения.

Пусть

$$\lambda = \max_{0 \leq t \leq T} |x_2(t)|, \quad k_1 = \min_{0 \leq t \leq T} |K_1(t, t)|, \quad k_2 = \max_{0 \leq t \leq T} |K_2(t, t)|, \quad F = \max_{0 \leq t \leq T} |f'(t)|, \quad L_i = \max_{0 \leq t \leq T} |K'_{1i}(t, s)|,$$

$$M_{11} = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |K_{11}(t, t, s)|, \quad M_{12} = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} \{|K_{12}(t, t, s), K_{12}(t, s, t)\}, \quad L_{1i} = \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T} |K'_{1i}(t, s_1, s_2)|, \quad i = 1, 2.$$

Не уменьшая общности, примем $k_1 = 1$. Дифференцируя (2) и переходя к оценке по модулю, имеем:

$$|x_1(t)| \leq \tilde{F} + \tilde{K}_1 \int_0^t |x_1(s)| ds + 2M_{11} |x_1(t)| \int_0^t |x_1(s)| ds + L_{11} \left(\int_0^t |x_1(s)| ds \right)^2 + M_{12} \lambda T |x_1(t)|, \quad (3)$$
$$\tilde{F} = F + k_2 \lambda + L_2 \lambda T, \quad \tilde{K}_1 = L_1 + L_{12} \lambda T + \lambda M_{12}.$$

Следуя [5]-[11], введем следующее

Определение. Оценка непрерывных решений неравенства (3)

¹ Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00377

$$|x_1(t)| \leq \varphi^*(t), \quad t \in [0, T], \quad T < T^*, \quad (4)$$

неулучшаема, если $\varphi^*(t)$ – непрерывное решение уравнения

$$\varphi(t) = \tilde{F} + \tilde{K}_1 \int_0^t \varphi(s) ds + 2M_{11} \varphi(t) \int_0^t \varphi(s) ds + L_{11} \left(\int_0^t \varphi(s) ds \right)^2 + M_{12} \lambda T \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

и T^* нельзя заменить на $T^{**} > T^*$.

Заменой $\theta(t) = \int_0^t \varphi(s) ds$ уравнение (5) сводится к эквивалентной задаче Коши

$$\theta'(t) = \frac{\tilde{F} + \tilde{K}_1 \theta(t) + L_{11} \theta^2(t)}{1 - 2M_{11} \theta(t) - M_{12} \lambda T}, \quad \theta(0) = 0, \quad 1 - M_{12} \lambda T > 0, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

решение $\theta(t)$ которой может быть выражено в явном виде через W - функцию Ламберта (под символом $W(z)$ ниже будем понимать главную вещественную ветвь функции Ламберта, которая определена при всех $z \in [-e^{-1}, \infty)$ и аналитична в нуле $W(0) = 0$).

Например, при $L_1 = L_2 = L_{11} = L_{12} = 0$ (ядра K_1, K_2, K_{11}, K_{12} не зависят от t) решение задачи Коши (6) имеет следующий вид:

$$\theta(t) = -\frac{\lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \tilde{F}}{2\lambda M_{12} M_{11}} \cdot W(z(t)) - \frac{\tilde{F}}{\lambda M_{12}}, \quad (7)$$

где

$$z(t) = -\frac{2M_{11} \tilde{F}}{\lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \tilde{F}} \exp\left(\frac{\lambda^2 M_{12}^2 t - 2M_{11} \tilde{F}}{\lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \tilde{F}}\right), \quad t \in [0, T^*), \quad (8)$$

решение (5)

$$\varphi^*(t) = \theta'(t) = -\frac{\lambda M_{12}}{2M_{11}} \frac{W(z(t))}{1 + W(z(t))}, \quad (9)$$

где $z(t)$ есть (8), а из условия $z(t) \geq -e^{-1}$ получаем формулу для определения T^* :

$$T^* = \frac{\alpha}{\lambda^2 M_{12}^2} \ln\left(\frac{\alpha}{2M_{11}}\right) - \frac{\alpha}{\lambda^2 M_{12}^2} (\ln \tilde{F} + 1) + \frac{2M_{11} \tilde{F}}{\lambda^2 M_{12}^2}, \quad \alpha = \lambda M_{12} (1 - M_{12} \lambda T) + 2M_{11} \tilde{F}. \quad (10)$$

Принцип сжимающих отображений в рассматриваемом случае приводит к оценке

$$T < \min\left[\frac{r}{2\lambda M_{12} (r + \tilde{F}) + 2M_{11} (r + \tilde{F})^2}, \frac{1}{2M_{12} \lambda + 4M_{11} (r + \tilde{F})}\right]. \quad (11)$$

В (11) первая составляющая связана с условием перевода в себя оператором $V(x_1(t))$ шара S_r в $C_{[0, T]}$ с центром в $\tilde{f}'(t)$, вторая – с условием сжатия.

Пусть в (5) $\lambda = \tilde{F} = M_{11} = \frac{1}{2} M_{12} = 1$. Тогда по (7)–(11), с учетом $W(-ce^{-c}) = -c$, получаем $z(0) = -\frac{1}{2(1-T)} e^{-\frac{1}{2(1-T)}}$, $\theta(0) = -(1-T) \cdot W(z(0)) - \frac{1}{2} = 0$, $\varphi^*(0) = \frac{1}{1-2T}$, так что условие Коши в

(6) и равенство $\varphi^*(0) = \frac{\tilde{F}}{1 - M_{12} \lambda T}$, вытекающее из (5), выполняются. Максимум правой час-

ти (11) равен $\frac{1}{8+4\sqrt{3}} \approx 0,0669$, а формула (10) дает $T^* = (1-T) \ln(2-2T) - \frac{1}{2} + T$. Легко убе-

диться, что $\theta(T^*) = \frac{1}{2} - T$ и $\varphi^*(T^*) = \infty$, откуда и следует, что T^* в (4) нельзя заменить на $T^{**} > T^*$.

Основная цель работы – рассмотреть прикладные и теоретические аспекты численного решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода (2) применительно к задаче исследования нелинейных процессов теплообмена, введенной в [9], [10].

Согласно [9], зависимость возмущения энтальпии $\Delta i_{et}(t)$ (кДж/кг) теплоносителя на выходе теплообменника от возмущения расхода теплоносителя $\Delta D(t)$ (кг/с) и возмущения энтальпии на входе $\Delta i_{in}(t)$ (кДж/кг), $t \in [0, T]$ имеет следующий вид:

$$\Delta i_{et}(t) = \frac{Q_0 \lambda_1 \lambda_2}{D_0 (\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \Delta D(\eta) \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon} & -e^{-\lambda_2 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon} \\ -e^{-\lambda_1 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon} & e^{-\lambda_2 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon} \end{pmatrix} d\eta + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{G_w (\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t D(\eta) \Delta i_{in}(\eta) \begin{pmatrix} -\lambda_1 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon & -\lambda_2 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon \\ \gamma_1 e^{-\lambda_1 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon} & -\gamma_2 e^{-\lambda_2 \int_0^\eta D(\varepsilon) d\varepsilon} \end{pmatrix} d\eta. \quad (12)$$

В (12) D_0 и Q_0 – стационарные значения расхода воды (кг/с) и теплоподвода (кВт) соответственно, $D(t) = D_0 + \Delta D(t)$, G_w – полная масса теплоносителя, γ_1 и γ_2 – константы, λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения для некоторой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Изложенный выше способ определения T^* был внедрен в программный комплекс «Динамика», позволяющий проводить идентификацию и тестирование (2) применительно к математической модели теплообменного аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Apartsyn A.S. On Some Identification Method for Nonlinear Dynamic Systems / A.S. Apartsyn // ISEMA-92. – Shenzhen, China. – 1992. – P. 288-292.
2. Апарцин А.С. О математическом моделировании нелинейных динамических систем рядами Вольтерра / А.С. Апарцин, С.В. Солодуша // Электронное моделирование. – 1999. – Т. 21, № 2. – С. 3–12.
3. Apartsyn A.S. On numerical solution of the multilinear Volterra equations of the first kind / A.S. Apartsyn, E.V. Markova // Proc. Of the Intern. Conf. On Computational Mathematics, Pt. 2, Novosibirsk. – 2002. – P. 322-326.7.
4. Апарцин А.С. О билинейных уравнениях Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Оптимизация, управление, интеллект. – 2004. – Т. 2(8). – С. 18–26.
5. Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №. 2. – С. 118–125.
6. Апарцин А.С. К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода / А.С. Апарцин // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – Т. 1(9). – С. 5–27.
7. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы / Апарцин А.С. // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. Специальный выпуск, посвященный столетию со дня рождения проф. В.В. Васильева. – Иркутск: Госуниверситет, 2007. – № 1. – С. 13–41.
8. Апарцин А.С. Полилинейные уравнения Вольтерра I рода и некоторые задачи управления / А.С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 3–16.
9. Таиров Э.А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем / Э.А. Таиров // Изв. АН СССР. – Энергетика и транспорт. – 1989. – №. 1. – С. 150–156.
10. Апарцин А.С. Применение интегро-степенных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников / А.С. Апарцин, Э.А. Таиров, С.В. Солодуша, Д.В. Худяков // Изв. РАН. – Энергетика. – 1994. – №. 3. – С. 138–145.

Восстановление формы импедансного рассеивателя с заданной фазовой характеристикой

Соппа М.С.

Новосибирский государственный архитектурно – строительный университет (Сибстрин)
soppa@ngs.ru

Рассматривается численное решение обратных задач теории дифракции электромагнитных волн, когда известна лишь фазовая функция диаграммы рассеяния. Отражающие свойства цилиндрической поверхности S описываются импедансными граничными условиями. Используемая математическая модель включает в себя двумерное уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in D,$$

с граничным условием:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - i \xi u_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S,$$

где W – импеданс поверхности, $\xi = k \frac{W_0}{W}$, $W_0 = 120 \pi = \sqrt{\mu / \varepsilon}$ – волновое сопротивление свободного пространства, а u_0 – решение в случае идеально проводящей поверхности S . Граничное условие имеет тот же порядок асимптотической точности по отношению к строгому условию сопряжения, как и обычно используемое условие Леонтовича.

Требуется найти функцию $r(\psi)$, форму рассеивателя, обеспечивающую приближение с достаточной точностью к заданной фазовой диаграмме рассеяния $\theta_g(\varphi)$, $\varphi \in \{\varphi_i, i = 1, \dots, m\}$, где φ – полярный угол, в смысле минимума среднеквадратичного отклонения

$$J = \sum_{i=1}^m |\theta(\varphi_i) - \theta_g(\varphi_i)|^2 \rightarrow \min_{r(\psi)},$$

где $\theta(\varphi) = \arg(u(x, y) - u_l)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, $y/x = \operatorname{tg} \varphi$, $\theta(\varphi)$ – фазовая функция диаграммы рассеяния поверхности S , $u = H_z(x, y)$, u_l – поле падающей плоской волны.

Для решения обратной задачи делается переход к интегральным уравнениям. Промежуточным этапом решения основной задачи является восстановление распределения импеданса при фиксированной форме объекта. В случае заданной фазовой функции это приводит к линейному интегрооператорному уравнению. После дискретизации и регуляризации строится оператор G , позволяющий по заданной фазовой диаграмме рассеяния найти распределение поверхностного импеданса.

Обратная задача восстановления формы рассеивателя решается с использованием метода искусственного «погружения» рассматриваемой задачи в более общую, когда искомым (помимо геометрии поверхности) является и ее поверхностный импеданс. Построенный выше оператор G позволяет перейти к нелинейному операторному уравнению, которое допускает эффективное численное решение методом Ньютона. Предложенные вычислительные алгоритмы могут быть применены для решения практических задач по локализации объектов и распознаванию их формы по данным электромагнитного рассеяния.

Литература

1. Соппа М.С. Восстановление формы импедансного рассеивателя в случае Е-поляризованной электромагнитной волны // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005.- Т. VIII.- № 2.- С. 152-158.

О решении задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения методом проекционной регуляризации

Е.В.Табаринцева

Южно-Уральский государственный университет
Челябинск

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au + f(u), \quad t \in [0, T]; \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A : H \rightarrow H$ - линейный положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, плотной в H ; $\varphi \in H$ - заданный элемент; $f : H \rightarrow H$ - отображение, удовлетворяющее условию Липшица:

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

для всех $u_1, u_2 \in H$; элемент $u_0 = u(t_0)$ требуется определить ($0 < t_0 \leq T$).

В силу сформулированных выше условий на оператор A задача (1) поставлена некорректно.

Рассмотрим множество

$$M = \{u \in D(A^m) : \|A^m u\| \leq r\}$$

($m > 0$).

Пусть при заданном начальном условии $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \in H$, существует точное решение u_0 задачи (1) такое, что $u_0 \in M$, но элемент φ_0 не известен, а вместо него даны δ -приближение $\varphi_\delta \in H$ и уровень прогрешности δ такие, что $\|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \delta$. По исходным данным (δ, φ_δ) требуется построить устойчивое приближенное решение задачи (1) и оценить его отклонение от точного решения.

Обозначим через $\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$ разложение единицы, порожденное оператором A . Пусть A_α - линейный ограниченный оператор в H , определяемый формулой

$$A_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой задачи (1) рассмотрим (корректно поставленную) задачу

$$\begin{aligned} \frac{du^\alpha(t)}{dt} &= A_\alpha u^\alpha(t) + f(u^\alpha(t)), \quad t \in [0, T]; \\ u^\alpha(0) &= \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим $u^\alpha = u^\alpha(t_0)$, где $u^\alpha(t)$ - решение задачи (2); $u_\delta^\alpha = u_\delta^\alpha(t_0)$, где $u_\delta^\alpha(t)$ - решение задачи (2) с приближенным начальным условием. В качестве приближенного решения задачи (1) рассмотрим элемент

$$u_\delta^{\alpha(\delta)} = P_{\alpha(\delta)} \varphi_\delta \quad (3)$$

при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$.

Оптимальный выбор параметра регуляризации. Параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выберем из условия минимальности величины

$$\Delta(\alpha, \delta) = \sup\{\|u_\delta^\alpha - u_0\| : u_0 \in M, \|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \delta\},$$

характеризующей точность метода приближенного решения задачи (1), определенного формулой (3). Таким образом, оптимальное значение параметра регуляризации $\alpha_{opt} = \alpha_{opt}(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\delta t e^{\alpha_{opt} t_0} = \frac{mr}{(\alpha_{opt})^{m+1}}$$

Теорема 1. Существуют постоянные C_1, C_2 такие, что

$$\frac{C_1}{(\ln(1/\delta))^m} \leq \Delta(\alpha_{opt}(\delta), \delta) \leq \frac{C_2}{\ln(1/\delta)^m}$$

Из теоремы 1 и оценки погрешности оптимального метода решения задачи (1) на множестве M (см. [2]) следует оптимальность по порядку метода проекционной регуляризации на множестве M .

Выбор параметра регуляризации по принципу невязки. Выберем значение параметра регуляризации $\alpha^* = \alpha^*(\delta)$ из условия

$$\|v_\delta^{\alpha^*} - \varphi\| = \delta,$$

где v_δ^α является решением линейной (корректно поставленной) задачи

$$(v_\delta^\alpha(t))' = -Av_\delta^\alpha(t);$$

$$v_\delta^\alpha(0) = u_\delta^\alpha$$

при $t = t_0$.

Выполняется

Теорема 2. Существует постоянная C_3 такая, что

$$\Delta(\alpha^*(\delta), \delta) \leq \frac{C_3}{\ln(1/\delta)^m}$$

Адаптивный выбор параметра регуляризации На практике при решении нелинейных некорректно поставленных задач ряд преимуществ имеют адаптивные схемы выбора параметра регуляризации (см. [3]). Рассмотрен вариант адаптивного выбора параметра регуляризации в методе проекционной регуляризации (3). Обозначим $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\delta)$ значение параметра регуляризации, выбранное с помощью рассмотренной адаптивной схемы.

Теорема 3. Существует постоянная C_4 такая, что

$$\Delta(\tilde{\alpha}(\delta), \delta) \leq \frac{C_3}{\ln(1/\delta)^m}$$

Метод проекционной регуляризации решения линейных некорректно поставленных задач рассматривался в работе [1].

Литература

1. В.П.Танана. О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач // Сибирский журнал индустриальной математики, 2002, т.5, N4(12)
2. Е.В.Табаринцева. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения // СибЖВМ, 2005, т.8, N3, с.259-271
3. S.Pereverzev and E.Schock. On the adaptive selection of the parameter in the regularization of ill-posed problems // SIAM J.Numer.Anal., Vol.43, N5, pp 2060-2076
4. А.М.Ильин. Линейные неограниченные операторы. Спектральное разложение. Екатеринбург, изд. Уральского гос. ун-та, 2007
5. А.Куфнер, С.Фучик. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ.

В.В.Филатов (Сибирский научно-исследовательский институт геологии, геофизики и минерального сырья, ФГУП "СНИИГГиМС", г.Новосибирск)

Традиционные постановки обратных задач в геофизике обычно имеют определенные ограничения, связанные с выбором модели среды и систем уравнений, действующих в этой модели. Как правило, рассматриваются кусочно-однородные среды и некоторые уравнения с соответствующими граничными условиями. Таким образом, обратная задача может быть записана как задача определения неизвестных коэффициентов некоторого дифференциального оператора или как задача определения системы сторонних источников, в качестве которых могут выступать неоднородности среды.

Например, рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{j}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

в которой $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$ – матрицы третьего порядка, зависящие от координат.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}), \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_{ij}), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$$

Причем $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}$ положительно определены, а матрица $\boldsymbol{\sigma}$ – неотрицательна. Обратная задача в такой модели среды трактуется как задача определения матриц $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$ в нижнем полупространстве, моделирующем область земных недр.

В такой постановке в задаче отсутствует единственность и практически приходится оперировать с так или иначе упрощенными моделями среды (например, двумерными или кусочно-однородными) и постановками обратных задач.

Таким образом, фактически речь идет о квазирешении обратной задачи, т.е. о некотором решении из выбранного модельного класса, которое лучше всего согласуется с результатами наблюдений. Такое решение существует всегда и, на основе анализа прямых задач геоэлектрики, можно вывести систему общих критериев, устанавливающих совместимость реального поля с моделью, используемой для его интерпретации. Как правило, используется критерий, основанный на определении невязки между наблюдаемым полем и полем, отвечающим квазирешению задачи.

Реальная ситуация еще сложнее. Электрические параметры среды часто не являются определяющими при решении конкретных геологических задач, как, собственно говоря, и многие другие параметры, определяемые геофизикой. Например, при нефтепоисковых работах основной интерес представляют коэффициенты пористости и проницаемости. Эти величины характеризуют гетерогенность среды, а обычные уравнения математической физики, с помощью которых формулируются стандартные обратные задачи геофизики, как правило, записываются для сплошных сред.

Таким образом, можно отметить, что для задач геофизики актуально:

- рассматривать постановки обратных задач, учитывающие особенности распространения полей в гетерогенных средах;
- рассматривать задачи определения параметров гетерогенных сред (например таких, как пористость и проницаемость).

Один из возможных способов учета гетерогенности базируется на использовании модели фрактальности среды. Известно, что все реальные геологические среды фрактальны, а формально учесть фрактальный характер геометрии среды можно с помощью введения уравнений в дробных производных.

Так, в случае фрактальной структуры среды уравнения для компонент электромагнитного поля могут быть записаны в форме дифференциальных уравнений с дробными производными

$$\mu_0 A_\nu \sigma \frac{\partial^\alpha \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^\alpha} = \Delta \bar{\mathbf{E}},$$

$$\mu_0 A_\nu \sigma \frac{\partial^\alpha \bar{\mathbf{H}}}{\partial t^\alpha} = \Delta \bar{\mathbf{H}}.$$

Здесь A_ν - множитель, зависящий от фрактальной размерности ν . Отметим, что при $\alpha = 1$ имеем обычное для квазистационарного приближения уравнение диффузии, но во фрактальной среде ($\alpha \neq 1$) получаем уравнение описывающее или процесс, занимающий промежуточное положение между волнами и диффузионным движением, или процесс сверхмедленной диффузии.

Однако при этом возникает проблема нахождения порядка дробной производной, определяемой фрактальной размерностью среды. Существует способ такого нахождения, основанный на петрофизических исследованиях. Наглядно это можно увидеть на примере процесса аномальной диффузии, к которому при определенных условиях можно свести и распространение электромагнитного поля.

Показатель дробной производной в уравнении аномальной диффузии $u_t^\alpha = Lu$ на фрактальном множестве F определяется величиной $\alpha = \frac{2}{2+\theta}$, где θ - индекс связности множества F . Эта величина является параметром, характеризующим топологию пустот F (или структуру поровых каналов).

Параметр $d_\theta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{2+\theta}$ имеет смысл хаусдорфовой размерности геодезических линии на F (то есть линий определяющих кратчайшее расстояние на множестве). Именно по таким линиям идет процесс распространения тока.

В определенных случаях можно получить простую связь фрактальной характеристики извилистости D_l поровых каналов с размерностью геодезических на фрактальном множестве $D_l = d_\theta$, а следовательно определить конкретную величину $\alpha = 1/D_l$, и, соответственно вид уравнения аномальной диффузии.

Величина D_l допускает экспериментальное определение, что открывает дополнительные возможности при моделировании. Исследования, связанные с экспериментальным изучением фрактальных характеристик осадочных пород, показывают, что D_l в различных условиях может достигать величин от 1.11 до 1.5.

Что касается задачи определения таких параметров как пористость и проницаемость по наземным данным, то ее решение, как правило, требует привлечения различных данных и не реализуется в рамках одного метода. Возможна формальная постановка такой задачи путем объединения в единую систему уравнений различных типов, с учетом того, что в гетерогенных средах и электрические, и скоростные, и плотностные параметры зависят от пористости. К сожалению, неустойчивость решения обратных задач для разных геофизических методов не позволяет гарантировать достаточно точный результат. Еще сложнее дело обстоит с проницаемостью.

В качестве одного из вариантов решения этой проблемы предлагается рассмотреть вместо обратной задачи задачу прогноза фильтрационно-емкостных параметров по комплексу геофизических данных. Фактически, при этом мы подменяем обратную задачу для системы традиционных уравнений, описывающих различные геофизические поля, на обратную задачу для некоторой динамической системы, связывающей измеряемые и искомые параметры. Подход базируется на реконструкции аттракторов динамических систем, в результате воздействия которых образовались прогнозируемые геологические объекты. Напомним, что аттрактор - это совокупность точек отображающих эволюцию системы в пространстве параметров.

Такой аттрактор, создавая фазовый портрет системы, вскрывает дополнительные латентные связи между параметрами, поведение которых он отражает. Использование этих связей позволяет по-новому сформировать прогнозный параметр. Кроме того, этот подход дает возможность ответить на вопросы, связанные с оптимизацией количества и состава признаков, используемых при прогнозе.

В частности, он позволяет или предсказать, на основе моделирования, поведение системы, то есть, дать прогноз развития интересующего нас объекта или найти объекты, поведение которых аналогично известным, то есть, дать прогноз наличия таких объектов на исследуемой территории. Первый вариант возможен в случае реального наблюдения динамики изменения состояния системы (мониторинговые наблюдения), второй – в случае наличия комплекса данных, позволяющий однозначно идентифицировать искомый объект по комплексу косвенных признаков.

При наличии определенной информации можно прогнозировать не только зоны перспективные на поиски углеводородов, но конкретные показатели, характеризующие перспективность этих зон с точки зрения запасов углеводородного сырья.

Схема, базирующаяся на использовании реконструированных аттракторов, была применена к задаче прогнозирования таких параметров, как проницаемость и суточный дебит нефти и газа по комплексу геофизических данных на тестовом полигонном участке в Восточной Сибири. Комплекс включал в себя данные гравиразведки, магниторазведки, электроразведки ЗСБ, гаммаспектрометрии и информацию о положении основных горизонтов, полученную по данным сейсморазведки.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОБЛЕМЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА.

М.С. Хайретдинов

¹ИВМиМГ СО РАН- г.Новосибирск, marat@opg.sccc.ru

Введение.

К настоящему времени в мире созданы ряд глобальных и региональных информационных сетей, призванных для мониторинга природных и техногенных процессов в интересах защиты экологии окружающей среды, в социальных и научных интересах [1]. Одна из основных задач мониторинга сейсмических событий связана с восстановлением их параметров в очаге (географических координат, глубины, мощности, времени в очаге) по данным регистрации сейсмических сигналов с помощью сети сейсмических станций либо локальной сейсмической группы. Для высокоточного восстановления в работе рассматривается подход, основанный на одновременном решении обратных задач на этапе первичной обработки исходных сейсмических данных, а также на этапе обработки результатов первичного анализа. При этом анализируются различные методы решения обратных задач и проводится их сопоставительный анализ по точности и производительности вычислений.

Постановка задачи. Задача оценивания неизвестных параметров источника сводится к решению нелинейной системы условных уравнений [2]:

$$\vec{t} = \vec{\eta}(X, \theta) + \vec{\varepsilon} \quad (1)$$

где $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ – вектор времен пробега сейсмических сигналов, $\vec{\eta}(X, \theta)$ – N -мерный вектор вычисляемых времен пробега (теоретический годограф) или функция регрессии, $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ – вектор невязок, $\vec{\theta} = (x, y, z, v, t)^T$ – m -мерный вектор оцениваемых параметров, $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ – матрица координат датчиков (или точек излучения), N – число датчиков (или точек излучения). В качестве оцениваемых параметров выступают пространственные координаты источника- x, y, z , скоростная характеристика среды v и время в источнике t . В ряде случаев скорость в среде является известной. При оценивании параметров пользуются сведениями о распределении ошибок $\varepsilon_i = t_i(\vec{x}_i, \vec{\theta}) - \eta(\vec{x}_i, \vec{\theta})$. Будем в дальнейшем предполагать, что ε_i – взаимно независимые случайные величины, имеющие распределение с нулевым средним и заданными дисперсиями: $E\varepsilon_i = 0$, $E\varepsilon_i\varepsilon_j = \sigma_i^2\delta_{ij}$, $\sigma_i = \sigma(\vec{x}_i)$, δ_{ij} – символ Кронекера, $i = 1, 2, \dots, N$. Решение уравнения (1) сводится к решению обратной задачи. При этом точность решения зависит, в первую очередь, от ошибок оценивания вектора времен $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$, скорости v , шумов измерения $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$, выбора геометрии расстановки датчиков на дневной поверхности Земли. С учетом этого остановимся на рассмотрении вопросов создания вычислительной технологии для:

- обнаружения и измерения времен вступления волн на фоне внешних шумов;
- расчета параметров источника;
- отображение координат источника на цифровой карте местности.

¹ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №09-07-12075 офи-м, 10-07-00367

Дополнительные резервы, способствующие решению указанных задач на нижнем уровне сетей, связаны с выбором типов сейсмических датчиков, согласованных по своим частотным характеристикам с зондирующими импульсами от источников, с выбором мест размещения датчиков в районах с низким уровнем шумов и малым затуханием зондирующих колебаний в среде. Здесь эти вопросы не рассматриваются

По отношению к источникам импульсного типа, порождаемых техногенными процессами, погрешности определения времен пробега волн приближенно определяются дисперсией :

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_u}{2\Delta f(2E/N_0)} \quad (2)$$

Здесь τ_u – длительность волнового импульса, Δf – ширина его спектра, E/N_0 – отношение энергии импульса к спектральной плотности внешнего шума. Как следует из (2) уменьшение погрешности можно достичь за счет увеличения соотношения энергий сигнала и шума, расширения спектра частот Δf , занимаемого импульсом, а также за счет сжатия волнового импульса во времени путем приведения его к δ -образному импульсу. Ниже рассматриваются алгоритмы решения задачи минимизации погрешностей оценивания времен с учетом (2).

Повышение соотношения сигнал/шум и оценивание времен с помощью вейвлет-фильтрации. Алгоритм повышения соотношения сигнал/шум по отношению к волновым импульсам наиболее эффективно реализуется с помощью вейвлет-фильтрации, основанной на разложении одномерного импульсного (солитоноподобного) сигнала по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. В основе вейвлет-фильтрации лежит интегральное вейвлет-преобразование:

$$X(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{\tau, s}(t) dt \quad \text{где } f(t) \text{ - волновой импульс;} \quad \Psi_{\tau, s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right),$$

$$\tau, s \in R \quad \psi \in L^2(R) \quad (3)$$

Базис функционального пространства $L^2(R)$ может быть построен с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров – масштабного коэффициента s и параметра сдвига τ .

Особенность рассматриваемого подхода связана с тем, что эффективность использования вейвлет-фильтрации определяется согласованием базиса функционального пространства $L^2(R)$ в (4) с моделями волновых импульсов. На основе обработки экспериментальных данных было показано, что наиболее подходящими для аппроксимации сейсмических волновых импульсов являются вейвлеты Добеши [3]. В тоже время с учетом вариабельности форм волновых импульсов, получаемых от разного вида сейсмических источников, обнаружение и измерение выполняются в условиях априорной неопределенности о параметрах сейсмических волн. В качестве парадигмы шумоподавления с помощью вейвлет-фильтрации по отношению к сейсмическим колебаниям может быть успешно использована трехшаговая процедура Донохо-Джонстона [4]. Такая процедура основана на использовании универсального порога для выбора порядка разложения из вейвлетов Добеши, определяющего ошибку Вейвлет-фильтрации. Для вычисления времен вступления волн в автоматическом режиме предварительно необходимо найти огибающую полученного

сигнала в виде $A(t) = \sqrt{f^2(t) + f^{*2}(t)}$, где $f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{t-x} dx$ – преобразование Гильберта.

В качестве примера успешного использования рассмотренной вычислительной технологии на рис. 1 приводятся результаты обнаружения волновых импульсов от двух последовательно проведенных промышленных взрывов мощностью 4 и 12 тонн с задержкой между ними 52.843 с. Исходная запись их в полосе частот 1-10Гц приводится на рис. 2а. На рисунке в графическом виде отображается процесс обнаружения прихода волн с помощью вейвлет-преобразования. Выделенные фрагменты отображают моменты вступления сейсмических волн от первого и второго взрывов. Следует заметить, что первая волна на исходной сейсмограмме (Рис. 2а) не обнаруживается. Погрешность оценивания времен вступления оценивалась по калибровочным временам пробега волн для данного региона и составила 0.9%.

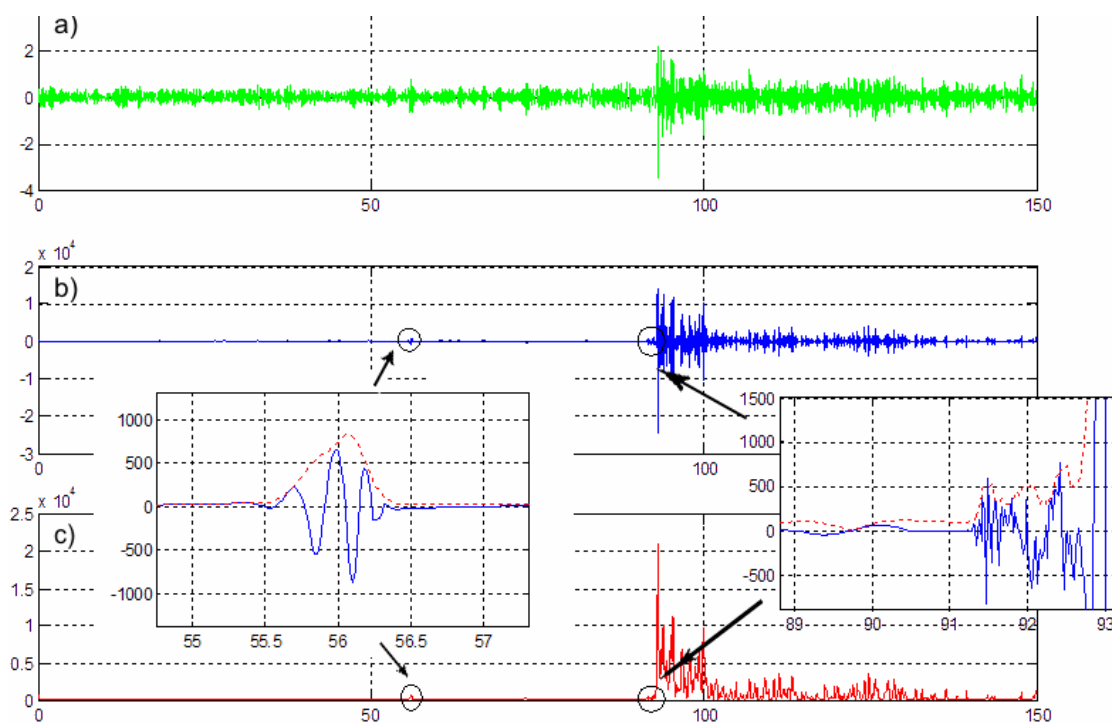


Рис. 1. Пример вычисления времен вступлений волн от двух последовательных взрывов:

(а) исходный сигнал, (б) сигнал после очищения от шума с использованием вейвлет-преобразования, (с) огибающая сигнала (пунктирная линия).

Сжатие волнового импульса. Как было показано в (2) погрешность оценивания времен вступлений волновых импульсов в числе прочих факторов также зависит от длительности волнового отклика. В связи с этим встает задача временного сжатия волнового импульса $f(t)$ на фоне внешнего шума $n(t)$ с использованием линейного оператора вида $y(t) = L[f(t) + n(t)]$ таким образом, чтобы в результате преобразования получить отклик, стремящийся к δ -образному импульсу.. Такое преобразование достигается с помощью соответствующего варианта обратной фильтрации Колмогорова-Винера. При этом импульсная функция обратного фильтра $h(i)$, $(i=1,2, \dots, N)$ определяется в результате решения интегрального уравнения вида:

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(i) \cdot [b_f(i-j) + b_n(i-j)] = b_f(-i) \quad (4)$$

Здесь $b_f(i)$, $b_n(i)$ - автокорреляционные функции волнового импульса и шума. Выражение (4) описывает систему линейных уравнений порядка N . Решение системы стандартными методами требует N^2 ячеек памяти для хранения матрицы коэффициентов, а затраты времени пропорциональны N^3 . Как известно, один из способов ускорения решения системы в случае высокого порядка N достигается с помощью алгоритма Левинсона, позволяющего сократить обе эти характеристики в N раз. Суммарная трудоемкость решения уравнения (4) составляет $O(N^2) + 2O(N \log N) + 2N$. Следует сразу заметить, что обратная фильтрация приводит к понижению помехоустойчивости выделения волнового отклика из-за возрастания шумов. Использование комбинации «обратная фильтрация-вейвлет фильтрация» позволяет достичь разумного компромисса. В качестве иллюстрации эффективности комбинированной фильтрации сигналов от техногенных взрывов можно отметить, что на экспериментальных данных удается достичь пятикратного уширения полосы частот, занимаемой волновым импульсом, и пятикратного повышения отношения сигнал/шум, что способствует уменьшению погрешности (2) приблизительно в 25 раз.

О восстановлении параметров источника. Задача оценивания параметров $\vec{\theta}$ в уравнении (1) решается на верхнем уровне иерархии сети и является частью т.н. регрессионного анализа, а ее решением служат оценки метода наименьших квадратов:

$$\vec{\theta} = \arg \min_{\vec{\theta} \in \Omega} Q(\vec{\theta}), \quad Q(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} (t_i - \eta(\vec{x}_i, \vec{\theta}))^2 \quad (5)$$

С точки зрения критериев точности оценивания параметров $\vec{\theta}$ и скорости сходимости к получаемым оценкам проанализированы различные методы решения уравнения (5) – итерационный метод Гаусса-Ньютона, основанный на линейной аппроксимации функции регрессии в окрестности точки $\vec{\theta}^k$ [2], метода псевдообращения (или обобщенного обращения), основанный на сингулярном разложении (*SVD*-разложении). Недостаток данного метода, как и других методов, связанных с обращением и умножением матриц, состоит в том, что он позволяет решать системы с небольшим числом неизвестных. Это обусловлено тем, что с ростом числа уравнений растут ошибки, связанные с умножением матриц; время счета растет пропорционально N^3 , память для хранения ковариационных матриц пропорциональна N^2 . В этом случае более эффективным оказывается итерационный метод оценивания Качмажа [6]. Пусть заданы дисперсии для входных параметров и для неизвестных. Тогда решение можно получить через следующую рекуррентную формулу оценивания:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^k + a_{ij} \frac{(\sigma_{xj}^2)^k}{\sigma_{ui}^2 + \sum_{k=1}^m a_{ij}^2 (\sigma_{xj}^2)^k} \Delta t_i^k, \quad \text{где } \Delta t_i^k = t_i - \eta_i(x^k), \quad k = i + n(l-1) \text{ – номер шага}$$

уточнения (не является показателем степени); i – порядковый номер уравнения; n – число уравнений в системе, j – порядковый номер неизвестного, m – число неизвестных; a_{ij} – коэффициент в i -ом уравнении j -го неизвестного. В случае нелинейной системы он будет зависеть от k ; $(\sigma_{xj}^2)^k$ – оценка дисперсии неизвестного на k -ом шаге; σ_{ui} – дисперсия ошибки измерения параметра u в i -ом уравнении.

Особенность данного метода состоит в том, что он не накапливает ошибок округления и позволяет решать системы с большим числом неизвестных. Сравнительный анализ обоих методов выполнен на примере решения задачи локации промышленных взрывов с помощью

набора из 15-ти пространственно распределенных сейсмодатчиков. Сравнение осуществлено по скорости сходимости оценок и точности локации, определяемой невязкой вычисленных координат источника по отношению к истинным. Было показано, что метод Качмажа дает более высокую точность определения положения источника при более низкой скорости сходимости в сравнении с *SVD*-разложением. В частности, если по методу Качмажа на 2000 итерациях невязка составляет 45м, то на 500 итерациях по *SVD*-разложению невязка равна 100м, причем дальнейшее увеличение количества итераций не приводит к уменьшению невязки.

Программная реализация вычислений на нижнем уровне иерархии сети. На данном уровне обработки данных стоит первоочередное требование, связанное с обеспечением высокой производительности вычислений. Это необходимо в условиях обработки регистрируемых данных в реальном масштабе времени. В связи с этим большие перспективы здесь открываются за счет использования средств вычисления на основе GPU-*Graphics Processing Unit* (Графическое Вычислительное Ядро). Применительно к реализации вышеприведенных алгоритмов обработки оценивались ускорения вычислений с применением видеокарты *NVIDIA GeForce 9400M*, содержащей 16 вычислительных блоков (это достаточно мало, современные видеокарты в среднем обладают сотнями вычислительных блоков). В этом варианте применения GPU до 256Мб памяти выделяется из системной. В качестве ОС на CPU использовалась *Windows Vista SP1*. Вычисления базируются на технологии *CUDA* (от англ «*Compute Unified Device Architecture*» – «Вычислительная Унифицированная Архитектура Устройств») от компании *NVIDIA*. В данном случае использовалась версия *CUDA SDK 2.2 code samples for Windows Vista 32-bit*.

При этих условиях показано, что на алгоритмах с высоким распараллеливанием обработки массивов данных порядка 10^6 достигается ускорение по производительности до одного порядка и более.

Заключение.

Рассматриваются основные задачи вычислительных технологий, лежащих в основе современных сейсмических мониторинговых сетей, предназначенных для слежения за природными и техногенными процессами. Рассмотрены алгоритмические подходы к оперативному решению задач мониторинга и пути их реализации, способствующие повышению точности и производительности вычислений на разных уровнях иерархии сетей.

Литература

1. Science Plan for a New Global Seismographic Network. Incorporated Research Institutions for Seismology. April 1984.
2. Khairtdinov M.S., Omelchenko O.K., Sedukhina G.F., Woskoboynikova G.M. A computing technology to determine the parameters of the borehole bottom and medium // Bull. Nov. Comp. Center, Math. Model. In Geoph. – 2005.– Iss.10. – P. 19-26.
3. Клименко С.М., Хайретдинов М.С. Программная система автоматизированной локации и визуализации сейсмических источников. Вестник НЯЦ РК, 2004, с.70-76
4. Donoho D.L., Johnstone I.M. Ideal spation adaptation via wavelet shrinkage//*Biometrika*,1994, 81, №3 P. 425-455
5. Д.Каханер, К.Моулер, С.Нэш. Численные методы и программное обеспечение. М.: «Мир», 2001, с.575
6. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М.: «Мир», с.288.

Итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах

П.А. Чистяков

Уральский государственный университет им А.М. Горького, г. Екатеринбург

Пусть X — равномерно выпуклое вещественное пространство, а Y — произвольное банахово вещественное пространство; заданы линейные непрерывные операторы $A \in L(X, Y)$ и $B \in L(X, Y^*)$ с областью определения X , действующие соответственно в пространства Y и Y^* .

Определение 1 Оператор A называется B -симметричным, если при любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle$.

Определение 2 Оператор A называется B -положительным (не строго), если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$, причем $\langle Ax, Bx \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $Ax = 0$.

Рассматривается задача решения операторного уравнения

$$Ax = y \quad (1)$$

с B -симметричным и B -положительным оператором. Предполагается, что множество его решений $S = \{x \in X \mid Ax = y\} \neq \emptyset$. Тогда среди этих решений можно выбрать нормальное решение \hat{x} наименьшей нормы. А именно, существует единственный элемент $\hat{x} \in S$, такой что $\|\hat{x}\| = \min_{x \in S} \|x\|$.

Описание итерационного алгоритма.

(1) Если $y = 0$, тогда $\hat{x} = 0$, и работа алгоритма закончена.

(2) Пусть $y \neq 0$, тогда выбираем произвольно параметры $p \in (1, +\infty)$, $C \in (0, 1)$, а также начальное приближение $x_0 = 0$. Положим $q := \frac{p}{p-1}$.

Для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ повторяем следующий шаг

(3) Положим $R_n := \|B^*(Ax_n - y)\|$. Если $R_n = 0$, то работа алгоритма закончена, в противном случае выбираем параметры согласно следующим правилам:

А) Для $n = 0$ примем $\mu_0 := Cq^{p-1}R_0^{-p}\langle y, B\hat{x} \rangle^{p-1}$;

Б) Для $n \geq 1$ возьмем

$$\lambda_n := \min \left\{ \rho_{X^*}(1), \frac{C \min\{R_n, \langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x}) \rangle\}}{2^q G_q \|x_n\| \max\{\|A\|, \|B\|\}} \right\},$$

здесь G_q — характеристическая константа из [4]. За счет равномерной гладкости пространства X^* можно выбрать параметр $\tau_n \in (0, 1]$, так чтобы $\rho_{X^*}(\tau_n) = \tau_n \lambda_n$. Положим $\mu_n := \tau_n \|x_n\|^{p-1} R_n^{-1}$.

Определим следующее приближение по правилу

$$x_{n+1} := J_{*q}(J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y)),$$

где $J_p : X \rightarrow X^*$ — дуальное отображение пространства X степени p , определяемое соотношениями $\|J_p(x)\| = \|x\|^{p-1}$, $\langle x, J_p(x) \rangle = \|x\|^p$, а $J_{*q} : X^* \rightarrow X^{**} = X$ — определяемое аналогично дуальное отображение сопряженного пространства степени q , являющееся обратным к J_p .

Теорема 1 Указанный алгоритм либо останавливается после конечного числа итераций на решении \hat{x} уравнения (1), либо определяет бесконечную последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся по норме пространства X к решению \hat{x} .

Список литературы

- [1] Landweber L. 1951 An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Am. J. Math. 73, 615-624
- [2] Schopfer F., Louis A. K., Schuster T. 2006 Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces. Inverse Problems, 22, 311-329
- [3] Schopfer F, Schuster T. 2009 Acceleration of the generalized Landweber method in Banach spaces via sequential subspace optimization. J. of Inverse and Ill-posed Problems, Vol 17, Num. 1, 2009, 91-99
- [4] Xu Z-B, Roach G.F. 1991 Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 157, 189-210

Численный метод решения обратной некорректной задачи определения размеров частиц методом лазерной доплеровской спектроскопии

А.С. Чубов

*Институт Теплофизики СО РАН;
Новосибирский государственный университет;
zooderz@gmail.com*

Для определения размеров частиц в субмикронном диапазоне используется метод лазерной доплеровской спектроскопии [1-3]. В суспензиях и эмульсиях частицы находятся в состоянии броуновского движения. Изучая автокорреляционную функцию флуктуаций когерентного света, рассеянного такими частицами, можно получить распределение коэффициентов диффузии, на основе которого можно вычислить размеры частиц по формуле Стокса-Эйнштейна:

$$R = \frac{kT}{6\pi\eta D}, \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии частиц в жидкости, η – вязкость жидкости, T – температура, k – постоянная Больцмана.

Для анализа корреляционной функции используются численные методы решения обратной некорректной задачи - интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b f(R) \exp\left(-\frac{k_e \cdot t}{R}\right) dR, \quad (2)$$

где искомая функция $f(R)$ задает распределения размеров частиц на интервале $[a, b]$, t – время корреляции, k_e – константна, зависящая от параметров эксперимента.

Целью работы является совершенствование численных методов решения обратной задачи для определения размеров частиц по характеристикам сигнала лазерного доплеровского спектрометра и реализация алгоритма с погрешностью, меньшей, чем у существующих аналогов. Существенным недостатком данных алгоритмов является то, что они не обладают достаточной разрешающей способностью для выявления пиков при распределении частиц по размерам в узком диапазоне (в отношении ниже, чем 1/3) и при сильном зашумлении входных данных [4]. В случае широко применяемого алгоритма CONTIN [5] они могут давать неверное решение для широких распределений [6].

Для решения поставленной задачи был предложен и реализован итерационный алгоритм, основанный на методе регуляризации Тихонова [7]. Используются две итерации. После первой проводится анализ полученного распределения для фильтрации ошибок, устранения паразитных пиков, уточнения количества пиков и их ширины. Отфильтрованное распределение используется на втором шаге алгоритма. Предложена новая процедура выбора параметра регуляризации. На основе предложенных подходов удалось повысить точность решения в несколько раз для данных с шумом 5-10%.

Предложенный численный метод решения обратной некорректной задачи использован в программном комплексе лазерного доплеровского спектрометра наночастиц в жидкости ЛАД-079, созданного в Институте теплофизики СО РАН, и внедренного в ряде научных и промышленных организаций России в 2009-2010 г.г.

Литература

1. Спектроскопия оптического смещения и корреляция фотонов / Под ред. Камминса Г. и Пайка Э.; Пер. с англ. - М.: Мир, 1978. - 584 с.
2. Меледин В.Г. Полупроводниковый лазерный доплеровский спектрометр-анемометр для диагностики наночастиц в растворах // Сборник трудов научной конференции "Химическая биология – Фундаментальные проблемы бионанотехнологии", посвященной 25-летию юбилею Института химической биологии и фундаментальной медицины СО РАН. - 10-14 июня 2009 года, г. Новосибирск. – ISBN 978-5-902700-16-6. – С. 39-40.
3. Чубов А.С., Шпольвинд К.В. Программируемый термостат лазерного доплеровского наножидкостного спектрометра // Физика: дополнительный сборник материалов XLVII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», 27-30 апр. 2009 / НГУ - Новосибирск, 2009. - С. 23-24.
4. Дюжева М.С., Клубин В.В., Использование метода динамического светорассеяния для измерения дисперсного состава многокомпонентных смесей монодисперсных латексов // Коллоид. Журн., 2003.- Т.65.- №5.- С. 619-623.
5. Provencher, S. W. CONTIN Users Manual, Version 2 // Max-Planck-Institute fu. r Biophysikalische Chemie: Gottingen, Germany, 1984.
6. Башурова В.С., Камха М.А., Пусеп А.Ю., Федоенко С.Г. Экспериментальные особенности исследования функции распределения дисперсной фазы методом автокорреляционной спектроскопии // Коллоид. Журн., 1993.- Т.55.- №1.- С.10-15.
7. Тихонов А.Н., Арсеньев В.Я. Методы решения некорректных задач. Учебное пособие для вузов. Изд. 3-е, исправленное. – М.: Наука, 1986.

The Ill-posed Cauchy Problem for Elliptic Complexes

A. Shlapunov ¹

Institute of Mathematics, Siberian Federal University, Krasnoyarsk

Key words: Elliptic differential complexes, ill-posed Cauchy problem, Carleman's formula

It is well-known that the Cauchy problem for an elliptic system A is ill-posed. However it naturally appears in applications: in Hydrodynamics (as the Cauchy problem for holomorphic functions), in Geophysics (as the Cauchy problem for the Laplace operator), in Elasticity theory (as the Cauchy problem for the Lamé system), in Electrodynamics (as the Cauchy problem for the Maxwell system), in Quantum Mechanics (as the Cauchy problem for Dirac operators) and so on, see, for instance, the book [1] and its bibliography. The problem was actively studied through the XX-th century (T. Carleman, V.A. Fok, F.M. Kuni, M.M. Lavrent'ev, V.K. Ivanov, V.A. Kondrat'ev, E.M. Landis, V.G. Maz'ya, V.P. Havin, M. Nacinovich, L.A. Aizenberg, A.M. Kytmanov, N. Tarkhanov and many others); it stimulated the development of the theory of conditionally stable problems.

Differential complexes appeared as compatibility complexes for overdetermined differential operators (see, for instance, [2]). Thus, the Cauchy problem for them is of special interest. One of the first problems of this kind was the Cauchy problem for the Dolbeault complex (the compatibility complex for the multidimensional Cauchy-Riemann system), see papers by A Andreotti and D.C. Hill. The interest to it was great because of the famous example by H. Lewy of differential equation without solutions, constructed with the use of the tangential Cauchy-Riemann operator. Recently new approaches (M. Nacinovich, B.-W. Schulze, N. Tarkhannov, J. Brinkschulte, D.C. Hill) to the problem were found in spaces of smooth functions.

However, it was understood at the middle of XX-th century, it is more natural to consider generalized formulations of boundary value problems for partial differential equations and to solve them in spaces of distributions (S.L. Sobolev, L. Schwartz and many others). Therefore we consider the Cauchy problem in spaces of distributions with some restrictions on growth in order to correctly define its traces on boundaries of domains (see, for instance, [3]). We present the approach developed in [4] to study the *homogeneous* Cauchy problem for overdetermined elliptic partial differential operators. But we consider the *non-homogeneous* Cauchy problem for elliptic complexes. The approach lead also to construction of the corresponding Carleman formulas (cf. [1], [4], [5]).

Differential complexes. Let X be a domain in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ with a smooth boundary ∂X and $E = X \times \mathbb{C}^k$ and $F = X \times \mathbb{C}^l$ be trivial vector bundles over X . Sections of E of class $\mathfrak{C}(U)$ over a set $U \subset X$ will be denoted by $\mathfrak{C}(U, E)$. We may identify it with a class of k -vector functions with components in $\mathfrak{C}(U)$. We write $\text{Diff}_m(X; E \rightarrow F)$ for the space of all the $(l \times k)$ -matrix linear partial differential operators with smooth coefficients and of order $\leq m$. An operator $A(x, D)$ is called elliptic, if its principal symbol $\sigma(A)(x, \zeta) : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^l$ is injective for all $(x, \zeta) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. A typical determined (i.e. with $l = k$) elliptic operator is the Laplace operator; typical overdetermined (i.e. with $l > k$) elliptic operators are the multidimensional Cauchy-Riemann system and Maxwell system of Electrodynamics. Our principal object to study will be a compatibility complex $\{A_i, E_i\}_{i=0}^N$ of partial differential operators over X for an elliptic system $A = A_0$, where $E_i = X \times \mathbb{C}^{k_i}$ are the trivial bundles over X and $A_i \in \text{Diff}_{m_i}(X; E_i \rightarrow E_{i+1})$ with $A_{i+1} \circ A_i \equiv 0$; We say that the complex $\{A_i, E_i\}_{i=0}^N$ is elliptic if the corresponding symbolic complex $\{\sigma(A_i, x, \zeta)\}$ is exact for all $(x, z) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. In particular, $\sigma(A_0)$ is injective away from the zero section of \mathbb{R}^n and $\sigma(A_{N-1})$ is surjective.

The Cauchy problem. Now let D be a bounded domain in X with a smooth boundary ∂D and Γ be an open (in the topology of ∂D) connected subset of ∂D . Fix a Dirichlet system $t = \bigoplus_{j=0}^{m-1} B_j$ of

¹The author was supported by RFBR grant 08-01-00844.

order $m - 1$ in a neighbourhood ∂D ; for instance, one may take $B_j = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j$, where $\frac{\partial}{\partial \nu}$ is the normal derivative with respect to ∂D . It is known [2] that t represent the Cauchy data with respect to A on ∂D . The Cauchy data τ_i with respect to the operators A_i can also be represented by a system of differential operators of order $m_i - 1$, but, generally speaking, these are not the Dirichlet ones (unless $i = 0$). For instance, if $m_i = 1$ then τ_i can be presented by $\sigma^*(A_i, x, \nabla \rho)\sigma(A_i, x, \nabla \rho)$, where ρ is a defining function of the domain D , and $\nabla \rho$ is its gradient. Then the Cauchy problem for A_i in Sobolev spaces $H^s(D)$ with boundary data on the surface Γ can be formulated as follows.

Problem 1. *Given vectors $\oplus_{j=0}^{m_i-1} u_j \in \oplus_{j=0}^{m_i-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma, E_i)$, $f \in H^{s-m_i}(D, E_{i+1})$, $s \in \mathbb{Z}$, find, if possible, such a vector $u \in H^{s-m_i}(D, E_i)$, that*

$$\begin{cases} A_i u = f & \text{in } D, \\ \tau_i(u) = \oplus_{j=0}^{m_i-1} u_j & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

Without loss of the generality we may always assume that $u_j = 0$ for all $1 \leq j \leq m_i - 1$.

It is well-known that, the differential complex $\{A_i\}_{i=0}^N$ induces a complex $\{A_{\tau_i}\}_{i=0}^N$ of tangential differential operators on Γ . Thus $\tau_{i+1}(f) = A_{\tau_i} \left(\oplus_{j=0}^{m_i-1} u_j \right)$ on Γ if Problem 1 is solvable.

Of course, such a setting is clear for $m_i \leq s \in \mathbb{N}$ because then $\tau_i(u) \in \oplus_{j=0}^{m_i-1} H^{s-j-1/2}(\partial D, E_i)$ where the fractional Sobolev spaces $H^{s-j-1/2}(\partial D)$ are defined by one of the usual ways. But the weak formulation of the problem hints us the the best spaces for solving the Cauchy problem are actually the Lebesgue ones $L^2(D)$. However solving the problem in Lebesgue spaces one needs to correctly define a notion of trace on the boundary (cf. [3]). In other words, it is important to introduce negative Sobolev spaces in such a way that the so-called strong traces of normal and tangential parts with respect to the complex would be correctly defined in these spaces. With this aim, let $H^{-s}(D)$ be the dual space for $H^s(D)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ with respect to the pairing induced by the scalar product in $L^2(D)$. For simplicity we assume from now on that $m_i = 1$ for all i . We denote $H_{\tau}^{-s}(D, E_i)$ and $H_A^{-s}(D, E_i)$ the completions of $C^\infty(\bar{D}, E_i)$ with respect to the graph-norms:

$$\|u\|_{-s, \tau} = \left(\|u\|_{-s}^2 + \|\tau_i(u)\|_{-s-1/2, \partial D}^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{-s, A} = \left(\|u\|_{-s}^2 + \|A_i(u)\|_{-s-1}^2 \right)^{1/2}.$$

Thus the operators τ_i, A_i induce the bounded linear operators

$$\tau_{-s, i} : H_{\tau}^{-s}(D, E_i) \rightarrow H^{-s-1/2}(\partial D, E_i), \quad A_{-s, i} : H_{\tau}^{-s}(D, E_i) \rightarrow H^{-s-1}(D, E_{i+1}).$$

We emphasize that the elements of $H^{-s}(D, E_i)$ may have no traces on ∂D .

Theorem 1. *Spaces $H_A^{-s}(D, E_i)$ and $H_{\tau}^{-s}(D, E_i)$ coincide and their norms are equivalent.*

This theorem guarantees existence of traces $\tau_i(u)$ for elements of the space $H_A^{-s}(D, E_i)$ similar to the traces in standard Sobolev spaces of positive smoothness. Actually, integration by parts leads to a notion of weak boundary values of $\tau_i^w(u)$ for elements of $H^{-s}(D, E_i)$. It is not difficult to prove that in this situation the weak boundary values of $\tau_i^w(u)$ and strong trace $\tau_i(u)$ coincide. This allows to find an adequate weak formulation of the Cauchy problem in spaces $H_A^{-s}(D, E_i)$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

A homotopy formula. In order to obtain a solvability criterion for the Cauchy problem from now on we additionally assume that the operators $\Delta_i = A_i^* A_i + A_{i-1} A_{i-1}^* \in \text{Diff}_2(X; E_i \rightarrow E_i)$, $0 \leq i \leq N$, satisfy the so called Uniqueness Condition; here A^* means formal adjoint operator for A . Then each of these operators is determined elliptic and has a bilateral pseudo-differential fundamental solution, say, Φ_i , on $\overset{\circ}{X}$ (see, for example, [1, §4.4.2]). Schwartz kernel of the operator Φ_i is denoted by $\Phi_i(x, y)$, $x \neq y$. It is known, that $\Phi_i(x, y) \in C^\infty((E_i \otimes E_i^*) \setminus \{x = y\})$ (see, for instance, [2, §5]).

Let χ_D be characteristic function of D . For sections $f \in C^\infty(\overline{D}, E_{i+1})$, $v \in C^\infty(\overline{D}, E_i)$, $v_0 \in C^\infty(\partial D, E_i)$ we denote by $T_i f$ the following potentials:

$$T_i f(x) = (\Phi_i A_i^* \chi_D f)(x), \quad K_i v = (\Phi_i A_{i-1} - A_{i-1} \Phi_{i-1}) A_{i-1}^* \chi_D v,$$

$$M_i v_0(x) = - \int_{\partial D} (A_i(y) \overline{\Phi_i(x, y)})^T \sigma(A_i, y, \nabla \rho) v_0(y), \quad ds(y), \quad x \notin \partial D;$$

here B^T means transposed matrix for a matrix B . The following integral representation is well-known for elements of various function spaces (Sobolev spaces, Hölder spaces etc.), cf. [2].

Theorem 2. *For every section $u \in H_{A_i}(D, E_i)$ the following formulae hold:*

$$M_{i,D} u + T_{i,D} A_i u + A_{i-1} T_{i-1,D} u + K_{i,D} u = u,$$

$$M_{i,\Omega} u + T_{i,\Omega} A_i u + A_{i-1} T_{i-1,\Omega} u + K_{i,\Omega} u = \chi_D u.$$

The Cauchy problem in the Lebesgue space. Now choose a domain D^+ in such a way that the set $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ is a bounded domain with smooth boundary in \mathring{X} . It is convenient to denote F^\pm the restrictions of a section F onto D^\pm (here $D^- = D$).

Theorem 3. *Let $s = 0$. If $f \in H^{-1}(D, E_{i+1})$, $u_0 = 0$ then Problem 1 is solvable in the space $H_{A_i}^0(D, E_i)$ if and only if $A_{i+1} f = 0$ in D , $\tau_{i+1}(f) = 0$ on Γ and there is a section $\mathcal{F}_i \in L^2(\Omega, E_i)$ satisfying $\Delta_i \mathcal{F}_i = 0$ in Ω and coinciding with $T_{i,\Omega} f$ in D^+ .*

Also we would like to note that Theorem 3 gives not only the solvability conditions to Problem 1 but the solution itself, of course, if it exists (cf. [4]). Namely, if $\omega \Subset \Omega$ is a domain with a piece-wise smooth boundary and $\Omega \setminus \omega$ has no compact (connected) components then there exists an orthonormal basis $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ in $L^2(\Omega, E_i)$ -solutions of the operator Δ_i in Ω such that $\{b_{\nu|\omega}\}_{\nu=1}^\infty$ is an orthogonal basis in $L^2(\omega, E_i)$ -solutions of the operator Δ_i in ω (see [4, theorem 3.1]).

Exact and approximate solutions. Let us obtain Carleman's formula for the solution of Problem 1. With this purpose denote by $c_\nu(F)$ the Fourier coefficients of a vector-funcion F with respect to the orthogonal system $\{b_{\nu|\omega}\}$ in $L^2(\omega, E_i)$. We introduce the following Carleman's kernels:

$$\mathfrak{C}_N(y, x) = (A_i^*)_y^T \Phi_i(y, x) - \sum_{\nu=1}^N c_\nu((A_i^*)_y^T \Phi_i(y, \cdot)) b_\nu(x), \quad N \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega, \quad y \notin \overline{\omega}, \quad x \neq y.$$

Corollary 1. *If Problem 1 is solvable in $L^2(D, E_i)$ for data $u_0 = 0$ and $f \in L^2(D, E_{i+1}) \cap H_{loc}^s(D \cup \Gamma, E_{i+1})$ then there is its solution $u(f) \in H_{loc}^{s+1}(D \cup \Gamma, E_i)$ given by the following Carleman formula:*

$$u(f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_D \mathfrak{C}_N(y, x) f(y) dy$$

where the limit converges in the spaces $H_{A_i}^0(D, E_i)$ and $H_{loc}^{s+1}(D \cup \Gamma, E_i)$.

Bibliography.

1. N. Tarkhanov, *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Berlin, Akademie Verlag, 1995.
2. N. Tarkhanov, *Complexes of differential operators*, Dordrecht, Kluwer Ac. Publ., 1995.
3. M. Schechter, "Negative norms and boundary problems", *Ann. Math.*, **72:3** (1960), 581–593.
4. A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov "Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols", *Proc. London. Math. Soc.*, 71 (1995), N. 1, P. 1-54.
5. L.A. Aizenberg, *Carleman formulas in complex analysis. First applications*. Nauka, Novosibirsk, 1990.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ягола А.Г.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет

119991, Москва, Воробьевы горы

Тел.: (495) 9391033, e-mail: yagola@physics.msu.ru

В докладе изложены общие подходы к решению некорректно поставленных задач. Показано, как наличие различной априорной информации может быть использовано для построения регуляризирующих алгоритмов и оценивания погрешности приближенного решения. Рассмотрены операторные уравнения и некоторые обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Приведены ссылки на примеры некорректно поставленных задач в астрофизике, восстановлении магнитного поля, электронной микроскопии, акустике, обработке изображений, ядерной физике.

Автор благодарит РФФИ за финансовую поддержку (гранты № 08-01-00160-а и 09-01-00586-а).