О НАХОЖДЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ С ВЕСОМ

ON FINDING POLYNOMIALS OF BEST APPROXIMATION WITH WEIGHT

Лебедев В. И.

Российский научный центр "Курчатовский институт",
Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия;
lebedev@inm.ras.ru

Пусть $f(x)$, $w(x) \in C[-1,1]$, $w(x) > 0$ на $[-1,1]$ — вес, а $f(x)$ — приближаемая функция, Π_n — класс многочленов не выше n-й степени. Требуется найти решения следующей экстремальной задачи. Найти

$$P_n(x) = \arg \min_{Q_n(x)\in\Pi_n} \max_{x\in[-1,1]} |(f(x) - Q_n(x))w(x)|. \tag{1}$$

Многочлен $P_n(x)$ назовем многочленом *наилучшего приближения на* $[-1,1]$ *для* $f(x)$ *с весом* $w(x)$ (МНП). Пусть $r_n(x) = (f(x) - P_n(x))w(x)$, $x = \cos\theta$, тогда справедливо представление [1]:

$$r_n(x) = E_n \cos((m+1)\theta + \psi_n(\theta)) \tag{2}$$

при $\psi_n(\theta) \in C[0,\pi]$, $m \geq n$. Корнями $r_n(x)$ будут

$$y_i = \cos\theta_i, \quad \theta_i = ((i-1)\pi/2 - \psi_n(\theta_i))/(m+1), \quad i = \overline{1, m+1}. \tag{3}$$

Знаки поправок к y_i МНП совпадают со знаком для поправки к функции $\psi_n(\theta)$ в соответствующей точке. Эффективное приближение для аддитивной поправки $\delta\psi_n(\theta)$ к $\psi_n(\theta)$ от мультипликативной поправки $\delta w(x) > 0$ к $w(x)$ определяем асимптотической формулой Бернштейна для экстремальных многочленов [2]:

$$\delta\psi(\theta) = \frac{\sin\theta}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{(\ln\delta w(\cos\varphi) - \ln\delta w(\cos\theta))\, d\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}, \tag{4}$$

определяющей движение всего множества нулей и e-точек $r_n(x)$ при возмущении функции $w(x)$. Пусть на k-й итерации получено значение $\psi_n^k(\theta)$, а $r_n^k(z_i^k) = m_i^k$ в e-точках z_i^k, $i = 1, \ldots, n+2$. Построим гладкую функцию $p^k(x) > 0$, такую что $p^k(z_i^k) = |m_i^k|$ и z_i^k образуют точки чебышевского альтернанса для $r_n^k(x)/p^k(x)$. Используя методы обратного анализа, полагаем $\psi_n^{k+1}(\theta) = \psi_n^k(\theta) + \beta\delta\psi^k(\theta)$, $0 < \beta \leq 1$, где $\delta\psi^k(\theta)$ определена по формуле (4) при $\delta w(x) = p^k(x)$.

Приведены примеры численных расчетов МНП для функций различной гладкости. Они показали высокую эффективность предлагаемого метода. Метод может быть применён для решения обобщённой задачи Маркова, нахождения взвешенных аппроксимаций для обратного оператора, операторной экспоненты и в других задачах.

Работа выполнена по программе РАН "Теоретические проблемы современной математики" (проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики") и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00393).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев В. И.* О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 49–70.
2. *Лебедев В. И.* Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 21–60.