ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Международная конференция,
посвященная 105-летию со дня рождения
Сергея Львовича Соболева

Новосибирск, Россия, 18-24 августа 2013

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

DIFFERENTIAL EQUATIONS FUNCTION SPACES APPROXIMATION THEORY

International Conference
dedicated to the 105th anniversary of the birthday of
Sergei L'vovich Sobolev

Novosibirsk, Russia, August 18-24, 2013

ABSTRACTS

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Международная конференция,
посвященная 105-летию со дня рождения
Сергея Львовича Соболева

Новосибирск, Россия, 18–24 августа 2013 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

НОВОСИБИРСК
2013

УДК 517+519.6
ББК В16+В192
Д503

Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 18–24 августа 2013 г.): Тез. докладов / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2013. 465 с.

ISBN 978-5-86134-139-4.

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Novosibirsk State University

Д $\frac{1602070100-03}{Я82(03)-2013}$ Без объявл.

© Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН, 2013

ISBN 978-5-86134-139-4

Программный комитет

Ю. Е. Аниконов, В. С. Белоносов, О. В. Бесов, А. М. Блохин, С. Н. Васильев, В. Л. Васкевич, С. К. Водопьянов, С. К. Годунов, С. С. Гончаров, Г. В. Демиденко — *председатель*, Ю. Л. Ершов, С. И. Кабанихин, Т. Ш. Кальменов, В. В. Козлов, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Г. И. Марчук, И. И. Матвеева — *секретарь*, Б. Г. Михайленко, Л. В. Овсянников, П. И. Плотников, С. И. Похожаев, В. В. Пухначев, Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов, А. А. Толстоногов, Л. Д. Фаддеев, М. В. Фокин, H. Begehr, B. Bojarski, E. Feireisl, L. Hatvani, A. Kufner, A. Laptev, V. Maz'ya, L. Nirenberg

Организационный комитет

В. В. Богданов, Л. Н. Бондарь — *секретарь*, А. Ф. Воронин, В. А. Дедок, А. А. Егоров, В. Н. Зиновьев, Л. М. Крапчан, Т. Ю. Моргунова, Г. З. Морозова, М. В. Нещадим, А. Н. Ряскин, Д. Л. Ткачев, М. П. Федорук — *председатель*, Г. В. Шевченко

Program Committee

Yu. E. Anikonov, H. Begehr, V. S. Belonosov, O. V. Besov, A. M. Blokhin, B. Bojarski, G. V. Demidenko (*Chairman*), Yu. L. Ershov, L. D. Faddeev, E. Feireisl, M. V. Fokin, S. K. Godunov, S. S. Goncharov, L. Hatvani, S. I. Kabanikhin, T. Sh. Kalmenov, V. V. Kozlov, A. Kufner, A. G. Kusraev, S. S. Kutateladze, A. Laptev, G. I. Marchuk, I. I. Matveeva (*Secretary*), V. Maz'ya, B. G. Mikhailenko, L. Nirenberg, L. V. Ovsyannikov, P. I. Plotnikov, S. I. Pokhozhaev, V. V. Pukhnachev, Yu. G. Reshetnyak, V. G. Romanov, A. A. Tolstonogov, V. L. Vaskevich, S. N. Vassilyev, S. K. Vodopyanov

Organizing Committee

V. V. Bogdanov, L. N. Bondar (*Secretary*), V. A. Dedok, A. A. Egorov, M. P. Fedoruk (*Chairman*), L. M. Krapchan, T. Yu. Morgunova, G. Z. Morozova, M. V. Neshchadim, A. N. Ryaskin, G. V. Shevchenko, D. L. Tkachev, A. F. Voronin, V. N. Zinov'ev

Конференцию поддержали:

Российский фонд фундаментальных исследований
(проект № 13-01-06065)

Сибирское отделение Российской академии наук

Министерство образования, науки и
инновационной политики Новосибирской области

Международный математический союз

Международный центр теоретической физики
им. А. Салама

Компания Schlumberger

Корпорация Intel

Механико-математический факультет
Новосибирского государственного университета

Sponsors:

Russian Foundation for Basic Research
(project no. 13-01-06065)

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Ministry of Education, Science and Innovation Policy of
Novosibirsk Region

International Mathematical Union

The Abdus Salam International Centre for
Theoretical Physics

Schlumberger

Intel Corporation

Department of Mechanics and Mathematics,
Novosibirsk State University

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
PLENARY LECTURES

Бабич В. М.
Довоенные работы С. Л. Соболева и их значение для последующего развития математики
S. L. Sobolev's works in the pre-war years and their importance for the subsequent development of mathematics 40

Годунов С. К.
Законы сохранения для релятивистских уравнений
Conservation laws for the relativistic equations 41

Дубинский Ю. А.
Некоторые задачи математической физики в пространствах Соболева
Some problems of mathematical physics in Sobolev spaces 42

Жиков В. В.
О переходе к пределу в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях
On passage to the limit in nonlinear elliptic and parabolic equations 43

Козлов В. В.
Кинетические уравнения и динамика сплошных сред
Kinetic equations and dynamics of continuum 44

Маслов В. П., Шафаревич А. И.
Асимптотические решения уравнений Навье – Стокса и топологические инварианты векторных полей и лиувиллевых слоений
Asymptotic solutions of the Navier–Stokes equations and topological invariants of vector fields and Liouville foliations 45

Решетняк Ю. Г.
К теории соболевских пространств
To the theory of Sobolev spaces 46

Солонников В. А.
Оценки в L_q решения задачи магнитной гидродинамики со свободной границей в многосвязной области
L_q-estimates of a solution of the free boundary magnetohydrodynamics problem in a multiply connected domain 47

Begehr H.
Boundary value problems for complex partial differential equations in plane domains 48

Bojarski B.
Interpolation, divided differences, splines and Sobolev spaces. From J. Gregory, I. Newton and G. Leibniz to S. L. Sobolev 49

Feireisl E.
Mathematical theory of compressible, viscous, and heat conducting fluids 50

Győri I.
Interconnection between ordinary and delay differential equations via approximation techniques 51

Iooss G.
Small divisor problems in fluid mechanics 52

Kufner A.
About Sobolev-type spaces 53

Plotnikov P. I., Weigant W.
Compressible Navier–Stokes equations. Padula and Lions problems 54

Toland J. F.
Problems with a variational theory of water waves 55

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
DIFFERENTIAL EQUATIONS

30-минутные доклады / Invited Lectures

Белоносов В. С.
Теория нелинейного резонанса для абстрактных гиперболических уравнений
Nonlinear resonance theory for abstract hyperbolic equations 58

Блохин А. М., Ткачев Д. Л.
Соболевская регуляризация в задаче о переносе заряда для транзистора MESFET
Sobolev regularization in a problem of charge transport for the MESFET transistor 59

Гарипов Р. М.
Волновая модель атомного ядра
Wave model of atomic kernel 60

Демиденко Г. В.
Теоремы об изоморфизме квазиэллиптических операторов
Theorems on isomorphism of quasielliptic operators 61

Кабанихин С. И.
Совмещенные обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений (теория, алгоритмы, приложения)
Combined inverse and ill-posed problems for hyperbolic equations (theory, numerics, and applications) 62

Кальменов Т. Ш., Дауитбек Д.
Граничные условия волнового потенциала
Boundary conditions of the wave potential 63

Мазко А. Г.
Робастная устойчивость, оптимизация и сравнение динамических систем
Robust stability, optimization, and comparison of dynamical systems 64

Романов В. Г.
Обратные задачи для уравнений вязкоупругости
Inverse problems for viscoelasticity equations 65

Толстоногов А. А.
Управляемые процессы выметания
Control sweeping processes 66

Alekseev G. V.
Coefficient inverse problems for Helmholtz and Maxwell's equations and the invisibility problem 67

Antontsev S., Shmarev S.
Nonlinear partial differential equations in Sobolev spaces with variable exponents 68

Chechkin G. A., Chechkina T. P.
Mathematical aspects of the hydrodynamics of non-Newtonian media 69

Panov E. Yu.
On decay of periodic renormalized solutions to scalar conservation laws 70

Skubachevskii A. L.
The Vlasov–Poisson equations in infinite cylinder 71

20-минутные и стендовые доклады / Short Communications and Posters

Абдрахманов А. М., Абдрахманова Р. П.
Видоизмененная задача Дирихле для вырождающейся многомерной системы Бицадзе – Янушаускаса
A modified Dirichlet problem for the degenerating multidimensional Bitsadze–Yanushauskas system 74

Аверина Т. А.
Два способа записи стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей
Two forms of writing stochastic differential equations with Poisson component 75

Акыш А. Ш.
Об экстремальных свойствах решения уравнений Навье – Стокса
On extreme properties of a solution of the Navier–Stokes equations 76

Александров В. М.
Вычисление оптимального управления в реальном времени
Computing of optimal control in real time 77

Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Космакова М. Т., Рамазанов М. И.
О разрешимости интегральных уравнений теплопроводности в нецилиндрических областях
On solvability of the heat conductivity integral equations in noncylindrical domains 78

Андреев В. К., Иванова А. В.
О свойствах решений уравнений гидростатической модели
Properties of solutions of a hydrostatic model 79

Андреев В. К., Степанова И. В.
Обобщение решения Остроумова – Бириха уравнений конвекции для нелинейной силы плавучести
Generalization of the Ostroumov–Birikh solution of the convection equations for a nonlinear buoyancy force 80

Андриянова Э. Р., Мукминов Ф. Х.
Оценки скорости убывания решения нелинейного параболического уравнения в норме пространства Орлича
Estimates of the decay rate of solution to a nonlinear parabolic equation in the Orlicz norm 81

Аниконов Д. С.
Задачи зондирования окружающей среды
Probing problems of surrounding media 82

Аниконов Ю. Е.
Представления решений функциональных и эволюционных уравнений и задачи идентификации
Representation of solutions of functional and evolution equations and identification problems 83

Апаков Ю. П.
Об одной задаче для параболо-гиперболического уравнения с параллельными плоскостями изменения типов в $\mathbb{R}^3$
On a problem for a parabolic-hyperbolic equation with parallel planes of type changes in $\mathbb{R}^3$ 84

Асадова О. Г., Алиев Н. А.
Исследование решения смешанной задачи для уравнения высокого порядка
Studying solution to a mixed problem for a high order equation 85

Асанов А.
Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода
On a class of linear Fredholm integral equations of the third kind 86

Ахмед-Заки Д. К., Абдыманапов С. А.
Об одной системе дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами
On a system of partial differential equation with singular coefficients 87

Аюпова Н. Б.
Формулы в обратных задачах для эволюционных уравнений
Formulae in inverse problems for evolution equations 88

Байдин А. В., Месенев П. Р., Соснов В. В.
Маскировка с помощью импедансного граничного условия в двумерной задаче сопряжения для уравнений Максвелла
Cloaking via impedance boundary condition in the 2-D transmission problem for Maxwell equations 89

Байдулов В. Г.
Точные решения и особенности одномерных моделей внутренних волн
Exact solutions and peculiarities of one-dimensional models of internal waves .. 90

Балакина Е. Ю.
Математические методы анализа данных рентгеновской томографии
Mathematical methods for the X-ray tomography data analysis 91

Барлукова А. М., Чупахин А. П.
Исследование решений типа бегущих волн в одномерной модели гемодинамики
Analysis of traveling wave solutions in 1-D hemodynamics model 92

Безродных С. И., Власов В. И.
Сингулярная задача Римана – Гильберта в сложных областях
The singular Riemann–Hilbert problem in complex shaped domains 93

Белов Ю. Я., Копылова В. Г.
Определение функций источника систем уравнений составного типа для некоторых начально-краевых задач
Determination of source functions for systems of equations of composite type for some initial-boundary problems 94

Белов Ю. Я., Фроленков И. В.
О некоторых задачах для дифференциальных уравнений типа Бюргерса
On some problems for differential equations of Burgers type 95

Бердышев А. С., Ахтаева Н. С.
Локальные задачи для гиперболического уравнения третьего порядка
Local problems for some third order hyperbolic equation 96

Бибиков П. В.
О геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений Абеля первого порядка
On geometry of the first order Abel differential equations 97

Боговский М. Е.
Альтернатива глобальной сходимости в методе Ньютона для задачи Навье – Стокса
Global convergence alternative in Newton's method for the Navier–Stokes problem 98

Бондаренко А. Н., Дедок В. А.
Спектральные преобразования для оператора Шредингера на графах
Spectral transformations for Schrödinger operator on graphs 99

Бондарь Л. Н.
О разрешимости краевой задачи в полупространстве для одной эллиптической системы
On solvability of a boundary value problem for one elliptic system in a half-space 100

Борель Л. В.
Один класс интегродифференциальных уравнений соболевского типа
A class of integro-differential equations of Sobolev type 101

Бризицкий Р. В.
Краевая задача для стационарных уравнений МГД со смешанными граничными условиями
A boundary value problem for the stationary MHD equations with mixed boundary conditions 102

Бугуева Т. В.
Определение параметров упругой изотропной среды в бесконечном цилиндре
Determination of the parameters of an elastic isotropic medium in an infinite cylinder 103

Бычков Е. В.
Задача Коши – Неймана для системы уравнений Буссинеска
The Cauchy–Neumann problem for the system of Bousinessque equations 104

Васильев В. Б.
Разрешимость псевдодифференциальных уравнений в многомерных конусах
Solvability of pseudo-differential equations in multidimensional cones 105

Васильева Е. В.
Устойчивые периодические решения многомерных периодических систем дифференциальных уравнений с гомоклиническими решениями
Stable periodic solutions of multidimensional periodic systems of differential equations with homoclinic solutions 106

Вихтенко Э. М., Намм Р. В.
Функционалы чувствительности и их приложение в задачах механики
Sensitivity functionals and their application to problems of mechanics 107

Водопьянов Е. С.
Асимптотическая устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа при возмущении коэффициентов
Asymptotic stability of solutions to linear differential equations of neutral type under perturbations of their coefficients 108

Волокитин Е. П.
Рациональные первые интегралы полиномиальных систем Коши – Римана
Rational first integrals of polynomial Cauchy–Riemann systems 109

Волчков Ю. М.
Неклассические уравнения теории пластин и оболочек
Nonclassical equations of the theory of plates and shells 110

Волянская И. И., Илькив В. С.
Неоднородная краевая задача для уравнения с частными производными в комплексной области
An nonhomogeneous boundary value problem for a partial differential equation in a complex domain 111

Воронин А. Ф.
Восстановление оператора свертки по правой части на полупрямой
Recovery of the convolution operator by the right-hand side on the half-line ... 112

Гайдомак С. В.
Об устойчивости неявных сплайн-коллокационных разностных схем для некоторых линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных
On stability of implicit spline-collocation difference schemes for some linear differential-algebraic systems of partial differential equations 113

Галахов Е. И., Салиева О. А.
Разрешимость некоторых уравнений в частных производных с особенностями на неограниченных множествах
Solvability of some partial differential equations with singularities on unbounded sets 114

Гарипов Р. М., Котельникова М. С.
4-кристаллы и квазикристаллы
4-crystalls and quasicrystals 115

Гладков А. Л.
Начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения с нелинейными нелокальными граничными условиями
Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with nonlinear nonlocal boundary conditions 116

Головин С. В., Исаев В. И., Калинин С. А., Кузнецов Д. С.
Движение бинарной жидкости в плоской трещине с упругими пористыми стенками
Motion of a binary fluid in a planar crack with elastic porous walls 117

Гордевский В. Д., Гукалов А. А.
Взаимодействие смерчеобразных потоков для модели шероховатых сфер
Interaction of the eddy flows in the model of rough spheres 118

Гордиевских Д. М.
Фазовое пространство одного класса уравнений соболевского типа с дробной производной
Phase space for a class of Sobolev type equations with fractional derivative 119

Гордиенко В. М.
Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для волнового уравнения
Dissipativity of boundary condition in a mixed problem for the wave equation . 120

Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.
Устойчивость плоского течения Куэтта колебательно-возбужденного газа
Stability of the plain Couette flow of a vibrationally excited gas 121

Губарев Ю. Г., Губкин А. А.
К устойчивости одного класса одномерных состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона
On stability of a class of 1-D dynamical equilibrium states of the Vlasov–Poisson plasma 122

Давыдов А. А.
О нормальных формах семейств уравнений смешанного типа на плоскости
On normal forms of families of mixed type equations on the plane 123

Давыдов П. Н., Фёдоров В. Е.
Однозначная локальная разрешимость одной полулинейной системы уравнений обобщенного гидродинамического типа
Local unique solvability of a sistem of semilinear equations of generalized hydrodynamical type 124

Дастай-оол А. А., Ломов А. А.
Об устойчивости решений в обратной задаче для коэффициентов линейного разностного уравнения
On stability of solutions in the inverse problem for coefficients of a linear difference equation 125

Демидов Г. В., Михайленко Б. Г., Мартынов В. Н.
Моделирование распространения упругих волн, использующее пошаговое преобразование Лагерра по времени
Modeling the elastic wave propagation by using the step-by-step Laguerre transform in time 126

Денисова Т. Е.
Об одном методе изучения качественных свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа
On a method for studying qualitative properties of solutions of the first initial-boundary value problem for Sobolev type equations 127

Доброхотов С. Ю., Медведев С. Б., Назаренко С. В., Чиркунов Ю. А., Миненков Д. С.
Простейшие точные решения уравнений мелкой воды
The simplest exact solutions of the shallow-water equations 128

Доброхотов С. Ю., Симонов К. В., Курако М. А., Ложников Д. А.
Решение задач гидрофизического мониторинга на основе асимптотических формул
Asymptotic formulas for solving problems of hydrophysical monitoring 129

Думанян В. Ж.
О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка
On the Dirichlet problem for a second order elliptic equation 130

Егоров И. Е., Захарова Т. И.
О фредгольмовости краевой задачи для уравнения смешанного типа
On Fredholmness of a boundary value problem for a mixed type equation 131

Егоров И. Е., Тихонова И. М.
Оценка погрешности стационарного метода Галеркина для задачи А. Н. Терехова
Error estimation of a stationary Galerkin method for A. N. Terekhov's problem 132

Егоршин А. О.
Об эквивалентности аналитической и вариационной дискретизации дифференциальных уравнений при их идентификации
On equivalence of analytical and variational discretization of differential equations under their identification 133

Ефимова А. А.
Численное моделирование развития турбулентности в системе пучок-плазма
Numerical simulation of the turbulence growth in the beam-plasma system 134

Ефимова П. Н.
Исследование разрешимости нелокальных краевых задач для одного уравнения четвертого порядка
Studying solvability of nonlocal boundary value problems for a fourth order equation 135

Жибер А. В., Костригина О. С.
Характеристические кольца Ли гиперболических систем уравнений
Characteristic Lie rings of hyperbolic systems of equations 136

Жуматов С. С.
Равномерная притягиваемость программного многообразия неявных дифференциальных систем
Uniform attraction of a program manifold of implicit differential systems 137

Загребина С. А., Солдатова Е. А.
Стохастические уравнения соболевского типа на графе
Stochastic Sobolev type equations on a graph 138

Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н.
Численное решение задачи оптимального управления в модели Буссинеска – Лява на графе
Numerical solution of an optimal control problem in the Boussinesq–Löve model on a graph 139

Зикиров О. С.
Об одной задаче для гиперболических уравнений третьего порядка
On a problem for third order hyperbolic equations 140

Иванов А. А.
Нахождение бифуркаций для решений нелинейных уравнений методом продолженного функционала
Finding bifurcations for solutions of nonlinear equations by the extended functional method 141

Иванова А. В., Остапенко В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П.
Задача о распаде разрыва в модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере
Problem of discontinuity disintegration in the shallow water model on a rotating gravitating sphere 142

Иванова Н. Д.
Обратная задача для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля с вырождением
Inverse problem for a linearized quasi-stationary phase field model with degeneracy 143

Илькив В. С., Страп Н. И.
Нелокальная краевая задача для уравнения с частными производными в многомерной комплексной области
A nonlocal boundary value problem for a partial differential equation in a multidimensional complex domain 144

Иргашев Б. Ю.
Краевая задача для одного уравнения четного порядка
A boundary value problem for an even order equation 145

Искакова У. А.
Применение оператора преобразования для дифференциальных уравнений четвертого порядка в решении спектральных задач
Application of a conversion operator for fourth order differential equations for solving spectral problems 146

Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Петрова М. Н.
О некоторых спектральных свойствах одного класса эллиптических операторов, заданных в предельно-цилиндрических областях
On some spectral properties of a class of elliptic operators given in limit-tube domains 147

Кабанихин С. И., Криворотько О. И., Маринин И. В.
Совмещенная обратная задача цунами
Combined inverse problem of tsunami 148

Казаков А. Л., Кузнецов П. А.
Краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах
A boundary value problem with degeneration for the nonlinear heat equation in spherical coordinates 149

Казаков А. Л., Лемперт А. А.
О некоторых краевых задачах с вырождением для уравнения нелинейной теплопроводности
On boundary value problems with degeneracy for the nonlinear heat equation . 150

Казанцев С. Г.
Тензорные поля на плоскости и системы уравнений типа Бельтрами
Tensor fields on the plane and Beltrami type systems 151

Калиев И. А., Шухардин А. А.
Граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических возрастающих по времени областях
Boundary value problems for equations of a viscous heat-conductive gas in time-increasing noncylindrical domains 152

Калинин А. В., Григорьев Е. Е.
О некоторых задачах теории классического электродного эффекта в атмосфере
On some problems of the theory of classic electrode effect in the atmosphere .. 153

Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.
О сильной разрешимости задачи Коши для бигармонического уравнения в кольце
On the strong solvability of the Cauchy problem for the biharmonic equation in the ring 154

Камынин В. Л., Костин А. Б.
О разрешимости в классах С. Л. Соболева обратных задач нахождения младшего коэффициента в параболическом уравнении
On solvability in the Sobolev classes of inverse problems of the lower coefficient determination in a parabolic equation 155

Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.
Обобщенное преобразование Фурье
Generalized Fourier transform 156

Капцов О. В.
Метод Дарбу и проблема Гурса
The Darboux method and the Goursat problem 157

Карабут Е. А., Журавлева Е. Н.
Шесть течений со свободной границей, описываемых одной формулой
Six free boundary flows generating by one formula 158

Карабут Е. А., Кужугет А. А.
Конформные отображения, аппроксиманты Паде и пример течения со свободной границей
Conformal mappings, the Pade approximants, and an example of a flow with free boundary 159

Карачик В. В.
Условия разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре
Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the polyharmonic equation in the unit ball 160

Карчевский А. Л.
Сокращение времени счёта при решении обратной задачи оптимизационным методом
Decrease of a running time for solving an inverse problem by the optimization method 161

Келлер А. В.
Уравнения леонтьевского типа — конечномерный аналог уравнений соболевского типа
Leontief type equations — a finite dimensional analogue of Sobolev type equations 162

Коврижкин В. В.
Задачи Дарбу и Дирихле для уравнения Трикоми
Darboux and Dirichlet problems for the Tricomi equation 163

Ковыркина О. А., Остапенко В. В.
Сравнение точности монотонных и немонотонных разностных схем сквозного счёта
The accuracy comparison of some monotonic and nonmonotonic shock-capturing difference schemes 164

Кожанов А. И.
Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений
A conjugation problem for some nonclassical differential equations 165

Кожевникова Л. М., Леонтьев А. А.
Стабилизация решений анизотропного параболического уравнения высокого порядка в неограниченных областях
Stabilization of solutions of an anisotropic high order parabolic equation in unbounded domains 166

Козлов Р. И., Козлова О. Р., Ульянов С. А.
Метод сравнения для анализа устойчивости систем с последействием
A comparison method for stability analysis of delay systems 167

Колпакова Е. А.
О построении обобщенного решения системы квазилинейных уравнений первого порядка
On generalized solution construction of the system of the first order quasilinear equations 168

Колтуновский О. А.
Обратная задача для многомерного гиперболического уравнения с неизвестным младшим коэффициентом в случае финального переопределения
Inverse problem for a multidimensional hyperbolic equation with the unknown lower coefficient in the case of final redefinition 169

Коновалова Д. С.
Использование особенностей обобщенного решения гиперболических систем
Using singularities of a generalized solution for hyperbolic systems 170

Кононенко Л. И., Тресков С. А.
Колебания в задачах химической кинетики
Oscillations in problems of chemical kinetics 171

Короткова Е. М.
О некоторых обратных задачах для линеаризованной системы тепломассопереноса
On some inverse problems for a linearized heat and mass transfer system 172

Коршун К. В.
Задача идентификации функции источника для многомерного уравнения типа Бюргерса
An identification problem of the source function in a multidimensional Burgers type equation 173

Кошанов Б. Д., Китапбаева Б. Т., Бакытбек М. Б.
Построение корректных краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в ограниченной области
Constructing the correct boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equation in a bounded domain 174

Кошелева Ю. А.
О некоторых нелокальных и обратных задачах для ультрапараболических уравнений
About some nonlocal and inverse problems for ultraparabolic equations 175

Кригер Е. Н., Фроленков И. В.
Задача идентификации коэффициента специального вида при нелинейном члене в двумерном параболическом уравнении
An identification problem of the special form coefficient at a nonlinear term for a two-dimensional parabolic equation 176

Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.
Об одном дифференциальном уравнении
About one differential equation 177

Кучер Н. А.
Глобальная разрешимость трехмерной начально-краевой задачи для уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей
Global solvability of a three-dimensional initial-boundary value problem for the equations of mixture of viscous compressible fluids 178

Лазарев Н. П.
О существовании оптимальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко
Existence of an optimal crack shape in the equilibrium problem for a Timoshenko type plate 179

Латфуллин Т. Г.
Полиномиальные решения систем типа Коши – Римана
Polynomial solutions of Cauchy–Riemann type systems 180

Лашина Е. А., Чумакова Н. А., Чумаков Г. А.
Анализ инвариантных многообразий стационарных состояний седлового типа
Studying the invariant manifolds of saddle steady states 181

Лихошвай В. А., Фадеев С. И.
О сдвиге управляющего сигнала в моделях матричного синтеза
On the shift of a controlling signal in models of matrix synthesis 182

Лобанов А. В.
Оценки устойчивости решений обратных экстремальных задач для уравнения Гельмгольца
Stability estimates of solutions of inverse extremal problems for the Helmholtz equation 183

Лукина Г. А.
Пространственно-нелокальные краевые задачи с условиями А. А. Самарского для ультрапараболических уравнений
Space nonlocal boundary value problems with A. A. Samarskii conditions for ultraparabolic equations 184

Люлько Н. А.
Неустойчивость нелинейной системы двух осцилляторов при основном и комбинационном резонансах
Instability of a nonlinear system of two oscillators due to main and combinational resonances 185

Макаренко Н. И.
Классы Харди и пространства Винера – Соболева в нелинейных задачах теории волн
Hardy classes and Wiener–Sobolev spaces in nonlinear problems of the wave theory 186

Мамадалиев Н.
Об одной задаче преследования при наличии запаздывания
On a pursuit problem with delay 187

Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.
Разрешимость краевых задач для уравнений движения бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей
Solvability of boundary value problems for the equations of viscous compressible bifluids 188

Мамонтов Е. В.
Об устойчивости решения с контактным разрывом уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере
Stability of the solution with the contact discontinuity of shallow water equations on a rotating attracting sphere 189

Манакова Н. А., Богатырева Е. А.
О продолжении решения задачи Коши для квазилинейного уравнения соболевского типа
On the solution continuation of the Cauchy problem for a quasilinear Sobolev type equation 190

Матвеева И. И., Уварова И. А.
О свойствах решений одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности
On properties of solutions to one class of systems of nonlinear ordinary differential equations of higher dimension 191

Матевосян О. А.
Задача Дирихле для полигармонического уравнения в неограниченных областях
The Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains .. 192

Меграбов А. Г.
Законы сохранения и другие формулы в дифференциальной геометрии и их приложения в математической физике
Conservation laws and other formulas in the differential geometry and their applications in the mathematical physics 193

Медведев С. Б.
Эволюционные уравнения для гидродинамических моментов сплошной среды из невзаимодействующих частиц
Evolution equations for hydrodynamic moments of continuous medium of noninteracting particles 194

Мередов М., Мередова М. М.
О методе доказательства существования обобщенного решения некоторых краевых задач
On a method for proving the existence of a generalized solution for some boundary value problems 195

Михайлова А. В., Черевко А. А., Чупахин А. П., Кривошапкин А. Л., Орлов К. Ю., Панарин В. А.
Обратная задача построения дифференциальных уравнений гемодинамики по экспериментальным клиническим данным
An inverse problem of constructing the gemodynamics differential equations by the use of experimental clinical data 196

Мусабеков К. С.
Необходимое условие оптимальности в одной регуляризованной задаче оптимального управления
A necessary condition of optimality in one regularized problem of optimal control 197

Налимов В. И.
Дифференциальные свойства оператора Дирихле – Неймана
Differential properties of the Dirichlet–Neumann operator 198

Нальжупбаева Г. М.
Регуляризованный след обыкновенного дифференциального оператора с интегральным граничным условием
Regularized trace of an ordinary differential operator with an integral boundary condition 199

Намсараева Г. В.
Нелокальные и обратные задачи для некоторых классов псевдопараболических уравнений
Nonlocal and inverse problems for some classes of pseudoparabolic equations .. 200

Нестеров П. Н.
Асимптотическое интегрирование адиабатических осцилляторов
Asymptotic integration of adiabatic oscillators 201

Нещадим М. В.
Классы обобщенных функционально инвариантных решений волнового уравнения
Classes of the generalized functional-invariant solutions of the wave equation .. 202

Новиков Д. П., Павлов М. В.
Редукция системы Скирма – Фаддеева
Reduced Skyrme–Faddeev system 203

Омельченко Е. А.
Глобальная разрешимость уравнения соболевского типа с последействием
Global solvability of a Sobolev type equation with delay 204

Оразов И. О., Шалданбаев А. Ш.
Формула следа вольтеррова оператора Штурма – Лиувилля в пространстве с индефинитной метрикой
The trace formula of a Volterra–Sturm–Liouville operator in the space with an indefinite metric 205

Оспанов К. Н.
О сингулярной системе типа Бельтрами
On a singular system of Beltrami type 206

Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б.
Краевые задачи типа Римана – Гильберта для некоторых классов систем уравнений в частных производных
Boundary value problems of Riemann–Hilbert type for some classes of systems of partial differential equations 207

Павлов В. П., Абдрахманова А. А.
Сплайн дефекта 2 для дифференциального уравнения четвертого порядка
The defect 2 spline for a fourth order differential equation 208

Панов А. В.
Групповая классификация одного класса псевдопараболических уравнений
Group classification of a class of pseudoparabolic equations 209

Парфёнов А. И.
Об экспоненциальной асимптотической формуле для гармонических функций
On the exponential asymptotic formula for harmonic functions 210

Пастухова С. Е.
Обобщенные уравнения Навье – Стокса: теоремы существования и энергетические равенства
Generalized Navier–Stokes equations: existence theorems and energy equalities 211

Пененко А. В., Пененко В. В.
Вариационное усвоение данных на основе схемы расщепления для многомерных моделей конвекции-диффузии
Splitting scheme-based variational data assimilation for multidimensional convection-diffusion models 212

Пененко В. В.
Метод построения численных моделей математической физики на основе вариационных принципов и интегрирующих множителей
A method for construction of numerical models of mathematical physics based on variational principles and integrating factors 213

Перов А. И., Коструб И. Д., Иванова Е. В.
Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и теорема Тихонова о неподвижной точке
Bounded solutions of nonlinear differential equations in Hilbert space and Tikhonov theorem on a fixed point 214

Перцев Н. В.
Экспоненциальные оценки на решения некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием
Exponential estimates for solutions of some systems of linear delay differential equations 215

Петренко П. С.
Стабилизируемость систем дифференциально-алгебраических уравнений
Stabilizability of systems of differential-algebraic equations 216

Пикулин С. В.
О принципе компактности носителя решения для полулинейных эллиптических уравнений
On the compact support principle for solutions of the semilinear elliptic equations 217

Пиманов Д. О., Косцов Э. Г., Фадеев С. И.
Численный метод исследования математических моделей микромеханики при периодическом импульсном воздействии
Numerical method of studying mathematical models of micromechanics with periodic impulse impact 218

Пинигина Н. Р.
О краевой задаче для вырождающихся уравнений соболевского типа в нецилиндрических областях
On a boundary value problems for degenerate equations of Sobolev type in noncylindrical domains 219

Письменный Н. А.
Периодические решения систем ОДУ с автономной правой частью, содержащих два малых параметра
Periodic solutions of systems of ODE with the autonomous right-hand side and two small parameters 220

Пичугин Б. Ю., Пичугина А. Н.
Нелинейная интегральная модель Шарпа – Лотки
A nonlinear integral Sharpe–Lotka model 221

Плаксина В. П.
О двусторонних решениях одного функционально-дифференциального уравнения
About double-sided solutions of one functional differential equation 222

Плаксина И. М.
О разрешимости одного сингулярного функционально-дифференциального уравнения
About solvability of one singular functional differential equation 223

Плеханова М. В.
Критерий ε-управляемости за свободное время вырожденной эволюционной системы
Free time ε-controllability criterion for a degenerate evolution system 224

Подгаев А. Г.
Краевые задачи и задачи управления для вырождающихся параболических уравнений в областях с нецилиндрической или неизвестной границей
Boundary value problems and control problems for degenerative parabolic equations in noncylindrical domains 225

Полынцева С. В.
Задача идентификации функции источника и коэффициента при первой производной по пространственной переменной в многомерном параболическом уравнении специального вида
The problem of identification of the source function and the coefficient at the first derivative in a space variable for a multidimensional parabolic equation of special type 226

Попов Н. С.
Исследование разрешимости нелокальных краевых задач для псевдогиперболических уравнений
Investigation of solvability of nonlocal boundary value problems for pseudohyperbolic equations 227

Попов С. В.
Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с меняющимся направлением времени
Nonlocal boundary value problems for parabolic equations with changes of the time direction 228

Потапова С. В.
Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной
The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient at the highest derivative 229

Пятков С. Г.
О некоторых классах эволюционных обратных задач для параболических уравнений
On some classes of evolutionary inverse problems for parabolic equations 230

Ракшаева Е. Ж., Айзенберг А. М.
Конволюционные операторы прохождения акустических волн на криволинейном контакте неоднородных сред
Convolution-type transmission operators of acoustics waves at curvilinear contact of inhomogeneous media 231

Резникова И. А.
Об оценках решений сопряжённой задачи для параболических уравнений
On the estimates of solutions of the adjoint problem for parabolic equations ... 232

Ройтенберг Е. Я.
К задаче идентификации нелинейных дифференциальных уравнений с неполной информацией
Identification problem of nonlinear differential equations with incomplete information 233

Романов В. Г., Чиркунов Ю. А.
Существование нерассеивающих акустических объектов в анизотропной среде
An existence of acoustical objects nonscattering waves in the anisotropic medium 234

Романовский Р. К., Назарук Е. М.
О дихотомии линейных систем нейтрального типа
About dichotomy of linear systems of neutral type 235

Рузакова О. А., Олейник Е. А.
К вопросу об управляемости одной неклассической модели математической физики
On the controllability of one nonclassical model of mathematical physics 236

Рузиев М. Х.
Краевая задача для уравнения смешанного типа в неограниченной области
A boundary value problem for a mixed-type equation in an unbounded domain 237

Рылов А. И.
Дополнительные законы сохранения газовой динамики и потенциалы дивергентных уравнений
Additional conservation laws of gas dynamics and potentials of divergent equations 238

Сагадеева М. А., Бадоян А. Д.
Оптимальное управление решениями нестационарного уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной
The optimal control of solutions to the Barenblatt–Zheltov–Kochina nonstationary equation 239

Садыбеков М. А., Турметов Б. Х.
Периодические краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре
Periodic boundary value problems for the Poisson equation in a ball 240

Саженков С. А.
Двухмасштабные меры Янга для усреднения одномерного движения смеси вязких баротропных газов
Two-scale Young measures for homogenization of a one-dimensional motion of a mixture of viscous barotropic gases 241

Сакс Р. С.
Решение спектральных и краевых задач для операторов ротора и Стокса в шаре
Solving some spectral and boundary value problems for the curl and Stokes operator in a ball 242

Саттаров М. А.
К унификации систем дифференциальных уравнений движения жидкостей при больших числах Рейнольдса
Unification of systems of differential equations of motion for liquids at large Reynolds numbers 243

Сафаров Ж. Ш.
Одна теорема условной устойчивости
A theorem of conditional stability 244

Сафиуллова Р. Р.
О разрешимости некоторой обратной задачи для гиперболического уравнения второго порядка
On solvability of some inverse problem for a second order hyperbolic equation . 245

Светов И. Е.
Алгоритм послойного численного решения задачи $3D$-векторной томографии с использованием B-сплайнов
An algorithm using the B-splines for slice-by-slice numerical solving a $3D$-vector tomography problem 246

Свиридюк Г. А., Аль-Делфи Д. К.
Квазиоператор Лапласа в квазибанаховых пространствах
The Laplace quasi-operator in the quasi-Banach spaces 247

Сгибнев М. С.
Асимптотика решения разностного уравнения
Asymptotics of the solution to a difference equation 248

Седипков А. А.
Обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля с разрывными коэффициентами
The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operators with discontinuous coefficients 249

Семенко Е. В.
Общее решение линейной задачи о возмущениях ударной волны
General solution of the linear problem of shock wave disturbance 250

Серикбаев А. У., Надырбекова А. Ш.
Метод регуляризации решения обратной задачи потенциала Кеплера
Method of regularization of solutions to an inverse problem of the Kepler potential 251

Синявский А. Г.
О параболических уравнениях с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания
Parabolic equations with changes of the time direction with a full matrix of gluing conditions 252

Сказка В. В.
Об устойчивости решений одного класса эволюционных дифференциальных уравнений
About stability of solutions of one class of evolutionary differential equations .. 253

Скворцова М. А.
Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа
On stability of solutions to the systems of differential equations of neutral type 254

Соболева О. В.
Единственность и устойчивость решения задачи идентификации для стационарного уравнения диффузии-реакции
Uniqueness and stability of a solution of the identification problem for the stationary diffusion-reaction equation 255

Сорокин А. С.
Уравнение Голузина – Комацу для конечносвязной круговой области
The equation of the Goluzin–Komatsu for a multiply connected circular domain 256

Спорышев М. С., Ларькина О. С.
О корректной разрешимости экстремальной задачи для уравнений акустики анизотропной среды
On correct solvability of an extremum problem for the acoustics equations of an anisotropic medium 257

Старов В. Г.
Улучшение скорости сходимости метода Нейштадта
Improvement of the convergence rate of the Neustadt method 258

Стахеева О. А.
Разрешимость одного класса невырожденных эволюционных уравнений с памятью
Solvability of a class of nondegenerate evolution equations with memory 259

Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б.
Метод динамического программирования в обратных задачах динамики
The dynamic programming method in inverse problems of dynamics 260

Султанов О. А.
Влияние возмущений на устойчивость авторезонанса
Effect of perturbations on autoresonance stability 261

Табаринцева Е. В.
О приближенном решении обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения
An approximate solution to an inverse problem for a nonlinear differential equation 262

Талышев А. А.
Об интегрировании автоморфных систем конечномерных групп Ли
On integration of automorphic systems of finite-dimensional Lie groups 263

Тарасова Г. И.
Внешняя вариационная задача Дирихле для вырождающихся нелинейных дифференциальных уравнений
An exterior Dirichlet variational problem for degenerate nonlinear differential equations 264

Тасевич А. Л.
Коэрцитивность и гладкость функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями
Coerciveness and smoothness of a functional-differential equation with orthotropic contractions 265

Телешева Л. А.
О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения четвертого порядка
On solvability of a linear inverse problem for a fourth order parabolic equation 266

Терешко Д. А.
О сходимости итерационного процесса решения экстремальной задачи для уравнений тепловой конвекции
On convergence of an iterative process for solving an extremum problem for heat convection equations 267

Терсенов Ар. С.
О радиально-симметричных решениях задачи Дирихле для уравнения p-лапласиана
Radially-symmetric solutions of the Dirichlet problem for the p-Laplace equation 268

Трахинин Ю. Л.
О корректности в пространствах Соболева задачи для контактного разрыва в магнитной гидродинамике
On well-posedness in Sobolev spaces of the problem for contact MHD discontinuities 269

Тухтасинов М.
Об инвариантности постоянного многозначного отображения в задаче теплопроводности с запаздыванием
On invariance of a constant multivalued mapping in a heat conductivity problem with delay 270

Тюхтина А. А., Калинин А. В., Жидков А. А., Молодкина В. Е.
L_p-оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в исследовании электромагнитных процессов в неоднородных средах
L_p-estimates of the inner products of vector fields and their application for studying electromagnetic processes in heterogeneous media 271

Уварова И. А.
О свойствах решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности
On properties of solutions to one class of systems of nonlinear differential equations of high dimension 272

Урев М. В.
Решение с помощью МКЭ одной эллиптической задачи с сильным вырождением
FEM for an elliptic problem with strong degeneration 273

Уринов А. К., Исмоилов А. И.
Об одном аналоге задачи Гурса для обобщенного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу
On an analogue of the Goursat problem for the generalized Euler–Poisson–Darboux equation 274

Фалалеев М. В.
Теория обобщенных решений интегродифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах и их приложения
Theory of generalized solutions of integro-differential equations with degeneration in Banach spaces and their applications 275

Федорук М. П., Шурина Э. П., Михайлова Е. И.
Особенности математического моделирования сверхвысокочастотных электромагнитных полей
Some peculiarities of mathematical modeling of the super-high-frequency electromagnetic fields 276

Фёдоров В. Е., Фёдорова Ю. Ю.
Периодическая нелокальная задача для одного класса уравнений соболевского типа
A periodic nonlocal problem for a class of Sobolev type equations 277

Финогенко И. А., Пономарев Д. В.
Импульсно-скользящие режимы дифференциальных включений
Impulse sliding modes of differential inclusions 278

Фокин М. В.
О резонансе во вращающейся идеальной жидкости
About resonance in a rotating ideal fluid 279

Фроленков И. В., Романенко Г. В.
О существовании решений систем нагруженных дифференциальных уравнений специального вида с данными Коши
On existence of solutions to systems of loaded differential equations of a special form with Cauchy data 280

Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н.
Численное решение одного гиперболо-параболического уравнения
Numerical solving a hyperbolic-parabolic equation 281

Холиков Д. К.
Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения Аллера
On a nonlocal problem for the loaded Aller equation 282

Холодовский С. Е.
Решение краевых задач в полуцилиндрах с основанием в виде двухслойной пленки
Solving boundary value problems in semi-cylinders with the base in the form of a double-layer film 283

Хриптун М. Д.
Некоторые последовательности моментов Стильтьеса и моментов Хаусдорфа, порождающие новые производящие функции для обобщенных функций Бесселя
Some Stieltjes and Hausdorf moment sequences producing new generating functions for the generalized Bessel functions 284

Худяков Ю. В.
Модели Шестакова – Свиридюка с резонансом
Shestakov–Sviridyuk's models with resonance 285

Царицанский А. Н.
Задача о распространении волн в среде с памятью
The problem of wave propagation in a medium with memory 286

Чеботарев А. Ю.
Краевые задачи с нелокальными данными для систем Навье – Стокса
Nonlocal boundary value problems for the Navier–Stokes systems 287

Чесноков А. А.
Распространение длинноволновых возмущений в жидкости с учетом эффектов дисперсии и диссипации
Propagation of long-wave perturbations in a fluid with accounting for the effects of dispersion and dissipation 288

Чечкина А. Г.
Вырождающиеся спектральные задачи Стеклова с микронеоднородной структурой
Degenerating Steklov spectral problems with inhomogeneous microstructure ... 289

Чуев Н. П.
О дифференциальной модели динамики самогравитирующего газа
On a differential model of the self-gravitating gas dynamics 290

Чуешева Н. А., Соколова А. Г.
Три краевые задачи для уравнения неклассического типа
Three boundary value problems for a nonclassical equation 291

Чуйко С. М., Белущенко А. В.
О регуляризации линейной периодической задачи с импульсным воздействием
On regularization of a linear periodic problem with impulse action 292

Шадрина А. И.
Разрешимость некоторых пространственно нелокальных краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений с разрывными коэффициентами
Solvability of some space-nonlocal boundary value problems for parabolic and pseudoparabolic equations with discontinuous coefficients 293

Шадрина Н. Н.
О решении краевых задач в кусочно-однородном полупространстве, содержащем трещину, перпендикулярную границе
On solving some boundary value problems in the piecewise-homogeneous half-space with a crack perpendicular to the bound 294

Шалданбаев А. Ш., Тенгаева А. А., Оразова Р. С.
Об одном методе решения краевой задачи для обратного параболического уравнения
On a method for solving a boundary value problem for an inverse parabolic equation 295

Шамолин М. В.
Обзор случаев интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил
Review of integrable cases of motion equations of four-dimensional rigid body in a nonconservative field 296

Шарафутдинов В. А.
Обратная двумерная задача для стекловского спектра
The 2D inverse problem for the Steklov spectrum 297

Шевченко Г. В.
Выпуклые покрытия в теории оптимального управления
Convex coverings in optimal control theory 298

Шепелов М. А.
Исследование устойчивости решения коэффициентной обратной задачи для стационарного уравнения конвекции-диффузии
Stadying the stability of the identification problem solutions for the stationary convection-diffusion equation 299

Шипина Т. Н.
Об одной задаче идентификации коэффициентов при младших членах в системе нелинейных дифференциальных уравнений
An inverse problem for a system of nonlinear differential equations with unknown lowest coefficients 300

Шишканова А. А.
Решение интегральных уравнений механики контактного взаимодействия для двусвязных областей
Solving the integral equations of contact interaction mechanics for doubly-connected domains 301

Шишленин М. А.
Регуляризация задачи продолжения для уравнения Гельмгольца
Regularization of the continuation problem for the Helmholtz equation 302

Шубин В. В.
Краевые задачи для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка
Boundary value problems for some classes of degenerating high order equations 303

Щербаков В. В.
Управление формой и структурой тонких включений в упругих телах при наличии трещин
On control of shapes and structures of thin inclusions in elastic bodies with cracks 304

Эбель А. А.
Смешанное управление в модели Шестакова – Свиридюка с инерционностью
Mixed control in Shestakov–Sviridyuk's model with inertia 305

Юлдашева А. В.
Об одной задаче для уравнения высокого порядка
On one problem for a high order equation 306

Яшима Х. Ф.
Уравнения процессов капель в воздухе
Equations of processes of droplets in the air 307

Якушев И. А.
О вариационной задаче Дирихле для эллиптических операторов, вырождающихся на неограниченном многообразии
On the variational Dirichlet problem for elliptic operators degenerating on a unbounded manifold 308

Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.
On the singular points of the Ricci flow on some generalized Wallach spaces.... 309

Abylkairov U. U., Danaev N. T., Khompysh Kh.
On the ε-approximation of the heat convection equations for the Kelvin–Voight fluids..... 310

Akinshin A. A., Golubyatnikov V. P.
Oscillating trajectories in some nonlinear dynamical systems..... 311

Annin B. D., Belmetcev N. F., Chirkunov Yu. A.
Group analysis of the equations of a dynamic model of transversally isotropic elastic geomaterials satisfying Gassmann conditions 312

Antontsev S., Shmarev S.
Doubly nonlinear parabolic equations in Sobolev spaces with variable exponents of nonlinearity 313

Asanova A. T.
On unique solvability of a nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations 314

Balandin A. S.
On solvability of linear differential-difference equations on the real axis 315

Belyayev Yu. N.
A method of symmetric polynomials for solving the Cauchy problem 316

Buterin S. A.
An inverse problem for the Sturm–Liouville operator on a noncompact star-type graph 317

Chemetov N. V., Nečasová Š.
Global solvability result for the motion of the rigid body in a viscous fluid with collisions 318

Chepyzhov V. V., Zelik S. V.
Regular global attractors for autonomous and non-autonomous partial differential equations 319

Chudinov K. M.
On estimation of solutions of scalar functional differential equations on semiaxis 320

Darovskaya K. A.
On Fredholm-type solvability for second-order ordinary differential equations with integral conditions 321

Denisov V. N.
On stabilization of solutions to the Cauchy problem for parabolic equations 322

Durdiev D. K.
A kernel identification problem in the system of integro-differential Maxwell equations 323

Farmonov Sh. R.
A boundary value problem with nonlocal conditions for a second order equation of mixed type 324

Garifullin R. N., Mikhailov A. V., Yamilov R. I.
The quad equation with a nonstandard generalized symmetry structure 325

Glyzin S. D.
Bursting effect in models with delay 326

Grebenev V. N., Oberlack M., Frewer M.
The dual stream function approach to Lagrangian cohereht structures arising in turbulence 327

Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V.
On non-trivial solutions of a homogeneous two-point boundary value problem for a partial differential equation 328

Khurshudyan As. Zh.
Optimal control of one-dimensional wave equation with variable coefficients in the Sobolev space W_1^l 329

Klevtsova Yu. Yu.
On the existence of a stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model for baroclinic atmosphere on a sphere 330

Kmit I.
Boundary value problems for first-order hyperbolic systems: regularity, Fredholmness, bifurcations, and dichotomy 331

Kulikov A. Y.
Right-part stability of a delay difference equation 332

Łasica M.
On solutions to a singular anisotropic curvature flow 333

Latawiec K. J., Stanisławski R., Łukaniszyn M.
Fractional-order differential / difference equations around us 334

Lyubanova A. Sh.
On some problem for the systems of evolution equations 335

Malygina V. V.
Use of the test-method for investigation of stability of functional differential equations 336

Meleshko S. V., Moyo S.
Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations 337

Mulyukov M. V.
Stability of linear delay differential systems 338

Peszek J. P.
Interplay between flocking particles and a non-Newtonian viscous fluid 339

Popov V. A.
On Garding-type inequalities for differential-difference equations with degeneration 340

Sabatulina T. L.
On exponential stability of a linear autonomous differential equation with distributed delay 341

Serovajsky S. Ya.
State variation in an optimization control problem for a nonlinear elliptic equation with states constraints 342

Seyranian A. P.
Two problems on stabilization of statically unstable systems by vibration 343

Sharma S.
Some recent results in fixed point theory in intuitionistic fuzzy quasi-metric spaces and its applications 344

Shishkina E. L.
The Cauchy problem for a b-hyperbolic equation 345

Solonukha O. V.
Some nonlinear and quasilinear functional-differential equations of elliptic type. 346

Suragan D.
Some problems of spectral geometry for s-numbers 347

Sychev M. A.
Convergence of minimizers in regular variational problems 348

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ
FUNCTION SPACES AND APPROXIMATION THEORY

30-минутные доклады / Invited Lectures

Арутюнов А. В.
Вырожденные задачи нелинейного анализа
Abnormal problems in nonlinear analysis 350

Бесов О. В.
Пространства функций нулевой гладкости
The spaces of functions of smoothness zero 351

Васкевич В. Л.
Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатурных формул
Errors, condition numbers, and guaranteed accuracy of multidimensional spherical cubature formulas 352

Водопьянов С. К.
Пространства Соболева и квазиконформный анализ
Sobolev spaces and quasiconformal analysis 353

Кириллов К. А., Носков М. В.
Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара
Minimal cubature formulas which are exact for the Haar polynomials 354

Рамазанов М. Д.
Соболевская теория решетчатых кубатурных формул. Проблемы, алгоритмы и применения
Sobolev theory of lattice cubature formulas. Problems, algorithms, and applications 355

Соболева Т. С., Чечкин А. В.
Информационно-системная безопасность сложных критических систем и необходимость избыточного моделирования таких систем в форме среды радикалов
Information system safety of complex critical systems and necessity of redundant modeling these systems in the form of radical media 356

Субботин Ю. Н.
Погрешность аппроксимации кривизны классов гладких плоских кривых
Error of approximation of curvature for classes of smooth flat curves 357

Burenkov V. I., Otelbaev M.
Singular numbers of correct restrictions of non-selfadjoint elliptic operators 358

Gogatishvili A., Stepanov V. D.
Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions 359

Kusraev A. G., Kutateladze S. S.
Nonstandard trends in functional analysis 360

Агаджанов А. Н.
О геометрических свойствах норм в суперрефлексивных пространствах типа Соболева
Geometric properties of norms in super-reflexive Sobolev type spaces 362

Акишев Г.
Оценки линейных поперечников классов в пространстве Лоренца
Estimates of the linear widths of classes in the Lorentz space 363

Аносов В. П.
О некоторых критериях компактности семейства векторных функций
On some compactness criteria for a family of vector functions 364

Арбузов Э. В.
О суперпозиции операторов Фурье – Рисса в пространстве риссовых потенциалов
On superposition of Fourier–Riesz operators in the space of Riesz potentials ... 365

Ахмедов Д. М.
Оптимальные квадратурные формулы с производными для сингулярных интегралов в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$
Optimal quadrature formulas with derivatives for singular integrals in the space $L_2^{(3)}(0,1)$ 366

Балгимбаева Ш. А.
Нелинейная аппроксимация классов функций смешанной гладкости
A nonlinear approximation of function classes with mixed smoothness 367

Белых В. Н.
Оценки колмогоровской ε-энтропии компактов бесконечно дифференцируемых функций (к проблеме К. И. Бабенко)
Estimation of Kolmogorov's ε-entropy for some classes of infinitely differentiable functions (the Babenko problem) 368

Бокаев Н. А., Сыздыкова А. Т.
О свертках функций из пространства типа Бесова по базисам из мультипликативных систем
On convolution of functions of Besov type spaces in the bases of multiplicative systems 369

Васильева А. А.
Поперечники весовых классов Соболева с весами, являющимися функциями расстояния до h-множеств
Widths of weighted Sobolev classes whose weights are the distance functions to h-sets 370

Васильчик М. Ю., Пупышев И. М.
Граничное поведение функций класса Соболева на границе области с внешним пиком
Boundary behavior of the Sobolev class functions at the boundary with an outer cusp 371

Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.
Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения
Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and quasi-isometric mappings 372

Войтишек А. В.
Исследование особенностей приближения сложно вычислимых функций на примере функциональных оценок метода Монте-Карло
Studying peculiarities of approximation of functions of high computational complexity using the example of functional estimates of the Monte Carlo method 373

Волков Ю. С.
Сплайн-интерполяция положительных данных
Positive spline interpolation 374

Гичев В. М.
Метрические свойства в среднем полиномов на компактных однородных пространствах
Metric properties in the mean of polynomials on compact homogeneous spaces . 375

Грицутенко С. С., Королёва К. А.
Метод оптимальной интерполяции нейтральным по свёртке вектором, определённым на пространстве Гильберта
An optimal interpolation method with convolution-neutral vector defined on a Hilbert space 376

Гутман А. Е.
Положительный лифтинг в измеримом расслоении банаховых решеток
Positive lifting in a measurable bundle of Banach lattices 377

Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В.
Приближенное обращение операторов лучевых преобразований в рефракционной томографии
Approximate inversion of the ray transform operators in refractive tomography 378

Дроздов Г. М.
Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения конвекции-диффузии методом неопределенных коэффициентов
Construction of a difference scheme with high order approximation for the convection-diffusion equation by the method of undetermined coefficients 379

Дьяченко Е. О., Тарханов Н. Н.
Подходы к определению эллиптичности псевдодифференциальных операторов с малым параметром
Ellipticity for pseudodifferential operators with small parameter 380

Егоров А. А.
W_p^l-Регулярность решений дифференциальных неравенств с нуль-лагранжианами
W_p^l-Regularity of solutions of differential inequalities with null Lagrangians 381

Жалолов Икр. И.
Существование и единственность весовой оптимальной квадратурной формулы в пространстве Соболева $W_2^m(\mathbb{R})$
Existence and uniqueness of an optimal weighted quadrature formula in the Sobolev space $W_2^m(\mathbb{R})$ 382

Жамсранжав Д.
Об оптимальном вложении пространств Соболева – Орлича
On optimal embedding of Sobolev–Orlicz spaces 383

Журавлев И. В.
Системы уравнений, возникающие в теории отображений с ограниченным искажением
Systems of equations in the theory of mappings with bounded distortion 384

Задорин А. И., Задорин Н. А.
Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей
Quadrature formulas for functions with a boundary-layer component 385

Золотухин А. Я.
Метод с регуляризацией решения задачи Синьорини
A regularization method for solving the Signorini problem 386

Исангулова Д. В.
Теорема Лиувилля на одной трехступенчатой группе Карно при минимальных предположениях гладкости
A Liouville theorem on some three-step Carnot group under minimal smoothness assumptions 387

Исмоилов С. И.
Коэффициенты весовой квадратурной формулы в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$
Coefficients of a weighted quadrature formula in the space $L_2^{(2)}(0,1)$ 388

Карачанская Е. В.
Применение δ-функции для получения формулы дифференцирования сложного случайного процесса
Application of the δ-function for obtaining the differentiation rule for a compound random process 389

Качуровский А. Г.
Спектральные меры и скорости сходимости в эргодических теоремах
Spectral measures and convergence rates in ergodic theorems 390

Копылов А. П.
О внутренней геометрии подмногообразий римановых многообразий
On the intrinsic geometry of submanifolds of Riemannian manifolds 391

Коробов А. А.
О двух неравенствах Колмогорова на полупрямой
On two Kolmogorov's inequalities on the half-line 392

Кошелев А. А.
Неравенство Колмогорова для оператора Лапласа
The Kolmogorov inequality for the Laplace operator 393

Куликов И. М.
Об одном приближенном решении равновесного вращающегося самогравитирующего газа
An approximate solution for an equilibrium rotating gas cloud 394

Лазарева Г. Г.
Приближенные решения задачи тепломассопереноса в мантии земли
Approximate solutions to the heat and mass transfer problem in the Earth mantle 395

Максимова Н. Н.
Численный алгоритм решения одной вариационной задачи механики с применением методов двойственности
A numerical algorithm for solving some variational problem in mechanics by the duality method 396

Мельников Е. В.
Обобщённая корректность абстрактной задачи Коши
Well-posedness of an abstract Cauchy problem in the sense of distributions 397

Меремеля И. Ю., Савчук М. В.
Оценка смешанной производной голоморфной функции в поликруге
A mixed derivative estimate for a holomorphic function in the polydisk 398

Мирошниченко В. Л.
Об оценках погрешности для локальной аппроксимации кубическими сплайнами
On the error bounds for local approximation by cubic splines 399

Михайлец В. А., Мурач А. А.
Расширенная соболевская шкала
An extended Sobolev scale 400

Муратбеков М. Б., Мусилимов Б. М., Мусабекова З. Е.
О дискретности спектра неполуограниченного дифференциального оператора
On discreteness of the spectrum of a non-semibounded differential operator 401

Никитина Т. Н.
Уравнение Монжа – Ампера на положительном потоке
The Monge–Ampere equation on a positive current 402

Новиков О. А., Ровенская О. Г.
Приближение периодических функций повторными суммами Валле Пуссена
Approximation of periodical functions by repeated de La Vallée Poussin sums .. 403

Новиков С. И.
Оптимальная интерполяция функциями нескольких переменных
Optimal interpolation by functions of several variables 404

Носков М. В., Симонов К. В., Кириллова С. В., Кадена Л.
Быстрые алгоритмы шиарлет-преобразования данных наблюдений
Fast shearlet transform algorithms for observation data processing 405

Нуралиев Ф. А.
Об одной оптимальной квадратурной формуле с производными нечетного порядка
On an optimal quadrature formula with odd-order derivatives 406

Полякова А. П.
Численное решение задачи трехмерной векторной томографии с использованием метода сингулярного разложения
Numerical solution of a 3-D vector tomography problem by the singular value decomposition 407

Попов А. С.
Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений тетраэдра с инверсией
Cubature formulas on the sphere which are invariant under the group of tetrahedral rotations with inversion 408

Примаков С. С.
Об алгоритмах построения сплайнов пятой степени
On algorithms for constructing quintic splines 409

Рахматуллин Д. Я.
Построение наилучших по порядку ненасыщаемых кубатурных формул
Construction of the best order unsaturated cubature formulas 410

Романов А. С.
Функции соболевского типа с переменными характеристиками на метрических пространствах
Sobolev type functions with variable characteristics on metric spaces 411

Романовский Н. Н.
Новый подход к описанию соболевских классов на метрических пространствах и его применения
A new approach to the description of Sobolev classes of functions on metric spaces and its applications 412

Савельев Л. Я.
Продолжение меры до интеграла
Extension of a measure to an integral 413

Санеева Л. И., Данзанова В. С.
Кубатурные формулы, содержащие в узлах значения функции и значения ее первой производной
Cubature formulas containing the values of the function and the values of its first derivative at the nodes 414

Сергеева О. А.
Пространства (q, ρ)-форм
The spaces of (q, ρ)-forms 415

Силаев Д. А., Коротаев Д. О.
Полулокальные сглаживающие сплайны и их применение для вычисления двумерных и трехмерных интегралов
Semilocal smoothing splines and their application for computing two- and three-dimensional integrals 416

Скороходов С. Л.
Обобщенные квадратуры Гаусса – Якоби
Generalized Gauss–Jacobi quadratures 417

Смаилов Е. С.
Прямые и обратные теоремы приближения в пространствах Лоренца с весом Эрмита
Direct and inverse approximation theorems in the Lorentz spaces with Hermite weight 418

Стрелков Н. А.
О взаимосвязи сплайнов и всплесков
On the relationship between splines and wavelets 419

Сулейменов К. М.
О вложениях $B^{\omega_1,\ldots,\omega_n}_{p_1,\ldots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\ldots,q_n}(\mathbb{R}^n)$
On the embeddings $B^{\omega_1,\ldots,\omega_n}_{p_1,\ldots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\ldots,q_n}(\mathbb{R}^n)$ 420

Темиргалиев Н.
"Компьютерный (вычислительный) поперечник" в задачах численного анализа
The "computer (computational) width" in numerical analysis 421

Тутатчиков В. С.
О конфигурациях узлов кубатурных формул в теории антенных решеток
On configurations of nodes in cubature formulas in the theory of antenna arrays 422

Тюленев А. И.
Описание следов соболевских пространств с общими A_p весами
Description of the traces of Sobolev spaces with general A_p weights 423

Ушакова Е. П.
Многомерные неравенства Харди
Multidimensional Hardy inequalities 424

Фадеев С. И., Лихошвай В. А., Королев В. К., Штокало Д. Н.
Эффективный метод численного исследования автономных систем в моделях матричного синтеза
An efficient method for the numerical study of autonomous systems in models of matrix synthesis 425

Фалалеев Л. П., Василина Г. К.
Скорость сходимости линейных средних сумм Фурье
The convergence rate of the linear means of Fourier sums 426

Халитов А. Х.
Решение многоразмерных интегральных уравнений
Solution of multidimensional integral equations 427

Шадиметов Х. М., Болтаев Н.
Оптимальная квадратурная формула в смысле Сарда для вычисления коэффициентов Фурье
A quadrature formula optimal in the sense of Sard for calculating the Fourier coefficients 428

Шадиметов Х. М., Хаётов А. Р.
Оптимальная квадратурная формула в смысле Сарда в пространстве $K_2(P_3)$
A quadrature formula optimal in the sense of Sard in the space $K_2(P_3)$ 429

Шакиров И. А.
О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на поведение констант Лебега
On the influence of the choice of Lagrange interpolation nodes on the behavior of the Lebesgue constants 430

Шваб И. В., Медведев С. Б., Якункин Н. И.
Моделирование динамики плазмы в кинетическом приближении
Simulation of plasma dynamics in the kinetic approximation 431

Эминов С. И., Эминова В. С.
Теория гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений
Theory of hypersingular integro-differential equations 432

Юмова Ц. Ж.
Вычисление оптимальных коэффициентов кубатурной формулы в неизотропном пространстве
Calculating the optimal coefficients of a cubature formula in an anisotropic space 433

Ashyralyev A., Yildirim O.
On the stability of high order of accuracy difference schemes for nonlocal boundary value problems with selfadjoint operator 434

Ashyralyyev Ch.
A fourth order of accuracy difference scheme for an overdetermined inverse elliptic problem 435

Chumakov G. A.
Canonical domains for almost orthogonal quasi-isometric grids 436

Dhara R. N., Kałamajska A.
On one extension theorem dealing with weighted Orlicz–Slobodetskii space on the boundary of a domain 437

Greshnov A. V.
On uniform domains on Carnot groups 438

Heinecke A., Vaidyanathan K., Smelyanskiy M., Kobotov A., Dubtsov R., Henry G., Chrysos G., Dubey P.
Design and implementation of the Linpack benchmark for single and multi-node systems based on Intel® Xeon Phi™ coprocessor 439

Kalinkin A., Anders A., Anders R.
Intel®Direct Sparse Solver for Clusters, a research project for solving large sparse systems of linear algebraic equations on clusters 440

Kalinkin A., Krjukov I.
Intel®Cluster Poisson Solver Library, a research project for heterogeneous clusters suitable for atmosphere and ocean research 441

Kazaniecki K., Wojciechowski M.
On the continuity of Fourier multipliers on the homogeneous Sobolev spaces $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$ 442

Korobkov M. V.
On the Morse–Sard theorem, the N-property, and level sets for the sharp case of Sobolev–Lorentz mappings 443

Lassoued D.
A space of almost periodic Sobolev–Besicovitch functions and applications 444

Lukinov V. L., Kuznetsov S. V.
MKL Extended Eigensolver for solving symmetric eigenvalue problems 445

Mazowiecka K. E.
Generic singularities of harmonic and biharmonic maps 446

Miklyukov V. M.
Functions of Sobolev classes on anisotropic spaces 447

Mozartova N. S., Kashevarova T. P., Shustrov N. A.
Dynamically scheduled parallelization of linear algebra algorithms for heterogeneous systems 448

Novitskii I. M.
Kernel global smoothing by unitary reductions 449

Piskarev S. I.
An approximation of a Bitzadze–Samarskii type inverse problem for elliptic equations 450

Podvigin I. V.
On the convergence rate in the Birkhoff ergodic theorem for the periodic Lorentz gas 451

Pudov S. G.
MKL Sparse BLAS: performance optimizations on modern architectures 452

Selivanova S. V., Selivanov V. L.
Computability of the solution operators of symmetric hyperbolic systems 453

Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V.
Construction and application of the collocation and least residual method for solving the three-dimensional Navier–Stokes equations 454

Shlapunov A. A.
On completeness of the root functions of Sturm–Liouville problems with discontinuous boundary operators 455

Zinde-Walsh V.
Measurement error and deconvolution in spaces of generalized functions..... 456

Zotkevich A. A.
On optimization of dense linear algebra algorithms for Intel® Xeon Phi™ coprocessor architecture 457

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
Тезисы

PLENARY LECTURES
Abstracts

ДОВОЕННЫЕ РАБОТЫ С. Л. СОБОЛЕВА И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ПОСЛЕДУЮЩЕГО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

S. L. SOBOLEV'S WORKS IN THE PRE-WAR YEARS AND THEIR IMPORTANCE FOR THE SUBSEQUENT DEVELOPMENT OF MATHEMATICS

Бабич В. М.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия; babich@pdmi.ras.ru

Последнее десятилетие 19-го века и начало 20-го века — это годы подъема России. Инерция подъема была столь велика, что его не остановили даже ужасы войн и революции. Эпоха рождала гигантов в науке и не только в науке. Это были люди подъема России. Моя цель — рассказать о творчестве лишь одного представителя той блестящей плеяды ученых — о Сергее Львовиче Соболеве.

С. Л. Соболеву и В. И. Смирнову принадлежит оригинальнейший "метод Смирнова – Соболева". Это метод решения плоских нестационарных задач теории дифракции. Он позволил для многих задач для угловых областей найти явное решение. Совсем явное: без квадратур и специальных функций! Формулы, решающие эти задачи, содержали разрывные функции. Естественно вставал вопрос: в каком смысле полученные выражения являются решениями? Работа над этими проблемами привела С. Л. Соболева к понятиям обобщенного решения и решения в функционалах. Соответствующие идеи были подхвачены многими исследователями. Математическая физика под влиянием работ С. Л. Соболева изменила лицо. Как справедливо заметил профессор В. П. Паламодов, введение в математику обобщенных функций (так впоследствии стали называть "решения в функционалах") было самым значительным событием 20-го века в анализе.

Сравнимым по значению с этими работами были работы Сергея Львовича по "функциональным пространствам Соболева". Должный выбор функциональных пространств позволяет сделать теорию соответствующей задачи математической физики короткой и математически элегантной.

С. Л. Соболев замечателен тем, что у него кроме "математической силы" был и "хороший вкус": он решал такие задачи, которые и надо было решать. Он решал их отлично. Дело здесь в том, что у Сергея Львовича консультантом была сама Природа — лучший математик всех времен.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЙ

CONSERVATION LAWS FOR THE RELATIVISTIC EQUATIONS

Годунов С. К.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
godunov@math.nsc.ru

Будут приведены примеры нелинейных вариантов релятивистских уравнений, включающих уравнения Максвелла. Для них формулируются законы сохранения.

Лекция основана на статье автора [1] и содержит её развитие. Приводится один из возможных вариантов моделирования гравитации, аналогичный предложенному А. А. Логуновым и М. А. Мествиришвили [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Термодинамическая формализация уравнений гидродинамики заряженного диэлектрика в электромагнитном поле // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 916–929.
2. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Тензор энергии-импульса материи как источник гравитационного поля // Теор. и мат. физика. 1997. Т. 110, № 1. С. 5–24.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN SOBOLEV SPACES

Дубинский Ю. А.

Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт", Москва, Россия; julii_dubinskii@mail.ru

В области $G \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается система уравнений Пуассона

$$\Delta u(x) = h(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $h(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x))$.

Изучаются краевые задачи: найти решение системы (1) при условиях

$$(u, n)_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0 \quad \text{или} \quad [u, n]_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$, $[\cdot,\cdot]$ — скалярное и векторное произведения в $\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n}\right)$ — производная вектор-функции u по нормали $\vec{n} = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$.

Корректность этих задач устанавливается в рамках двойственностей $(W^1_{2,tang}, (W^1_{2,tang})^*)$ и $(W^1_{2,norm}, (W^1_{2,norm})^*)$, где

$$W^1_{2,tang} = \{u(x) \in W^1_2 : (u, n)_\Gamma = 0\}, \quad W^1_{2,norm} = \{u(x) \in W^1_2 : [u, n]_\Gamma = 0\},$$

при этом ключевую роль играют неравенства

$$\int\limits_G |u|^2 dx \le M\left(\int\limits_G |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Gamma (u, n)^2 d\gamma\right), \quad u \in W^1_2;$$

$$\int\limits_G |u|^2 dx \le M\left(\int\limits_G |\nabla u|^2 dx + \int\limits_\Gamma |[u, n]|^2 d\gamma\right), \quad u \in W^1_2.$$

Следствие 1. *Пусть $\xi(x) \in L_2$ — произвольная соленоидальная функция. Тогда существует единственная соленоидальная функция $w \in L_2$, $(w, n)_\Gamma = 0$, такая, что*

$$\xi(x) = \operatorname{rot} w(x), \quad x \in G.$$

Следствие 2. *Пусть $\xi_0(x) \in L_2$ — соленоидальная функция, удовлетворяющая условию $(\xi_0, n)_\Gamma = 0$. Тогда существует единственная соленоидальная функция $w \in L_2$, $\operatorname{rot} w \in L_2$, $[w, n]_\Gamma = 0$, такая, что*

$$\xi_0(x) = \operatorname{rot} w(x), \quad x \in G.$$

В заключение отметим, что детали имеются в статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинский Ю. А.* О некоторых краевых задачах для системы уравнений Пуассона в трехмерной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 610–613.

О ПЕРЕХОДЕ К ПРЕДЕЛУ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

ON PASSAGE TO THE LIMIT IN NONLINEAR ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS

Жиков В. В.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия; zhikov@vlsu.ru

При переходе к пределу в нелинейных слагаемых сталкиваемся с фундаментальной проблемой "слабой сходимости потока к потоку".

Потоком принято называть вектор $A(x, \nabla u_\varepsilon)$, стоящий в эллиптическом уравнении под знаком дивергенции. Обычно известна слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в некотором соболевском пространстве и слабая сходимость потоков $A(x, \nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup z$ в некотором лебеговом пространстве. Тогда возникает проблема равенства $z = A(x, \nabla u)$.

Сформулируем один результат в этом направлении. Он носит локальный характер, в качестве области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ можно взять шар.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия:*
1^0) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 1$;
2^0) *символ* A *монотонен:*

$$(A(x,\xi) - A(x,\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0;$$

3^0) $\operatorname{div} A(x, \nabla u_\varepsilon) = 0$ *в смысле распределений,*

$$A_\varepsilon \equiv A(x, \nabla u_\varepsilon) \rightharpoonup z \text{ в } L^{\beta'}(\Omega), \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta - 1};$$

4^0) $1 < \alpha \leq \beta < \alpha_*$,

$$\alpha_* = \begin{cases} \frac{\alpha(N-1)}{N-1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha < N-1, \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha \geq N-1; \end{cases}$$

5^0) *семейство "плотностей энергий"* $A_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ *ограничено в* $L^1(\Omega)$;
6^0) $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$ *(дополнительная регулярность допредельной функции).*
Тогда $z = A(x, \nabla u)$.

Отметим, что в "классическом случае", когда $\alpha = \beta$, последние три условия выполнены автоматически.

В докладе будут обсуждаться некоторые приложения:

• монотонные эллиптические операторы с нестандартными условиями роста;

• задача о термисторе;

• обобщенные уравнения Навье – Стокса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00331) и гранта-субсидии Минобрнауки РФ № 14.B37.21.0362.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

KINETIC EQUATIONS AND DYNAMICS OF CONTINUUM

Козлов В. В.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
vvkozlov@mi.ras.ru

Рассматривается круг вопросов, связанных с выводом уравнений движения сплошных сред (в описании Эйлера) из кинетических уравнений Лиувилля и Власова. Уравнение Лиувилля описывает бесстолкновительную среду и лежит в основе теории ансамблей Гиббса из статистической механики. Уравнение Власова описывает динамику континуума взаимодействующих частиц. Метод моментов приводит к бесконечной цепочке зацепляющихся уравнений. Обсуждается проблема "обрезания" этой цепочки. Рассматривается поведение плотности среды при неограниченном возрастании времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozlov V. V.* The Vlasov kinetic equation, dynamics of continuum and turbulence // Regul. Chaotic Dyn. 2011. V. 16, N 6. P. 602–622.
2. *Козлов В. В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 4. С. 93–130.
3. *Козлов В. В.* Об уравнениях движения бесстолкновительной сплошной среды // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 6. С. 883–900.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ЛИУВИЛЛЕВЫХ СЛОЕНИЙ

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE NAVIER–STOKES EQUATIONS AND TOPOLOGICAL INVARIANTS OF VECTOR FIELDS AND LIOUVILLE FOLIATIONS

Маслов В. П.[1], **Шафаревич А. И.**[2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; [1]v.p.maslov@mail.ru, [2]shafarev@yahoo.com

Изучаются асимптотические решения уравнений Навье – Стокса, описывающие периодические системы вихрей в трехмерном пространстве. Мы рассматриваем следующие ситуации.

1. Локализованные вихревые нити, оси которых образуют двумерную поверхность (вихревая пленка).

2. Система тонких вихрей, заполняющая трехмерный объем.

3. Локализованные точечные вихри, периодически расположенные в объеме.

Решения связаны с топологическими инвариантами векторных полей и лиувиллевых слоений на цилиндре или торе. Уравнения, описывающие эволюцию системы вихрей, определены на графе, представляющем собой множество траекторий или лиувиллевых торов векторного поля.

К ТЕОРИИ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ
TO THE THEORY OF SOBOLEV SPACES

Решетняк Ю. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Reshetnyak@math.nsc.ru

В своих работах, посвященных некоторым вопросам теории пространственных отображений, мне неоднократно приходилось применять различные результаты теории соболевских пространств. С другой стороны, оказалось, что некоторые понятия и технические приемы теории отображений могут быть полезны и при изучении пространств функций с обобщенными производными. Доклад посвящен изложению некоторых результатов, которые были получены на этом пути. Основные из них — теорема о дифференцируемости почти всюду и ее приложения, нелинейная емкость и ее приложения к исследованию функций с обобщенными производными, теорема о слабой непрерывности якобиана, интегральные представления для дифференциальных операторов с условием полной интегрируемости и неравенства типа Корна.

ОЦЕНКИ В L_q РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

L_q-ESTIMATES OF A SOLUTION OF THE FREE BOUNDARY MAGNETOHYDRODYNAMICS PROBLEM IN A MULTIPLY CONNECTED DOMAIN

Солонников В. А.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия; solonnik@pdmi.ras.ru

Рассматривается задача на определение переменной области Ω_{1t} с границей Γ_t, $t > 0$, заполненной вязкой несжимаемой проводящей жидкостью, а также векторных полей $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ и функции p. Предполагается, что на жидкость действуют массовые силы $\boldsymbol{f}$, силы, вызванные магнитным полем $\boldsymbol{H}$, а также капиллярные силы на свободной границе Γ_t. Магнитное поле индуцируется электрическим током $\boldsymbol{j}$, заданным в фиксированной области Ω_3 с границей S_3. Как Ω_{1t}, так и Ω_3 окружены вакуумом Ω_{2t}. Область $\Omega = \Omega_{1t} \cup \Omega_{2t} \cup \Omega_3 \cup \Gamma_t$ ограничена идеально проводящей поверхностью S. Определяющими уравнениями являются уравнения Навье – Стокса, учитывающие наличие магнитного поля, и уравнения Максвелла (без тока смещения, см. [1]):

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nabla \cdot T(\boldsymbol{v}, p) - \nabla \cdot T_M(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{f}(x,t), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}(x,t) = 0, \quad x \in \Omega_{1t}, \quad t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mu \boldsymbol{H}_t = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \qquad x \in \Omega_{1t} \cup \Omega_{2t} \cup \Omega_3, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \alpha(\boldsymbol{E} + \mu(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})), \quad x \in \Omega_{1t}, \quad t > 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \alpha \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}(x,t), \quad x \in \Omega_3, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad x \in \Omega_{2t}, \end{cases} \tag{2}$$

где $T(\boldsymbol{v}, p)$ — тензор напряжений: $T(\boldsymbol{v}, p) = -pI + \nu S(\boldsymbol{v})$, $S(\boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T$ — удвоенный тензор скоростей деформации, $T_M(\boldsymbol{H}) = \mu(\boldsymbol{H} \otimes \boldsymbol{H} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2 I)$ — магнитный тензор напряжений, μ — кусочно-постоянная положительная функция, равная μ_i в Ω_{it}, $i = 1, 2$, μ_3 в Ω_3, $\alpha = \alpha_j = \text{const} > 0$, $j = 1, 3$. Уравнения (1), (2) дополняются краевыми и начальными условиями

$$\begin{cases} \big(T(\boldsymbol{v}, p) + [T_M(\boldsymbol{H})]\big)\boldsymbol{n} = \sigma \boldsymbol{n} H, \quad V_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, \quad x \in \Gamma_t, \\ \mathfrak{n}_t[\mu \boldsymbol{H}] + [\mathfrak{n}_x \times \boldsymbol{E}] = 0, \quad x \in \Gamma_t, \\ [\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}] = 0, \quad [\boldsymbol{H}_\tau] = 0, \quad x \in \Gamma_t \cup S_3, \quad [\boldsymbol{E}_\tau] = 0, \quad x \in S_3, \\ \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{E}_\tau = 0, \quad x \in S, \\ \boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{v}_0(x), \quad x \in \Omega_{10}, \quad \boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{H}_0(x), \quad x \in \Omega_{10} \cup \Omega_{20} \cup \Omega_3, \end{cases} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к Γ_t, S_3, S, V_n — скорость эволюции Γ_t в направлении $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H})$ — тангенциальная составляющая $\boldsymbol{H}$, H — удвоенная средняя кривизна Γ_t, $\sigma = \text{const} > 0$. Под $[u]$ понимается скачок $u(x)$ на Γ_t или на S_3 и под $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_x, \mathfrak{n}_t) = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3, \mathfrak{n}_t)$ — вектор нормали к поверхности $\mathfrak{G} = \{x \in \Gamma_t,\ t > 0\}$ в $\mathbb{R}^4$. Векторные поля $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ удовлетворяют естественным условиям согласования и обладают необходимой регулярностью, как и связная поверхность Γ_0.

Доказывается, что задача (1)–(3) имеет решение $(\boldsymbol{v}, p, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E})$, определенное на некотором конечном интервале времени $(0, T)$, причем $\boldsymbol{v}_t$, $D_x^j \boldsymbol{v}$, $\nabla p \in L_q(Q_T^1)$, $\boldsymbol{H}_t$, $D_x^j \boldsymbol{H}$, $\nabla \boldsymbol{E} \in L_q(Q_T^k)$, $|j| \le 2$, $k = 1, 2, 3$, $Q_T^k = \{x \in \Omega_{kt}, t \in (0, T)\}$, $q > 3$.

В случае односвязных Ω_{1t}, Ω и $\Omega_3 = \emptyset$ задача рассмотрена в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roberts P. H.* An introduction in magnetohydrodynamics. London: Longmans, Green and Co. LTD, 1967.
2. *Padula M., Solonnikov V. A.* On the free boundary problem of magnetohydrodynamics // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 178, N 3. P. 313–344.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PLANE DOMAINS

Begehr H.

Free University of Berlin, Berlin, Germany; begehrh@zedat.fu-berlin.de

There are two principally different complex partial differential operators of one complex variable, the polyanalytic and the polyharmonic operators, $\partial_{\overline{z}}^n$ and $(\partial_z\partial_{\overline{z}})^n$, $n \in \mathbb{N}$. The general complex differential operator $\partial_z^m\partial_{\overline{z}}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, can obviously be decomposed in the product of a polyanalytic (or anti-polyanalytic ∂_z^k, $k \in \mathbb{N}$) and a polyharmonic operator. Using their potentials general linear differential operators with them as leading term can be treated, see [1, 2]. Basic boundary value problems for the simplest operators are in the case of the Cauchy–Riemann operator $\partial_{\overline{z}}$ the Schwarz, Dirichlet, Neumann, Robin and more generally the Riemann and Riemann–Hilbert problems, and in case of the Laplace operator $\partial_z\partial_{\overline{z}}$ the Robin problem with its particular cases, the Dirichlet and Neumann problems. While the Schwarz problem for the Cauchy–Riemann operator is well-posed the others are not [3]. The Robin problem for the Poisson equation $\partial_z\partial_{\overline{z}}w = f$, in general, is conditionally solvable. Only the Dirichlet problem is unconditionally solvable. The solution to the Robin problem is explicitly expressed through the Robin function, a particularly adjusted fundamental solution to the Laplacian with the Green and the Neumann functions as special cases. While the existence of Green functions even for general elliptic operators is well studied, explicit expressions for them are rarely investigated although they would provide explicit solutions to boundary value problems important in applications. There are three methods to calculate the harmonic Green function for plane domains based on (*i*) its conformal invariance, (*ii*) the Schwarz problem for analytic functions, and (*iii*) the parqueting-reflection method. Green functions are e.g. known for disc sectors, cones, certain convex polygons like an equilateral triangle [4], half hexagon, half rings, certain lunes and lenses [5], rings. The Schwarz problem for the inhomogeneous polyanalytic (for $n = 2$ Bitsadze) equation is explicitly solved for the unit disc [6]. For the n-Poisson equation $(\partial_z\partial_{\overline{z}})^n w = f$ there exists a variety of boundary value problems [7], the larger n is the more conditions are possible. Besides the Dirichlet and Neumann problems there is e.g. the Requir (Navier) problem. The latter problem is decomposable in a set of coupled Dirichlet problems for the Poisson equation. Incorporating also Neumann and Robin boundary conditions leads to a hierarchy of hybrid polyharmonic Green functions.

REFERENCES

1. *Vekua I. N.,* Generalized Analytic Functions, Pergamon, Oxford (1967).
2. *Aksoy U., Celebi O.,* "A survey on the boundary value problems for complex partial differential equations," Adv. Dyn. Syst. Appl., **5**, No. 2, 133–158 (2010).
3. *Begehr H.,* "Boundary value problems in complex analysis, I, II," Bol. Asoc. Mat. Venez., **XII**, No. 1, 65–85; No. 2, 217–250 (2005).
4. *Begehr H., Vaitekhovich T.,* "Harmonic Dirichlet problem for some equilateral triangle," Complex Var. Elliptic Equ., **57**, No. 2, 185–196 (2012).
5. *Begehr H., Vaitekhovich T.,* "Schwarz problem in lens and lune," Complex Var. Elliptic Equ. (to appear).
6. *Begehr H., Schmersau D.,* "The Schwarz problem for polyanalytic functions," Z. Anal. Anwend., **24**, No. 2, 341–351 (2005).
7. *Begehr H., Vu T. N. H., Zhang Z.-X.,* "Polyharmonic Dirichlet problem," Proc. Steklov Inst. Math., **255**, No. 1, 13–34 (2006).

INTERPOLATION, DIVIDED DIFFERENCES, SPLINES AND SOBOLEV SPACES. FROM J. GREGORY, I. NEWTON AND G. LEIBNIZ TO S. L. SOBOLEV

Bojarski B.

Institute of Mathematics, Warsaw, Poland; B.Bojarski@impan.pl

A review of the foundations of the theory of Sobolev spaces will be presented. It is mainly based on the discussion of Sobolev pointwise inequalities, propagated in a series of papers by myself and my colleagues and students over the last two decades or so. The famous Sobolev imbedding theorems are discussed with proofs valid for the case of Sobolev spaces on measure metric spaces as well. To some extent Besov–Sobolev spaces are also considered. Apparently new, the concept of maximal mean difference quotient is introduced. It allows us to see the direct connection of the foundations of the Sobolev spaces theory with the very foundational notions of mathematical analysis, from the time before even the concept of derivation and the derivatives was elaborated sufficiently clearly. More natural in this context it seems to be the concepts of finite differences, divided differences and Newton–Lagrange interpolation and related fundamental ideas of numerical computation theory: Peano kernels, B-splines and box splines.

MATHEMATICAL THEORY OF COMPRESSIBLE, VISCOUS, AND HEAT CONDUCTING FLUIDS

Feireisl E.

Institute of Mathematics, Prague, Czech Republic; feireisl@math.cas.cz

We review some recent results on the Navier–Stokes–Fourier system governing the evolution of a general compressible, viscous, and heat conducting fluid. We discuss several concepts of weak solutions, in particular, using the implications of the Second law of thermodynamics. We introduce the concept of relative entropy and dissipative solution and show the principle of weak-strong uniqueness. We relate these results to their counterparts of the inviscid (Euler) system.

Other applications of the approach based on relative entropy concept will be given. In particular, we discuss the problems of model reduction and the related singular limits. Special attention is paid to singular limits towards the inviscid system.

Eduard Feireisl acknowledges the support of the GAČR (Czech Science Foundation) project P201-13-00522S in the framework of RVO: 67985840.

INTERCONNECTION BETWEEN ORDINARY AND DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA APPROXIMATION TECHNIQUES

Győri I.

University of Pannonia, Veszprém, Hungary; gyori@almos.vein.hu

Our lecture is focussing on two approximation techniques and their applications in mathematical biology. In both cases, we establish connections between the solutions of a delay differential equation and of a suitably constructed n dimensional system of ordinary differential equations. The two approximating schemes are originated from two different ideas. The first one is based on the connection between transit compartments models which is frequently used in pharmacology and the theory of compartmental models with pipes. The second scheme is derived from a relation between delay differential equations and hyperbolic type partial differential equations which is combined with the method of lines approximation.

In both cases the convergence is uniform on any compact interval as the dimension n tends to infinity. It is worth to note that in the first approximation case the convergence is also uniform on $[0, \infty)$, under some extra condition.

For background articles see the references below.

REFERENCES

1. *Baker C. T. H., Bocharov G. A., Rihan F. A.,* A Report on the Use of Delay Differential Equations in Numerical Modelling in the Biosciences [Numerical Analysis Report No. 343], University of Manchester, Manchester Centre of Computational Mathematics, Manchester (1999).
2. *Demidenko G. V.,* "Systems of differential equations of higher dimension and delay equations," Sib. Math. J., **53**, No. 6, 1021–1028 (2012).
3. *Győri I.,* "Two approximation techniques for functional differential equations," Comput. Math. Appl., **16**, No. 3, 195–214 (1988).
4. *Győri I.,* "Interconnection between ordinary and delay differential equations," in: Modern Optimal Control (Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 119), E. O. Roxin (ed.), Marcel Dekker Inc., New York; Basel, 1989, pp. 131–142.
5. *Győri I., Turi J.,* "Uniform approximation of a nonlinear delay equation on infinite intervals," Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., **17**, No. 1, 21–29 (1991).
6. *Koch G., Schropp J.,* "General relationship between transit compartments and lifespan models," J. Pharmacokinet Pharmacodyn (2012); DOI:10.1007/s10928-012-9254-4.
7. *Krasznai B., Győri I., Pituk M.,* "The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks," Math. Comput. Modelling, **51**, No. 5–6, 452–460 (2010).

SMALL DIVISOR PROBLEMS IN FLUID MECHANICS

Iooss G.

University of Nice, Nice, France; gerard.iooss@unice.fr

It is quite remarkable that Fluid Mechanics offers *small divisor problems* even for steady flows. Such problems appear naturally when we are dealing with dynamics on invariant tori, as this may happen in several classical hydrodynamic stability problems, after few bifurcations (see [1, 2]). We do not present such cases below. We concentrate on cases where the small divisor problem arises in various ways for steady flows (no dynamics here). In particular, we present two water wave problems where this difficulty happens in an a priori unexpected way.

The first example is *3D Travelling gravity waves*, with a 2D periodic horizontal pattern on the free surface. We consider the infinite depth case, which is not essential in such a case. On the contrary, absence of surface tension is essential for having a small divisor problem. Details of proofs may be found in [3, 4].

The second example is the *2D Standing gravity waves on an infinitely deep fluid layer*, where the free surface (a curve here) should be periodic in time and in the horizontal coordinate. Details of proofs are in [5]. In this example, absence of surface tension is not essential, but the fact that the fluid depth is infinite in absence of surface tension, gives an additional difficulty known as complete resonance with respect to the finite depth problem which also gives a small divisor problem (see the results in [6] not presented here).

The third example is given by *quasipatterns* occuring for thin viscous fluid layers periodically vertically shaked (Faraday type experiment). In this last case, occurence of small divisors is a priori expected because of spatial quasi-periodicity. Details of proofs of existence of such patterns as solutions of the Swift–Hohenberg PDE model are in [7]. The proof of existence on fluid mechanics equations related with the Faraday experiment is still an open problem. The work [8] provides the connection between the fluid mechanics problem and the small divisor problem for quasipatterns.

REFERENCES

1. *Chenciner A., Iooss G.,* "Bifurcations de tores invariants," Arch. Ration. Mech. Anal., **69**, No. 2, 109–198 (1979).
2. *Chenciner A., Iooss G.,* "Persistance et bifurcations de tores invariants," Arch. Ration. Mech. Anal., **71**, No. 4, 301–306 (1979).
3. *Iooss G., Plotnikov P.,* "Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves," Mem. Am. Math. Soc., **200**, No. 940, 128 pages. (2009).
4. *Iooss G., Plotnikov P.,* "Asymmetrical three-dimensional travelling gravity waves," Arch. Ration. Mech. Anal., **200**, No. 3, 789–880 (2011).
5. *Iooss G., Plotnikov P., Toland J.,* "Standing waves on an infinitely deep perfect fluid under gravity," Arch. Ration. Mech. Anal., **177**, No. 3, 367–478 (2005).
6. *Plotnikov P., Toland J.,* "Nash–Moser theory for standing water waves," Arch. Ration. Mech. Anal., **159**, No. 1, 1–83 (2001).
7. *Braksmaa B., Iooss G., Stolovitch L.,* "Existence of quasipatterns solutions of the Swift–Hohenberg equation," Arch. Ration. Mech. Anal. (2013) (to appear).
8. *Argentina M., Iooss G.,* "Quasipatterns in a parametrically forced horizontal fluid film," Physica D: Nonlinear Phenomena (2012); DOI:10.1016/j.physicad.2012.04.011.

ABOUT SOBOLEV-TYPE SPACES

Kufner A.

Institute of Mathematics, Prague, Czech Republic; kufner@math.cas.cz

The breaking discovery made by Sergei L'vovich Sobolev almost seventy years ago has substantially enriched and influenced the whole mathematics — pure as well as applied. The lecture should be an attempt to collect existing generalizations and modifications of the famous Sobolev spaces, as e.g. Nikolskii spaces, Slobodetskii spaces, Besov spaces, Triebel–Lizorkin spaces, weighted Sobolev spaces, Sobolev–Orlicz spaces, Sobolev–Morrey spaces etc., to compare various approaches, to point out the differences and to mention the many possibilities of their application, namely in the theory and practice of PDEs.

COMPRESSIBLE NAVIER–STOKES EQUATIONS. PADULA AND LIONS PROBLEMS

Plotnikov P. I.[1], **Weigant W.**[2]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* plotnikov@hydro.nsc.ru

[2] *University of Bonn, Bonn, Germany;* w-weigant@t-online.de

This work is devoted to the study of the following boundary value problem for compressible Navier–Stokes equations

$$\partial_t(\varrho\,\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho\,\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div}\mathbb{S}(\mathbf{u}) + \varrho\,\mathbf{f} \quad \text{in } \Omega\times(0,T),$$

$$\partial_t\varrho + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T),$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\times(0,T),$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{in } \Omega,$$

$$\varrho(x,0) = \varrho_0(x) \quad \text{in } \Omega,$$

where

$$\mathbb{S}(\mathbf{u}) = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top) + \lambda\operatorname{div}\mathbf{u},$$

$\varrho_0 > 0$, $\mathbf{u}_0$, f are given functions, $p(\varrho) = \varrho^\gamma$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, μ, λ are positive constants. We consider the endpoint cases $\gamma = 1$, $d = 2$ and $\gamma > 1$, $d = 3$, when the energy estimate does not guarantee the integrability of the kinetic energy density with an exponent greater than 1. In order to cope with this difficulty we develop new approach to the problem. Our method is based on the estimates of the Radon transform of $p(\varrho)$. We prove that two-dimensional isothermal problem ($\gamma = 1$, $d = 2$) has a renormalized solution such that $\varrho \in L^r(\Omega\times(0,T))$, $r > 1$. In the case $\gamma > 1$, $d = 3$ we obtain new estimates for the pressure function and the kinetic energy density.

PROBLEMS WITH A VARIATIONAL THEORY OF WATER WAVES

Toland J. F.

Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom; University of Bath, Bath, United Kingdom; jft26@newton.ac.uk

By minimising an energy functional, a global variational theory of waves on the surface of a perfect fluid with a prescribed distribution of vorticity has been obtained when the surface is in contact with a strong hyperelastic membrane. It will be shown that a minimiser does not exist when surface energy effects are absent. Thus classical Stokes waves, the existence of which is known for other reasons, are not minimisers of the energy and their relationship with the energy functional remains a mystery. A variational theory of Stokes waves seems a long wave off.

Секция

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тезисы 30-минутных докладов

Section

DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstracts of Invited Lectures

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

NONLINEAR RESONANCE THEORY FOR ABSTRACT HYPERBOLIC EQUATIONS

Белоносов В. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
bvs@math.nsc.ru, belonosov@academ.org

Тема доклада мотивирована проблемами обоснования волновых технологий интенсификации добычи нефти. Продуктивность обводненных месторождений снижается ввиду "зарастания" поровых каналов нефтяных пластов устойчивыми слоями полярных молекул. Динамика этих слоев при малых вибрационных воздействиях описывается уравнением вида $\ddot{u} = -A^2u + \varepsilon[B(\omega t)u + Q(u,u)]$, где $u(t)$ — функция со значениями в некотором гильбертовом пространстве, A — линейный самосопряженный неограниченный оператор, $B(\tau)$ — 2π-периодическая оператор-функция, $Q(u,v)$ — билинейная эрмитова форма, ε — малый параметр. Причиной разрушения слоев, очищения поровых каналов и увеличения добычи нефти при виброволновой обработке является параметрический резонанс, т. е. потеря устойчивости системы, когда частота ω волнового воздействия близка к определенным критическим значениям [1].

В линейном случае критические частоты определяются только спектральными свойствами оператора A. Если этот оператор имеет компактную резольвенту, то амплитуды колебаний при резонансе экспоненциально возрастают. Для нелинейных уравнений критические частоты зависят также от амплитуд колебаний, поэтому параметрический резонанс проявляется в форме периодических пульсаций, называемых в нелинейной физике фазовыми колебаниями. Это явление изучено пока только для систем с конечным числом степеней свободы и на физическом уровне строгости [2]. В бесконечномерном случае теория нелинейного резонанса может быть построена при помощи классического метода усреднения Крылова – Боголюбова, применение которого сопряжено с принципиальной трудностью — проблемой малых знаменателей [3]. Нами разработана модификация этого метода [4], на базе которой установлено, что фазовые колебания приближенно описываются конечномерными динамическими системами. Найдены конструктивные способы построения таких систем и выявлены особенности потери устойчивости решений в зависимости от свойств коэффициентов исходного абстрактного уравнения.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 30) и Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 15).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dorovsky V. N., Belonosov V. S., Belonosov A. S.* Numerical investigation of parametric resonance in water-oil structures containing gas // Math. Comput. Modelling. 2002. V. 36, N 1–2. P. 203–209.
2. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
4. *Белоносов В. С.* Спектральные свойства обобщенных функций и асимптотические методы теории возмущений // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 3. С. 3–22.

СОБОЛЕВСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ О ПЕРЕНОСЕ ЗАРЯДА ДЛЯ ТРАНЗИСТОРА MESFET

SOBOLEV REGULARIZATION IN A PROBLEM OF CHARGE TRANSPORT FOR THE MESFET TRANSISTOR

Блохин А. М.[1], **Ткачев Д. Л.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]blokhin@math.nsc.ru, [2]tkachev@math.nsc.ru

Недавно в работе итальянских математиков A. Anile, V. Romano [1] предложена система моментных уравнений, полученных из уравнения переноса Больцмана с использованием принципа максимума энтропии в качестве процедуры замыкания.

В докладе представлены результаты исследования соболевской регуляризации соответствующей стационарной проблемы.

В области $\Omega = \{(x, y) \,|\, 0 < x < 1,\ 0 < y < \frac{1}{3}\}$ требуется найти решение (φ, σ, χ) системы

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi - \Delta\varphi) + \varphi - \Delta\varphi = \varphi - \beta(e^{\chi + M(x)} - \rho) + Z''(x), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\sigma - \Delta\sigma) + \sigma - \Delta\sigma = \sigma - a_2|\nabla\sigma|^2 - a_2(\nabla\sigma, \nabla\chi + \nabla M) - a_3(\nabla\sigma, \nabla\varphi + \nabla Z) \\ \qquad\qquad -a_4(\nabla\chi + \nabla M, \nabla\varphi + \nabla Z) - a_5|\nabla\varphi + \nabla Z|^2 - bc\sigma, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\chi - \Delta\chi) + \chi - \Delta\chi = \chi + |\nabla\chi + \nabla M|^2 - b_1|\nabla\sigma|^2 - b_2(\nabla\sigma, \nabla\chi + \nabla M) \\ \qquad\qquad -b_3(\nabla\sigma, \nabla\varphi + \nabla Z) - b_4(\nabla\chi + \nabla M, \nabla\varphi + \nabla Z) \\ \qquad\qquad -b_5|\nabla\varphi + \nabla Z|^2 - \frac{\beta}{1+\sigma}(e^{\xi + M(x)} - \rho) - nc\sigma + M(x), \end{cases}$$

удовлетворяющее смешанному граничному условию:

$$\varphi = \sigma = \chi = 0 \text{ на } \Gamma_0 = \Big\{(x, y) : y = \frac{1}{3},\ 0 \le x \le \frac{1}{6},\ \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{5},\ \frac{5}{6} \le x \le 1\Big\},$$

$$(l, \nabla\varphi) = (l, \nabla\sigma) = (l, \nabla\chi) = 0 \text{ на } \Gamma_l = \partial\Omega\backslash\Gamma_0.$$

Здесь $\varphi(t, x, y)$ — электрический потенциал, $\chi = \ln R$, R — электронная плотность, $\sigma = \frac{2}{3}E - 1$, E — энергия электронов, ρ — плотность легирования, a_i, b_i $(i = 1, \ldots, 5)$, b, c — известные функции от σ, $M(x)$, $Z(x)$ — известные гладкие функции, β — некоторая постоянная.

Результаты опубликованы в работах [2–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anile A. M., Romano V.* Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the moment equations // Contin. Mech. Thermodyn. 1999. V. 11, N 5. P. 307–325.
2. *Блохин А. М., Ткачев Д. Л.* Обоснование метода установления для одной математической модели переноса заряда в полупроводниках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1495–1517.
3. *Blokhin A. M., Tkachev D. L.* Asymptotic stability of the stationary solution for a new mathematical model of charge transport in semiconductors // Q. Appl. Math. 2012. V. 70, N 2. P. 357–382.
4. *Блохин А. М., Ткачев Д. Л.* Регулярность решения и корректность смешанной задачи для эллиптической системы с квадратичной нелинейностью по градиентам // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 10. С. 1866–1882.

ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ АТОМНОГО ЯДРА
WAVE MODEL OF ATOMIC KERNEL

Гарипов Р. М.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; R.M.Garipov@mail.ru

Известны классические модели атомного ядра Гамова и Бора. Оболочечная модель Гамова предполагает, что нуклоны (т. е. протоны и нейтроны) ядра находятся в общей потенциальной яме, дно которой может быть выше уровня на бесконечности, и не взаимодействуют друг с другом. Эта модель хорошо описывает периоды полураспада радиоактивных ядер. Капельная модель Бора, напротив, предполагает столь сильное взаимодействие нуклонов, что они образуют жидкую каплю. Модель Бора хорошо объясняет деление тяжёлых ядер. В этих моделях нуклоны считаются *корпускулами*. В данной работе строится чисто *волновая* модель атомного ядра. Последние экспериментальные открытия в физике встречных электрон-позитронных пучков говорят в пользу точки зрения Шредингера на элементарные частицы как на материальные волны де Бройля. Поэтому N нуклонов ядра рассматриваются как N волн, описываемых комплексными функциями $u_1(x), \dots, u_N(x)$ точки пространства-времени $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ (t — время, переменные безразмерны). Эти функции удовлетворяют нелинейной системе уравнений Клейна – Гордона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + m_\alpha^2\right) u_\alpha = u_\alpha \sum_\beta \zeta_{\alpha\beta} |u_\beta|^2 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N), \tag{1}$$

где m_α — масса α-го нуклона, $\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \geq 0$ — константы. Выражение для плотности энергии выводится из математического условия дивергентности производной $\partial E/\partial t$:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3}\right|^2 \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(m_\alpha^2 - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{N} \zeta_{\alpha\beta} |u_\beta|^2 \right) |u_\alpha|^2. \tag{2}$$

Атомное ядро определяется как решение специального вида системы уравнений (1) (см. [1]). Из формулы (2) видно, что взаимодействие уменьшает массы нуклонов. Это явление известно в ядерной физике как *дефект масс* атомных ядер. Если все константы $\zeta_{\alpha\beta}$ были бы положительны и одинаковы, то дефект массы ядра возрастал бы квадратично с ростом числа нуклонов, а опыт показывает линейный рост. Отсюда следует, что в самом простом случае в каждой строке симметричной матрицы $(\zeta_{\alpha\beta})$ содержатся лишь два ненулевых элемента. Соединив точки α и β отрезком, если $\zeta_{\alpha\beta} > 0$, получим *граф взаимодействия нуклонов* атомного ядра. Для циклического графа взаимодействия нуклонов в докладе вычислены дефекты масс атомных ядер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарипов Р. М.* Резонансный рост адронов фона во встречных электрон-позитронных пучках и модель атомного ядра. Ч. 1. Новосибирск, 2012. (Препринт / ИГиЛ СО РАН; № 1–12).

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

THEOREMS ON ISOMORPHISM OF QUASIELLIPTIC OPERATORS

Демиденко Г. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; demidenk@math.nsc.ru

Теоремы об изоморфизме дифференциальных операторов представляют большой интерес в теории уравнений с частными производными и имеют множество приложений. Однако во многих важных случаях их формулировки далеко не очевидны. Например, полигармонический оператор $\triangle^m : W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ ни при каких m, p не является изоморфизмом (см. [1, гл. 12]), и для того, чтобы сформулировать теоремы об изоморфизме для оператора $\triangle^m$, необходимо использовать специальные весовые соболевские пространства (см. [2]). Впервые пространства такого типа появились в работах Л. Д. Кудрявцева (1966), L. Nirenberg, H. F. Walker (1973), Л. А. Багирова и В. А. Кондратьева (1975). С использованием таких пространств в 80-е годы были доказаны теоремы об изоморфизме скалярных эллиптических операторов и матричных однородных эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ (M. Cantor, R. C. McOwen, R. B. Lockhart, Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou). Первая теорема об изоморфизме для однородных матричных квазиэллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ была доказана автором [3]. Результаты [3] были обобщены в работе G. N. Hile [4].

Настоящая работа посвящена изучению свойств некоторых классов матричных квазиэллиптических операторов $\mathcal{L}(D_x)$ в $\mathbb{R}^n$. Рассматриваемый нами класс операторов входит в класс квазиэллиптических операторов, введенных Л. Р. Волевичем, и содержит, в частности, однородные эллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому, эллиптические операторы по Дуглису – Ниренбергу, операторы параболического типа с "противоположными временами" и др. Для этих операторов мы получаем оценки фундаментальных решений и устанавливаем теоремы об изоморфизме в специальных шкалах весовых соболевских пространств (см., например, [5]). Из этих результатов вытекает ряд известных теорем об изоморфизме для однородных эллиптических операторов, а также ряд новых теорем об изоморфизме, в частности, для эллиптических операторов по Дуглису – Ниренбергу и параболических операторов в $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *McOwen R. C.* On elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Commun. Partial Differ. Equations. 1980. V. 5, N 9. P. 913–933.
3. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
4. *Hile G. N.* Fundamental solutions and mapping properties of semielliptic operators // Math. Nachr. 2006. V. 279, N 13-14. P. 1538–1564.
5. *Демиденко Г. В.* Матричные квазиэллиптические операторы в $\mathbb{R}^n$ // ДАН. 2010. Т. 431, № 4. С. 443–446.

СОВМЕЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ)

COMBINED INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS FOR HYPERBOLIC EQUATIONS (THEORY, NUMERICS, AND APPLICATIONS)

Кабанихин С. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; kabanikhin@sscc.ru

Рассмотрены обратные и некорректные задачи для уравнений и систем уравнений гиперболического типа, возникающие в сейсморазведке, электродинамике, акустике, исследовании волн цунами [1–6].

Для линейных задач исследована степень некорректности, построены и исследованы численные методы регуляризации. Получены оценки условной устойчивости задачи Коши с данными на времениподобной поверхности (задачи продолжения). Исследована степень некорректности задачи определения источников, порождающих волновые процессы (упругие, электромагнитные, акустические). Построены и исследованы на сходимость градиентные методы решения. Получены оценки скорости сходимости целевого функционала, условные оценки сильной сходимости, исследованы регуляризирующие свойства градиентных алгоритмов.

Для нелинейных коэффициентных обратных задач доказаны теоремы единственности и получены оценки условной устойчивости. Построены и обоснованы численные методы решения обратных и некорректных задач, основанные на комбинации методов Гельфанда – Левитана – Крейна, Ньютона – Канторовича и сопряженных градиентов. Рассмотрены методы регуляризации обратных и некорректных задач (методы А. Н. Тихонова, В. К. Иванова и М. М. Лаврентьева). Проведен анализ методов использования априорной информации при регуляризации обратных и некорректных задач для гиперболических уравнений, включая ограниченность, гладкость, монотонность, истокопредставимость искомого решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00773) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 122).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems: theory and applications. Berlin: de Gruyter, 2012.
2. *Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A.* Direct methods of solving inverse hyperbolic problems. Utrecht: VSP, 2004.
3. *Kabanikhin S. I., Lorenzi A.* Identification problems for wave phenomena. Theory and numerics. Utrecht: VSP, 1999.
4. *Romanov V. G., Kabanikhin S. I.* Inverse problems for Maxwell's equations. Utrecht: VSP, 1994.
5. *Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N.* An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 2. P. 193–211.
6. *Kabanikhin S. I., Krivorot'ko O. I.* A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Appl. Comput. Math. 2013. V. 12, N 1. P. 91–96.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВОЛНОВОГО ПОТЕНЦИАЛА
BOUNDARY CONDITIONS OF THE WAVE POTENTIAL

Кальменов Т. Ш., Дауитбек Д.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; kalmenov.t@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \equiv \{(x,t) : (0,l) \times (0,T)\}$ рассмотрим одномерный волновой потенциал

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{2}\theta(t-\tau-|x-\xi|)$ — фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial x^2} = \delta(x-\xi,t-\tau),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi^2} = \delta(x-\xi,t-\tau),$$

$$\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Big|_{\tau=t} = \frac{\partial \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t}\Big|_{\tau=t} = \frac{\partial \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} = 0.$$

Известно что, если функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, то $u(x,t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ и объемный волновой потенциал (1) удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad f \in L_2(\Omega), \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Волновой потенциал (1) широко используется при решении различных краевых задач для волнового уравнения. Ниже находим боковые граничные условия, порождаемые волновым потенциалом (1).

Теорема. *Пусть функция $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, тогда волновой потенциал* (1) *удовлетворяет боковым граничным условиям*

$$(u_x - u_t)(0,t) = 0, \quad x = 0, \quad 0 < t < T, \quad (u_x + u_t)(l,t) = 0, \quad x = l, \quad 0 < t < T. \tag{4}$$

Обратно, если функция $u(x,t) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^1(\partial\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2) *и начальным условиям* (3), *а также боковым граничным условиям* (4), *то функция $u(x,t)$ однозначно определяет одномерный волновой потенциал* (1).

Отметим, что граничное условие (4) волнового потенциала (1) является локальным граничным условием в отличие от граничного условия объемного потенциала Лапласа, приведенного в работе [1]. В этой работе также показаны применения граничного условия волнового потенциала (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала // ДАН. 2009. Т. 428, № 1. С. 16–19.

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, ОПТИМИЗАЦИЯ И СРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ROBUST STABILITY, OPTIMIZATION, AND COMPARISON OF DYNAMICAL SYSTEMS

Мазко А. Г.

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина; mazko@imath.kiev.ua

Доклад посвящен результатам исследований по следующим направлениям.

1. Устойчивость динамических систем с неопределенностями. Рассматривается нелинейная система управления

$$E(x)\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)u,\ y = C(x,t)x + D(x,t)u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^l. \quad (1)$$

Предполагается, что значения матричных коэффициентов E, A, B, C и D при $x = 0$ и $t \geq 0$ принадлежат соответствующим полиэдральным множествам (политопам). Множество стабилизирующих регуляторов определяется в виде

$$u = K(x,t)y,\ K(x,t) = K_*(x,t) + \widetilde{K}(x,t),\ \widetilde{K}(x,t) \in \mathcal{K} = \left\{K : K^T P K \leq Q\right\}, \quad (2)$$

где $P = P^T > 0$ и $Q = Q^T > 0$ — матрицы, описывающие эллипсоид $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m\times l}$. Ставится задача построения условий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость нулевого состояния семейства систем (1), (2). Предлагаются варианты решения данной задачи в терминах линейных алгебраических и дифференциальных матричных неравенств.

2. Робастная стабилизация и оптимизация систем управления. Ставится задача построения условий, обеспечивающих асимптотическую устойчивость нулевого состояния семейства систем (1), (2) и оценку функционала

$$J(u,x_0) = \int_0^\infty \left[x^T u^T\right] \Phi(t) \left[\begin{array}{c} x \\ u \end{array}\right] dt \leq \omega, \quad \Phi(t) = \left[\begin{array}{cc} S & N \\ N^T & R \end{array}\right],$$

где $x_0 = x(0)$, $S \geq NR^{-1}N^T + \eta I_n$, $\eta > 0$, I_n — единичная $n \times n$-матрица.

Предлагаются новые методы построения стабилизирующих матриц обратной связи K_* для линейных стационарных систем типа (1), (2), а также алгоритмы квадратичной оптимизации таких систем с неопределенными матрицами коэффициентов, основанные на решении линейных матричных неравенств. Полученные результаты распространяются на непрерывные и дискретные системы управления с динамической обратной связью.

3. Робастная устойчивость и сравнение по конусу. Рассматривается класс динамических систем в полуупорядоченном банаховом пространстве

$$\dot{X} = F(X,t),\ F(\Theta,t) \equiv 0,\ \underline{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} F(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{F}(X,t),\ X \in \mathcal{E},\ t \geq 0, \quad (3)$$

обладающих определенными свойствами относительно заданного конуса $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$. Предлагается методика анализа робастной устойчивости состояния $X \equiv \Theta$ системы (3) с использованием конусных неравенств, понятия производной Фреше по конусу и свойства внедиагональной положительности нелинейного оператора. Формулируется обобщенный принцип сравнения конечного семейства систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазко О. Г., Богданович Л. В.* Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Збірник праць Інституту математики НАН України. Київ: Інститут математики НАН України, 2012. Т. 9, № 1. С. 204–222.
2. *Mazko A. G.* Cone inequalities and stability of dynamical systems // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. 2011. V. 11, N 3. P. 303–318.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

INVERSE PROBLEMS FOR VISCOELASTICITY EQUATIONS

Романов В. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
romanov@math.nsc.ru

Рассматриваются обратные задачи для уравнений вязкоупругости в двумерном и трехмерном вариантах.

Для интегродифференциального уравнения, которое соответствует двумерной проблеме вязкоупругости, изучается задача об определении плотности, модуля упругости и пространственной части ядра, входящего в интегральный оператор уравнения (см. [1–3]). Предполагается, что искомые функции отличаются от заданных констант только внутри единичного круга $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$. В качестве информации для решения этой обратной задачи рассматривается однопараметрическое семейство решений интегродифференциального уравнения, отвечающее импульсным источникам, локализованным на прямых линиях, и на границе области D задаются следы решений для некоторого конечного временного интервала. Исследование этой задачи проводится в предположении, что ядро $p(x,t)$ интегрального оператора в уравнениях вязкоупругости представимо в виде $p(x,t) = k(t)p_0(x)$, в котором $k(t)$ является заданной функцией, а $p_0(x)$ — неизвестной функцией, носитель которой содержится внутри D. Показывается, что использование сравнительно небольшой части заданной информации о кинематике и элементах динамики распространяющихся волн позволяет свести рассматриваемую задачу к трем последовательно и однозначно решаемым обратным задачам, которые в совокупности дают решение исходной обратной задачи.

Подобная задача в предположении, что плотность постоянна, изучена для полной системы уравнений вязкоупругости [4]. Обратная задача состоит в определении двух модулей упругости и двух ядер, входящих в интегральные операторы системы уравнений. В этом случае вместо источников, локализованных на прямых линиях, рассматривается серия импульсных сосредоточенных источников. Информация о решениях серии прямых задач задается для некоторого конечного временного интервала на границе области, в которой определяются искомые функции. Установлены конструктивные теоремы единственности решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00105 а), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 14) и проекта, выполняемого совместно СО РАН и НАН Украины (проект № 12, 2013).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача вязкоупругости // ДАН. 2011. Т. 440, № 3. С. 310–313.
2. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
3. *Романов В. Г.* Задача об определении ядра в уравнении вязкоупругости // ДАН. 2012. Т. 446, № 1. С. 18–20.
4. *Романов В. Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости // ДАН. 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.

УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ ВЫМЕТАНИЯ
CONTROL SWEEPING PROCESSES

Толстоногов А. А.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; aatol@icc.ru

В конечномерном пространстве рассматривается управляемая система с двумя управлениями. Одним из управлений, которое мы называем внутренним, является многозначная функция времени с выпуклыми, замкнутыми, не обязательно ограниченными значениями. Другое управление, называемое внешним, представляет измеримую функцию времени. Правая часть системы содержит нормальные конусы в точках значений внутреннего управления. Эти конусы и определяют влияние внутреннего управления на систему. Внешнее управление воздействует на систему традиционным способом. Все траектории такой системы принадлежат значениям внутреннего управления. Поэтому с помощью внутреннего управления мы управляем всем ансамблем траекторий, а с помощью внешнего — индивидуальной траекторией в ансамбле.

Внешнее управление выбирается из множества допустимых многозначных отображений, значениями которых могут быть, например, гиперплоскости, полупространства и т. д. На пространстве таких многозначных отображений вводится топология, и устанавливаются критерии компактности множеств. Эти критерии являются аналогами классической теоремы Арцела – Асколи. Внешнее управление принадлежит зависящему от фазовой переменной многозначному отображению с невыпуклыми значениями.

Изучаются вопросы существования и взаимосвязей между множествами решений исходной системы и системы с овыпукленным ограничением для внешнего управления и с внутренним управлением из замыкания множества допустимых внутренних управлений. Приведены примеры относительно компактных множеств допустимых внешних управлений.

COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS FOR HELMHOLTZ AND MAXWELL'S EQUATIONS AND THE INVISIBILITY PROBLEM

Alekseev G. V.

Far Eastern Federal University, Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Vladivostok, Russia; alekseev@iam.dvo.ru

We consider coefficient inverse problems for Helmholtz and Maxwell's equations associated with invisible cloaking for acoustic and electromagnetic fields.

There are a number of ways to do the object under study invisible or almost invisible. One of the ways is to coat the boundary of the object completely or partially by special material. The surface coating is modeled by introducing the so-called impedance boundary condition on the coated portion of the boundary. This condition relates the electric and magnetic fields (or the sound pressure and the velocity normal component in the case of acoustic location) through boundary coefficient called the surface impedance. In the case when the object has an invariable shape the problem of its masking from detection is reduced to determining the surface impedance from the condition of minimum of a norm of the scattered field. Mathematically this problem is a coefficient inverse problem for the 2-D Helmholtz equation in the case of two dimensions and corresponding inverse problem for Maxwell's equations in the case of three dimensions. Using the optimization method this inverse problem is reduced to the problem of conditioned minimization of a cost functional which adequately corresponds to the inverse problem.

The paper consists of two parts. In the first part the coefficient inverse problem for the 2-D Helmholtz equation under mixed boundary conditions for the field corresponding to the partial coating of the boundary is studied. First the solvability of the mixed transmission problem for the 2-D Helmholtz equation is proved in a class $H^1(B_R \setminus \Gamma_I)$. Here $H^1(B_R \setminus \Gamma_I)$ is the Sobolev space of functions defined in the circle B_R of radius R with cut Γ_I, the role of which is played by the coated portion of boundary. Then the identification problem of recovering the coefficient in boundary condition (i.e., surface impedance) is formulated and studied. Solvability of this identification problem is proved and the optimality system which describes the first-order necessary optimality conditions is derived. Based on analysis of this optimality system the sufficient conditions for the data are established which provide a local stability and uniqueness of optimal solutions. Some details of our method can be found in [1–3].

In the second part these results are generalized to the case of 3-D Maxwell's equations considered under mixed boundary conditions.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00313 a), the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. 12-I-P17-03) and the Ministry of Education and Science of Russia (project no. 14.A18.21.0353).

REFERENCES

1. *Alekseev G. V., Brizitskii R. V., Romanov V. G.,* "Stability estimates for solutions of boundary control problems for Maxwell's equations with mixed boundary conditions," Dokl. Math., **86**, No. 3, 733–737 (2012).
2. *Alekseev G. V.,* "Optimization in problems on material-body cloaking using the wave-flow method," Dokl. Phys., **58**, No. 4, 147–151 (2013).
3. *Alekseev G. V.,* "Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation," Appl. Anal. (2013, to appear); DOI:10.1080/00036811.2013.768340.

NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOBOLEV SPACES WITH VARIABLE EXPONENTS

Antontsev S.[1], **Shmarev S.**[2]

[1] *University of Lisbon, Lisbon, Portugal;* antontsevsn@mail.ru
[2] *University of Oviedo, Oviedo, Spain;* shmarev@uniovi.es

The talk offers a review of the recent results on the evolution nonlinear PDEs with nonstandard growth conditions. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with Lipschitz-continuous boundary Γ, $z \equiv (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T]$. The prototypes of the parabolic and hyperbolic problems under study are

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(z) \text{ in } Q_T, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_T, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} = Lu + \varepsilon \Delta u_t + f(z) \text{ in } Q_T, \quad \varepsilon > 0, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_T, \quad u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ in } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

with the nonlinear operator $Lu = \operatorname{div}\left(a(z,u)|\nabla u|^{p(z)-2}\nabla u\right) + b(z)|u|^{\sigma(z)-2}u$. The coefficients a, b and the exponents p, σ are given functions of their arguments. Such equations are usually referred to as equations with nonstandard growth conditions. PDEs of this type occur in the mathematical modelling of various physical processes such as, for example, flows of electro-rheological fluids, fluids with temperature-dependent viscosity, or filtration in inhomogeneous anisotropic media. In the recent years, much attention has been paid to the study of such equations in the natural analytic framework of Sobolev spaces with variable exponents. We discuss the issues of existence and uniqueness of weak energy solutions to problems of the type (1) and describe the localization properties of energy solutions, such as vanishing on a set of nonzero measure, extinction in a finite time, or finite speed of propagation of disturbances from the data. Nonexistence of global solutions (a finite time blow-up) is also discussed. The analysis of the localization properties relies on a modification of the method of local energy estimates [1]. The presentation partly follows the papers [2–6].

REFERENCES

1. *Antontsev S., Díaz J. I., Shmarev S.,* Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics, Bikhäuser, Boston (2002).
2. *Antontsev S.,* "Wave equation with $p(x,t)$-Laplacian and damping term: existence and blow-up," Differ. Equ. Appl., **3**, No. 4, 503–525 (2011).
3. *Antontsev S., Shmarev S.,* "Vanishing solutions of anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity," J. Math. Anal. Appl., **361**, No. 2, 371–391 (2010).
4. *Antontsev S., Shmarev S.,* "Blow-up of solutions to parabolic equations with non-standard growth conditions," J. Comput. Appl. Math., **234**, No. 9, 2633–2645 (2010).
5. *Antontsev S., Shmarev S.,* "On the blow-up of solutions to anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity," Proc. Steklov Inst. Math., **270**, No. 1, 27–42 (2010).
6. *Antontsev S., Chipot M., Shmarev S.,* "Uniqueness and comparison theorems for solutions of doubly nonlinear parabolic equations with nonstandard growth conditions," Commun. Pure Appl. Anal., **12**, No. 4, 1527–1546 (2013).

MATHEMATICAL ASPECTS OF THE HYDRODYNAMICS OF NON-NEWTONIAN MEDIA

Chechkin G. A.[1], **Chechkina T. P.**[2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;*
chechkin@mech.math.msu.su
[2] *National Research Nuclear University "MEPhI", Moscow, Russia;*
chechkina@mail.ru

We consider non-Newtonian liquids with micro inhomogeneous structure. For modified liquid of O. A. Ladyzhenskaya we derive the system of equations for boundary layers of the Prandtl type and prove the existence and the uniqueness theorems.

For the Ericksen–Leslie systems we also prove the existence and the uniqueness theorems and study the behavior of a mixture of different liquid crystals. We consider a model with the mixture of nematic liquid crystals of two types. Then, using the asymptotic and homogenization methods, we describe the effective behavior of such a mixture. Some results one can find in [1, 2].

The first author was supported by the Government grant of the Russian Federation under the Resolution No. 220 "On measures designed to attract leading scientists to Russian institutions of higher learning" under the agreement No. 11.G34.31.0054, signed between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, a leading scientist, and Federal State Budget Educational Institution of Higher Professional Education M. V. Lomonosov Moscow State University and also by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00445).

REFERENCES

1. *Chechkin G. A., Ratiu T. S., Romanov M. S.,* "Homogenization of the equations of the dynamics of nematic liquid crystals with inhomogeneous density," J. Math. Sci. (New York), **186**, No. 2, 322–329 (2012). (Translated from Problemy Mat. Analiza, **66**, 167–173 (2012)).
2. *Chechkin G. A., Samokhin V. N., Fadeeva G. M.,* "Equations of the boundary layer for a modified Navier–Stokes system," J. Math. Sci. (New York), **179**, No. 4, 557–577 (2011). (Translated from Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, **28**, 329–361 (2011)).

ON DECAY OF PERIODIC RENORMALIZED SOLUTIONS TO SCALAR CONSERVATION LAWS

Panov E. Yu.

Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia; eugeny.panov@novsu.ru

In the half-space $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ we consider the Cauchy problem

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x). \tag{1}$$

We assume that the flux vector $\varphi(u) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. The initial function $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ is supposed to be periodic, that is, $u_0(x + e_i) = u_0(x)$ for almost all $x \in \mathbb{R}^n$ and all $i = 1, \dots, n$, where $\{e_i\}_{i=1}^n$ is a basis in $\mathbb{R}^n$. We denote by P the corresponding fundamental parallelepiped $P = \{x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in [0, 1), i = 1, \dots, n\}$. Let $s_{a,b}(u) = \max(a, \min(b, u))$ be the cut-off function at levels a, $b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

Definition (see [1]). An x-periodic measurable function $u = u(t, x)$ is called a renormalized entropy solution (r.e.s. for short) of (1), if $\forall a$, $b \in \mathbb{R}$, $a \le b$,

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x(\varphi(s_{a,b}(u))) = \mu_b - \mu_a \text{ in } \mathcal{D}'(\Pi),$$

where μ_p, $p \in \mathbb{R}$, is a family of x-periodic nonnegative locally finite measures on Π such that $\lim\limits_{p \to \infty} \mu_p((0, T) \times P) = 0$ for all $T > 0$, and

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t \to 0} |s_{a,b}(u(t, \cdot)) - s_{a,b}(u_0)| = 0 \text{ in } L^1(P).$$

As was shown in [1], there always exists a unique r.e.s. of problem (1). In the case of $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ this r.e.s. is bounded and coincides with the usual entropy solution of (1) in the sense of Kruzhkov [2].

Let $L' = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \cdot e_i \in \mathbb{Z}\ \forall i = 1, \dots, n\}$ be the dual lattice to the lattice of periods. Our main result is the following theorem.

Theorem. *Every r.e.s. $u(t, x)$ of equation (1) satisfies the decay property*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t \to \infty} u(t, \cdot) = \text{const} = \frac{1}{|P|} \int\limits_P u_0(x) dx \text{ in } L^1(P)$$

(here $|P|$ denotes the Lebesgue measure of P) if and only if the following condition holds

$\forall \xi \in L', \xi \ne 0$, *the function $u \to \varphi(u) \cdot \xi$ is not affine on non-empty intervals.*

This statement generalizes the earlier results [3]. In the case of bounded u_0 Theorem was proved in recent paper [4].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00230).

REFERENCES

1. *Lysuho P. V., Panov E. Yu.,* "Renormalized entropy solutions to the Cauchy problem for first order quasilinear conservation laws in the class of periodic functions," J. Math. Sci. (New York), **177**, No. 1, 27–49 (2011).
2. *Kruzhkov S. N.,* "First order quasilinear equations in several independent variables," Math. USSR, Sb., **10**, No. 2, 217–243 (1970).
3. *Chen G.-Q., Frid H.,* "Decay of entropy solutions of nonlinear conservation laws," Arch. Ration. Mech. Anal., **146**, No. 2, 95–127 (1999).
4. *Panov E. Yu.,* "On decay of periodic entropy solutions to a scalar conservation law," Ann. Inst. H. Poincaré (C) Anal. Non Linéaire (2013, to appear); DOI: 10.1016/j.anihpc.2012.12.009.

THE VLASOV–POISSON EQUATIONS IN INFINITE CYLINDER

Skubachevskii A. L.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia; skub@lector.ru

We consider the Vlasov–Poisson system of equations describing the evolution of distribution functions of the density for the charged particles in rarefied plasma. We study the Vlasov–Poisson system in $Q \times \mathbb{R}^3$ with initial conditions $f^\beta\big|_{t=0} = f_0^\beta(x,p)$, $\beta = \pm 1$, for distribution functions $f^\beta(x,p,t)$ and the Dirichlet boundary conditions for the potential of an electric field $\varphi(x,t)|_{\partial Q} = 0$, where $Q = \Omega \times \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded domain, $\partial\Omega \in C^\infty$, $f_0^\beta(x,p)$ is the initial distribution function (for positively charged ions if $\beta = +1$ and for electrons if $\beta = -1$) at the point x with impulse p. Assume that initial distribution functions are sufficiently smooth and $\operatorname{supp} f_0^\beta \subset Q_\delta \times B_\rho(0)$, $Q_\delta = \{x \in Q : \rho(x, \partial Q) > \delta\}$, $\delta, \rho > 0$, and the magnetic field $B(x)$ is also sufficiently smooth and has a special structure near the boundary ∂Q. Then we prove that for any $T > 0$ there is a unique classical solution of the Vlasov–Poisson system in $Q \times \mathbb{R}^3$ for $0 < t < T$ if $\|f_0^\beta\| < \varepsilon$, where $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \rho, \|B\|)$ is sufficiently small.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00524).

Секция

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тезисы 20-минутных
и стендовых докладов

Section

DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstracts of Short Communications
and Posters

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ БИЦАДЗЕ – ЯНУШАУСКАСА

A MODIFIED DIRICHLET PROBLEM FOR THE DEGENERATING MULTIDIMENSIONAL BITSADZE–YANUSHAUSKAS SYSTEM

Абдрахманов А. М.[1], **Абдрахманова Р. П.**[2]

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; [1]abdrai@mail.ru, [2]vmk-rimma@mail.ru

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных

$$(x_1^2+\cdots+x_n^2)\Delta u_j-\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\quad j=1,\ldots,n, \tag{1}$$

где λ — вещественное число.

Пусть область $D=\{X\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2<R^2\}$.

Рассмотрим задачу Дирихле в следующей постановке: найти регулярное в области D ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее на границе $\Gamma=\{X\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2=R^2\}$ условиям

$$u_j\big|_{\Gamma}=f_j(X),\quad f_j(X)\in C^{2,\alpha}(\Gamma),\quad j=1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

$$u_n\big|_{\delta\Gamma}=f_n(X),\quad f_n(X)\in C^{1,\alpha}(\delta\Gamma), \tag{3}$$

где $\delta\Gamma=\{X\in\mathbb{R}^n : x_n=0;\ x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2=R^2\}$.

В случае $R^2>\lambda$ доказана теорема 1.

Теорема 1. *Задача Дирихле* (2), (3) *для системы* (1) *имеет единственное решение в классе функций, ограниченных на бесконечности.*

Для случая $R^2<\lambda$ необходимо добавить условие

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\bigg|_{\Gamma}=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(R)W_i(X)=f_{n+1}(X),\quad f_{n+1}(X)\in C^{1,\alpha}(\Gamma), \tag{4}$$

где функции $K_i(R)$ и $W_i(X)$ определяются при доказательстве теоремы 1.

Теорема 2. *Для $R^2<\lambda$ задача Дирихле* (2)–(4) *для системы* (1) *разрешима и имеет единственное решение в классе ограниченных функций.*

ДВА СПОСОБА ЗАПИСИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

TWO FORMS OF WRITING STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POISSON COMPONENT

Аверина Т. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; ata@osmf.sscc.ru

Многие математические модели сложных технических и экономических систем, учитывающие воздействие шума, описываются стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) с пуассоновской составляющей. В работе рассматриваются два варианта описания таких моделей: с использованием неоднородной пуассоновской меры, либо — обобщенного процесса Пуассона. Задача анализа стохастических систем с разрывами траекторий заключается в нахождении вероятностных характеристик вектора состояния (плотности вероятности, моментных характеристик) в соответствии с заданной математической моделью. Для численного решения рассматриваемых стохастических систем предложены алгоритмы статистического моделирования, использующие численные методы решения СДУ [1] и алгоритмы моделирования пуассоновского поля [2]. Эффективность алгоритмов демонстрируется на решении тестовых задач, а также прикладных задач радиотехники, где необходимо учитывать случайные факторы или воздействия, которые могут быть как проявлениями внешней среды, так и отклонениями номинальных параметров самой системы [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00282, № 12-01-00490).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artemiev S. S., Averina T. A.* Numerical analysis of systems of ordinary and stochastic differential equations. Utrecht: VSP, 1997.
2. *Аверина Т. А.* Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 1. С. 16–23.
3. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

ON EXTREME PROPERTIES OF A SOLUTION OF THE NAVIER–STOKES EQUATIONS

Акыш А. Ш.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; akysh41@mail.ru

Из системы уравнений Навье – Стокса (УНС) выведено нелинейное уравнение для плотности кинетической энергии E и выявлено важное свойство этого уравнения — принцип максимума, что с математической точки зрения является ключевым. На основе этого доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0, T]$, $\forall\, T < \infty$. Эти результаты доведены до математической строгости в работе [1].

Задача для УНС относительно $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и P запишется:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \tag{1a}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{1b}$$

Из (1a) при $\mathbf{f} = 0$ получено нелинейное параболическое уравнение для E:

$$\mathbb{L}E \equiv \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \Delta E + \mu \sum_{\alpha=1}^{3} |\nabla U_\alpha|^2 + (\nabla E, \mathbf{U}) + (\nabla P, \mathbf{U}) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\bar{Q} = [0, T] \times \bar{\Omega}$ — цилиндрическая область в пространстве переменных t, $\mathbf{x}$. Функции $(\mathbf{U}, E) \in C(\bar{Q}) \cap C^2(Q) \wedge P \in C^1(Q)$ удовлетворяют уравнениям* (1a), (2). *Тогда функция $E(t, \mathbf{x})$ принимает свой максимум в цилиндре $\bar{Q}$ на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0, T] \times \partial\Omega$, т. е.*

$$E(t, \mathbf{x}) \le \max\left\{ \sup_{t=0 \bigwedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} E(t, \mathbf{x}), \sup_{t \in [0,T] \bigwedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} E(t, \mathbf{x}) \right\}.$$

Теорема 2. *Если входные данные $\mathbf{f}$ и $\mathbf{\Phi}$ удовлетворяют условиям*

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q), \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega),$$

тогда задача (1) *имеет единственное слабое обобщенное решение $\mathbf{U}$ и P соответственно из пространств*

$$\mathbf{U} \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathbf{L}_\infty\big(0, T; \mathbf{L}_2(\Omega)\big) \cap \mathbf{L}_2\big(0, T; \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega)\big) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q),$$

$$P \in L_2\big(0, T; W^1_2(\Omega)\big) \wedge \left(\int_\Omega P \mathbf{dx} = 0,\ \forall t \in [0, T] \right).$$

Работа выполнена при поддержке Казахстанского фонда фундаментальных исследований (проект № 0112РК00832).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akysh A. Sh.* The maximum principle of the Navier–Stokes equation // arXiv: 1204.2668v1 [math-ph]. 2012. 17 p.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

COMPUTING OF OPTIMAL CONTROL IN REAL TIME

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемая система описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0\,, \;\; x_0 \in D, \;\; D \subset V, \tag{1}$$

где x — вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leqslant M_j\,, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1,m}\,.$$

Предполагается, что (1) полностью управляема и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D; V — область управляемости.

Задача. Найти в реальном времени допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за минимальное время $T = t_k - t_0$ систему (1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$.

Замечание 1. Вычисление оптимального управления в *реальном времени* требует введения нового класса ограничений — ограничения на время вычисления оптимального управления.

Замечание 2. Перевод системы в ненулевое конечное состояние (принимаемое за новое начало координат) преобразованием координат сводится без потери общности к переводу системы из нового начального состояния в начало координат.

Разработан новый метод решения задач оптимального управления в реальном времени. Он основан на: 1) аппроксимации множеств достижимости семейством гиперплоскостей; 2) разделении вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления; 3) использовании вариаций Лагранжа для интегрирования дифференциальных уравнений на каждой итерации не на всем интервале управления, а лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления. Разделение области начальных условий на области достижимости за различные времена и аппроксимация каждой области достижимости семейством гиперплоскостей позволяют получить хорошее начальное приближение, что значительно уменьшает число итераций и обеспечивает близкую к монотонной сходимость вычислительного процесса. Разработана итерационная процедура, не требующая на каждой итерации решения задачи Коши. Достаточно интегрировать дифференциальные уравнения лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления, что резко снижает вычислительные затраты и делает возможным вычисление и реализацию оптимального управления в реальном времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 10. С. 1778–1800.
2. *Александров В. М.* Построение аппроксимирующей конструкции для вычисления и реализации оптимального управления в реальном времени // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 1–19.

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

ON SOLVABILITY OF THE HEAT CONDUCTIVITY INTEGRAL EQUATIONS IN NONCYLINDRICAL DOMAINS

Амангалиева М. М.[1], **Дженалиев М. Т.**[1],
Космакова М. Т.[2], **Рамазанов М. И.**[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;* muvasharkhan@gmail.com
[2] *Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан;* ramamur@mail.ru

Для однородного с особым ядром интегрального уравнения Вольтерра второго рода и его сопряженного уравнения установлено существование нетривиального решения в весовых лебеговых классах. Эти уравнения возникают в задачах теплопроводности в вырождающихся областях.

Постановка задачи. Найти нетривиальные решения однородного интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

и его сопряженного однородного уравнения

$$\psi(t) - \int_t^\infty K(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\right).$$

Интегральное уравнение (1) соответствует граничной задаче:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \qquad u(x,t)|_{x=0} = 0, \qquad u(x,t)|_{x=t} = 0, \tag{3}$$

в области $G = \{(x,t) : 0 < x < t\}$, а уравнение (2) — граничной задаче, сопряженной к задаче (3).

Основные результаты.

Теорема 1. *Нетривиальное решение уравнения* (1) *единственно и принадлежит классу:*

$$\sqrt{t}\exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{4a^2}\right\}\left(\varphi(t) - \frac{\sqrt{\pi}}{a}\right) \in L_\infty(0,\infty), \quad \varepsilon > 0.$$

Теорема 2. *Нетривиальное решение уравнения* (2) *единственно и принадлежит классу:*

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{\varepsilon t}{4a^2}\right\}\left(\psi(t) - \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right) \in L_1(0,\infty), \quad \varepsilon > 0.$$

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A HYDROSTATIC MODEL

Андреев В. К.[1], **Иванова А. В.**[2]

[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;* andr@icm.krasn.ru

[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* ivanovaannav@gmail.com

При изучении различных процессов в океанологии, крупных водохранилищах и озёрах [1–3] часто делается предположение о линейном росте давления с глубиной: $p_z = -g$, где g — ускорение силы тяжести. Оно всегда выполнено для покоящейся жидкости и хорошо подтверждается экспериментами для других состояний жидкости. В докладе исследуется структура решений уравнений возникающей при этом предположении гидростатической модели. Получены следующие результаты:

1) найдены стационарные решения, описывающие, в частности, волновые течения;

2) доказано, что в данной модели производная от давления по внешней нормали всегда строго отрицательна и задача Коши – Пуассона корректно поставлена в классах функций конечной гладкости;

3) показано, что в координатах Лагранжа трёхмерная задача сводится к отысканию решений только двух неизвестных функций — траекторий. Проекция же траектории на вертикальную ось находится в явном виде;

4) найдены точные нестационарные решения и положение свободной границы в случае линейной зависимости вертикальной скорости одноимённой координаты.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowden K. F.* Physical oceanography of coastal waters. Chichester: Ellis Horwood Limited Publishers; New York: Halsted Press, 1983.
2. *Саркисян А. С.* Моделирование динамики океана. СПб.: Гидрометеоиздат, 1991.
3. *Gill A. E.* Atmosphere-ocean dynamics. New York; London; Paris; Tokyo; Toronto: Academic Press, 1983.

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОСТРОУМОВА – БИРИХА УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИЛЫ ПЛАВУЧЕСТИ

GENERALIZATION OF THE OSTROUMOV–BIRIKH SOLUTION OF THE CONVECTION EQUATIONS FOR A NONLINEAR BUOYANCY FORCE

Андреев В. К.[1], **Степанова И. В.**[2]

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
[1]andr@icm.krasn.ru, [2]stepiv@icm.krasn.ru

Рассматриваются двумерные однонаправленные течения бинарной смеси в горизонтальном слое под действием силы тяжести и продольного градиента температуры. Считается, что вектор скорости имеет ненулевую продольную компоненту, которая зависит только от поперечной координаты. Поля температур, концентраций и давления зависят от обеих координат. Вид решения был предложен в книге [1] и описан в статье [2] для теплопроводных вязких жидкостей. В работе [3] представлены обобщения подобного решения на случай течений бинарных смесей под действием эффекта термодиффузии в наклонных каналах и цилиндрических областях. Следует заметить, что во всех вышеупомянутых работах решение исследовалось в рамках модели Обербека – Буссинеска, т. е. при линейной зависимости уравнения состояния от параметров течения.

В данной работе найдены представления для функций плотности, нелинейно зависящих от температуры и концентрации, для которых вид решения из [2] существует. Анализ основывается на решении дифференциального уравнения в частных производных второго порядка для функции плотности с коэффициентами, зависящими не только от температуры и концентрации, но и от координат. Отдельно исследованы случаи, когда температура и/или концентрация являются функциями только одной независимой переменной. Для состояния механического равновесия в частных случаях поиск параметров течения сведен к решению уравнения эйконала.

Для описания течения однородной жидкости без учета эффекта термодиффузии определена логарифмическая зависимость функции плотности от температуры, а также поля скорости, температуры и давления. Поставлены и решены две краевые задачи, описывающие течение однослойной и двухслойной жидкости в канале, ограниченном твердыми стенками. Проведено сравнение полученного результата с поведением жидкости, рассчитанном по модели Обербека – Буссинеска.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00238) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остроумов Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехиздат, 1952.
2. *Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1966. Т. 7, № 3. С. 69–72.
3. *Андреев В. К.* Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск, 2010. 68 с. (Препринт / ИВМ СО РАН).

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НОРМЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

ESTIMATES OF THE DECAY RATE OF SOLUTION TO A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION IN THE ORLICZ NORM

Андриянова Э. Р.[1], **Мукминов Ф. Х.**[2]

[1] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия;* elina.andriyanov@mail.ru

[2] *Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия;* mfkh@rambler.ru

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для параболического уравнения

$$(\beta(x,u))_t = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{p_i}(x, \nabla u)\right)_{x_i}, \quad \text{где } \ a(x, \nabla u) = a(x,p)\big|_{p=\nabla u},$$

рассматривается первая смешанная задача

$$u(t,x)\big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \quad u(0,x) = u_0(x).$$

Предполагается, что функция $a(x,p)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, выпукла по p и измерима по $x \in \Omega$; $\beta(x,u)$ — дифференцируемая по $u \in \mathbb{R}$ и измеримая по $x \in \Omega$ функция. При этом функция $\beta_1(x,u)$, $\beta_1'(x,u) = u\beta'(x,u)$, удовлетворяет оценкам

$$c_1 G(u) \leq \beta_1(x,u) \leq c_2 G(u)$$

с некоторой N-функцией $G(u)$, подчиняющейся Δ_2-условию.

В работе построено сильное решение задачи при неограниченной области Ω методом регуляризации галеркинских приближений. Ранее данный метод был использован в работе [1] при построении решения смешанной задачи для параболического уравнения со степенными нелинейностями. Построенное решение при $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ обладает следующими свойствами:

$$u \in C([0,T]; L_G(\Omega)), \quad u \in L_{\infty,loc}((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)), \quad (\beta_u'(x,u))^{\frac{1}{2}} u' \in L_2(D^T).$$

При некоторых предположениях доказаны также оценки

$$C(u_0)(1+t)^{-\gamma} \leq \|G(u(t))\|_{L_1}(\Omega) \leq C_1(u_0) t^{-\alpha}, \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Ранее подобные оценки были установлены в работе [1], а также в работе [2] — для некоторого класса анизотропных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андриянова Э. Р., Мукминов Ф. Х.* Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимск. мат. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 3–14.
2. *Кожевникова Л. М., Леонтьев А. А.* Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью // Уфимск. мат. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 64–85.

ЗАДАЧИ ЗОНДИРОВАНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ
PROBING PROBLEMS OF SURROUNDING MEDIA

Аниконов Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
anik@math.nsc.ru

Работа относится к разделу математического моделирования физических процессов и явлений. Продолжено использование авторского подхода, основанного на принципе выделения из сложных математических соотношений более простых фрагментов с последующим их анализом. Часто это позволяет отказаться от неадекватных упрощений реальных ситуаций и рассматривать сложные математические модели без использования априорной информации. При этом удается получать полезные сведения в ситуациях, считающихся недоопределенными с классической точки зрения. В частности, разработаны способы радиационного зондирования сред на основе исследования соответствующих обратных задач для уравнения переноса излучения. Важной особенностью исследования является использование очень слабого зондирующего сигнала и учет только одного или двух направлений (ракурсов) излучения. Ввиду общности используемой математической модели, среды и виды излучений — произвольны. Также исследованы обратные задачи для системы гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка. Кроме того, предложен новый алгоритм, пригодный для гравиразведки аномалий в земле, границы которых имеют изломы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00275).

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF FUNCTIONAL AND EVOLUTION EQUATIONS AND IDENTIFICATION PROBLEMS

Аниконов Ю. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
anikon@math.nsc.ru

Пусть X — некоторое множество элементов x, $\lambda(x)$ — отображение X в X, E — банахово пространство. Через $u(x,t)$, $w(x,p)$ обозначаем в дальнейшем элементы векторного пространства E, зависящие от $x \in X$ и числовых параметров t, p, $A(x)$ — линейный оператор из E в E, зависящий от $x \in X$, а $L = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k \dfrac{\partial^k}{\partial t^k}$, $N \geq 1$, — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами c_k.

Предметом исследования являются прямые и обратные задачи для операторно-функциональных уравнений с параметром и эволюционных уравнений, а именно, рассматриваются операторно-функциональные уравнения

$$pw(x,p) = A(x)w(\lambda(x),p) + a(x,p) \tag{1}$$

и эволюционные уравнения

$$Lu(x,t) \equiv \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = A(x)u(\lambda(x),t) + R(x,t). \tag{2}$$

Изучаются вопросы представления решений операторно-функциональных (1) и эволюционных уравнений (2). Приводятся формулы таких представлений для ряда задач идентификации.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПОВ В $\mathbb{R}^3$

ON A PROBLEM FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH PARALLEL PLANES OF TYPE CHANGES IN $\mathbb{R}^3$

Апаков Ю. П.

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан;
apakov.1956@mail.ru

В области $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{5} \Omega_i$, ограниченной следующими поверхностями:

$$
\begin{array}{llll}
(S_1): & y = 0,\ 0 \le x \le 1, & (S_2): & y - \frac{2}{m_2+2}(x-1)^{\frac{m_2+2}{2}} = 0,\\
(S_3): & y + \frac{2}{m_2+2}(x-1)^{\frac{m_2+2}{2}} = \varepsilon_2, & (S_4): & y - \frac{2}{m_2+2}(x-1)^{\frac{m_2+2}{2}} = \varepsilon_2,\\
(S_5): & y + \frac{2}{m_2+2}(x-1)^{\frac{m_2+2}{2}} = 1, & (S_6): & y = 1,\ 0 \le x \le 1,\\
(S_7): & y + \frac{2}{m_1+2}(-x)^{\frac{m_1+2}{2}} = 1, & (S_8): & y - \frac{2}{m_1+2}(-x)^{\frac{m_1+2}{2}} = \varepsilon_1,\\
(S_9): & y + \frac{2}{m_1+2}(-x)^{\frac{m_1+2}{2}} = \varepsilon_1, & (S_{10}): & y - \frac{2}{m_1+2}(-x)^{\frac{m_1+2}{2}} = 0,
\end{array}
$$

при $-\infty < z < +\infty$ рассмотрим уравнения

$$
\begin{cases}
U_{xx} - U_y + U_{zz} = 0, & \Omega_1,\\
U_{xx} - (-x)^{m_1}\left(U_{yy} + U_{zz}\right) = 0, & \Omega_k, \quad k = 2,3, \quad m_1, m_2 > 0.\\
U_{xx} - (x-1)^{m_2}\left(U_{yy} + U_{zz}\right) = 0, & \Omega_{k+2},
\end{cases} \tag{1}
$$

Задача G_2. Найти регулярное решение $U(x,y,z)$ уравнения (1) в области Ω_k, $k = \overline{1,5}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $U(x,y,z) \in C\left(\overline{\Omega_k}\right) \cap \left[C^1\left(\Omega_1 \cup I_1 \cup I_2\right) \cup C^1\left(\Omega_2 \cup I_1\right) \cup C^1\left(\Omega_3 \cup I_2\right)\right]$,

2) $U(x,y,z)|_{S_1} = \Phi_1(x,z), \qquad U(x,y,z)|_{S_i} = \Psi_i(y,z), \quad i = 3,5,$
$U(x,y,z)|_{S_j} = \Psi_j(y,z),\ j = 7,9, \quad \lim\limits_{z\to\pm\infty} U(x,y,z) = \lim\limits_{z\to\pm\infty} U_z(x,y,z) = 0,$

3) $U(-0,y,z) = \alpha_1 U(+0,y,z),$
$U_x(-0,y,z) = \beta_1(y)U_x(+0,y,z) + \delta_1(x)U(+0,y,z) + P_1(y,z),$
$U(1-0,y,z) = \alpha_2 U(1+0,y,z),$
$U_x(1-0,y,z) = \beta_2(y)U_x(1+0,y,z) + \delta_2(x)U(1+0,y,z) + P_2(y,z).$

Решение задачи G_2 ищется в классе функций, представимых интегралом Фурье [1].

Единственность решения задачи G_2 доказывается получением априорных оценок для решений, используя принцип максимума для параболических и гиперболических уравнений. Существование решения — методом интегральных уравнений, как в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 642–644.
2. *Апаков Ю. П.* Трехмерный аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 34–44.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

STUDYING SOLUTION TO A MIXED PROBLEM FOR A HIGH ORDER EQUATION

Асадова О. Г., Алиев Н. А.

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан;
aahmad07@rambler.ru

Рассматривается задача нахождения решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{3} a_k(x)\frac{\partial^{6-k}\vartheta(x,t)}{\partial t^k \partial x^{6-2k}} + \sum_{k=0}^{2} b_k(x)\frac{\partial^{5-k}\vartheta(x,t)}{\partial t^k \partial x^{5-2k}} = f(x,t), \qquad x \in (0,1), \quad t > 0, \quad (1)$$

удовлетворяющего граничным

$$\sum_{k=0}^{2}\left\{\alpha_{\nu k}\frac{\partial^{5-k}\vartheta(x,t)}{\partial t^k \partial x^{5-2k}}\bigg|_{x=0} + \beta_{\nu k}(x)\frac{\partial^{5-k}\vartheta(x,t)}{\partial t^k \partial x^{5-2k}}\bigg|_{x=1}\right\} = \varphi(t), \quad \nu = \overline{1,6} \ \text{ и } \ t > 0, \ (2)$$

и начальным условиям

$$\frac{\partial^s \vartheta(x,t)}{\partial t^s}\bigg|_{t=0} = \Phi_s(x) \quad s = 0,1,2, \quad x \in (0,1). \qquad (3)$$

К решению задачи (1)–(3) применяется метод контурного интеграла М. Л. Расулова [1–3]. При определенных условиях удается доказать существование и единственность решения задачи (1)–(3) в виде

$$\vartheta(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\limits_S \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)F(\xi,\lambda)d\xi,$$

где S — бесконечно разомкнутый контур, целиком расположенный в области

$$R_\delta = \left\{\lambda : \ |\lambda| > R, \ -\frac{\pi}{4} - \delta < \arg\lambda \le \frac{\pi}{4}\right\},$$

бесконечно удаленные части которого совпадают с продолжениями лучей $\arg\lambda = -\frac{\pi}{4} - \delta$, $\arg\lambda = \frac{\pi}{4}$, $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина спектральной задачи, соответствующей задаче (1)–(3), а $F(x,\lambda)$ определяется формулой

$$F(x,\lambda) = f(x,\lambda) + a_3(x)\Phi_2(x) + a_3(x)\lambda^2\Phi_1(x) + b_2(x)\Phi_1'(x) + a_2(x)\Phi_1''(x)$$

$$+a_3(x)\lambda^4\Phi_0(x) + \lambda^2\left(a_2(x)\Phi_0''(x) + b_2(x)\Phi_0'(x)\right) + a_1(x)\Phi_0''''(x) + b_1(x)\Phi_0'''(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. М: Наука, 1964.
2. *Расулов М. Л.* Применение метода контурного интеграла. М: Наука, 1975.
3. *Асадова О. Г.* Применение метода контурного интеграла к решению смешанной задачи для слабо параболического уравнения 4-го порядка // Тез. Междунар. конф., посвященной 70-летию проф. Б. А. Искендерова. Баку, 2006.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА

ON A CLASS OF LINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

Асанов А.

Кыргызско-Турецкий университет "Манас", Бишкек, Кыргызстан;
avyt.asanov@mail.ru

Пусть H — гильбертово пространство, $\langle .,. \rangle$ — скалярное произведение в H, $\|\cdot\|_H$ — норма в H. Обозначим через $L[H]$ пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих в H.

Одновременно рассматриваются следующие операторные уравнения

$$Fu = f(t), \qquad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

$$\epsilon v(t,\epsilon) + Fv(t,\epsilon) = f(t), \qquad t \in [t_0, T],$$

где

$$Fu = A(t)u(t) + \int_{t_0}^{T} K(t,s)u(s)ds, \qquad t \in [t_0, T],$$

$A(t) \in L[H]$ при всех $t \in [t_0, T]$, $K(t,s) \in L(H)$ при всех $(t,s) \in G = [t_0, T] \times [t_0, T]$, $f(t)$ — известная функция, $u(t)$ и $v(t,\epsilon)$ — неизвестные функции со значениями в H, $\epsilon > 0$ — малый параметр, в некоторых точках сегмента $[t_0, T]$ оператор $A(t)$ необратим.

Различные вопросы для интегральных и операторных уравнений первого и третьего рода исследовались во многих работах. Но основополагающие результаты для интегральных и операторных уравнений первого рода получены в [1, 2], где для решения линейных и операторных уравнений первого рода построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. В [3] изучены вопросы регуляризации, единственности и оценки устойчивости решений системы интегральных уравнений третьего рода. В данной работе для решения операторного уравнения (1) доказана теорема единственности, получена оценка устойчивости и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. Здесь допускается, что в некоторых точках $[t_0, T]$ оператор $A(t)$ необратим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. *Лаврентьев М. М.* Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
3. *Иманалиев М. И., Асанов А.* О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // ДАН. 2010. Т. 430, № 6. С. 734–737.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ON A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Ахмед-Заки Д. К.[1], **Абдыманапов С. А.**[2]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;* mdina84@mail.ru

[2] *Казахский университет экономики, финансов и международной торговли, Астана, Казахстан*

Пусть $0 < \varphi_0 \le 2\pi$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_0$ и $S[0,\varphi_0]$ — класс существенно ограниченных и измеримых функций с нормой $\|f\|_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\varphi\in[0,\varphi_0]} |f(\varphi)| = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p[0,\varphi_0]}$.

Рассмотрим в $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le \varphi_0\}$ уравнение

$$2\overline{z}a_1(\varphi)\partial_{\overline{z}}w + 2za_2(\varphi)\partial_z w + \frac{r^\alpha b_1(\varphi)w}{|f_1(x,y)|^\alpha} + \frac{r^\alpha b_2(\varphi)\overline{w}}{|f_2(x,y)|^\alpha} = \frac{f_4(\varphi)r^{\nu+\alpha}}{|f_3(x,y)|^\alpha},$$

где $a_1(\varphi)$, $a_1(\varphi) \in C[0,\varphi_0]$; $a_1(\varphi) \ne a_2(\varphi)$ для всех $\varphi \in [0,\varphi_0]$; $0 < \alpha < 1$, $\nu > 0$ — действительные числа.

Будем считать, что функции $f_k(x,y)$, $k = 1, 2, 3$, — однородные функции первого порядка, т. е. $f_k(nx,ny) = nf_k(x,y)$ для любого действительного числа n и $\dfrac{f_4(\varphi)}{|f_3(\cos\varphi,\sin\varphi)|^\alpha}$, $\dfrac{b_1(\varphi)}{|f_1(\cos\varphi,\sin\varphi)|^\alpha} \in L_1[0,\varphi_0]$, $\dfrac{b_2(\varphi)}{|f_2(\cos\varphi,\sin\varphi)|^\alpha} \in S[0,\varphi_0]$.

Пусть $p > 1$, если $\nu \ge 1$, и $1 < p < \frac{1}{1-\nu}$, если $\nu < 1$. В настоящей работе найдено одно многообразие непрерывных решений уравнения из класса

$$W_p^1(G) \cap C(G).$$

Здесь $W_p^1(G)$ — пространство С. Л. Соболева. При $f_1(x,y) = y - k_1x$, $f_2(x,y) \equiv 1$, $f_3(x,y) = y - k_2x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, рассматриваемое уравнение изучено в [1]. При $\alpha = 0$, $a_2(\varphi) \equiv 0$ уравнение исследовано в [2].

Если разделим уравнение на $2\overline{z}a_1(\varphi)$, то оно становится эллиптическим уравнением при $|a_2(\varphi)| < |a_1(\varphi)|$. Данное эллиптическое уравнение при $a_2(\varphi) \equiv 0$ имеет важное приложение в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения [3]. При $b_1(\varphi) = f_4(\varphi) \equiv 0$, $|a_2(\varphi)| < |a_1(\varphi)|$ уравнение становится уравнением Бельтрами, решение которого применяется в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны для построения сопряженно-изометрических систем координат. Коэффициенты данного уравнения не принадлежат пространству L_q, $q > 2$, поэтому невозможно к нему применить аналитические методы теории обобщенных аналитических функций, построенные И. Н. Векуа [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akhmed-Zaki D. K., Danaev N. T., Tungatarov A.* Elliptic systems in the plane with singular coefficients along lines // TWMS J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 3–10.
2. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular Cauchy–Riemann equation in the plane // Complex Var. Elliptic Equ. 2008. V. 53, N 12. P. 1111–1130.
3. *Usmanov Z. D.* Infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with a flattening point // Differential Geometry. 1984. V. 12. P. 241–272.
4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

ФОРМУЛЫ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

FORMULAE IN INVERSE PROBLEMS FOR EVOLUTION EQUATIONS

Аюпова Н. Б.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
ayupova@math.nsc.ru

Пусть D — область вещественного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, K — компакт в $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать целые комплекснозначные функции $w(x)$ такие, что $w(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, где $\widehat{w}(\xi)$ — комплекснозначная непрерывная функция с компактным носителем K. Множество таких функций обозначим $\{W\}$.

Рассматривается задача: найти $w(x,t)$, $\lambda(x)$ такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(t)w + f(t)\lambda(x),$$

$$w|_{t=a} = w_a(x), \quad w|_{t=b} = w_b(x),$$

функции $w_a(x)$, $w_b(x)$ принадлежат $\{W\}$, $A(t)$ — линейный оператор, действующий на целых функциях $w(x,\cdot) \in \{W\}$, имеющий бесконечно дифференцируемый символ $\widetilde{A}(\xi,t)$: $A(t)e^{i\xi x} = e^{i\xi x}\widetilde{A}(\xi,t)$, $B(\xi,t) = \int\limits_0^t \widetilde{A}(\xi,p)dp$, $f(t)$ — непрерывная функция такая, что $\int\limits_a^b e^{B(\xi,p)} f(p)dp \neq 0$.

Приводятся формулы и ряд результатов, касающихся решения этой задачи в классе функций $\{W\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00074).

МАСКИРОВКА С ПОМОЩЬЮ ИМПЕДАНСНОГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

CLOAKING VIA IMPEDANCE BOUNDARY CONDITION IN THE 2-D TRANSMISSION PROBLEM FOR MAXWELL EQUATIONS

Байдин А. В., Месенев П. Р., Соснов В. В.

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;
thulf.m@gmail.com

В настоящее время большое количество работ посвящено исследованию задач, связанных с созданием средств маскировки материальных объектов от электромагнитной или акустической локации. В ряде работ (см., например, [1]) эффект маскировки обеспечивается выбором параметров неоднородной анизотропной среды, заполняющей маскировочную оболочку. Однако техническая реализация данного способа маскировки связана со значительными трудностями. Для преодоления этих трудностей можно предложить несколько способов. Первый способ состоит в аппроксимации точных решений рассматриваемых задач приближенными решениями, допускающими простую техническую реализацию. Второй способ заключается в покрытии маскируемых материальных объектов специальными материалами. Внесение такого покрытия моделируется введением импедансного граничного условия [2].

В представленной работе рассмотрена следующая задача сопряжения для уравнений Максвелла. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ со связным дополнением $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$ и границей Γ. Найти функции v в Ω и $u = u^{inc} + u^s$ в Ω^c, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\Delta v + k^2 \delta(x) v = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad v - u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = i\eta(x) u \text{ на } \Gamma, \quad \lim_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, \text{ где } r = |x|. \tag{2}$$

Здесь k — постоянное волновое число, δ — индекс рефракции, η — коэффициент поверхностной проводимости. Соотношения (2) имеют смысл модифицированного условия Леонтовича для E-поляризованных электромагнитных волн на Γ и условия излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Обратная экстремальная задача заключается в выборе поверхностной проводимости η и решения (u, v) задачи (1), (2), доставляющих минимум определенному функционалу качества. Примером функционала качества может служить квадрат нормы рассеянного поля. В работе доказывается разрешимость экстремальной задачи, выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума. На основании её свойств устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решения обратной экстремальной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 14.A18.21.0353).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В., Романов В. Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 1–6.
2. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 1–5.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОСОБЕННОСТИ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

EXACT SOLUTIONS AND PECULIARITIES OF ONE-DIMENSIONAL MODELS OF INTERNAL WAVES

Байдулов В. Г.

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия;
bayd@ipmnet.ru

В рамках системы одномерных моделей неоднородной жидкости изучен процесс формирования разрывов в изначально гладком поле течения. Для идеальной среды построено точное решение начальной задачи, с использованием которого определены пространственные профили волны в момент обрушения и в последующие моменты времени. Методами локальных разложений проанализировано влияние эффектов диссипации на структуру разрывов. Показано, что толщина разрыва определяется произведением кинетических коэффициентов вязкости и диффузии, а учет диссипации только одного вида, хотя и не приводит к устранению разрыва, меняет вид профилей гидродинамических переменных в момент обрушения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

MATHEMATICAL METHODS FOR THE X-RAY TOMOGRAPHY DATA ANALYSIS

Балакина Е. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
balakina@math.nsc.ru

Рассматривается процесс переноса частиц (в частности, фотонов). В качестве математической модели взято линейное дифференциальное уравнение переноса:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, E) + \mu(r, E) f(r, \omega, E) = J(r, \omega, E).$$

Здесь $r \in G \subset \mathbb{R}^3$; G — выпуклая ограниченная область; $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$; $E \in I = [E_{min}, E_{max}]$.

В этом уравнении $f(r, \omega, E)$ — плотность потока частиц в точке r, летящих в направлении ω. Функции μ и J характеризуют среду G.

Среда G — неоднородная. Для характеристики этой неоднородности введем в рассмотрение подмножество G_0 области G. Множество G_0 предполагается открытым в $\mathbb{R}^3$, плотным в G ($\overline{G}_0 = \overline{G}$) и является объединением счетного числа областей. Области G_i можно интерпретировать как части неоднородной среды G, заполненные i-ым веществом. Функции $\mu(r, E)$ и $J(r, \omega, E)$ по пространственной переменной r принадлежат классу C^2 в каждом G_i и могут претерпевать скачок на ∂G_0.

Рассмотрим задачу, соответствующую многократному зондированию среды.

Задача. Найти поверхность ∂G_0 из уравнений

$$\omega \cdot \nabla_r f_q(r, \omega, E) + \mu(r, E) f_q(r, \omega, E) = J(r, \omega, E),$$

и краевых условий

$$f_q(\xi, \omega, E) = h_q(\xi, \omega, E), \quad (\xi, \omega, E) \in \Gamma^- \times \Omega \times I,$$

$$\int_{E_1}^{E_2} f_q(\eta, \omega, E) dE = H_q(\eta, \omega), \quad (\eta, \omega) \in \Gamma^+ \times \Omega,$$

где известными являются поверхность ∂G и функции $H_q(\eta, \omega)$, $q = 1, \ldots, K$.

Здесь Γ^+ и Γ^- — некоторые подмножества ∂G.

Для решения задачи (используя ограничения, близкие к [1–3], и результат работы [4]) строится функция, которая может быть неограниченной только вблизи искомой поверхности. Доказывается теорема единственности решения при довольно общих предположениях. Проведены численные эксперименты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00275) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (соглашение № 14.B37.21.0355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
3. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
4. *Аниконов Д. С., Балакина Е. Ю.* Полихроматический индикатор неоднородности неизвестной среды для задачи рентгеновской томографии // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 721–740.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ТИПА БЕГУЩИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГЕМОДИНАМИКИ

ANALYSIS OF TRAVELING WAVE SOLUTIONS IN 1-D HEMODYNAMICS MODEL

Барлукова А. М.[1], **Чупахин А. П.**[1,2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;*

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*

ayuna.barlukova@gmail.com, chupakhin@hydro.nsc.ru

В работе исследуется одномерная модель движения потока крови в артериях [1–3]. В настоящее время эта модель является объектом внимания многих исследователей, поскольку имеет вычислительную сложность на несколько порядков ниже, чем для многомерных моделей. Вместе с тем она дает адекватное описание распространения пульсовых волн в случае геометрических и механических модификаций сосуда (при образовании стеноза или установки стента). Ее основой является система уравнений Навье – Стокса, осредненная по сечению сосуда, сопряженная с линейной или нелинейной моделью для упругой стенки сосуда. Задача состоит в исследовании решений типа простых волн для этой модели. Для таких решений система уравнений в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\eta^{IV} + \frac{c_0^2\rho_w h_0 - \tilde{a}}{c_0\tilde{c}}\eta''' + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{c}}\eta'' + \frac{\rho K_R}{\pi c_0\tilde{c}}\frac{\left(q_0 + c_0(\eta+\eta_0)^2\right)}{(\eta+\eta_0)^4} + \frac{\rho}{c_0\tilde{c}(\eta+\eta_0)^5}$$
$$\times\left(-2\alpha\left(c_0^2(\eta+\eta_0)^4 - q_0^2\right) + (\eta+\eta_0)^4\left(\rho^{-1}(\eta+\eta_0)G'(\eta) - 2c_0^2\right)\right)\eta' = 0. \qquad (1)$$

В (1) производные вычисляются по независимой переменной $\lambda = z - c_0 t$, где z — пространственная координата, направленная вдоль сосуда, t — время, c_0 — скорость волны. Используются следующие обозначения: η — отклонение стенки сосуда от начального состояния, q_0 — средний расход по сечению в начальный момент времени, значения $\tilde{a}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{c}$ зависят от механических свойств стенки, K_R — параметр сопротивления, зависящий от вязкости крови, α — коррекционный коэффициент момента, ρ — плотность крови, ρ_w — плотность стенки, h_0 — толщина стенки, функция $G(\eta)$ задает упругую реакцию стенки. Доказано, что система уравнений, эквивалентная (1), имеет единственную особую точку. Характеристическое уравнение четвертого порядка имеет вещественные или комплексные корни в различных областях значений параметров задачи. Для частного случая, когда это уравнение сводится к биквадратному, дана полная классификация типов особых точек (фокус, седло или узел) на плоскости параметров $(c_0,\ q_0)$. Проведены компьютерные эксперименты для подтверждения и анализа полученных результатов и иллюстрации различных режимов движения крови.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (интеграционный проект № 44), Программы ОЭММПУ РАН (проект № 2.13.4), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31112 мол_а, № 13-01-00270).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С., Саакян Ю. З., Цатурян А. К.* О механизме генерации звуков Короткова // ДАН. 1980. Т. 251, № 3. С. 570–574.
2. *Григорян С. С., Саакян Ю. З., Цатурян А. К.* К теории звуков Короткова // Биомеханика. София: Bulgarian Academy of Science, 1984. С. 15–16.
3. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // J. Eng. Math. 2003. V. 47. P. 251–276.

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

THE SINGULAR RIEMANN–HILBERT PROBLEM IN COMPLEX SHAPED DOMAINS

Безродных С. И.[1,2], **Власов В. И.**[1]

[1] *Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия;*
[2] *Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, Москва, Россия;* sergeyib@pochta.ru, vlasov@ccas.ru

Пусть g — расположенная на комплексной плоскости z жорданова область с кусочно-ляпуновской границей γ без внешних и внутренних заострений. В g рассматривается задача Римана – Гильберта $\mathrm{Re}\big[h(z)p^+(z)\big] = c(z)$, $z \in \gamma$, где коэффициент $h(z)$ и правая часть $c(z)$ задачи кусочно-гельдеровы с разрывами первого рода, а в некоторых точках границы γ заданы условия степенного роста решения $p^+(z)$. С помощью конформного отображения $z = \Phi(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, полуплоскости $\mathbb{H}^+$ на g эта задача сводится к аналогичной в $\mathbb{H}^+$ задаче $\mathrm{Re}\big[H(\zeta)P^+(\zeta)\big] = C(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}$, где $\{\xi_k\}_{k=0}^N$ — набор точек разрыва кусочно-гельдеровых $H(\zeta)$, $C(\zeta)$, $\xi_0 = \infty$, а $\{n_k\}$ — набор чисел из $\mathbb{Z}^+$, определяющих условия роста решения при $\zeta \to \xi_k$: $P^+(\zeta) = O\big[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}\big]$, если $n_k \neq 0$, и $P^+ = O(1)$, если $n_k = 0$, а в $\xi_0 = \infty$ — условию $P^+(\zeta) = O(\zeta^{\alpha_0 + n_0})$, $\zeta \to \infty$. Здесь α_k — дробная часть величины $\pi^{-1}[\arg H(\xi_k + 0) - \arg H(\xi_k - 0)]$ при $k \neq 0$ и величины $\pi^{-1}[\arg H(+\infty) - \arg H(-\infty)]$ при $k = 0$; соответствующие целые части обозначаем $\varkappa_k$ и $\varkappa_0$. Пусть все $\alpha_k > 0$.

Теорема. (i) *Если индекс* $\varkappa := n_0 - \varkappa_0 + \sum_{k=1}^K (\varkappa_k + n_k)$ *неотрицателен, то решение поставленной задачи имеет вид* $P^+(\zeta) = X^+(\zeta)\Big[P_\varkappa(\zeta) + (\pi i)^{-1} S(\zeta) \times \int_{\mathbb{R}} \frac{C(t)}{S(t)H(t)X^+(t)\,(t-\zeta)}\,dt\Big]$, *где* $P_\varkappa(\zeta)$ — *произвольный полином степени* $\varkappa$ *с вещественными коэффициентами,* $X^+(\zeta) := \prod_{k=1}^K (\zeta - \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k} \exp[M^+(\zeta)]$ — *каноническое решение задачи,*

$$M^+(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\big[\pi/2 - \arg H(t)\big]\,dt}{(t-\delta)(t-\zeta)}, \quad S(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}} (\zeta^2 + 1)^{[\varkappa/2]},$$

здесь δ, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}$.

(ii) *Если* $\varkappa = -1$, *то единственным решением рассматриваемой задачи является функция* $P^+(\zeta) = (\pi i)^{-1} X^+(\zeta) \int_{\mathbb{R}} C(t)\big[H(t)X^+(t)(t-\zeta)\big]^{-1} dt$.

Если $\varkappa < -1$ *и выполняются условия разрешимости* $\int_{\mathbb{R}} \frac{t^k C(t)}{H(t)X^+(t)}\,dt = 0$ *при* $k = 0, \ldots, |\varkappa| - 2$, *то единственное решение задачи дается той же формулой. Если же* $\varkappa < -1$ *и условия разрешимости не выполнены, то эта задача не имеет решений.*

Получив решение $P^+(\zeta)$ в $\mathbb{H}^+$, восстанавливаем решение исходной задачи Римана – Гильберта в g по формуле $p^+(z) = P^+ \circ \Phi^{-1}(z)$. Отметим, что эффективные вычислительные методы конформного отображения сложных областей изложены в ряде известных руководств, а также в [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №13-01-00923), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики" и Программы № 3 ОМН РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Безродных С. И., Власов В. И.* Сингулярная задача Римана – Гильберта в сложных областях // Spectral and Evolution Problems. 2006. Т. 16. С. 51–61.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКА СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

DETERMINATION OF SOURCE FUNCTIONS FOR SYSTEMS OF EQUATIONS OF COMPOSITE TYPE FOR SOME INITIAL-BOUNDARY PROBLEMS

Белов Ю. Я.[1], **Копылова В. Г.**[2]

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
[1]ybelov@sfu-kras.ru, [2]kopylova.vera@mail.ru

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T,\ x \in E_1\}$ рассматривается задача определения действительнозначных функций $\big(u(t,x),\ v(t,x),\ g_1(t),\ g_2(t)\big)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \overset{\varepsilon}{u}_t + a_{11}(t)\overset{\varepsilon}{u} + a_{12}(t)\overset{\varepsilon}{v} = \mu_1 \overset{\varepsilon}{u}_{xx} + \overset{\varepsilon}{g}_1(t) f(t,x), \\ \varepsilon \overset{\varepsilon}{v}_t + a_{21}(t)\overset{\varepsilon}{u} + a_{22}(t)\overset{\varepsilon}{v} = \mu_2 \overset{\varepsilon}{v}_{xx} + \overset{\varepsilon}{g}_2(t) F(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

$\varepsilon > 0$ — const, начальным условиям

$$\overset{\varepsilon}{u}(0,x) = u_0(x), \quad \overset{\varepsilon}{v}(0,x) = v_0(x), \tag{2}$$

и условиям переопределения

$$\overset{\varepsilon}{u}(t,x_0) = \varphi_1(t), \quad \overset{\varepsilon}{v}(t,x_0) = \varphi_2(t), \quad \varphi_i \in C^2[0,T],\ i = 1,2, \tag{3}$$

где $\varphi_i(t)$, $i = 1,\ 2$, — заданные функции на $[0,T]$.

В (1) коэффициенты $a_{ij}(t)$ заданы на отрезке $[0,T]$, функции $f(t,x)$, $F(t,x)$ заданы в $G_{[0,T]}$, $\mu_1,\ \mu_2 = \text{const} > 0$.

В предположении достаточной гладкости входных данных:

- доказана разрешимость задачи (1)–(3) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$;
- при условии периодичности по x входных данных f, F, u_0, v_0 доказано существование достаточно гладкого решения задачи определения $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}_1$, $\overset{\varepsilon}{g}_2$ в $\overline{Q}_T = [0,T] \times [0,l]$ при первом и втором краевых условиях;
- доказано существование решения u, v, g_1, g_2 первой и второй краевых задач (1^0)–(3^0), где

  $$u = \lim_{\varepsilon \to 0} \overset{\varepsilon}{u}, \quad v = \lim_{\varepsilon \to 0} \overset{\varepsilon}{v}, \quad g_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \overset{\varepsilon}{g}_1, \quad g_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \overset{\varepsilon}{g}_2,$$

  и через (1^0), (2^0), (3^0) обозначены соответственно (1), (2), (3), при $\varepsilon = 0$ (при $\overset{\varepsilon}{u} = u$, $\overset{\varepsilon}{v} = v$, $\overset{\varepsilon}{g}_1 = g_1$, $\overset{\varepsilon}{g}_2 = g_2$);
- получена оценка скорости сходимости $\overset{\varepsilon}{u}$, $\overset{\varepsilon}{v}$, $\overset{\varepsilon}{g}_1$, $\overset{\varepsilon}{g}_2$ к u, v, g_1, g_2 соответственно при $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я.* О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2010. Т. 3, № 4. С. 487–499.
2. *Belov Yu. Ya., Kopylova V. G.* On some identification problem for source function to one semievolutionary system // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 5–6. P. 723–743.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА

ON SOME PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF BURGERS TYPE

Белов Ю. Я.[1], **Фроленков И. В.**[2]

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
[1]ybelov@sfu-kras.ru, [2]igor@frolenkov.ru

Задача Коши для уравнения $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ исследовалась И. М. Бюргерсом [1], Э. Хопфом [2], И. Д. Коулом [3]. Эта задача известна в теории турбулентности. Само же уравнение часто называют уравнением Бюргерса.

Ранее были изучены задачи определения неизвестных коэффициентов для уравнения указанного типа [4] в случае данных Коши, когда входные данные допускают преобразование Фурье по пространственной переменной.

В данной работе в полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid t \in [0,T],\ x \in E_1\}$ исследуется одномерное нагруженное параболическое уравнение типа Бюргерса специального вида с данными Коши

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t,x,u,\omega(t))u_x + f(t,x,u,\omega(t)), \quad u(0,x) = u_0(x).$$

Здесь $\omega(t) = \left(u(t,\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\right)$, $j = \overline{0,p}$, $k = \overline{0,r}$, — вектор функция, компоненты которой являются следами указанного вида функции $u(t,x)$ и ее производных по x до порядка p, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — набор различных точек в пространстве E_1.

Получены достаточные условия существования решения в классе гладких ограниченных функций. Доказательство проводится методом, который аналогичен ранее используемому в работе [5].

Также в работе исследована обратная задача определения функции источника для следующего двумерного уравнения типа Бюргерса

$$u_t(t,x,y) = \mu_1(t)u_{xx} + \mu_2(t)u_{yy} + a_1(y)u_x + a_2(t)u_y + b_1(t)uu_x + b_2(t)uu_y + g(t)f(t,x,y).$$

Рассматриваются случаи задачи Коши на плоскости и смешанной краевой задачи в прямоугольной области. Получены достаточные условия однозначной разрешимости этих задач в классах гладких ограниченных функций.

Одномерный случай был ранее рассмотрен в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burgers I. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances of mechanics. 1948. V. 1. P. 171–199.
2. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Commun. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201–230.
3. *Cole J. D.* On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics // Q. Appl. Math. 1951. V. 9. P. 225–236.
4. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht etc.: VSP, 2002.
5. *Фроленков И. В., Белов Ю. Я.* О существовании решения для класса нагруженных двумерных параболических уравнений с данными Коши // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2012. С. 262–279.
6. *Белов Ю. Я., Коршун К. В.* О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 4. С. 497–506.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

LOCAL PROBLEMS FOR SOME THIRD ORDER HYPERBOLIC EQUATION

Бердышев А. С.[1], **Ахтаева Н. С.**[2]

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан; [1]berdyshev@mail.ru, [2]260503@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — конечная область, ограниченная отрезком $AB : 0 \leqslant x \leqslant 1$ оси $y = 0$, а при $y < 0$ — двумя характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ гиперболического уравнения третьего порядка с простыми характеристиками

$$Lu = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \frac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_{yy}).$$

Задача Гурса. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y)|_{AC \cup BC} = 0, \tag{2}$$

$$u_y(x, y)|_{AC \cup BC} = 0.$$

Задача Дарбу 1. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = u_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(x, y)|_{AC} = u(x, -x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Задача Дарбу 2. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u_y(x, 0) = 0,$$

$$u(x, y)|_{AC} = 0,$$

$$(u_x + u_y)|_{AC} = 0.$$

Задача Дарбу 3. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и

$$u(x, 0) = u_{yy}(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Задача Дарбу 4. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и

$$u_y(x, 0) = u_{yy}(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Решения сформулированных задач получены в явном виде.

О ГЕОМЕТРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ON GEOMETRY OF THE FIRST ORDER ABEL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Бибиков П. В.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;
tsdtp4u@proc.ru

Обыкновенным дифференциальным уравнением Абеля первого порядка называется уравнение, полиномиальное по производной f' неизвестной функции f:

$$a_0(x,f)(f')^n + a_1(x,f)(f')^{n-1} + \ldots + a_n(x,f) = 0.$$

Уравнения Абеля являются простейшими (и, возможно, самыми важными) неявными дифференциальными уравнениями. Они тесно связаны со многими вопросами математики, например, с теорией тканей и символами линейных дифференциальных операторов (см. [1]).

В данной работе мы предлагаем новый геометрический подход к изучению дифференциальных уравнений Абеля. Также с помощью этого подхода мы найдем дифференциальные инварианты и инвариантные дифференцирования уравнений Абеля и построим точечную классификацию таких уравнений.

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2 \simeq J^0\mathbb{R}$ 0-джетов функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с координатами (x,y), кокасательное расслоение $\tau^*\colon T^*\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, его n-ю симметрическую степень $\mathsf{S}^n\tau^*$ и модуль сечений $\Gamma(\mathsf{S}^n\tau^*)$ (необходимые определения см. в [1]). Элементы этого модуля называются *симметрическими дифференциальными n-формами.*

Пусть $\alpha \in \Gamma(\mathsf{S}^n\tau^*)$ — симметрическая n-форма. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор $\Delta_\alpha\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathsf{S}^n(T^*\mathbb{R})$, $\Delta_\alpha(f) = \alpha\mid_{L_f}$ (здесь $L_f = \{(x,f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ — график функции f). Оператор Δ_α мы будем называть *оператором Абеля*, а соответствующее ему уравнение $\mathcal{A}_\alpha = \{\Delta_\alpha(f) = 0\}$ — *дифференциальным уравнением Абеля.*

Замечание. Если $\alpha = a_0(x,y)(dy)^n + a_1(x,y)(dy)^{n-1}dx + \ldots + a_n(x,y)(dx)^n$, то $\Delta_\alpha(f) = \big(a_0(x,f)(f')^n + a_1(x,f)(f')^{n-1} + \ldots + a_n(x,f)\big)(dx)^n$, так что координатное представление уравнения Абеля $\mathcal{A}_\alpha$ действительно полиномиально зависит от производной f'.

Заметим, что две симметрические формы α_1, $\alpha_2 \in \Gamma(\mathsf{S}^n\tau^*)$ задают одно и то же уравнение Абеля, если и только если они пропорциональны, т. е. если $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$ для некоторой ненулевой функции $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Теорема. *Изучение дифференциальных уравнений Абеля равносильно изучению симметрических дифференциальных форм на плоскости, определенных с точностью до умножения на ненулевые гладкие функции.*

В свою очередь симметрические дифференциальные формы можно рассматривать как бинарные формы с переменными коэффициентами. Это позволяет применить к ним методы работы [2]. А именно, мы построим набор дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований, а также решим проблему точечной эквивалентности таких форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 28. С. 5–289.
2. *Бибиков П. В., Лычагин В. В.* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиты бинарных форм // ДАН. 2010. Т. 435, № 4. С. 439–440.

АЛЬТЕРНАТИВА ГЛОБАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ В МЕТОДЕ НЬЮТОНА ДЛЯ ЗАДАЧИ НАВЬЕ – СТОКСА

GLOBAL CONVERGENCE ALTERNATIVE IN NEWTON'S METHOD FOR THE NAVIER–STOKES PROBLEM

Боговский М. Е.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия;
bogovskii@ccas.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается задача Навье – Стокса, т. е. нелинейная нестационарная начально-краевая задача для системы уравнений Навье – Стокса

$$\begin{cases} v_t + (v,\nabla)v - \nu\Delta v + \nabla p = f(x,t), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in Q_T \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0,T); \\ v|_{t=0} = a(x), \quad \operatorname{div} a = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,T), \quad a|_{\partial\Omega} = 0; \end{cases} \tag{1}$$

с постоянной вязкостью $\nu > 0$, с полем скоростей $v : Q_T \to \mathbb{R}^3$ и давлением $p : Q_T \to \mathbb{R}$; сильное решение задачи (1) определяется как упорядоченная пара

$$\{v, \nabla p\} \in W^{2,1}_{2,x,t}(Q_T;\mathbb{R}^3) \times L_2(Q_T;\mathbb{R}^3). \tag{2}$$

Итерации метода Ньютона для задачи (1) являются последовательностью сильных решений $\{v^n, \nabla p^n\}_{n=0}^{\infty}$ линейных начально-краевых задач

$$\begin{cases} v^n_t + (v^{n-1},\nabla)v^n + (v^n,\nabla)v^{n-1} - \nu\Delta v^n + \nabla p^n = f(x,t) + (v^{n-1},\nabla)v^{n-1}, \\ \operatorname{div} v^n = 0, \quad (x,t) \in Q_T\,; \\ v^n|_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega; \quad v^n|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,T); \end{cases}$$

где $n \geqslant 1$ и задано какое-либо начальное приближение $\{v^0, \nabla p^0\}$ класса (2).

Рассматривается вопрос о глобальной сходимости метода Ньютона в классе сильных решений (2) без каких бы то ни было предположений малости величин норм данных задачи, числа $T > 0$, числа Рейнольдса, расстояния между начальным приближением v^0 и искомым v, и даже без предположения, что искомое сильное решение $\{v, \nabla p\}$ существует. Устанавливается, что альтернативой глобальной сходимости последовательности $\{v^n, \nabla p^n\}$ в норме (2) служит ее "расходимость" в смысле неограниченного роста неизотропной лебеговой нормы v^n в $L_{r,s}(Q_T;\mathbb{R}^3)$ с показателями r, s класса Ладыженской – Проди – Серрина, а именно,

$$r > 3, \quad s \geqslant 2: \quad \frac{3}{r} + \frac{2}{s} \leqslant 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v^n(\cdot,t)\|^s_{L_r(\Omega;\mathbb{R}^3)} dt = \infty. \tag{3}$$

Теорема (Альтернатива сходимости). *Пусть ν, $T > 0$, $f \in L_2(Q_T;\mathbb{R}^3)$, $a \in W^1_2(\Omega;\mathbb{R}^3)$: $\operatorname{div} a = 0$, $a|_{\partial\Omega} = 0$, и задано какое-либо начальное приближение $\{v^0, \nabla p^0\}$ класса* (2). *Тогда последовательность $\{v^n, \nabla p^n\}$ либо сходится в норме класса* (2), *либо "расходится" в смысле* (3).

Из теоремы следует, в частности, что для сходимости последовательности $\{v^n, \nabla p^n\}$ достаточно, чтобы она содержала ограниченную подпоследовательность, при этом в ходе доказательства теоремы устанавливается, что такая последовательность сходится в норме (2) сначала быстрее геометрической прогрессии, знаменатель которой сколь угодно близок к нулю, а затем, по мере приближения к пределу, скорость сходимости возрастает до квадратичной, более характерной для метода Ньютона. Отметим, что в случае "расходимости" в смысле (3) утверждение теоремы не исключает существования сильного решения задачи (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00770).

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ

SPECTRAL TRANSFORMATIONS FOR SCHRÖDINGER OPERATOR ON GRAPHS

Бондаренко А. Н.[1], **Дедок В. А.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]bondarenkoan1953@mail.ru, [2]dedok@math.nsc.ru

Актуальность задачи рассеяния для уравнения Шредингера на графах обусловлена применимостью в решении различных теоретических и практических задач. В работах Ю. Б. Мельникова, Б. С. Павлова изучались возможные приложения к проблеме проектирования микроэлектронных устройств [1]. В работах [2, 3] изучаются вопросы конструирования спектральных данных и данных рассеяния при операциях спектральной хирургии, изменяющих топологию графов (склеивание графов, разрезание и масштабирование).

Оператором Шредингера $H = L + Q$ на графе G будем называть оператор, действующий на соболевском пространстве $W_2^2(G)$ функций, ограничение которых на каждое ребро b_j графа принадлежит пространству $W_2^2(b_j)$, по правилу

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x).$$

Потенциал $q(x)$ предполагается вещественным, измеримым и с конечным первым моментом.

В данной работе предлагается метод преобразования спектральных данных для оператора Шредингера H на графе, отличный от предлагаемого в работе [3]. Предыдущие результаты касались преобразований спектра при операциях изменения топологической структуры графов с нулевым потенциалом на ребрах.

Пусть Σ_0, Σ_1 — два спектра оператора Шредингера с соответствующими потенциалами q_0 и q_1 на ребрах графа, такие что Σ_1 получается из Σ_0 добавлением одного собственного значения. Развиваемый в работе подход позволяет получить уравнение на добавку $\widetilde{q}_0$, такую что $q_1 = q_0 + \widetilde{q}_0$.

Таким образом, предлагаемый нами метод позволяет, отталкиваясь от потенциала, соответствующего одному набору спектральных данных, получить потенциал, соответствующий другому набору спектральных данных. Тем самым, решается задача последовательного конструирования потенциала в уравнении Шредингера на метрических графах с заданными спектральными параметрами. Каждая итерация метода позволяет изменить требуемым образом одно из собственных чисел оператора Шредингера.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00105, № 12-01-31436 мол_а), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 14) и проекта, выполняемого совместно СО РАН и НАН Украины (проект № 12, 2013).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melnikov Yu. B., Pavlov B. S.* Two-body scattering on a graph and application to simple nanoelectronic devices // J. Math. Phys. 1995. V. 36, N 6. P. 2813–2825.
2. *Бондаренко А. Н., Дедок В. А.* Техника спектральной хирургии квантовых графов // ДАН. 2012. Т. 444, № 5. С. 473–476.
3. *Бондаренко А. Н., Дедок В. А.* Спектральная хирургия для оператора Шредингера на графах // ДАН. 2012. Т. 444, № 4. С. 353–355.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ON SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE ELLIPTIC SYSTEM IN A HALF-SPACE

Бондарь Л. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
b_lina@ngs.ru

В работе рассматривается первая краевая задача в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$ для одной эллиптической системы с младшими членами:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\ U\big|_{x_n=0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}(D_x) = \mathcal{L}_0(D_x) + \varepsilon\mathcal{L}_1(D_x), \quad \varepsilon > 0.$$

Сформулируем условия на матричный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D_x)$. Обозначим через $a_{j,r}(i\eta) = a_{0,j,r}(i\eta) + \varepsilon a_{1,j,r}(i\eta)$ элементы матрицы $\mathcal{L}(i\eta)$, являющейся символом матричного дифференциального оператора.

Условие 1. Пусть матрица $\mathcal{L}(i\eta)$ имеет размер $m \times m$ и ее элементы удовлетворяют равенствам:

$$a_{j,r}(c^{\frac{1}{4l}} i\eta) = c\, a_{0,j,r}(i\eta) + c^{\frac{1}{2l}}\, \varepsilon a_{1,j,r}(i\eta), \quad j, r = 1, \ldots, m, \quad c > 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Условие 2. Равенства $\det \mathcal{L}(i\eta) = 0$, $\det \mathcal{L}_0(i\eta) = 0$, $\det \mathcal{L}_1(i\eta) = 0$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, имеют место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$.

Условие 3. Краевая задача (1) удовлетворяет условию Лопатинского.

В работе доказана разрешимость краевой задачи (1) в соболевском пространстве $W_p^{4l}(\mathbb{R}^n_+)$, $1 < p < \infty$. Указаны ограничения на показатель суммируемости p, при которых краевая задача (1) будет разрешима в $W_p^{4l}(\mathbb{R}^n_+)$ без дополнительных условий на правую часть системы. Доказательство проводится с помощью метода, предложенного в статье [1]. Работа продолжает исследования [2–4].

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31030) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
2. *Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В.* Краевые задачи для квазиэллиптических систем // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 256–273.
3. *Бондарь Л. Н.* Разрешимость краевых задач для квазиэллиптических систем в весовых соболевских пространствах // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 3–17.
4. *Бондарь Л. Н.* О разрешимости одного эллиптического уравнения в полупространстве // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 618–638.

ОДИН КЛАСС ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

A CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE

Борель Л. В.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
lidiya904@yandex.ru

Рассмотрим линейное интегродифференциальное уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)u(s)d\mu(s), \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Здесь $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (т. е. линеен и непрерывен), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$ (линеен, замкнут и плотно определен), $T > 0$, $\mathcal{K} : [0,T] \times [0,T] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})$, μ — функция ограниченной вариации на $[0,T]$.

Обозначим $\mathfrak{U}^0 = \ker((\mu L - M)^{-1}L)^{p+1}$, $\mathfrak{V}^0 = \ker(L(\mu L - M)^{-1})^{p+1}$, $\mathfrak{U}^1$ — замыкание в пространстве $\mathfrak{U}$ образа оператора $\operatorname{im}((\mu L - M)^{-1}L)^{p+1}$, $\mathfrak{V}^1$ — замыкание в $\mathfrak{V}$ образа $\operatorname{im}(L(\mu L - M)^{-1})^{p+1}$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 1 [1]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда*
(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;
(ii) $L|_{\mathfrak{U}^k} \equiv L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $M|_{\operatorname{dom}M \cap \mathfrak{U}^k} \equiv M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{V}^k)$, $k = 0,1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p.

Пусть P — проектор в пространстве $\mathfrak{U}$ вдоль $\mathfrak{U}^0$ на подпространство $\mathfrak{U}^1$. Для уравнения (1) рассмотрим обобщенную задачу Шоуолтера

$$Pu(0) = u_0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $u_0 \in \operatorname{dom}M \cap \mathfrak{U}^1$, $\mathcal{K} \in C^{p+1,0}([0,T] \times [0,T];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V}))$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации,*

$$\max_{k=0,\dots,p} \|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{U})} \left| \lim_{t \to 0+} \mu(t) - \mu(0) \right| \left\| \mathcal{K}_t^{(p+1)}(0,0) \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})} < 1. \tag{3}$$

Тогда при достаточно малом T задача (1), (2) *имеет единственное решение $u \in C^1([0,T];\mathfrak{U})$.*

Замечание. Условие (3) с очевидностью выполняется, если функция μ непрерывна в нуле справа или $\mathcal{K}_t^{(p+1)}(0,0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МГД СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE STATIONARY MHD EQUATIONS WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Бризицкий Р. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
mlnwizard@mail.ru

В ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2, рассматривается краевая задача магнитной гидродинамики

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1\operatorname{rot}\mathbf{H} - \rho_0^{-1}\mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Γ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ — векторы скорости и напряженностей магнитного и электрического полей, $p = P/\rho_0$, где P — давление, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma$, ν и σ — постоянные коэффициенты вязкости и проводимости, μ — магнитная проницаемость, $\mathbf{j}$ — вектор плотности сторонних токов, $\mathbf{g}$ — определенная на Γ функция. Все величины, входящие в (1)–(3), считаются размерными, причем уравнения модели записаны в системе СИ. Физически граничные условия (3) отвечают ситуации, когда участок Γ_1 границы Γ является идеальным проводником, а участок $\Gamma_2 \subset \Gamma$ — идеальный диэлектрик.

На основе результатов [1] получены новые коэрцитивные неравенства в специальном подпространстве пространства $H^1(\Omega)^3$. С помощью полученных неравенств, а так же метода и результатов [2, 3] доказана глобальная разрешимость и локальная единственность слабого решения задачи (1)–(3), получены априорные оценки норм решения через нормы исходных данных. Отметим, что обосновать корректность слабой формулировки задачи (1)–(3) удалось с использованием полученного в [1] ортогонального разложения пространства $L^2(\Omega)^3$, обобщающего известные ранее результаты.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 14.A18.21.0353) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00313, № 12-01-31288).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fernandes P., Gilardi G.* Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions // Math. Models Methods Appl. Sci. 1997. V. 7, N 7. P. 957–991.
2. *Алексеев Г. В.* Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 243–262.
3. *Бризицкий Р. В., Терешко Д. А.* О разрешимости краевых задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики с неоднородными смешанными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 239–250.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF AN ELASTIC ISOTROPIC MEDIUM IN AN INFINITE CYLINDER

Бугуева Т. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
bugueva@math.nsc.ru

Пусть r_0, T — фиксированные положительные числа. В бесконечном по переменной z цилиндре радиуса r_0 рассмотрим систему дифференциальных уравнений Ламе изотропной упругости

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\vec{u} + \nabla\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \nabla\mu\cdot(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla)$$

вместе с начальными данными и граничными условиями

$$\vec{u}|_{t<0} = 0, \qquad \sigma_r|_{r=r_0} = \vec{l}\theta_0(t)e^{-im\varphi}e^{-i\zeta z}.$$

Здесь $\sigma_r = \lambda\vec{e}_r\mathrm{div}\,\vec{u} + \mu\vec{e}_r\cdot(\nabla\vec{u} + \vec{u}\nabla)$ — вектор напряжений, действующий на площадку с нормалью, параллельной оси $\vec{e}_r$; $\vec{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ — вектор смещений; ρ — плотность среды; λ, μ — параметры Ламе; $\vec{l} = (1,0,0)$ — базисный вектор в цилиндрических координатах $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$; $r \in (0, r_0]$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$; $\theta_0(t)$ — тета-функция.

Переписав систему Ламе и граничные условия в терминах скоростей продольных и поперечных волн $c = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, $a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, исследуем задачу определения трёх характеристик упругой изотропной среды $a(r,\varphi,z)$, $c(r,\varphi,z)$, $\rho(r,\varphi,z)$.

Пусть $\vec{h}(t,\varphi,z)$ — заданная функция. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи рассмотрим

$$\vec{u}|_{r=r_0} = \vec{h}(t,\varphi,z), \qquad t\in[0,T], \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad z\in\mathbb{R}.$$

В данной работе в качестве параметров m и ζ используются два набора: $m = \zeta = 0$ и $m = \zeta = 1$.

Обратная задача изучается в линейном приближении, предполагается, что плотность среды, скорости распространения продольных и поперечных волн представимы в виде $\rho(r,\varphi,z) \approx \rho_0 + \rho_1(r,\varphi,z)$, $c^2(r,\varphi,z) \approx c_0^2 + c_1(r,\varphi,z)$, $a^2(r,\varphi,z) \approx a_0^2 + a_1(r,\varphi,z)$, где ρ_0, a_0^2, c_0^2 — некоторые неизвестные константы, а неизвестные функции ρ_1, a_1, c_1 малы по сравнению с константами ρ_0, a_0^2 и c_0^2 соответственно. Эта гипотеза позволяет линеаризовать исходную задачу и разбить ее на две задачи: в одной требуется найти неизвестные постоянные среды, а во второй — малые добавки к этим постоянным.

Получены оценки условной устойчивости решения обратных задач.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00105), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 14) и проекта, выполняемого совместно СО РАН и НАН Украины (проект № 12, 2013).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугуева Т. В.* Определение параметров упругой изотропной среды в цилиндре // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 567–617.

ЗАДАЧА КОШИ – НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ БУССИНЕСКА

THE CAUCHY–NEUMANN PROBLEM FOR THE SYSTEM OF BOUSINESSQUE EQUATIONS

Бычков Е. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
bychkov42@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = u_1(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \dot{v}(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} (b+\Delta)\ddot{u} = a\Delta u - \Delta f(u,v), \\ (b+\Delta)\ddot{v} = d\Delta v - \Delta g(u,v), \end{cases} \tag{3}$$

где $u,\ v \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, $a,\ b,\ d \in \mathbb{R}$ $(a^2 + d^2 \neq 0)$, $f,\ g$ — класса C^∞, $n = n(x,t)$ — внешняя нормаль к цилиндру $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Система уравнений Буссинеска (3) при $n = 1$ моделирует колебания в молекуле ДНК [1], в этом случае u и v характеризуют продольную и поперечную деформацию, f и g — силы межмолекулярного взаимодействия.

Пусть $\mathfrak{U} = \left\{ w \in W_2^{l+2}(\Omega) \times W_2^{l+2}(\Omega) : \dfrac{\partial w}{\partial n}(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \right\}$ и $\mathfrak{F} = \left\{ w \in W_2^l(\Omega) \times W_2^l(\Omega) \right\}$, положив

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} b+\Delta & 0 \\ 0 & b+\Delta \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} a\Delta & 0 \\ 0 & d\Delta \end{pmatrix}, \ N(w) = \begin{pmatrix} \Delta f(u,v) \\ \Delta g(u,v) \end{pmatrix},$$

редуцируем задачу (1)–(3) к задаче Коши

$$w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1$$

для уравнения соболевского типа

$$L\ddot{w} = Mw - N(w).$$

Лемма [2]. *Оператор* $Q = \int\limits_\gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu$ *является проектором в пространстве* $\mathfrak{F}$.

Построим множество $\mathfrak{M} = \{w \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mw + N(w)) = 0\}$.

Теорема. *Пусть* $s > n/2 - 2$, $(\mathbb{I} - Q)(M + N'_{w_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0$ *топлинейный изоморфизм и* $b \neq 0$, *тогда для любых* $(w_0, w_1) \in T\mathfrak{M}$ *и некоторого* $\tau = \tau(w_0, w_1)$ *существует решение* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^\infty((-\tau,\tau), \mathfrak{U})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen G., Zhang H.* Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations // Math. Methods Appl. Sci. 2004. V. 27, N 5. P. 497–518.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ КОНУСАХ

SOLVABILITY OF PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MULTIDIMENSIONAL CONES

Васильев В. Б.

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия;
vbv57@inbox.ru

Рассматривается уравнение

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in C_+^a, \tag{1}$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \ldots, x_m),\ x_m > a|x'|,\ x' = (x_1, \ldots, x_{m-1}),\ a > 0\}$, в пространствах Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^a)$ [1], где A — псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ порядка α, удовлетворяющим условию

$$c_1 \le |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \le c_2,$$

и допускающим волновую факторизацию [2] относительно конуса C_+^a, $m \ge 3$, с индексом æ, $|æ - s| = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. В этом случае можно описать структуру общего решения уравнения (1) следующим образом.

Обозначим через V_a псевдодифференциальный оператор с символом $\exp(ia|\xi'|)$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$, $A_{\neq}(\xi)$, $A_{=}(\xi)$ — элементы волновой факторизации символа $A(\xi)$. Справедлива следующая

Теорема. *Общее решение уравнения* (1) *в образах Фурье выражается формулой*

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) G_m A_{=}^{-1}(\xi) \widetilde{lf}(\xi) + A_{\neq}^{-1}(\xi) V_a \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(\xi') \delta^{(k-1)}(\xi_m) \right), \tag{2}$$

где $c_k(x') \in H^{s_k}(\mathbb{R}^{m-1})$ *— произвольные функции,* $s_k = s - æ + k - 1/2$, $k = 1, \ldots, n$, lf *— произвольное продолжение* f *на* $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$, $\delta(\xi_m)$ *— дельта функция Дирака одной переменной,* G_m *— интегральный оператор вида*

$$(G_m u) = a 2^{m-1} \pi^{\frac{m-2}{2}} \Gamma(m/2) \lim_{\tau \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{u(y', y_m) dy}{(|x' - y'|^2 - a^2(x_m - y_m + i\tau)^2)^{m/2}},$$

где Γ *— гамма-функция Эйлера.*

В частности, формула (2) позволяет рассматривать различные постановки краевых задач для уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2010.

УСТОЙЧИВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ

STABLE PERIODIC SOLUTIONS OF MULTIDIMENSIONAL PERIODIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOCLINIC SOLUTIONS

Васильева Е. В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; ekvas1962@mail.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

где x, X — n-векторы, и вектор-функция X непрерывна по (t, x) и непрерывно дифференцируема по x, кроме того, X — ω-периодична по t: $X(t+\omega, x) = X(t, x)$, $\omega > 0$.

Предполагается, что система (1) имеет гиперболическое ω-периодическое решение $x = \varphi(t)$. Пусть, как обычно, $W^s(t)$, $W^u(t)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия решения $\varphi(t)$. Предполагается, что пересечение $W^s(0) \cap W^u(0)$ не сводится к точке $\varphi(0)$ и любая точка $w \in W^s(0) \cap W^u(0)$, кроме точки $\varphi(0)$, изолирована в $W^s(0) \cap W^u(0)$. Решение $\psi(t)$ системы (1) с начальными данными $t = 0$, $x = w$, где $w \in W^s(0) \cap W^u(0)$, есть гомоклиническое к $\varphi(t)$ решение. Предполагается, что $W^s(0)$ и $W^u(0)$ пересекаются нетрансверсально.

Из работ [1, 2] следует, что при определенном способе касания $W^s(0)$ и $W^u(0)$ все существующие однообходные периодические решения, лежащие в окрестности гомоклинического решения, неустойчивы. Показано, что при иных условиях, наложенных на характер касания $W^s(0)$ и $W^u(0)$, существуют системы, правая часть которых является непрерывно дифференцируемой по x, которые имеют бесконечное число однообходных устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00624).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // ДАН. 1986. Т. 286, № 5. С. 1049–1053.
2. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // ДАН. 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.

ФУНКЦИОНАЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

SENSITIVITY FUNCTIONALS AND THEIR APPLICATION TO PROBLEMS OF MECHANICS

Вихтенко Э. М.[1], **Намм Р. В.**[2]

[1] *Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия;* vikht@mail.khstu.ru

[2] *Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия;* namm@mail.khstu.ru

Функционалы чувствительности играют большую роль при исследовании методов двойственности для решения вариационных задач механики с односторонними граничными условиями.

Рассмотрим скалярную задачу Синьорини

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega - \int_\Omega f v\, d\Omega \to \min, \\ v \in K = \left\{ w \in W_2^1(\Omega) : -\gamma w \le 0 \text{ на } \Gamma \right\}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,\ 3)$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция, $\gamma v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $v \in W_2^1(\Omega)$ на Γ.

Условие

$$\int_\Omega f\, d\Omega < 0$$

обеспечивает существование и единственность решения задачи (1).

Для любого $m \in L_2(\Gamma)$ введем множество

$$K_m = \left\{ v \in W_2^1(\Omega) : -\gamma v \le m \text{ на } \Gamma \right\}$$

и определим функционал чувствительности

$$\chi(m) = \inf_{v \in K_m} J(v).$$

Эффективная область функционала $\chi(m)$ не совпадает с $L_2(\Gamma)$.

В работе исследуются характеристические свойства функционала чувствительности $\chi(m)$. Показывается, что $\chi(m)$ является слабо полунепрерывным снизу на $L_2(\Gamma)$ функционалом. Свойство слабой полунепрерывности снизу на $L_2(\Gamma)$ функционала чувствительности оказывается определяющим при обосновании методов двойственности решения задачи (1). Для задачи (1) строится и исследуется схема двойственности с модифицированным функционалом Лагранжа.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS TO LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE UNDER PERTURBATIONS OF THEIR COEFFICIENTS

Водопьянов Е. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
evgeniy.vodopyanov@gmail.com

В работе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t)+(D+\Delta D)y(t-\tau))=(A+\Delta A)y(t)+(B+\Delta B)y(t-\tau),\quad t>\tau,\qquad(1)$$

где A, B, D — постоянные матрицы, $\tau>0$ — параметр запаздывания, ΔA, ΔB, ΔD — постоянные матрицы, выполняющие роль малых возмущений исходных матриц A, B, D соответственно. Основная цель — изучение асимптотической устойчивости решений системы (1) в предположении, что нулевое решение невозмущенной системы ($\Delta A=\Delta B=\Delta D=0$) асимптотически устойчиво. Отметим, что при моделировании реальных процессов системами вида (1) коэффициенты, как правило, заданы не точно. Поэтому при решении прикладных задач, описываемых системами вида (1), очень важно определять границы для возмущений ΔA, ΔB, ΔD, при которых свойство устойчивости решений гарантированно сохраняется.

Используя модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского [1, 2], мы получаем достаточные условия на возмущения ΔA, ΔB, ΔD, при которых нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Полученные условия являются аналогами из работы [3]. При этих условиях установлены оценки экспоненциального убывания решений системы (1) при $t\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.
2. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
3. *Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С.* Асимптотическая устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при возмущении коэффициентов // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 32–40.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КОШИ – РИМАНА

RATIONAL FIRST INTEGRALS OF POLYNOMIAL CAUCHY–RIEMANN SYSTEMS

Волокитин Е. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
volok@math.nsc.ru

Рассматривается плоская полиномиальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — многочлены степени n от двух переменных с действительными коэффициентами. Такая система называется системой Коши – Римана, если её правые части удовлетворяют уравнениям Коши – Римана:

$$P_x = Q_y, \quad P_y = -Q_x.$$

Тогда $P + iQ$ будет аналитической функцией $\mathcal{P}(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, и система может быть записана в виде $\dot{z} = \mathcal{P}(z)$. Это уравнение мы также будем называть системой Коши – Римана.

Гладкая функция $H(x, y)$ называется первым интегралом системы, если она сохраняет постоянное значение вдоль любой траектории этой системы.

Для полиномиальных систем естественно рассматривать рациональные первые интегралы. Рациональный первый интеграл имеет вид $H(x, y)=p(x, y)/q(x, y)$, где $p(x, y)$, $q(x, y)$ — многочлены; при этом $H(x, y)$ сохраняет постоянное значение вдоль любой траектории в $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) = 0\}$.

Интерес к системам, имеющим рациональный первый интеграл, обуславливается, в частности, тем обстоятельством, что все орбиты таких систем, образующие её фазовый портрет, будут алгебраическими кривыми.

В работе описываются системы Коши – Римана, имеющие рациональный первый интеграл.

Утверждение 1. *Система*

$$\dot{z} = az^n, \quad a \in \mathbb{C},$$

имеет рациональный первый интеграл

$$H(x, y) = \frac{\operatorname{Im}(az^{n-1})}{(x^2 + y^2)^{n-1}}.$$

Утверждение 2. *Пусть*

$$\mathcal{P}(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),\ a \in \mathbb{C},\ \mathcal{P}'(z_k) = i\omega_k,\ \omega_k \in \mathbb{Q},\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда система $\dot{z} = \mathcal{P}(z)$ имеет рациональный первый интеграл Дарбу

$$H(x, y) = \prod_{k=1}^{n} \left((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\right)^{s_k},\ s_k \in \mathbb{Z},\ s_1 + s_2 + \dots + s_n = 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00074) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

NONCLASSICAL EQUATIONS OF THE THEORY OF PLATES AND SHELLS

Волчков Ю. М.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
volk@hydro.nsc.ru

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) используются либо гипотезы кинематического и силового характера, либо применяются разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций. Гипотезы кинематического и силового характера накладывают достаточно сильные ограничения на напряженно-деформированное состояние и поэтому, как правило, с использованием таких гипотез уравнения теории оболочек строятся для случая, когда на лицевых поверхностях оболочки заданы напряжения.

При решении ряда обратных задач теории оболочек необходимо решать прямые контактные задачи. Однако решение контактных задач на основе классических уравнений теории оболочек зачастую приводит к эффектам нефизического характера.

В докладе излагается алгоритм построения уравнений теории оболочек в ортогональной криволинейной системе координат с использованием аппроксимации напряжений и смещений отрезками полиномов Лежандра. Порядок полученной системы дифференциальных уравнений не зависит от того, задаются ли на лицевых поверхностях оболочки напряжения, смещения или их линейная комбинация, что обеспечивает корректную формулировку условий на этих поверхностях как в перемещениях, так и в напряжениях. Это позволяет корректно формулировать контактные задачи, а также с использованием условий сопряжения перемещений и напряжений на контактных поверхностях построить систему дифференциальных уравнений слоистых оболочек.

Краевые задачи для построенной системы дифференциальных уравнений допускают вариационную формулировку.

Приведены примеры решения ряда контактных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов Г. В.* Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1980.
2. *Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.* Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48, № 3. С. 179–191.
3. *Волчков Ю. М., Важева Д. В.* Решение контактных задач на основе уточненной теории пластин и оболочек // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49, № 5. С. 169–176.

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

AN NONHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN A COMPLEX DOMAIN

Волянская И. И.[1], **Илькив В. С.**[2]

Национальный университет "Львовская политехника", Львов, Украина;
[1]i.volyanska@mail.ru, [2]ilkivv@i.ua

В декартовом произведении $\mathcal{D} = [0;T]\times\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $T > 0$, рассматривается задача для дифференциально-операторного уравнения

$$\sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f \tag{1}$$

и двухточечных нелокальных условий

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0,1,\dots,n-1, \tag{2}$$

где $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,z)$ — искомая функция, а $\varphi_0 = \varphi_0(z)$, $\varphi_1 = \varphi_1(z),\dots,\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}(z)$ и $f = f(t,z)$ — заданные функции. Оператор B — это оператор обобщенного дифференцирования, действующий по формуле $B\psi = z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, степени определены стандартно $B^0\psi = \psi$, $B^s\psi = B(B^{s-1}\psi)$ при $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $u = u(t,z)$, которая удовлетворяет уравнению (1), условиям (2) и принадлежит к пространству $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$.

Используются такие пространства: $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ — банахово пространство функций $u = u(t,z)$, производные которых $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^k$ для каждого $t \in [0,T]$, $r = 0,1,\dots,n$, принадлежат пространствам $H_{q-r}(\mathcal{S})$ соответственно и непрерывны по t:

$$\|u\|^2_{H_q^n(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^{n-1} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{H_{q-r}(S)};$$

пространство $\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$ — гильбертово пространство функций $\psi = \psi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k$, $\psi_k \in \mathbb{C}$, с нормой $\|\psi\|_q = \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big(1+k^2\big)^q |\psi_k|^2\Big)^{1/2}$.

В работе доказана теорема единственности решения задачи (1), (2) и детально исследованы условия его существования в пространстве $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Показано, что в случае одной комплексной переменной задача является корректной по Адамару, в противоположность аналогичной задаче со многими комплексными переменными, которая содержит малые знаменатели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пташник Б. И., Илькив В. С., Кмить И. Я., Полищук В. М.* Нелокальные краевые задачи для уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 2002 (на украинском).
2. *Илькив В. С., Страп Н. И., Волянская И. И.* Нелокальная краевая задача для уравнения с оператором дифференцирования $z\partial/\partial z$ в комплексной области // Прикладные проблемы механики и математики. 2012. № 10. С. 15–26 (на украинском).

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ ПО ПРАВОЙ ЧАСТИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

RECOVERY OF THE CONVOLUTION OPERATOR BY THE RIGHT-HAND SIDE ON THE HALF-LINE

Воронин А. Ф.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
voronin@math.nsc.ru

В докладе будет рассмотрено неоднородное интегральное уравнение Вольтерра первого рода в свертках на полубесконечном интервале

$$\int_0^t k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered} k, f, k', f' \in L_1(0,b), \quad 0 < b < \infty, \qquad k(t) = f(t) = 0, \quad t \geq b, \\ k(b-0) = c_0 \neq 0, \quad k(0) = f(0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Решается следующая задача (А): из уравнения (1) требуется найти две функции $u \in L_1\left(e^{-at};(0,\infty)\right)$ и $k(t)$, $t \in (0,b)$, по заданным значениям $f(t)$, $t \in (0,b)$, при условии (2), где $a \geq 0$, $L_1\left(e^{-at};(0,\infty)\right)$ — пространство с нормой

$$\|u\|_a = \int_0^\infty e^{-as}|u(s)|\,ds.$$

В докладе будут указаны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (А), условия единственности и общий вид ее решения. Отметим, что работа [1] близка к данному докладу по постановке задачи и по методам исследования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00275).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А. Ф.* Восстановление решения уравнения Вольтерра 1-го рода на полупрямой по неполным данным // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 464–471.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНЫХ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ON STABILITY OF IMPLICIT SPLINE-COLLOCATION DIFFERENCE SCHEMES FOR SOME LINEAR DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Гайдомак С. В.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; gaidamak@icc.ru

В докладе рассматривается линейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных первого порядка

$$A(x,t)\partial_t u + B(x,t)\partial_x u + C(x,t)u = f, \quad (x,t) \in U \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$
$$\det A(x,t) = 0, \quad \det B(x,t) = 0 \quad \forall\, (x,t) \in U,$$

с соответствующими начально-краевыми условиями. Предполагается, что выполнены условия, при которых пучок матриц-функций $A(x,t) + \lambda B(x,t)$ гладко эквивалентен одной из следующих канонических форм:
1) $\operatorname{diag}\{E_d, \mathcal{O}_l, E_p\} + \lambda \operatorname{diag}\{J(x,t), E_l, \mathcal{O}_p\}$,
2) $\operatorname{diag}\{E_d, M(x,t), E_p\} + \lambda \operatorname{diag}\{J(x,t), E_l, N(x,t)\}$,
где $M(x,t)$ и $N(x,t)$ — верхние (правые) треугольные матрицы с нулевыми главными диагоналями.

С помощью метода сплайн-коллокации [1] для системы (1) на прямоугольной равномерной сетке U_Δ записывается неявная разностная схема высокого порядка аппроксимации, равного $O(h^{m_1}) + O(\tau^{m_2})$,

$$A_{i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l=1}^{m_2}\gamma_{l_2,l}v_{i+l_1,j+l} + B_{i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{m_1}\bar{\gamma}_{l_1,l}v_{i+l,j+l_2} + C_{i+l_1,j+l_2}v_{i+l_1,j+l_2}$$
$$= f_{i+l_1,j+l_2} - \frac{1}{\tau}A_{i+l_1,j+l_2}\gamma_{l_2,0}v_{i+l_1,j} - \frac{1}{h}B_{i+l_1,j+l_2}\bar{\gamma}_{l_1,0}v_{i,j+l_2}. \tag{2}$$

В каждом узле сетки U_Δ схема (2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с неизвестным вектором $\bar{v}_{i+1,j+1}$ порядка $m_1 m_2$, т. е. $\bar{v}_{i+1,j+1} = (v_{i+1,j+1}, \ldots, v_{i+1,j+m_2}, \ldots, v_{i+m_1,j+1}, \ldots, v_{i+m_1,j+m_2})^\top$, где $i = 0, \ldots, n_1-1$, $j = 0, \ldots, n_2-1$ и $l_1 = 1, \ldots, m_1$, $l_2 = 1, \ldots, m_2$. В докладе излагаются результаты исследования разностной схемы (2). На основе свойств сплайнов записывается разностная схема, эквивалентная схеме (2), в которой хорошо видны спектры матричных коэффициентов. Формулируются утверждения об устойчивости схемы (2) в случаях, когда каноническая структура матричного пучка системы (1) имеет вид 1) или 2). Подробное доказательство свойства устойчивости разностной схемы (2) содержится в [2]. Свойство равномерной ограниченности сеточного решения схемы (2) демонстрируется на тестовых примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн функций. М.: Наука, 1980.
2. *Gaidomak S. V.* On the stability of some spline collocation implicit difference scheme // arXiv: 1303.6359.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

SOLVABILITY OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITIES ON UNBOUNDED SETS

Галахов Е. И.[1], **Салиева О. А.**[2]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;* galakhov@rambler.ru

[2] *Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия;* olga.a.salieva@gmail.com

Для многих нелинейных дифференциальных уравнений имеет место ситуация blow-up (разрушение решений за конечное время). Большая часть известных результатов теории blow-up относится к эллиптическим и параболическим операторам второго порядка [1]. Существенно более общий подход, основанный на концепции нелинейной емкости, был предложен С. И. Похожаевым [2, 3].

Авторами настоящего доклада получены достаточные условия возникновения ситуации blow-up для уравнений и неравенств с частными производными, коэффициенты которых имеют особенности вблизи неограниченных множеств. В частности, имеет место следующий результат.

Теорема. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, $\varepsilon > 0$. Обозначим $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, S)$ и*

$$S^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < \varepsilon\}.$$

Предположим, что существуют положительные константы c_1, c_2, a, R_0 такие, что для всех $R > R_0$ выполнены соотношения

$$c_1 \varepsilon^a R^{n-a} \le \mu(S^\varepsilon \cap B_R(0)) \le c_2 \varepsilon^a R^{n-a}.$$

Пусть функция $u_0 : (\mathbb{R}^n \setminus S) \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет оценке

$$u_0(x) \ge c|x|^\lambda \rho^\mu(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus S),$$

где

$$\alpha > \max\{(\mu - \lambda)(q-1) + 2k, 0\}.$$

Тогда любое положительное решение задачи

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u \ge b u^q \rho^{-\alpha}(x) & ((x,t) \in Q = (\mathbb{R}^n \setminus S) \times \mathbb{R}_+), \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^n \setminus S), \end{cases}$$

разрушается за конечное время.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00348 а, № 11-01-12018 офи-м).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами // ДАН. 1997. Т. 357, № 5. С. 592–594.
3. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 234. С. 1–383.

4-КРИСТАЛЛЫ И КВАЗИКРИСТАЛЛЫ
4-CRYSTALLS AND QUASICRYSTALS

Гарипов Р. М.[1], **Котельникова М. С.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]R.M.Garipov@mail.ru, [2]kotelnikova@hydro.nsc.ru

4-*Кристаллы* были определены в работе [1] как кристаллы, поляризуемость которых периодически зависит от точки $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ 4-мерного пространства-времени. Д. Шехтман и др. экспериментально получили *квазикристаллы*, электронограммы которых содержат правильные 5- или 10-угольники. Для обычных кристаллов это невозможно. В этом докладе будет показано, что рентгенограммы 4-кристаллов могут иметь поворотную симметрию 5-го или 10-го порядка. Следовательно, квазикристаллы являются 4-кристаллами частного вида, обладающими дополнительной геометрической симметрией, которая сама по себе вряд ли имеет серьёзное значение. Важным же свойством 4-кристаллов является способность излучать когерентные электромагнитные волны во внешнем электрическом поле.

Пусть $Z = E\mathbb{Z}^4$ — решётка периодов 4-кристалла, неособенная вещественная матрица E размера 4×4 — её базис. Тогда поляризуемость 4-кристалла разлагается в ряд Фурье вида

$$\chi = \sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \exp(2\pi i m \cdot E^{-1}x)\chi_m \left(\frac{\partial}{i\partial t}\right), \tag{1}$$

где точка обозначает скалярное произведение

$$x \cdot y = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3.$$

Система уравнений Максвелла содержит периодические коэффициенты, и возможен параметрический резонанс. Если падающий на кристалл рентгеновский луч имеет волновой вектор k, то m-гармоника ряда Фурье (1) резонансно отражает луч с волновым вектором $k_m = k + 2\pi m'$, если выполнено равенство

$$k \cdot m' + \pi m' \cdot m' = 0, \tag{2}$$

здесь $m' = E^{-1\prime}m$, штрих обозначает сопряжённую матрицу относительно билинейной формы $x \cdot y$. Равенство (2) обобщает известное в кристаллографии условие Брэгга на 4-кристаллы. Этот луч оставляет на регистрирующем экране маленькое пятнышко, которое называется *рефлексом*. Рентгенограмма — это множество рефлексов. Положение рефлекса на экране задаётся вектором $m' = E^{-1\prime}m$, но он отсутствует, если соответствующий коэффициент Фурье $\chi_m = 0$. Множество Q_Z центров всех возможных рефлексов однозначно определяется решёткой Z. В докладе показано, что никакое дискретное множество вида Q_Z не обладает поворотной симметрией порядка 5. Однако для некоторых решёток Z множество Q_Z включает в себя дискретные подмножества, инвариантные относительно поворота на угол $2\pi/5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарипов Р. М.* 4-Кристаллы // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 49–60.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH NONLINEAR NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Гладков А. Л.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь;
gladkoval@mail.ru

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - c(x,t)u^p & \text{для} \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = \displaystyle\int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy & \text{для} \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{для} \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $p > 0$, $l > 0$, $c(x,t)$ — неотрицательная локально непрерывная по Гельдеру функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$ и $t \geq 0$, $k(x,y,t)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ и $t \geq 0$ и $u_0(x)$ — нетривиальная неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$ и удовлетворяющая граничному условию при $t = 0$.

Для этой задачи изучаются вопросы существования и единственности решений при различных соотношениях между p и l. В частности, установлена единственность решения с любыми начальными данными при $l \geq 1$, с нетривиальными начальными данными при $l < 1$, $p \geq 1$ и с тривиальными начальными данными при $(p+1)/2 < l < 1$, а также неединственность решения с тривиальными начальными данными при $l < \min\{(p+1)/2, 1\}$.

Глобальное существование решений рассматриваемой задачи с любыми начальными данными доказано при $l \leq 1$ или $p > 1$, $1 < l < (p+1)/2$. При $l > \max\{1, (p+1)/2\}$ показано, что некоторые решения могут существовать лишь конечное время. Найдены условия, при выполнении которых разрушаются все нетривиальные решения. Результаты получены совместно с M. Guedda и изложены в работах [1] и [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gladkov A., Guedda M.* Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // Nonlinear Anal. 2011. V. 74, N 13. P. 4573–4580.
2. *Gladkov A., Guedda M.* Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition // Appl. Anal. 2012. V. 91, N 12. P. 2267–2276.

ДВИЖЕНИЕ БИНАРНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЕ С УПРУГИМИ ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

MOTION OF A BINARY FLUID IN A PLANAR CRACK WITH ELASTIC POROUS WALLS

Головин С. В.[1], **Исаев В. И.**[2], **Калинин С. А.**[2], **Кузнецов Д. С.**[2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* golovin@hydro.nsc.ru

[2] *Технологическая Компания Шлюмберже, Новосибирск, Россия;* visayev@slb.com

Исследуется задача о раскрытии плоской трещины постоянной высоты в изотропной упругой пористой среде под действием давления бинарной жидкости, закачиваемой вдоль вертикальной линии в середине трещины. Концентрации компонент бинарной жидкости в области впрыска осциллируют с течением времени. Требуется найти распределения концентраций в трещине в процессе закачки, а также влияние осцилляций на процесс роста трещины.

Предполагается, что постоянная по высоте ширина трещины много меньше её горизонтального и вертикального размеров (ячейка Хеле – Шоу). Скорость течения внутри трещины определяется градиентом давления по формуле Пуазейля. Учитываются фильтрационные утечки на основе поршневого механизма проникновения жидкости в окружающую среду. Раскрытие трещины находится по усреднённому по высоте давлению внутри трещины из интегральной формулы Колосова – Мусхелишвили для плоской задачи теории упругости. Таким образом, для давления жидкости внутри трещины получается сингулярное интегродифференциальное уравнение с вырождением на краях трещины, которое после усреднения по вертикальной координате может быть сведено к модели Христиановича – Гиртсма – де Клерка (KGD) для раскрытия трещины гидроразрыва горного пласта [1]. Итерационный процесс замыкался усреднением распределения компонент по высоте трещины и подстановкой в одномерное уравнение для давления.

В работе обсуждаются особенности математической модели и алгоритма её численной реализации. Для нахождения среднего по высоте трещины давления из интегродифференциального уравнения использовался метод конечных элементов, основанный на слабой формулировке задачи. По найденному среднему давлению восстанавливалось среднее раскрытие трещины. Движение жидкости внутри трещины моделировалось на основе решения уравнения Пуассона в изменяемой в процессе решения области. Показано, что основную роль здесь играет развитие неустойчивости на границе между областями с разной концентрацией компонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желтов Ю. П., Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 73–86.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СМЕРЧЕОБРАЗНЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ МОДЕЛИ ШЕРОХОВАТЫХ СФЕР

INTERACTION OF THE EDDY FLOWS IN THE MODEL OF ROUGH SPHERES

Гордевский В. Д.[1], **Гукалов А. А.**[2]

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина; [1]gordevskyy2006@yandex.ru, [2]gukalex@ukr.net

Уравнение Больцмана играет важную роль в кинетической теории газов. Нами рассматривается это уравнение в случае модели Бриана – Пиддака. Оно имеет вид [1]:

$$D(f) = Q(f,f);$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + V\frac{\partial f}{\partial x};$$

$$Q(f,f) \equiv \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V-V_1,\alpha)$$

$$\times\left[f(t,V_1^*,x,\omega_1^*)f(t,V^*,x,\omega^*) - f(t,V,x,\omega)f(t,V_1,x,\omega_1)\right],$$

где d — диаметр молекулы, V, ω, V^*, ω^* — линейные и угловые скорости молекул до и после столкновения [1], α — единичный вектор из $\mathbb{R}^3$, направленный вдоль линии, соединяющей центры сталкивающихся молекул;

$$B(V-V_1,\alpha) = |(V-V_1,\alpha)| - (V-V_1,\alpha)$$

— столкновительный член.

Для поиска приближенных решений используется невязка [2]:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dV\,d\omega\,|D(f) - Q(f,f)|\,.$$

Приближенное решение мы находим в виде:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2,$$

где M_1, M_2 — максвеллианы, описывающие смерчеобразное движение газа [3, 4].

Получены достаточные условия произвольной малости указанной невязки Δ при различных предположениях относительно коэффициентных функций и поведения гидродинамических параметров распределения [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чепмен С., Коулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. *Gordevskyy V. D.* Approximate billow solutions of the kinetic Bryan–Pidduck equation // Math. Methods Appl. Sci. 2000. V. 23, N 13. P. 1121–1137.
3. *Гордевский В. Д., Гукалов А. А.* Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 5. С. 629–639.
4. *Гордевский В. Д., Гукалов А. А.* Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана – Пиддака // Вестн. ХНУ. Сер. Математика, прикладная математика и механика. 2011. № 990, вып. 64. С. 27–41.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

PHASE SPACE FOR A CLASS OF SOBOLEV TYPE EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

Гордиевских Д. М.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
dmitriy_g90@mail.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линейный и непрерывный оператор), $\ker L \neq \{0\}$, $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — линейный и замкнутый оператор с плотной в $\mathfrak{U}$ областью определения D_M. Рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется такая вектор-функция $u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D_M)$, для которой существует производная Капуто [1] $D_t^\alpha Lu$ и для всех $t \geq 0$ выполняется равенство (1). *Решение задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

для уравнения (1) определяется естественным образом. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1), если

(i) для любого решения u уравнения (1) $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \geq 0$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1), (2).

Семейство операторов $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ называется *дробной полугруппой уравнения* (1), если при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U(t)u_0$ есть решение уравнения (1). Дробная полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ уравнения (1) называется *разрешающей дробной полугруппой уравнения* (1), если для любого u_0 из фазового пространства $\mathfrak{P}$ этого уравнения единственное решение задачи (1), (2) имеет вид $u(t) = U(t)u_0$ при $t \geq 0$.

Обозначим $E_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})\}$.

Оператор M называется (L,σ)-ограниченным [2], если

$$\exists\, a > 0 \quad \forall\, \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Если при этом оператор-функция $(\mu L - M)^{-1}$ имеет устранимую особую точку в бесконечности, то оператор M называется $(L,0)$-ограниченным, если полюс порядка $p \in \mathbb{N}$ — (L,p)-ограниченным.

Теорема. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда семейство операторов*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=a+1} (\mu L - M)^{-1} L E_\alpha(\mu t^\alpha) d\mu, \quad t \geq 0,$$

образует разрешающую дробную полугруппу уравнения (1). *Фазовым пространством уравнения* (1) *при этом является образ оператора* $\operatorname{im} U(0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces. PhD thesis. Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

ДИССИПАТИВНОСТЬ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

DISSIPATIVITY OF BOUNDARY CONDITION IN A MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION

Гордиенко В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
gordienk@math.nsc.ru

Рассматривается смешанная задача для n-мерного волнового уравнения в четверти пространства. Граничное условие задано в виде линейной комбинации первых производных. Предполагается выполненным равномерное условие Лопатинского. В этом случае описаны все возможные способы сведения такой задачи к смешанной задаче для симметрической гиперболической системы с диссипативным граничным условием. Эти способы сведения параметризованы точками верхней полы $n+1$-мерного телесного конуса второго порядка. Охарактеризовано расположение конуса и его геометрические параметры через коэффициенты граничного условия исходной задачи.

Таким образом, для каждого корректного граничного условия построены интегралы энергии, позволяющие рассматривать это граничное условие как диссипативное.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордиенко В. М.* Диссипативность граничного условия в смешанной задаче для трехмерного волнового уравнения // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 311–323.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА

STABILITY OF THE PLAIN COUETTE FLOW OF A VIBRATIONALLY EXCITED GAS

Григорьев Ю. Н.[1], **Ершов И. В.**[2]

[1] *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;* grigor@ict.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Россия;* i_ershov@ngs.ru

В докладе рассматриваются математические проблемы устойчивости плоского течения Куэтта колебательно неравновесного двухатомного газа. Течение описывается системой уравнений двухтемпературной гидродинамики, где релаксация вращательных мод молекул учитывается коэффициентом объемной вязкости, а колебательной моды — релаксационным уравнением Ландау – Теллера. Из уравнений исходной системы выводятся уравнения для возмущений гидродинамических переменных без ограничения на амплитуды. Для них построен нелинейный функционал полной пульсационной энергии, для которого получено уравнение энергетического баланса и сформулирована вариационная задача для критического числа Рейнольдса. Соответствующие уравнения Эйлера – Лагранжа после отделения периодических переменных приводят к полиномиальной спектральной задаче, где спектральным параметром служит число Рейнольдса. Рассмотрены качественные свойства спектров. Асимптотические оценки и численные расчеты показывают, что возрастание степени неравновесности колебательной моды и времени колебательной релаксации в диапазонах, реальных для двухатомных газов, при фиксированных числах Маха потока и объемной вязкости приводит к росту значений критических чисел Рейнольдса. Увеличение числа Маха и объемной вязкости также приводит к возрастанию значений критических чисел Рейнольдса.

Для сравнения с результатами энергетической теории та же задача рассматривалась в рамках классической линейной теории устойчивости. Для невязкого предела в явном виде для растущих возмущений получены первое и второе необходимые условия (теоремы) Рэлея, уточнено достаточное условие в теореме (Howard's) о полукруге. Двумя независимыми способами — методом "стрельбы" и методом коллокаций — выполнены расчеты инкрементов нарастания двумерных четных и нечетных невязких мод. Отмечено, что в отличие от свободного сдвигового слоя, в задаче Куэтта с возрастанием числа Маха инкремент нарастания наиболее неустойчивой четной моды возрастает, стремясь к некоторому пределу, для которого получена асимптотика в форме обыкновенного дифференциального уравнения. Рассчитаны кривые устойчивости вязких возмущений. Найдены критические числа Рейнольдса, которые на три порядка превосходят значения, рассчитанные по энергетической теории. Тем не менее, результаты расчетов как в невязком, так и в вязком случаях также показывают, что эффект уменьшения инкрементов нарастания и повышения критических чисел Рейнольдса при интенсификации релаксационного процесса выражен совершенно определенно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00064).

К УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОДНОМЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ ВЛАСОВА – ПУАССОНА

ON STABILITY OF A CLASS OF 1-D DYNAMICAL EQUILIBRIUM STATES OF THE VLASOV–POISSON PLASMA

Губарев Ю. Г.[1,2], **Губкин А. А.**[2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* gubarev@hydro.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

Модель безграничной бесстолкновительной электронейтральной плазмы в электростатическом приближении (плазма Власова – Пуассона) продолжает оставаться одной из базовых математических моделей современной физики плазмы [1]. С одной стороны, это обусловлено ее простотой и наглядностью, а с другой — очевидной полезностью для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС).

Несмотря на то, что данная модель интенсивно изучается в течение длительного времени, с точки зрения теории математической устойчивости удалось, по большому счету, установить лишь достаточные условия теоретической устойчивости ряда состояний динамического равновесия [1], причем хотя и относительно как малых, так и конечных возмущений, но из несамостоятельных подклассов.

В настоящей работе прямым методом Ляпунова [2] доказано, что одномерные состояния динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона, которая содержит электроны со стационарной функцией распределения, изотропной по пространству, но неизотропной по скоростям, и один сорт ионов, чья функция распределения в фазовом пространстве неизменна, абсолютно неустойчивы в теоретическом смысле (на полубесконечных временных промежутках) по отношению к одномерным же малым возмущениям. При этом обращено известное достаточное условие теоретической линейной устойчивости данных состояний динамического равновесия [1] и строго описана область его применимости. Кроме того, получены достаточные условия практической (на конечных интервалах времени) линейной неустойчивости, сконструирована априорная экспоненциальная оценка снизу и охарактеризованы начальные данные для растущих малых возмущений.

Все перечисленные выше результаты принципиально новые и не имеют аналогов в мировой научной литературе. По мнению авторов, эти результаты могут пригодиться в процессе создания опытных установок для осуществления УТС.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 14.B37.21.0355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics Reports. 1985. V. 123, N 1–2. P. 1–116.
2. *Губарев Ю. Г.* Прямой метод Ляпунова. Устойчивость состояний покоя и стационарных течений жидкостей и газов. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012.

О НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА НА ПЛОСКОСТИ

ON NORMAL FORMS OF FAMILIES OF MIXED TYPE EQUATIONS ON THE PLANE

Давыдов А. А.

Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия; davydov@vlsu.ru

Полная классификация ростков главных символов типичных линейных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости была завершена в [1, 2]. Помимо классических случаев уравнения Лапласа, волнового уравнения и уравнения Трикоми – Чибрарио эта классификация содержит ещё три типа уравнений, соответствующих локальному поведению характеристик уравнения типов сложенные седло, узел либо фокус. Последние нормальные формы при гладкой классификации имеют числовые инварианты.

В последние годы удалось продвинуться в аналогичной классификации для случая типичных семейств уравнений [3–6]. Однако полная гладкая классификация даже для типичных однопараметрических семейств ещё не получена. О последних достижениях в теории нормальных форм главных символов типичных семейств линейных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости и пойдёт речь в докладе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00960 а) и Минобрнауки РФ (проект ДРПННиТ № 1.1348.2011).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Давыдов А. А., Росалес-Гонсалес Э.* Полная классификация типичных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными на плоскости // ДАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 151–154.
2. *Davydov A. A., Rosales-Gonzales E.* Smooth normal forms of folded resonance saddles and nodes and complete classification of generic linear second order PDE's on the plane // Eds. L. Magalhaes, C. Rocha and L. Sanchez, Intern. Conf. on Differential Equation, Lisboa 1995. Singapore: World Scientific, 1998. P. 59–79.
3. *Bruce J. W., Tari F.* Generic 1-parameter families of binary differential equations of Morse type // Discrete Contin. Dyn. Syst. 1997. V. 3, N 1. P. 79–90.
4. *Bruce J. W., Fletcher G. J., Tari F.* Bifurcations of implicit differential equations // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. 2000. V. 130, N 3. P. 485–506.
5. *Davydov A. A., Trinh Thi Diep L.* Reduction theorem and normal forms of linear second order mixed type PDE families in the plane // TWMS J. Pure Appl. Math. 2011. V. 2, N 1. P. 44–53.
6. *Bogaevskii I. A.* Typical transitions of implicit differential equations // Talk at Intern. Conf. Analysis and Singularities (Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia, December 17–21, 2012), dedicated to the 75th anniversary of Vladimir Igorevich Arnold. Abstracts.

ОДНОЗНАЧНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

LOCAL UNIQUE SOLVABILITY OF A SYSTEM OF SEMILINEAR EQUATIONS OF GENERALIZED HYDRODYNAMICAL TYPE

Давыдов П. Н.[1], **Фёдоров В. Е.**[2]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]davydov@csu.ru, [2]kar@csu.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$(1-\chi\Delta)v_t = \nu\Delta v + (q(t,x,v)\cdot\nabla)v + G(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v$$

$$+\sum_{i=1}^{n} G^i(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} G^{ij}(t,v,\underset{1}{v},\underset{2}{v})v_{x_ix_j} - r, \quad (x,t)\in\Omega\times J, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \quad (x,t)\in\Omega\times J, \tag{2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times J, \tag{3}$$

$$v(x,t_0) = v_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{4}$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $n\le 4$, J — промежуток из $\mathbb{R}$. Системы уравнений вида (1), (2) встречаются, например, в динамике неньютоновских жидкостей [1]. Параметр $\chi\in\mathbb{R}$ при этом характеризует упругие свойства жидкости, а параметр $\nu\in\mathbb{R}$ — её вязкие свойства. Вектор-функции $v=(v_1,\dots,v_n)$ (вектор скорости жидкости), $r=(r_1,\dots,r_n)$ (градиент давления) неизвестны. Использованы обозначения $\underset{1}{v}=(v_{x_1},\dots,v_{x_n})$, $\underset{2}{v}=(v_{x_1x_1},v_{x_1x_2},\dots,v_{x_nx_n})$, через $\mathbb{L}_2^m$ далее обозначена m-я декартова степень пространства $\mathbb{L}_2=(L_2(\Omega))^n$. Заданы вектор-функция $q=(q^1,\dots,q^n)$ и функционалы G, G^i, G^{ij}, $i,j=1,\dots,n$, зависящие от t, v, $\underset{1}{v}$, $\underset{2}{v}$. Например, G, G^i, G^{ij} могут быть функциями от интегралов по области Ω или ее подобластям от функции v и ее частных производных по пространственным переменным первого и второго порядков, функцией от значений v в фиксированных точках области и т. п.

Введем обозначения $\mathbb{H}^1=(W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2=(W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L}=\{v\in(C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v=0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначение $\mathbb{H}_\sigma^2=\mathbb{H}_\sigma^1\cap\mathbb{H}^2$. Обозначим через $\mathbb{H}_\pi$ ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, через $\Sigma:\mathbb{L}_2\to\mathbb{H}_\sigma$, $\Pi=I-\Sigma$ — соответствующие этим подпространствам ортопроекторы. В пространстве $\mathbb{L}_2$ рассмотрим оператор $A=\Sigma\Delta$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$. Используя методы теории вырожденных полугрупп операторов [2], получим следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\chi\ne 0$, $\chi^{-1}\notin\sigma(A)$, $\nu\in\mathbb{R}$, $n\le 4$, $q\in C^1(J\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $G\in C^1(J\times\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{L}_2^{n^2+n^3};\mathbb{R})$, $G^i\in C^1(J\times\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{L}_2^{n^2+n^3};\mathbb{R})$, $G^{ij}\in C^1(J\times\mathbb{H}_\sigma\times\mathbb{L}_2^{n^2+n^3};\mathbb{R})$, $i,j=1,\dots,n$, $v_0\in\mathbb{H}_\sigma$, $t_0\in J$. Тогда при некотором $t_1\in J$, $t_1>t_0$, существует единственное решение $v\in C^1([t_0,t_1];\mathbb{H}_\sigma^2)$, $r\in C^1([t_0,t_1];\mathbb{H}_\pi)$ задачи (1)–(4).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

ON STABILITY OF SOLUTIONS IN THE INVERSE PROBLEM FOR COEFFICIENTS OF A LINEAR DIFFERENCE EQUATION

Дастай-оол А. А.[1], **Ломов А. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
lomov@math.nsc.ru

Рассматривается задача аппроксимации сеточной функции $x[t] \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant t \leqslant N$, решением $z[t]$ разностного уравнения $z[t+p]+a_1 z[t+p-1]+\ldots+a_p z[t]=0$ заданного порядка $p \geqslant 1$ с неопределенными коэффициентами a_i и неопределенными начальными условиями $z[1],\ldots,z[p]$. Известно, что она равносильна задаче матричной аппроксимации [1]:

Задача 1. Даны матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, целое число p, $1 \leqslant p < \operatorname{rank} A$, и множество ганкелевых матриц $\mathcal{H} \doteq \{B \in \mathbb{R}^{m\times n} :\ B_{ij} = B_{i+j}\}$. Найти матрицу $\hat{B} \in \mathcal{H}$ ранга p такую, что $\|A-\hat{B}\| = \min\limits_{B\in\mathcal{H},\ \operatorname{rank} B=p} \|A-B\|$.

Для бесконечных ганкелевых матриц A, B конечных рангов n и $p < n$ существование и единственность решения $\hat{B}$ утверждается теоремой Адамяна – Арова – Крейна:

Теорема 1 [2]. *Пусть $A, B \in \mathcal{H}$ — бесконечные матрицы,* $\operatorname{rank} A = n > p$, $\operatorname{rank} B = p$. *Тогда аппроксимация $\hat{B}$ существует и единственна.*

В [1] замечено, что для матриц конечной размерности получение результата, аналогичного теореме 1, представляется невозможным.

В сообщении мы даем локальный вариант теоремы 1 для матриц конечной размерности:

Теорема 2. *Пусть A, B — конечные матрицы из условия задачи* 1. *Тогда аппроксимация $\hat{B} \in \mathcal{H}$ существует и локально единственна.*

Построены контрпримеры, показывающие невозможность глобальной единственности аппроксимации без дополнительных ограничений на матрицу A.

Доказательство теоремы 2 основано на утверждениях статей [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chu M. T., Funderlic R. E., Plemmons R. J.* Structured low rank approximations // Linear Algebra Appl. 2003. V. 366. P. 157–172.
2. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура – Такаги // Мат. сб. 1971. Т. 86, № 1. С. 34–75.
3. *Ломов А. А.* О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81–103.
4. *Ломов А. А.* Вариационные методы идентификации линейных динамических систем и проблема локальных экстремумов // Управление большими системами. 2012. Вып. 39. С. 53–94. http://ubs.mtas.ru/upload/library/UBS3903.pdf

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ ПОШАГОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАГЕРРА ПО ВРЕМЕНИ

MODELING THE ELASTIC WAVE PROPAGATION BY USING THE STEP-BY-STEP LAGUERRE TRANSFORM IN TIME

Демидов Г. В., Михайленко Б. Г., Мартынов В. Н.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; vnm@nmsf.sscc.ru

В предыдущих публикациях авторов [1, 2] был предложен метод решения динамических задач, основанный на преобразовании Лагерра по времени. При реализации данного подхода возникает необходимость выбора четырех параметров: количества проекций преобразования Лагерра, масштабного множителя, необходимого для аппроксимации решения функциями Лагерра, экспоненциального коэффициента весовой функции, использующейся для нахождения решения на конечном временном интервале, и длительности этого интервала. Был предложен способ выбора данных параметров, обеспечивающий устойчивость расчета. На примере решения одномерных задач с использованием данного подхода было показано, что использование такого подхода позволяет получить решение с высокой точностью на больших интервалах по времени. В данной работе мы показываем, что предложенный способ выбора параметров, необходимых для расчета, применим при решении динамических задач большей размерности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-05-00937), Президиума РАН (проект № 15.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидов Г. В., Мартынов В. Н.* Пошаговый метод решения эволюционных задач с использованием функций Лагерра // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 413–422.
2. *Демидов Г. В., Мартынов В. Н., Михайленко Б. Г.* Метод решения эволюционных задач, использующий пошаговое преобразование Лагерра // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 191–196.
3. *Паасонен В. И.* Компактные разностные схемы. Ч. 1. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2006.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗУЧЕНИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

ON A METHOD FOR STUDYING QUALITATIVE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE FIRST INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

Денисова Т. Е.

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия;
tdenissova@mail.ru, denisovate@mgppu.ru

Проблеме изучения качественных свойств (осцилляция, почти периодичность, монотонный рост, убывание к нулю (с определенной скоростью) с ростом времени) решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, посвящены многочисленные исследования (см., например, библиографию в [1]).

Предлагаемый доклад посвящен развитию методов и результатов, изложенных в [2] и касающихся изучения свойств решения первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с переменными коэффициентами. Здесь обобщаются результаты [2] на случай коэффициентов, переменных не только по пространственным переменным, но и по времени.

Рассматриваемые задачи объединены методикой исследования: с помощью некоторого функционального пространства определяется пространство функций одной переменной, содержащее функции, обладающие некоторым качественным свойством (осцилляция, монотонный рост, стремление к нулю с ростом времени). Затем на основе соответствующих пространств Соболева строятся пространства функций многих переменных, после этого доказываются соответствующие теоремы о следах для данных типов пространств. Такой подход позволяет изучить поведение решения в каждой точке пространственной области.

Известно, что решение первой начально-краевой задачи для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной (по времени), не зависит непрерывным образом от границы пространственной области. Рассматриваемый метод дает возможность исследовать свойства решения в пространственной области, определяемой лишь требованиями соответствующих теорем вложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998. (англ. перевод: Demidenko G. V., Uspenskii S. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. New York; Basel: Marcel Dekker, Inc., 2003.)
2. *Денисова Т. Е.* Асимптотическое поведение решения первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с точки зрения осцилляции // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 196–206.

ПРОСТЕЙШИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

THE SIMPLEST EXACT SOLUTIONS OF THE SHALLOW-WATER EQUATIONS

Доброхотов С. Ю.[1], **Медведев С. Б.**[2], **Назаренко С. В.**[3], **Чиркунов Ю. А.**[4], **Миненков Д. С.**[5]

[1] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Московский физико-технический институт, Москва, Россия;* dobr@ipmnet.ru
[2] *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* medvedev@ict.nsc.ru
[3] *University of Warwick, Coventry, United Kingdom;* s.v.nazarenko@warwick.ac.uk
[4] *Новосибирский государственный технический университет, Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;* chr101@mail.ru
[5] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия;* minenkov.ds@gmail.com

Установлена эквивалентность систем уравнений одномерных моделей мелкой воды, описывающих распространение поверхностных волн над ровным и наклонным дном. Для каждой из этих систем получены формулы общего вида их невырожденных решений, которые выражаются через решения уравнения Дарбу. Найденные инвариантные решения уравнения Дарбу являются простейшими представителями существенно различных (не связанных обратимыми точечными преобразованиями) точных решений этого уравнения. В силу полученных инфинитезимальных формул производства ("размножения") решений полученные решения порождают счетное множество точных решений, а линейная оболочка этого множества образует бесконечномерное векторное пространство точных решений уравнения Дарбу. Векторное пространство найденных точных решений уравнения Дарбу в силу формул общего вида невырожденных решений систем уравнений мелкой воды, описывающих распространение поверхностных волн над ровным и наклонным дном, порождает бесконечное множество точных решений этих систем. Полученные формулы производства ("размножения") решений этих систем порождают их дополнительные невырожденные точные решения. Кроме того, найдены все вырожденные решения этих систем, а также с помощью семейства точных решений специального вида для линейной системы волн на воде и полученных преобразований рассмотрено отражение волны от берега для случая нелинейных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-12075 офи-м, № 12-01-00648, № 12-01-31196), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ 6706.2012.1), гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством приглашенных исследователей (соглашение № 8504).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГИДРОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

ASYMPTOTIC FORMULAS FOR SOLVING PROBLEMS OF HYDROPHYSICAL MONITORING

Доброхотов С. Ю.[1], Симонов К. В.[2], Курако М. А.[3], Ложников Д. А.[1]

[1] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия;*
lozhnikov_d@list.ru

[2] *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;*
simonovkv@icm.krasn.ru

[3] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;*
mkurako@gmail.com

В работах С. Ю. Доброхотова и Д. А. Ложникова предложены новые эффективные асимптотические формулы решения линеаризованной системы уравнений мелкой воды над неровным дном. Решения локализованы в окрестности фронтов.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(C^2 u) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \eta = 0, \quad C(x) = \sqrt{gD(x)}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta^0\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где $\eta(x,t)$ — возвышение свободной поверхности жидкости, $D(x)$ — глубина бассейна, g — ускорение силы тяжести, $\eta^0(y)$ — заданная функция, убывающая на бесконечности быстрее, чем $|y|^{-\delta}$, $\delta > 1$.

При достаточно малых временах фронт представляется гладкой кривой, близкой к окружности, но с течением времени на фронте могут появляться точки поворота и точки самопересечения. На основе полученных формул для асимптотических решений задачи Коши (1), (2) с локализованными начальными данными волнового уравнения с переменной скоростью для линеаризованной системы уравнений мелкой воды разработаны элементы вычислительной методики восстановления формы очага цунами по мареограммам на ближайших DART станциях (NOAA).

В настоящее время на основе представленной выше модели и соответствующего алгоритмического обеспечения разрабатывается вычислительная технология решения прямых и обратных задач гидрофизического мониторинга (в том числе и на гибридных вычислительных системах) на примере распространения длинных гравитационных волн типа цунами от источников сейсмической природы до ближайших станций DART в акватории Тихого океана. Разрабатываемая вычислительная технология включает в себя несколько этапов: обнаружение сейсмической активности в изучаемых акваториях, вычисление положения ближайших к сейсмоактивной области DART станций, вычисление расстояния от найденных на предыдущем шаге станций до сейсмоактивной области, обработка мареограмм с найденных DART станций, решение обратной задачи восстановления формы очага. Размерность расчетного поля для акватории Тихого океана составляет 2581×2879 узлов. Данные по очаговым областям сильных цунамигенных землетрясений представлены на сайте Американской геологической службы. Характеристики и данные станций системы глобального гидрофизического мониторинга DART приведены на сайте Национального управления океанических и атмосферных исследований США.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION

Думанян В. Ж.

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения; duman@ysu.am

В докладе представлены результаты исследования задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкой границей ∂Q для общего линейного эллиптического уравнения второго порядка

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \mathrm{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \mathrm{div}F(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \quad (2)$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$, $f \in L_{2,loc}(Q)$, $F = (f_1, \ldots, f_n) \in (L_{2,loc}(Q))^n$. Предполагается, что симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in Q$, где γ — положительная постоянная, а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Получены точные (по порядку роста) ограничения на рост вблизи границы рассматриваемой ограниченной области Q младших коэффициентов уравнения (1), при которых решение из пространства $W^1_{2,loc}(Q)$ (если оно существует) обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности (т. е. принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\overline{Q})$), характеризующим поведение решения вблизи границы и описывающим, в каком смысле оно принимает свое граничное значение.

В терминах скалярного произведения в специальном гильбертовом пространстве получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$-мерно непрерывного решения рассматриваемой задачи Дирихле (1), (2) и установлено, что условия разрешимости исследуемой задачи имеют вид, аналогичный условиям разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W^1_2(Q)$). В частности, доказано, что если однородная задача (с равными нулю граничной функцией и правой частью) не имеет ненулевых решений из пространства $W^1_2(Q)$, то для любой граничной функции $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и любой правой части из соответствующего функционального пространства существует решение неоднородной задачи. Это решение принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\overline{Q})$ $(n-1)$-мерно непрерывных функций и для него справедлива соответствующая оценка.

При естественных дополнительных ограничениях на коэффициенты при младших членах уравнения (1), для правых частей из $W^{-1}_2(Q)$ полученные необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2) в $W^1_{2,loc}(Q)$-постановке записываются в более простом виде — в терминах исходной задачи. При этом доказано, что если граничная функция u_0 допускает принадлежащее $W^1_2(Q)$ продолжение в область Q, то решение из $C_{n-1}(\overline{Q})$ является решением из $W^1_2(Q)$, и в этом случае условия разрешимости задачи (1), (2) в $W^1_{2,loc}(Q)$-постановке являются также условиями разрешимости той же задачи в $W^1_2(Q)$-постановке.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

ON FREDHOLMNESS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION

Егоров И. Е.[1], **Захарова Т. И.**[2]

[1] *Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия;* ivanegorov51@mail.ru

[2] *Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия*

Наиболее полная библиография, посвященная обобщенной и фредгольмовой разрешимости различных краевых задач для уравнений смешанного типа, имеется в [1–3].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S, $S_T = S \times (0,T)$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$.

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = k(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)u_{x_i}) + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t) \qquad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами в $\overline{Q}$. Предположим, что выполнены условия

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \nu > 0.$$

Введем множества

$$P_0^+ = \{(x,0) : x \in \Omega,\ k(x,0) > 0\},$$
$$P_T^- = \{(x,T) : x \in \Omega,\ k(x,T) < 0\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \quad u|_{\overline{P}_T^-} = 0. \qquad (2)$$

Отметим, что краевая задача (1), (2) впервые поставлена и исследована А. Н. Тереховым [4]. При определенных условиях на коэффициенты уравнения (1) доказывается существование и единственность обобщенных решений краевой задачи (1), (2). С помощью теоремы компактности вложения некоторого весового пространства Соболева в негативное пространство устанавливается фредгольмовость краевой задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Е. И.* Уравнение смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
3. *Егоров И. Е.* О фредгольмовой разрешимости одной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 55–64.
4. *Терехов А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 128–136.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ А. Н. ТЕРЕХОВА

ERROR ESTIMATION OF A STATIONARY GALERKIN METHOD FOR A. N. TEREKHOV'S PROBLEM

Егоров И. Е.[1], **Тихонова И. М.**[2]

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; [1]ivanegorov51@mail.ru, [2]irinamikh3007@mail.ru

В данной работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка в постановке А. Н. Терехова. В ранее вышедшей работе [1] с помощью стационарного метода Галеркина доказана однозначная регулярная разрешимость краевой задачи при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения. При этом установлены априорные оценки для уравнения смешанного типа, которые справедливы для приближенных решений. На основе работы [1] получена оценка скорости сходимости стационарного метода Галеркина в норме пространства Соболева W_2^1 через собственные значения оператора Лапласа по пространственным переменным и по времени. При выводе оценки скорости сходимости метода Галеркина существенно используется разложение решения исходной краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа и известное равенство Парсеваля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И. Е., Тихонова И. М.* О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 41–47.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ВАРИАЦИОННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ИХ ИДЕНТИФИКАЦИИ

ON EQUIVALENCE OF ANALYTICAL AND VARIATIONAL DISCRETIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS UNDER THEIR IDENTIFICATION

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
egorshin@math.nsc.ru

Задачи дискретизации дифференциальных уравнений (ДУ) возникают, в частности, при оценке их коэффициентов (идентификации) по реализациям $\mathbf{y}$ их решений $y(t)$ на заданной h-сетке I_h в интервале наблюдения $I_T = [0, T]$ [1]. Идентификация ДУ осуществляется с помощью оценки коэффициентов α соответствующего разностного уравнения (РУ) [2]. В реальных задачах идентификации h-реализации $\mathbf{y}$ искажены ошибками наблюдений. Наиболее адекватны таким постановкам — вариационные задачи идентификации [3].

Для аппроксимации функции $y(t)$ на h-сетке I_h мы используем функционал метода наименьших квадратов в E: $J_d = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|_E^2 = \sum_0^L |y_i - \widehat{y}_i|^2$, а в качестве условий его минимизации — линейное, однородное, с постоянными, возможно неизвестными коэффициентами РУ: $\sum_{i=0}^n \widehat{y}_{k+i}\alpha_i^* = 0$, $\alpha_n \neq 0$, $k = \overline{0, L-n}$. Пусть $\Phi = \exp(\mathcal{A}h)$ — $(n \times n)$-матрица системы $x_k = \Phi x_{k-1}$, $y_k = b^* x_k$. Эта система есть h-дискретный аналог дифференциальной системы $\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t)$, $y(t) = b^* x(t)$, $t \in I_T$ на h-сетке в I_T. По теореме Гамильтона – Кэли $\sum_{i=0}^n \Phi^i \alpha_i^* = 0$.

Формула аналитической дискретизации для вектора коэффициентов $\alpha^* = |\overline{\alpha}^*, 1|$ может быть записана в виде $\overline{\alpha}^* = -b^* F^{-1}$, где $F = \left\{b^* \Phi^{i-n}\right\}_0^{n-1}$ — матрица наблюдаемости решений ДУ на h-сетке I_h. Вариационный способ дискретизации заключается в решении сформулированной выше вариационной задачи для точной (без ошибок) реализации $\mathbf{y}$ решения ДУ на h-сетке. Тогда в глобальном минимуме $J_d = 0$, а значение $\widehat{\alpha}$ в нем есть, при выясняемых в докладе условиях, единственное решение задачи дискретизации. В отличие от аналитической, вариационная дискретизация не требует знания коэффициентов ДУ.

Свойства корневых подпространств, инвариантных многочленов РУ, а также особенности ядра оператора РУ приводят, в частности, к следующим фактам.

Теорема. *Аналитическая дискретизация ДУ однозначна тогда и только тогда, когда однозначна вариационная дискретизация на некоторой его h-реализации $\mathbf{y}$. Тогда результаты этих двух способов дискретизации совпадают.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоршин А. О.* О дискретизации линейных дифференциальных уравнений // Вестн. ЮУрГУ. № 40 (299). Сер. Матем. модел. програм. 2012. Вып. 14. С. 59–72.
2. *Егоршин А. О.* Об одной вариационной задаче кусочно-линейной динамической аппроксимации // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 30–45.
3. *Егоршин А. О.* Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65, № 12. С. 29–48.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СИСТЕМЕ ПУЧОК-ПЛАЗМА

NUMERICAL SIMULATION OF THE TURBULENCE GROWTH IN THE BEAM-PLASMA SYSTEM

Ефимова А. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; efimova@ssd.sscc.ru

Одной из важнейших задач физики плазмы является нагрев высокотемпературной плазмы в термоядерных установках. В настоящей работе на основе численного моделирования исследуются процессы установления и нелинейной эволюции квазистационарной плазменной турбулентности, возбуждаемой мощным электронным пучком в установках УТС. Наибольший интерес представляют параметры пучка и плазмы, характерные для экспериментов по нагреву плазмы в открытой ловушке ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН). Установка ГОЛ-3 состоит из многопробочной термоядерной ловушки открытого типа с плотной плазмой, которая по своим параметрам является субтермоядерной, и генератора сильноточного релятивистского электронного пучка (РЭП), используемого для нагрева плазмы. Одним из важных достижений последних лет в физике открытых ловушек стало обнаружение подавления продольной электронной теплопроводности на торцы установки в процессе инжекции РЭП. На данном этапе работы создан алгоритм и программа, позволяющая моделировать эффекты теплопроводности в плазме. Используется приближение бесстолкновительной плазмы, которая описывается системой уравнений Власова – Максвелла. Для моделирования задачи применяется метод частиц-в-ячейках (PIC-метод).

Рассматривается следующая задача: в области, имеющей форму прямоугольника, находится полностью ионизованная плазма, состоящая из протонов и электронов. Дополнительно в область вводится пучок заряженных частиц — набор электронов, движущихся в одном направлении с достаточно большой относительно остальных частиц скоростью; предполагается, что пучок уже полностью вошёл в моделируемую область. Все частицы (как плазмы, так и пучка) распределены по области равномерно. Условия на границах области — периодические.

Была исследована эволюция плотности заряда электронного пучка с развитием плазменной турбулентности. В начальный момент времени заряд электронов пучка распределен по области равномерно. При взаимодействии с плазмой в результате резонансных колебаний образуются участки модуляции плотности. Как предполагается, именно за счет этого механизма происходит подавление продольной электронной теплопроводности плазмы.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

STUDYING SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH ORDER EQUATION

Ефимова П. Н.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; geya-efim2005@rambler.ru

Пусть Ω_x — интервал $(0,1)$ оси Ox, Ω_y — интервал $(0,1)$ оси Oy и Q — прямоугольный параллелепипед $\Omega_x \times \Omega_y \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$.

В работе в области Q исследуется разрешимость нелокальных краевых задач для линейных уравнений соболевского типа, моделирующих уравнение Кадомцева – Петвиашвили:

$$u_{xt} + u_{xxxx} - u_{yy} + c(x,y,t)u = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{1}$$

с однородными краевыми условиями

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad u_x(0,y,t) = u_x(1,y,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \tag{3}$$

а также с нелокальными начальными условиями

$$u(x,y,0) = \alpha(x,y)u(x,y,T), \tag{4}$$

где $c(x,y,t)$, $f(x,y,t)$, $\alpha(x,y)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}_x$, $y \in \overline{\Omega}_y$, $t \in [0,T]$.

Методом априорных оценок доказывается существование решения краевой задачи (1)–(4) в зависимости от заданных функций.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

CHARACTERISTIC LIE RINGS OF HYPERBOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

Жибер А. В.[1], **Кострigина О. С.**[2]

[1] *Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия;* zhiber@mail.ru

[2] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия;* kostrigina@mail.ru

В работе рассматриваются кольца Ли характеристических векторных полей для уравнений в частных производных (см. [1–3]). Понятие характеристического векторного поля для гиперболических уравнений впервые ввел в рассмотрение Э. Гурса в известной работе [4]. Важной вехой в формировании этого подхода послужила работа [5]. В докладе обсуждаются возможные приложения этого понятия в задачах классификации интегрируемых уравнений гиперболического типа с большим чем три числом характеристических направлений, а также к уравнениям эволюционного типа и к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве примеров рассмотрены известные в математической физике модели, такие как система уравнений генерации второй гармоники, уравнение Кортевега – де Фриза, уравнение Бюргерса, обыкновенные дифференциальные уравнения Пенлеве. Например, характеристические кольца Ли уравнения Пенлеве I

$$u_{yy} = 6u^2 + y$$

определяются через гиперболические системы

$$p_{xy} = q_x, \quad q_{xy} = 6p_x^2 + y$$

либо

$$u_{xy} = v_x, \quad v_{xy} = 12uu_x.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-97005 р-поволжье-а, № 13-01-00070 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики // Уфимск. мат. журн. 2012. Т. 4, № 3. С. 17–85.
2. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
3. *Гюрсер М., Жибер А. В., Хабибуллин И. Т.* Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений // Уфимск. мат. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 53–62.
4. *Goursat É.* Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second order // Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. Série 2. 1899. T. 1. N 1, P. 31–78.
5. *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана. Уфа, 1981. 20 с. (Препринт / БФ АН СССР).

РАВНОМЕРНАЯ ПРИТЯГИВАЕМОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

UNIFORM ATTRACTION OF A PROGRAM MANIFOLD OF IMPLICIT DIFFERENTIAL SYSTEMS

Жуматов С. С.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; sailau.math@mail.ru

Целью данной работы является установление некоторых качественных свойств программного многообразия неявных дифференциальных систем с помощью прямого метода Ляпунова.

Рассмотрим неявную дифференциальную систему [1]:

$$f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^k$, $t \in I = (\alpha, \beta)$.

Под решением системы (1) будем понимать непрерывную функцию времени t, существующую на временном интервале $T \subseteq I$, которая всюду в $T \backslash S$ удовлетворяет уравнению (1), где S — не более чем счётное множество. Программное многообразие $\Omega(t)$ задается следующим образом: $\Omega(t) \equiv \omega(t, x) = 0$, $\omega \in \mathbb{R}^s$ $(s \leq n)$. Обозначим через Φ множество, образованное при $t \in [t_0, \beta)$ значениями $x(t, t_0, x_0)$ всех решений $x(t)$, существующих на $[t_0, \beta)$, $t_0 \in \bar{T}$, где $\bar{T}$ — связное множество всевозможных начальных моментов, а через Ψ — многозначную функцию, которая обладает свойством $\Phi(t_0, t) \subset \Psi(t_0, t)$, $t_0 \leq t$. Пусть $x_u(t)$ — известное решение системы (1), $\omega(t, x_u(t)) = 0$.

Введём некоторые векторные функции q, p, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |q(t, \omega) - q(t, 0)| \leq \varepsilon\}, \quad q(t, \omega) \in \mathbb{R}^q, \\ \bar{P}(t, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |p(t, \omega) - p(t, 0)| \leq \varepsilon\}, \quad p(t, \omega) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение. Программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) называется равномерно притягивающим относительно заданных функций q, p, если для некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\tau(\varepsilon) > 0$ такое, что $t_0 + \tau \in T$, и имеет место соотношение $x(t, t_0, x_0) \in \bar{A}_\varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \tau$ и $t_0 \in I$. Здесь $\bar{A}_\varepsilon = \bar{P}(t, \varepsilon) \cap \bar{\Psi}(t)$.

Теорема. *Пусть заданы функции q, p, удовлетворяющие условию* (2)*, и существуют непрерывная функция V, которая является локально липшицевой по x, и решение $x_u(t) \in D(t_0, t, \Phi)$ такие, что:*

$$\begin{aligned} &1) \quad \theta(\|a(t, \omega)\|) \leq V(t, q(t, \omega)) \leq \xi(\|a(t, \omega)\|); \\ &2) \quad D^+V(t, q(t, \omega)) \leq -\zeta(\|a(t, \omega)\|). \end{aligned}$$

Тогда $\forall\, t_0 \in I$ программное многообразие неявной дифференциальной системы (1) *— равномерно притягивающее относительно функций q, p.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bajic V. B.* Non-linear function and stability of motions implicit systems // Int. J. Control. 1990. V. 52, N 5. P. 1167–1187.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФЕ

STOCHASTIC SOBOLEV TYPE EQUATIONS ON A GRAPH

Загребина С. А.[1], **Солдатова Е. А.**[2]

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]zagrebina_sophiya@mail.ru, [2]soldatova.katerina@gmail.com

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ нас будут интересовать задачи с краевыми условиями

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j,\ E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m,\ E_n \in E^\omega(V_i); \end{gathered} \tag{1}$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) \quad - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0; \tag{2}$$

для уравнений Осколкова, возмущенных белым шумом,

$$\lambda u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha u_{jxx} + f, \tag{3}$$

моделирующих в линейном приближении транспортировку вязкоупругой несжимаемой жидкости (высокопарафиновых сортов нефти) по трубопроводу с учетом случайного внешнего воздействия. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (1) требует, чтобы все решения были непрерывными на вершинах графа, а (2) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю — аналог условия Кирхгоффа. Необходимо отметить, что задача (1)–(3) впервые рассматривается, как *стохастическое уравнение соболевского типа*

$$Ldu = (Mu + f)dt + Ndw.$$

Оговоримся сразу, что в нашем исследовании мы будем опираться на концепцию измерительного устройства Шестакова – Свиридюка [1, 2], в которой под "белым шумом" понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shestakov A. L., Sviridyuk G. A.* On the measurement of the "white noise" // Bulletin of South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2012. N 27 (286), issue 13. P. 99–108.
2. *Загребина С. А., Солдатова Е. А.* Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2013. Т. 6, № 1. С. 20–34.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА НА ГРАФЕ

NUMERICAL SOLUTION OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN THE BOUSSINESQ–LÖVE MODEL ON A GRAPH

Замышляева А. А.[1], **Цыпленкова О. Н.**[2]

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]alzama@mail.ru, [2]tsyplenkova_olga@mail.ru

Пусть $G = G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda x_{jtt} - x_{jxxtt} = \alpha(x_{jxxt} - \lambda' x_{jt}) + \beta(x_{jxx} - \lambda'' x_j) + y_j + Cu_j, \quad x \in (0, l_j),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Для уравнений (1) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0,t) \quad - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x_s(0,t) = x_j(0,t) = x_k(l_k,t) = x_m(l_m,t) \\ \text{для всех } E_s, E_j \in E^\alpha(V_i), E_k, E_m \in E^\omega(V_i), \end{gathered} \tag{3}$$

здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i.

Данную задачу в подходящих гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}$ удается редуцировать к операторно-дифференциальному уравнению соболевского типа [1]

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0 x + y + Cu, \tag{4}$$

где операторы A, B_1, $B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, функции $u : [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0, \tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}$.

Рассмотрим уравнение (4) с начально-конечным условием

$$\begin{aligned} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0, \quad P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0, \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^\tau) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_0^\tau) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

здесь P_{in}, P_{fin} — некоторые спектральные проекторы в пространстве $\mathfrak{X}$.

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x}, \hat{u})$, где $\hat{x}$ — решение задачи (4), (5), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ — управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}} J(x, u).$$

Нашей целью является численное решение задачи (1)–(3), (5). Для этого разработан алгоритм нахождения оптимального управления решениями задачи (2), (3), (5) для уравнения (1), основываясь на методе фазового пространства и модифицированном методе Галеркина. Разработанный алгоритм реализован в виде программы "Оптимальное управление в модели Буссинеска – Лява на графе".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свиридюк Г. А., Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 252–260.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ON A PROBLEM FOR THIRD ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

Зикиров О. С.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; zikirov@yandex.ru

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$Mu \equiv \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + Lu = g(x, y), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, L — линейный дифференциальный оператор вида

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u.$$

Для уравнения (1) изучается следующая задача Дирихле: найти в области D решение уравнения (1) из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(l, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u(x, h) = \psi_2(x), \ 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

здесь $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ — заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(h) = \psi_2(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \quad \varphi_2(h) = \psi_2(l).$$

Уравнение (1) представляет собой обобщенное псевдопараболическое уравнение Аллера, которое исследовалось, например, в работах [1, 2].

Отметим, что задача Дирихле, изучаемая в основном для уравнений второго порядка, является одной из основных задач математической физики. В работе [3] она исследована и для уравнения высокого порядка.

В работе рассмотрен вопрос о корректности задачи Дирихле для линейных гиперболических уравнений третьего порядка. С помощью метода Римана доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленной задачи (1)–(3). Выявлены эффекты влияния коэффициентов при младших производных на корректность задачи Дирихле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
2. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2001.
3. *Уткина Е. А.* Теорема единственности решения одной задачи Дирихле // Изв. вузов. Матем. 2011. № 5. С. 73–76.

НАХОЖДЕНИЕ БИФУРКАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА

FINDING BIFURCATIONS FOR SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS BY THE EXTENDED FUNCTIONAL METHOD

Иванов А. А.

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия; iaa1987@mail.ru

Обосновывается принципиально новый подход численного нахождения бифуркаций типа точек поворота (x^*, λ^*) для решений нелинейных уравнений вида

$$F(x, \lambda) := T(x) - \lambda\, G(x) = 0,$$

где G, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемые отображения, $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр семейства.

В современной практике наиболее используемым подходом при численном нахождении бифуркаций является метод продолжения по параметру (continuation method). Основная сложность в применении этого подхода заключается в том, что здесь необходимо предварительно найти начальную точку x_0 на ветви решений или достаточно близкую к искомой бифуркационной точке. Данный метод из-за применения двойной итерации является медленно сходящимся и характеризуется недостаточной относительной точностью.

В работе [1] предложен так называемый *метод продолженного функционала*, позволяющий находить бифуркационные точки (x^*, λ^*) посредством минимаксных вариационных принципов вида

$$\lambda^* = \sup_{x\in S} \inf_{\xi\in\overline{\Phi}} \left\{ \frac{\langle T(x), \xi\rangle}{\langle G(x), \xi\rangle} \right\}, \qquad \lambda_* = \inf_{x\in S} \sup_{\xi\in\overline{\Phi}} \left\{ \frac{\langle T(x), \xi\rangle}{\langle G(x), \xi\rangle} \right\}, \tag{1}$$

где S, Φ — некоторые подобласти в $\mathbb{R}^n$.

В [1] был поставлен вопрос: *Возможно ли численно находить бифуркационные точки типа поворота посредством вариационных задач* (1)*?*

В докладе мы покажем, что данный вопрос положительно разрешается, т. е. бифуркационные точки поворота можно находить численно посредством (1) методом наискорейшего подъема для кусочно-гладких отображений.

В качестве апробации данного подхода будет рассмотрено нахождение бифуркаций типа точек поворота для положительных решений разностных аппроксимаций нелинейных краевых задач с выпукло-вогнутыми нелинейностями вида

$$-\Delta u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{\gamma-1}u, \quad x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $0 < q < 1 < \gamma$.

Данный доклад подготовлен по результатам работы, проведенной совместно с Я. Ш. Ильясовым [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильясов Я. Ш.* Исчисление бифуркаций методом продолженного функционала // Функцион. анализ и его прил. 2007. Т. 41, № 1. С. 23–38.
2. *Иванов А. А., Ильясов Я. Ш.* Нахождение бифуркаций для решений нелинейных уравнений методами квадратичного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 3. С. 350–364.

ЗАДАЧА О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ СФЕРЕ

PROBLEM OF DISCONTINUITY DISINTEGRATION IN THE SHALLOW WATER MODEL ON A ROTATING GRAVITATING SPHERE

Иванова А. В.[1], **Остапенко В. В.**[2], **Черевко А. А.**[3], **Чупахин А. П.**[4]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]ivanovaannav@gmail.com, [2]ostapenko-vv@ngs.ru, [3]cherevko@hydro.nsc.ru, [4]chupakhin@hydro.nsc.ru

Модели мелкой воды, широко применяемые в физике атмосферы, представляют собой гиперболические системы дифференциальных уравнений, заданные на компактном многообразии — поверхности вращающейся притягивающей сферы. Эти уравнения выведены в сферической системе координат из интегральных законов сохранения массы и полного импульса с учетом влияния силы Кориолиса и центробежной силы [1, 2]. Получаемая таким образом базисная система дифференциальных законов сохранения, для которой закон сохранения полной энергии является выпуклым расширением, используется для численного моделирования двумерных (зависящих от широты и долготы) нестационарных течений с прерывными волнами. Предложена разностная схема, аппроксимирующая дивергентную форму записи уравнений мелкой воды на вращающейся сфере.

Проведены численные расчеты задачи о распаде разрыва. Эта задача описывает процесс формирования, распространения и трансформации волновых структур на сфере, возникающих в результате разрушения “водяных хребтов” различных форм на фоне равновесного состояния, при этом на границах расчетной области (граничных параллелях) ставятся условия непротекания, соответствующие твердым стенкам. Выделены общие тенденции при развитии таких волновых структур на сфере. Распространение возмущений происходит с периодическим повторением основных этапов. На первом этапе волны распространяются во всех направлениях и в результате этого разнонаправленного распространения и отражения от полюсов в части сферы диаметрально-противоположной от начального расположения “хребта” наблюдается образование нового “хребта”, по форме подобного исходному, но меньшего по размерам и с размытыми границами. Второй этап завершается образованием “хребта”, расположенного там же, где и исходный, но еще меньшего по масштабам и с еще более размытыми границами.

Поскольку при волновых движениях с образованием разрывов происходит потеря полной энергии, то с течением времени возмущения затухают и движение асимптотически приходит к равновесному состоянию (твердотельное вращение).

Показаны влияние центробежного ускорения и сферичности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00026 а), Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 44), Программы ОЭММПУ (проект № 2.13.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова А. В., Остапенко В. В., Чупахин А. П.* Численное моделирование течений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 30–45.
2. *Остапенко В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П.* О разрывных решениях уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 2. С. 33–51.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

INVERSE PROBLEM FOR A LINEARIZED QUASI-STATIONARY PHASE FIELD MODEL WITH DEGENERACY

Иванова Н. Д.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
natalia.d.ivanova@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T > 0$, β, $\delta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\beta + \Delta)(v(x,0) - v_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$(1-\delta)v + \delta\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = (1-\delta)w + \delta\frac{\partial w}{\partial n}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

для системы уравнений

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + b_1(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{3}$$

$$0 = v + (\beta + \Delta)w + b_2(x,t)u(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{4}$$

с условиями переопределения на подпространстве вырождения

$$\int\limits_\Omega K(y)w(y,t)dy = \psi(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{5}$$

Данная система уравнений с точностью до линейной замены функций $v(x,t)$, $w(x,t)$ совпадает с линеаризацией квазистационарной системы уравнений фазового поля [1]. Искомыми функциями в обратной задаче (1)–(5) являются $v(x,t)$, $w(x,t)$, $u(t)$.

Обозначим $Aw = \Delta w$, $D_A = H^2_\delta(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема. *Пусть $-\beta \in \sigma(A)$, $K \in L_2(\Omega)$, $\langle K, \varphi_k\rangle = 0$ при $\lambda_k = -\beta$, $b_i \in C^1([0,T]; L_2(\Omega))$, $i = 1, 2$, $\langle b_1(\cdot,t), \varphi_k\rangle = 0$ при $\lambda_k \neq -\beta$, $\langle K, b_2(\cdot,t)\rangle \neq 0$ при всех $t \in [0,T]$, $\psi \in C^1[0,T]$, $v_0 \in H^2_\delta(\Omega)$. Тогда решение задачи (1)–(5) существует, единственно и удовлетворяет условиям*

$$\|v\|_{C^1([0,T];L_2(\Omega))} \le c\left(\|(\beta+\Delta)v_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Psi\|_{C^1[0,T]}\right),$$

$$\|w\|_{C^1([0,T];L_2(\Omega))} \le c\left(\|(\beta+\Delta)v_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Psi\|_{C^1[0,T]}\right),$$

$$\|u\|_{C^1([0,T];L_2(\Omega))} \le c\|\Psi\|_{C^1[0,T]},$$

где $c > 0$ не зависит от v_0, Ψ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В МНОГОМЕРНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN A MULTIDIMENSIONAL COMPLEX DOMAIN

Илькив В. С.[1], **Страп Н. И.**[2]

Национальный университет "Львовская политехника", Львов, Украина;
[1]ilkivv@i.ua, [2]n.strap@mail.ru

Введем шкалы пространств $\{H_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ и $\{H_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, где $\mathcal{D}^p=[0,T]\times\mathcal{S}^p$, $\mathcal{S}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $T>0$, $p\geq 2$. Здесь $H_q(\mathcal{S}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, — гильбертово пространство функций $\psi(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi_k z^k$ со скалярным произведением $(\psi,\varphi)_{H_q(\mathcal{S}^p)}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{2q}\psi_k\overline{\varphi}_k$, где $z^k{=}z_1^{k_1}\dots z_p^{k_p}$, $\widetilde{k}{=}\sqrt{1+k_1^2+\ldots+k_p^2}$; $H_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахово пространство функций $u=u(t,z)$ таких, что производные $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k^{(r)}(t)z^k$ для каждого $t\in[0,T]$, $r=0,1,\dots,n$, принадлежат пространствам $H_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ соответственно и непрерывны по t. Норму в $H_q^n(\mathcal{D}^p)$ определяет формула:

$$\|u\|^2_{H_q^n(\mathcal{D}^p)}=\sum_{r=0}^{n}\max_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\right\|^2_{H_{q-r}(\mathcal{S}^p)}.$$

В области $\mathcal{D}^p$ рассмотрена неоднородная задача с нелокальными условиями:

$$Lu=\sum_{s_0+|s|\leq n}a_{s_0,s}B^s\frac{\partial^{s_0}u}{\partial t^{s_0}}=f,$$

$$M_m u=\mu\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}-\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T}=0,$$

где $s=(s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|s|=s_1+\ldots+s_p$, $a_{s_0,s}\in\mathbb{C}$, $a_{n,0}=1$, $\mu\in\mathbb{C}$, $u=u(t,z)$ — искомая функция, а $f=f(t,z)$ — заданная функция. Оператор $B=(B_1,B_2,\dots,B_p)$ составлен из операторов обобщенного дифференцирования $B_j\equiv z_j\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, где $B^s=B_1^{s_1}B_2^{s_2}\dots B_p^{s_p}$, B_j^l — степени B_j: $B_j^0u\equiv u$, $B_j^lu=B_j(B_j^{l-1}u)$ $(j=1,\dots,p,\ l=1,\dots,n)$.

Задача является некорректной в смысле Адамара, а ее решение связано с проблемой малых знаменателей [1]. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникают при построении решения задачи. Оценки выполняются для почти всех векторов, составленных из коэффициентов $a_{s_0,s}$ и параметра μ. Считаем, что $a_{s_0,s}$ и μ принадлежат некоторым кругам комплексной плоскости. Установлены условия существования и единственности решения задачи в шкале пространств $H_q^n(\mathcal{D}^p)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пташник Б. И., Илькив В. С., Кмить И. Я., Полищук В. М.* Нелокальные краевые задачи для уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 2002 (на украинском).
2. *Илькив В. С., Страп Н. И., Волянская И. И.* Нелокальная краевая задача для уравнения с оператором дифференцирования $z\partial/\partial z$ в комплексной области // Прикладные проблемы механики и математики. 2012. № 10. С. 15–26 (на украинском).

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN EVEN ORDER EQUATION

Иргашев Б. Ю.

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан;
bahrom_irgashev@inbox.ru

Для уравнения

$$L[u] \equiv (-1)^n \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial y^{2m}} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,t), \tag{1}$$

где функция $f(x,y,t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, рассмотрим задачу.

Задача А. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее в области $\Omega = \{(x,y,t) : 0 < x,y < 1;\ 0 < t \le T\}$ краевым условиям

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(0,y,t) = 0,\ k = \overline{0,(n-1)}; \quad \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(1,y,t) = 0,\ k = \overline{0,(n-1)};$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}(x,0,t) = 0,\ k = \overline{0,(m-1)}; \quad \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}(x,1,t) = 0,\ k = \overline{0,(m-1)};$$

$$u(x,y,0) = 0.$$

Единственность решения задачи легко показать, применяя метод интегралов энергии. Фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид

$$U(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = U_n(x,t,\xi,\tau) U_m(y,t,\eta,\tau),$$

где (см. [1])

$$U_n(x,t,\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[2n]{t-\tau}}\, g_n\Big(\frac{x-\xi}{\sqrt[2n]{t-\tau}}\Big), & t > \tau, \\ 0, & t \le \tau, \end{cases} \qquad g_n(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \exp\big(-\lambda^{2n}\big) \cos \lambda s \, d\lambda.$$

Для решения поставленной задачи построим функцию Грина $G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$.

Теорема. *Функция Грина задачи А имеет вид*

$$G(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = G_n(x,t,\xi,\tau) G_m(y,t,\eta,\tau),$$

где $$G_n(x,t,\xi,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (U_n(x,t,2k+\xi,\tau) - U_n(x,t,2k-\xi,\tau));$$

$$G_m(x,t,\xi,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (U_m(y,t,2k+\eta,\tau) - U_n(y,t,2k-\eta,\tau)).$$

Решение поставленной задачи выписывается в явном виде

$$u(x,y,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G(x,y,t,\xi,\eta,\tau) f(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cattabriga L.* Una generalizationi del problema fundamentale di valori al contorno per eguationi paraboliche lincari // Annali di matematica pura ed applicata. 1958. T. 46. P. 215–247.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В РЕШЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

APPLICATION OF A CONVERSION OPERATOR FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SOLVING SPECTRAL PROBLEMS

Искакова У. А.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; ulzada@list.ru

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y^{(4)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y_m^{(k-1)} = \delta_{km}, \quad k, m = 1, \ldots, 4, \tag{2}$$

где функции $p_k(x) \in C^k([0, b])$, λ — параметр и δ_{km} — символ Кронекера.

Теорема. *Решение $y(x, \lambda)$ задачи* (1), (2) *имеет интегральное представление*

$$y(x, \lambda) = \int_0^x \psi(\xi, \lambda) B(x, \xi) d\xi$$

$$+ \int_0^x d\xi \int_\xi^x (\psi(\tau - \xi + i\xi, \lambda) + \psi(\tau - \xi - i\xi, \lambda)) A(x, \tau, \xi) d\tau, \tag{3}$$

где функции $A(x, \tau, \xi)$, $B(x, \xi)$ определяются интегральными уравнениями, функция $\psi(x, \lambda)$ является решением задачи (1), (2) *при нулевых коэффициентах уравнения* (1).

В работе изучаются спектральные вопросы задачи (1), (2) через представление (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фаге М. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1987.
2. *Кангужин Б. Е., Садыбеков М. А.* Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент: Гылым, 1996.
3. *Искакова У. А., Кангужин Б. Е.* Операторы преобразования для дифференциальных уравнений четвертого порядка с неаналитическими коэффициентами // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1998. № 3. С. 25–31.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ В ПРЕДЕЛЬНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

ON SOME SPECTRAL PROPERTIES OF A CLASS OF ELLIPTIC OPERATORS GIVEN IN LIMIT-TUBE DOMAINS

Исхоков С. А.[1,2], **Гадоев М. Г.**[2], **Петрова М. Н.**[2]

[1] *Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан;*
[2] *Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия;*
sulaimon@mail.ru, gadoev@rambler.ru, sun1u@mail.ru

Доклад посвящен изучению некоторых спектральных свойств одного класса эллиптических операторов, заданных в предельно-цилиндрических областях.

Исследуемые операторы задаются посредством некоэрцитивных билинейных форм, в силу чего накладываются минимальные условия гладкости на коэффициенты.

Основными результатами работы являются то, что найдены условия замкнутости и непрерывной обратимости, а также позитивности исследуемых операторов. Кроме того, авторам удалось получить уточненную оценку резольвенты для исследуемого класса операторов и с ее помощью изучить вопросы суммируемости в смысле Абеля – Лидского системы корневых вектор-функций и другие спектральные свойства этого класса.

Отметим, что ранее некоторые спектральные свойства других классов дифференциальных операторов, заданных в предельно-цилиндрических областях, изучались в работе [1], а в случае ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса, аналогичные вопросы рассматривались в [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойматов К. Х.* О собственных значениях эллиптических дифференциальных операторов в предельно-цилиндрических областях // ДАН. 1989. Т. 308, № 1. С. 11–14.
2. *Бойматов К. Х.* Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами // ДАН. 1994. Т. 339, № 1. С. 5–10.
3. *Бойматов К. Х., Исхоков С. А.* О разрешимости и гладкости решения вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.

СОВМЕЩЕННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЦУНАМИ
COMBINED INVERSE PROBLEM OF TSUNAMI

Кабанихин С. И.[1,2], **Криворотько О. И.**[1,2], **Маринин И. В.**[1]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
kabanikhin@sscc.ru, krivorotko.olya@mail.ru, igor.marinin@inbox.ru

Рассмотрены три обратные задачи об определении источника цунами $q(x, y)$ в случае, когда о решении прямой задачи

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(c^2(x,y)\operatorname{grad}\eta), \quad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T); \\ \eta(x,y,0) = q(x,y), \quad \eta_t(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \Omega; \\ (\eta_t - c(x,y)\eta_x)|_{x=0} = 0, \quad (\eta_t + c(x,y)\eta_x)|_{x=L_x} = 0; \\ (\eta_t - c(x,y)\eta_y)|_{y=0} = 0, \quad (\eta_t + c(x,y)\eta_y)|_{y=L_y} = 0; \end{cases}$$
$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (0, L_x), \ y \in (0, L_y)\},$$

известны три вида дополнительной информации. Здесь $c(x, y)$ — скорость распространения волны цунами, $q(x, y)$ — функция, описывающая начальное возмущение свободной поверхности.

Обратная задача 1: определить функцию $q(x, y)$ по дополнительной информации: $\eta(x_m, y_m, t) = f_m(t)$, $(x_m, y_m) \in \Omega$, $m = 1, 2, \ldots, M$, $M \in \mathbb{N}$.

Обратная задача 2: определить $q(x, y)$ по информации: $\eta(x, y, T) = f(x, y)$.

Обратная задача 3: в случае $q(x, y) = h(y)\delta(x)$ требуется определить $h(y)$ по дополнительной информации об амплитуде переднего фронта волны в некоторый фиксированный момент времени $t = T$.

В докладе будут изложены алгоритмы решения обратных задач 1, 2 и 3, а также алгоритм решения совмещенной постановки обратных задач в случае, когда для восстановления источника цунами используется дополнительная информация всех трех указанных видов [1–3]. Рассмотрены результаты численных расчетов по алгоритму, основанному на минимизации целевого функционала. В качестве начального приближения выбрана форма источника, определяемого по сейсмическим данным [3–5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00773) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems: theory and applications. Berlin: de Gruyter, 2012.
2. *Bezhaev A. Yu., Lavrentiev M. M. (jr.), Marchuk An. G., Titov V. V.* Determination of tsunami sources using deep ocean wave records // Bull. Novosib. Comput. Cent., Ser. Math. Model. Geophys. 2006. V. 11. P. 53–63.
3. *Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N.* An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 2. P. 193–211.
4. *Кабанихин С. И., Криворотько О. И.* Сингулярное разложение в задаче об источнике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 101–107.
5. *Kabanikhin S. I., Krivorot'ko O. I.* A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Appl. Comput. Math. 2013. V. 12, N 1. P. 91–96.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DEGENERATION FOR THE NONLINEAR HEAT EQUATION IN SPHERICAL COORDINATES

Казаков А. Л.[1], **Кузнецов П. А.**[2]

[1] *Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия;* kazakov@icc.ru
[2] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;* pav_ku@mail.ru

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности [1] (фильтрации [2]), которое после проведения стандартной замены переменных может быть записано в виде

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2, \tag{1}$$

в котором $u = u(t, x, y, z)$, где t — время, x, y, z — пространственные переменные, α и σ — положительные константы. В уравнении (1) делается замена $t = \tau$, $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, после чего оно принимает вид

$$u_\tau = u\left[2\frac{u_\rho}{\rho} + \cos\theta\frac{u_\theta}{\rho^2\sin\theta} + u_{\rho\rho} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{\rho^2\sin^2\theta} + \frac{u_{\theta\theta}}{\rho^2}\right]$$
$$+\frac{1}{\sigma}\left[u_\rho^2 + \frac{u_\varphi^2}{\rho^2\sin^2\theta} + \frac{u_\theta^2}{\rho^2}\right]. \tag{2}$$

Для (2) рассматриваются краевые условия

$$u(\tau, \rho, \varphi, \theta)|_{\rho=R} = f(\tau, \varphi, \theta), \quad f(0, \varphi, \theta) = 0, \quad f_\tau(0, \varphi, \theta) > 0. \tag{3}$$

Такая задача возникает в связи с исследованием распространения тепла в окрестности замкнутой (сферической) поверхности, что отличает её от ранее рассмотренных близких задач [3–5]. Отметим, что частный случай задачи (2), (3) — задача с данными на круговой цилиндрической поверхности — уже рассматривалась А. Ф. Сидоровым [3].

Для задачи (2), (3) доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
2. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
3. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. *Баутин С. П.* Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003.
5. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* О существовании и единственности решения одной краевой задачи для параболического уравнения типа нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH DEGENERACY FOR THE NONLINEAR HEAT EQUATION

Казаков А. Л.[1], **Лемперт А. А.**[2]

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; [1]kazakov@icc.ru, [2]lempert@icc.ru

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности, описывающее распространение тепла в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(\mathrm{T}^\sigma \nabla \mathrm{T}).$$

Функция $T(t, x, y, z)$ — это температура, зависящая от времени t и трех пространственных переменных x, y, z; div и ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным; α и σ — положительные константы. Данное уравнение также описывает нестационарную фильтрацию газа в пористом грунте. Тогда T — это плотность газа, а параметр σ — показатель политропы (адиабаты) этого газа [1].

В англоязычной литературе для наименования такого уравнения также часто используется термин “the porous medium equation” [2]. Уравнение, вообще говоря, имеет параболический тип. Однако при равенстве нулю искомой функции происходит вырождение его типа, поскольку обращается в нуль множитель, стоящий перед старшими производными. Такая ситуация представляет наибольший интерес, поскольку, в частности, в окрестности линии вырождения возможно распространение тепловой волны (фронта фильтрации), имеющей конечную скорость движения [1].

Одной из естественных с точки зрения физики постановок краевых задач для рассмотренного уравнения является следующая:

$$T(t, x, y, z)\big|_\Gamma = f(t, x, y, z),$$

где Γ — достаточно гладкая поверхность, разделяющая пространство на две части. При этом $f(0, x, y, z) = 0$ на всей или части поверхности Γ [1, 3].

Для рассмотренного класса краевых задач при различного вида дополнительных предположениях доказаны новые теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
2. *Vazquez J. L.* The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Oxford University Press, 2007.
3. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* О существовании и единственности решения одной краевой задачи для параболического уравнения типа нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.

ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЕЛЬТРАМИ

TENSOR FIELDS ON THE PLANE AND BELTRAMI TYPE SYSTEMS

Казанцев С. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kazan@math.nsc.ru

Симметричное ковариантное тензорное поле $\mathbf{A}(z,\overline{z})$ ранга m, полученное из вещественного симметричного тензорного поля $\mathbf{a}(x,y)$ переходом к комплексным переменным $z=x+\mathrm{i}y$ и $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$, будем задавать псевдовектором $(A_0,\dots,A_m)$ с компонентами $A_k=A_{\underbrace{1\dots1}_{k}\underbrace{2\dots2}_{m-k}}$, $A_k=\overline{A}_{m-k}$, $k=0,\dots,m$, $\mathbf{A}=\sum_{k=0}^{m}A_k\mathbf{E}_k^{(m)}$, где введены единичные псевдовекторы (тензоры) $\mathbf{E}_0^{(m)}=\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{m+1}$, $\mathbf{E}_1^{(m)}=(0,1,0,\dots,0),\dots$, $\mathbf{E}_m^{(m)}=(0,\dots,0,1)$. Пусть $\mathbf{V}=\sum\limits_{k=0}^{m-1}V_k\mathbf{E}_k^{(m-1)}$. Тогда дифференциальные операторы дивергенции div и внутреннего дифференцирования d в комплексных координатах имеют вид

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=2m\sum_{k=0}^{m-1}\left(\partial A_k+\overline{\partial}A_{k+1}\right)\mathbf{E}_k^{(m-1)},\quad \mathrm{d}\mathbf{V}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\left(k\partial V_{k-1}+(m-k)\overline{\partial}V_k\right)\mathbf{E}_k^{(m)},$$

где $\partial=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\overline{\partial}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Таким образом, например, при нахождении соленоидального тензорного поля, $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\mathbf{0}$, мы приходим к системе уравнений типа Бельтрами

$$\overline{\partial}\mathbf{A}+U\partial\mathbf{A}=\mathbf{F}, \tag{1}$$

где U — нильпотентный оператор сдвига вправо (вниз)

$$U\begin{pmatrix}A_0\\A_1\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\A_0\\\vdots\\A_{m-1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}A_0\\A_1\\\vdots\\A_m\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}\overline{\partial}A_0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

При рассмотрении задачи о нахождении потенциала, $\mathrm{d}\mathbf{V}=\mathbf{A}$, мы получаем также уравнение типа (1), где оператор U уже есть взвешенный оператор сдвига

$$U\begin{pmatrix}V_0\\V_1\\\dots\\V_s\\\dots\\V_{m-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{m-1}V_0\\\dots\\\frac{s}{m-s}V_{s-1}\\\dots\\\frac{m-1}{1}V_{m-2}\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}=\begin{pmatrix}V_0\\V_1\\\dots\\V_s\\\dots\\V_{m-1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}A_0\\\frac{m}{m-1}A_1\\\dots\\\frac{m}{m-s}A_s\\\dots\\\frac{m}{1}A_{m-1}.\end{pmatrix}.$$

Неиспользованное уравнение $\partial V_{m-1}=A_m$ дает нам условие разрешимости этой задачи.

В докладе представлено, как решения рассмотренных задач в форме интегралов типа Коши и Помпейю используются в тензорной томографии при восстановлении соленоидальных и потенциальных тензорных полей на плоскости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00275, № 11-01-00147).

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЗРАСТАЮЩИХ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТЯХ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF A VISCOUS HEAT-CONDUCTIVE GAS IN TIME-INCREASING NONCYLINDRICAL DOMAINS

Калиев И. А.[1], **Шухардин А. А.**[2]

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;
[1]kalievia@mail.ru, [2]shukhardinaa@gmail.com

Пусть нецилиндрическая область $\Omega_T = \{(x,t)\,|\,0 < x < s(t),\ 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ — известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. Одномерное нестационарное движение газа в области Ω_T описывается системой уравнений [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = R\rho\theta, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \kappa\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - p\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x,t) \in \Omega_T. \tag{3}$$

Здесь $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $p(x,t)$ и $\theta(x,t)$ — плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа; μ, R, κ — положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются u, θ, ρ:

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta(x,t)|_{t=0} = \theta_0(x), \quad \rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in [0, s_0], \tag{4}$$

где $s_0 = s(0)$. На известных границах $x = 0$ и $x = s(t)$ задаются условия:

$$u(x,t)|_{x=0} = u_1(t), \quad u(x,t)|_{x=s(t)} = 0, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\rho(x,t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\theta(x,t)|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \theta(x,t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Задача Gas. Требуется найти функции $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $\theta(x,t)$, удовлетворяющие системе уравнений (1)–(3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4)–(7).

В работе доказываются теоремы существования и единственности глобального обобщенного и классического решений задачи Gas.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Kaliev I. A., Kazhikhov A. V.* Well-posedness of a gas-solid phase transition problem // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, N 3. P. 282–308.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОДНОГО ЭФФЕКТА В АТМОСФЕРЕ

ON SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF CLASSIC ELECTRODE EFFECT IN THE ATMOSPHERE

Калинин А. В.[1,2], **Григорьев Е. Е.**[1]

[1] *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;*
[2] *Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия;*
avk@mm.unn.ru

Нелинейная стационарная система дифференциальных уравнений теории классического электродного эффекта в пространственно одномерном случае была исследована в работе [1]. В дальнейшем эта модель была использована при моделировании электрических полей в приземных слоях атмосферы [2, 3].

В настоящей работе получены некоторые новые соотношения в рамках классической одномерной модели, позволяющей провести классификацию типов решений и их качественный анализ. Проведено исследование свойств решений соответствующей нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, возникающей в многомерных случаях. Для последней системы исследованы некоторые постановки задач, представляющие практический интерес и изучены вопросы корректности этих постановок, в частности, выделены ситуации, приводящие к некорректным задачам. В работе обсуждаются некоторые возможные регуляризирующие алгоритмы решения этих задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и гранта Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0048).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson J. J.* Conduction of electricity through gases. Cambridge: University Press, 1903.
2. *Hoppel W. A.* Theory of electrode effect // J. of Atmospheric and Terrestrial Phys. 1967. V. 29. P. 709–721.
3. *Куповых Г. В., Морозов В. Н., Шварц Я. М.* Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998.
4. *Калинин А. В., Григорьев Е. Е., Терентьев А. М.* О некоторых соотношениях теории классического электродного эффекта // VII Всероссийская конф. по атмосферному электричеству (Санкт-Петербург, 24–28 сентября): Сб. тр. СПб., 2012. С. 99–100.

О СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ

ON THE STRONG SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION IN THE RING

Кальменов Т. Ш.[1], **Искакова У. А.**[2]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; [1]kalmenov.t@mail.ru, [2]ulzada@list.ru

В области $\Omega = \{(x_1, x_2) : \mu_0^2 < x_1^2 + x_2^2 < \mu_1^2\}$ рассматривается задача Коши для уравнения

$$\Delta^2 u = f.$$

В работе в терминах наименьшего собственного значения самосопряженной задачи Коши для бигармонического уравнения с отклоняющимся аргументом установлен критерий сильной разрешимости рассматриваемой задачи.

Теорема. *Задача Коши при $f \in L_2(\Omega)$ сильно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(Pf, u_{0k})}{\lambda_{0k}} \right|^2 < \infty,$$

где $P^2 = I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.* Критерий сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2007. С. 1–14.

О РАЗРЕШИМОСТИ В КЛАССАХ С. Л. СОБОЛЕВА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НАХОЖДЕНИЯ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

ON SOLVABILITY IN THE SOBOLEV CLASSES OF INVERSE PROBLEMS OF THE LOWER COEFFICIENT DETERMINATION IN A PARABOLIC EQUATION

Камынин В. Л.[1], **Костин А. Б.**[2]

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия; [1]vlkamynin2008@yandex.ru, [2]abkostin@yandex.ru

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2, $Q = \Omega\times(0,T)$, а $\Gamma = \Omega\times\{0\}\cup\partial\Omega\times[0,T]$ — параболическая граница цилиндра Q. Рассматривается следующая обратная задача: найти пару функций $\{u(x,t), c(x)\}$, удовлетворяющих условиям

$$\rho(x,t)u_t - L_0u - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} - d(x,t)u = cu + g(x,t),\ (x,t)\in Q,\ \ u|_\Gamma = \Phi(x,t)|_\Gamma, \quad (1)$$

$$\int_0^T u(x,t)\omega(t)\,dt = \chi(x), \quad x\in\Omega, \quad (2)$$

Здесь функции $\rho(x,t)$, $b_i(x)$, $d(x,t)$, $\Phi(x,t)$, $\omega(t)$, $\chi(x)$ заданы и обладают соответствующей гладкостью; L_0 — заданный равномерно эллиптический оператор, который имеет вид:

$$\text{либо}\ \ L_0u = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad \text{либо}\ \ L_0u = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right).$$

В последнем случае при $n>1$ дополнительно предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ либо непрерывны в Ω, либо удовлетворяют условию типа Кордеса.

Решение ищется в классе $u(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)$, $c(x)\in L_p(\Omega)$, $c(x)\le 0$ в Ω, с некоторым фиксированным $p > n+1$.

Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи (1), (2). Приведены нетривиальные примеры обратных задач, для которых условия доказанных теорем заведомо выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камынин В. Л., Костин А. Б.* Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 28, № 3. С. 372–383.
2. *Камынин В. Л.* Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 3.

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
GENERALIZED FOURIER TRANSFORM

Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Казахстан; tokmagam@list.ru

Стандартное преобразование Фурье является унитарным преобразованием в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ и порождается оператором дифференцирования $\left(-i\frac{d}{dx}\right)$, поскольку система экспонент $\{\exp(i\lambda x),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ представляет систему "собственных" функций, соответствующую его непрерывному спектру. С преобразованием Фурье тесным образом связана билинейная, коммутативная, ассоциативная свертка без аннуляторов. Важным обстоятельством является то, что свертка позволяет по фундаментальному решению находить решения неоднородного дифференциального уравнения, коммутирующего с дифференцированием. Соответствующие построения допускают обобщения на случай произвольного оператора. Вместо оператора дифференцирования $\left(-i\frac{d}{dx}\right)$ в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(0,b)$ при $b<\infty$ оператор L, порождаемый дифференциальной операцией $\left(-i\frac{d}{dx}\right)$. Здесь вводятся понятия преобразования Фурье и свертки, порождаемой произвольным корректным сужением оператора дифференцирования в пространстве $L_2(0,b)$. В отличие от классической свертки вводимая свертка явным образом зависит от краевого условия, задающего область определения оператора L.

МЕТОД ДАРБУ И ПРОБЛЕМА ГУРСА

THE DARBOUX METHOD AND THE GOURSAT PROBLEM

Капцов О. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
profkap@gmail.com

В докладе рассматривается проблема Гурса — классификация гиперболических нелинейных уравнений, обладающих двумя нетривиальными инвариантами характеристик [1]. Описывается алгоритм нахождения инвариантов характеристик. Приводится пара уравнений Лэне, одно из которых обладает инвариантами второго и третьего порядков. Наличие такого уравнения показывает, что проблема Гурса остается открытой. Ранее о решении проблемы классификации Гурса было заявлено в работе [2]. Компьютерные расчеты демонстрируют, что инварианты характеристик второго уравнения Лэне, приведенные в его работе, указаны тоже неверно. Подробности можно найти в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goursat É.* Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second order // Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. Série 2. 1899. T. 1. N 1, P. 31–78; N 4, P. 439–463.
2. *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 63–106.
3. *Капцов О. В.* О проблеме классификации Гурса // Программирование. 2012. Т. 38, № 2. С. 68–71.

ШЕСТЬ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОДНОЙ ФОРМУЛОЙ

SIX FREE BOUNDARY FLOWS GENERATING BY ONE FORMULA

Карабут Е. А.[1], **Журавлева Е. Н.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]eakarabut@gmail.com, [2]zhuravleva_e@mail.ru

Рассматривается плоское нестационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие внешних сил и поверхностного натяжения. Жидкость в плоскости комплексной координаты $z = x + iy$ занимает заранее неизвестную область, меняющуюся со временем. Граница области является свободной. Движение носит чисто инерционный характер, т. е. вызывается полем скоростей, заданным в начальный момент времени. Задана также начальная форма области. Необходимо во все последующие моменты времени t найти форму области и скорость во всех точках жидкости.

Эта задача, в отличие от родственных течений Хеле – Шоу и плоских течений Стокса для вязкой жидкости, имеет мало точных решений. По существу, единственные точные решения — это течения с линейным полем скоростей (Дирихле, 1860).

Предложена новая техника, позволяющая строить точные решения в задаче о движении жидкости со свободной границей. Суть этой техники состоит в аналитическом продолжении решения, полученного из простых физических соображений, в комплексную область z. Например, если взять движение бесконечно тонкой полосы, движущейся вдоль оси x, то после аналитического продолжения получим комплексную скорость

$$U(z,t) = \left(\frac{\sqrt{1+zt}-1}{t}\right)^2.$$

Показано, что эта комплексная скорость описывает шесть совершенно различных течений со свободной границей. Все они принадлежат классу автомодельных течений, найденных в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karabut E. A.* Exact solutions of the problem on free-boundary unsteady flows // Comptes Rendus Mecanique. 2013 (to appear). [arXiv:1210.2197 [physics.flu-dyn]].

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, АППРОКСИМАНТЫ ПАДЕ И ПРИМЕР ТЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

CONFORMAL MAPPINGS, THE PADE APPROXIMANTS, AND AN EXAMPLE OF A FLOW WITH FREE BOUNDARY

Карабут Е. А.[1,2], **Кужугет А. А.**[1]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
eakarabut@gmail.com, agisight@gmail.com

Полуаналитические методы (или методы численного исследования степенных рядов) занимают промежуточное место между аналитическими и численными методами. Помимо высокой точности вычислений полуаналитические методы в некоторых случаях позволяют получить уникальную аналитическую информацию, которая не может быть получена по отдельности ни численными, ни аналитическими методами [1].

Полуаналитическими методами решается плоская нестационарная задача о движении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в точной нелинейной постановке. В виде степенного ряда по степеням времени ищется конформное отображение единичного круга, расположенного во вспомогательной плоскости μ, на область течения. Найдено 600 членов ряда в рациональных числах и 1100 членов ряда в вещественных числах с длиной мантиссы 1000 десятичных знаков. Найденные степенные ряды обрабатываются и суммируются с использованием аппроксимантов Паде, теста Домба – Сайкса, диаграмм Паде, алгоритмов ускорения сходимости.

Найдена замена переменных в степенных рядах, после применения которой образы точек, равномерно расположенных на единичной окружности в плоскости μ, оказываются также равномерно расположенными на свободной поверхности. Это позволяет строить форму свободной поверхности даже в случае ее сильной деформации. В расчетах кривизна свободной поверхности достигает 10^{40}. Исследованы особые точки решения. Осуществлено сравнение полуаналитических методов с численным решением операторных уравнений Дьяченко [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karabut E. A.* Semi-analytical investigation of unsteady free-boundary flows // International Series of Numerical Mathematics. V. 99. Basel etc.: Birkhauser Verlag, 1991. P. 215–224.
2. *Дьяченко А. И.* О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // ДАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 27–29.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

SOLVABILITY CONDITIONS OF THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POLYHARMONIC EQUATION IN THE UNIT BALL

Карачик В. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
karachik@susu.ru

Рассмотрим неоднородную задачу Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре

$$\Delta^k u(x) = f(x),\ x \in S; \qquad \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\Big|_{\partial S} = \varphi_i(s),\ s \in \partial S, \quad i = 1, \dots, k, \tag{1}$$

где $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂S. В работе [1] была рассмотрена более общая краевая задача, но для однородного уравнения, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Используя эти результаты, исследуем задачу (1).

Рассмотрим числа b_k^s, где $s = 1, \dots, k$ и $k \in \mathbb{N}$, которые являются строками следующего арифметического треугольника

$$B = \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & -1 & & \\ & & & 3 & -3 & 1 & \\ & & 15 & -15 & 6 & -1 & \\ & & 105 & -105 & 45 & -10 & 1 \\ & 945 & -945 & 420 & -105 & 15 & -1 \\ \cdots & & b_{k+1}^s = (2k-s)b_k^s - b_k^{s-1} & & & & \cdots \end{array}.$$

Теорема 1. *Если $f \in C^1(\bar{S})$ и $\varphi_j \in C^{k-j}(\partial S)$, $j = 1, \dots, k$, то необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Неймана* (1) *имеет вид*

$$\int\limits_{\partial S} (b_k^1 \varphi_1 + \dots + b_k^k \varphi_k)\, ds = \frac{1}{(2k-2)!!} \int\limits_S (|x|^2 - 1)^{k-1} f(x)\, dx, \tag{2}$$

где числа b_k^s являются элементами треугольника B.

Задача Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре была исследована в [2]. При $k = 2$ из (2) мы получаем условия ее разрешимости.

Теорема 2. *Решение задачи Неймана* (1) *имеет вид $u(x) = \int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t} + C$, где $v(x)$ — решение следующей задачи Дирихле*

$$\Delta^k v(x) = (\Lambda + 2k) f(x), \quad x \in S;$$

$$v_{|\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^j v}{\partial \nu^j}\Big|_{\partial S} = j\varphi_j(s) + \varphi_{j+1}(s), \quad s \in \partial S, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

а $\Lambda u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карачик В. В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 5. С. 51–58.
2. *Karachik V. V., Turmetov B. Kh., Bekaeva A.* Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball // Int. J. Pure Appl. Math. 2012. V. 81, N 3. P. 487–495.

СОКРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ СЧЁТА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

DECREASE OF A RUNNING TIME FOR SOLVING AN INVERSE PROBLEM BY THE OPTIMIZATION METHOD

Карчевский А. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
karchevs@math.nsc.ru

На практике достаточно часто обратные задачи решаются при помощи оптимизационного метода. Градиент функционала невязки ищется с помощью решения сопряжённой задачи. Вычислительная сложность данного подхода заключается в том, что вычисление градиента требует решений прямой и сопряжённой задач, причём сопряжённая задача может решаться только после того, как найдено решение прямой задачи. Таким образом, затрачивается определённое количество времени на одну итерацию минимизационного процесса. В докладе будет продемонстрировано преобразование постановки обратной задачи, которое позволяет искать решения прямой и сопряжённой задач параллельно, что, естественно, сократит время вычислений.

Суть предлагаемого подхода будет продемонстрирована на трёх различных постановках обратных задач: коэффициентной гиперболической обратной задаче, ретроспективной обратной задаче теплопроводности и задаче Коши для уравнения Лапласа, которая может быть сведена к обратной задаче по поиску неизвестного краевого условия. В докладе будет показано, что в первом и втором случаях может быть достигнут двукратный выигрыш по времени счёта для одной итерации минимизационного процесса, а следовательно, и для решения обратных задач в целом. В третьем случае показано, что вычисление градиента функционала невязки вообще не требует решения прямой и сопряжённой задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00773) и проекта, выполняемого совместно СО РАН и НАН Украины (проект № 12, 2013).

УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА — КОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

LEONTIEF TYPE EQUATIONS — A FINITE DIMENSIONAL ANALOGUE OF SOBOLEV TYPE EQUATIONS

Келлер А. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
alevtinak@inbox.ru

В докладе представлен обзор результатов как теоретических, так и прикладных исследований математических моделей, в основе которых лежит уравнение леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t) + Du(t),$$

где L, M, D — матрицы $n \times n$, $\det L = 0$. При моделировании экономической системы это уравнение представляет собой вырожденную динамическую балансовую модель, при решении задач теории динамических измерений — математическую модель измерительного устройства (в этом случае $f(t) = 0$).

В обоих случаях, изучив модели как начальные задачи для уравнений леонтьевского типа, используя при этом условие Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\lambda L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0,$$

построив алгоритм их численного решения, перешли затем и к рассмотрению задач оптимального управления для уравнений леонтьевского типа и разработке численного метода их решения [1]. Для задач оптимального, жесткого, стартового и стартового жесткого управления доказана сходимость по норме приближенных решений, проведены вычислительные эксперименты как на реальных, так и модельных примерах. В настоящее время разрабатывается численный метод решения задач смешанного управления для уравнений леонтьевского типа.

Отметим, что использовать полученные результаты для уравнений леонтьевского типа в решении задач восстановления динамически искаженных сигналов предложили А. Л. Шестаков и Г. А. Свиридюк [2], их модель позволяет решать задачи динамических измерений с учетом как инерционности и резонансов измерительного устройства, так и “белого шума”. Изучения последнего случая привело к исследованию ряда задач, связанных как со стохастическими уравнениями соболевского типа, так и стохастическими уравнениями леонтьевского типа.

Все результаты численного исследования моделей леонтьевского типа опираются на теоретические результаты, полученные для уравнений соболевского типа, и методы, развиваемые в челябинской математической школе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келлер А. В.* Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления для моделей леонтьевского типа // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 170–174.
2. *Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. № 16 (192). Сер. Матем. модел. програм. 2010. Вып. 5. С. 116–120.

ЗАДАЧИ ДАРБУ И ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

DARBOUX AND DIRICHLET PROBLEMS FOR THE TRICOMI EQUATION

Коврижкин В. В.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;
rudin09@rambler.ru

Пусть $Tu \equiv yu_{xx}+u_{yy}$ — формальный дифференциальный оператор, D — криволинейный треугольник в нижней полуплоскости с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(l,0)$, C, стороны которого AB и AC — отрезки прямых, а BC — дуга характеристики оператора T $(x+\frac{2}{3}|y|^{3/2}=l)$. Угол $\angle A$ таков, что треугольник D — выпуклый относительно характеристик T.

Задача Дарбу — это задача об отыскании решения $u \in W_2^1(D)$ уравнения $Tu=f$, $f \in L_2(D)$, такого, что $u|_{AB\cup AC}=0$.

Под задачей Дирихле будем понимать задачу об отыскании решения $u \in W_2^1(D)$ уравнения $Tu=f$, $f \in L_2(D)$, такого, что $u|_{\partial D}=0$.

Эти задачи являются формально сопряженными и свойства одной задачи определяют свойства другой. Корректность задачи Дирихле для уравнения Трикоми с младшими членами определяется свойствами следующего параметра

$$d=\sup\left\{\frac{\|u_y(x,0)\|_0}{\|Tu\|_0} \;\middle|\; u\in C^2(\overline{D}),\ u|_{\partial D}=0\right\},$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в L_2 над соответствующим множеством. В свою очередь, для изучения свойств этого параметра строится аналог функции Грина следующей задачи Дирихле $u \in L_2(D)$, $Tu=0$, $u|_{AC\cup BC}=0$, $u|_{AB}=\tau$, где $\tau \in L_2(AB)$ — заданная функция. Все последние равенства понимаются в обобщенном смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коврижкин В. В.* О слабых решениях задачи Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 68–75.

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ МОНОТОННЫХ И НЕМОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СКВОЗНОГО СЧЁТА

THE ACCURACY COMPARISON OF SOME MONOTONIC AND NONMONOTONIC SHOCK-CAPTURING DIFFERENCE SCHEMES

Ковыркина О. А.[1], **Остапенко В. В.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]olyana@ngs.ru, [2]ostapenko_vv@ngs.ru

В большинстве работ тестирование разностных схем повышенной точности, предназначенных для сквозного расчёта разрывных решений, проводится путем сравнения разностного и точного решений в окрестности фронта ударной волны. При этом если разностная схема с высокой точностью локализует фронт волны (т. е. без видимых осцилляций размазывает его на достаточно малое число ячеек разностной сетки и число этих ячеек не зависит от интенсивности волны), то неявно предполагается, что схема должна с повышенной точностью аппроксимировать условия Гюгонио и, как следствие, сохранять повышенный порядок сходимости в области его влияния.

В настоящей работе предложен метод, позволяющий оценивать точность передачи разностной схемой сквозного счёта условий Гюгонио через фронт ударной волны. Этот метод связан с определением порядка сходимости интеграла от разностного решения (а не от его модуля, как в норме L_1) на отрезках, пересекающих линию фронта ударной волны [1]. При таком интегрировании ошибка, возникающая перед фронтом ударной волны за счёт его размазывания, может быть компенсирована аналогичной ошибкой противоположного знака за фронтом волны. Приводимые примеры показывают, что этот подход для некоторых классических разностных схем повышенного порядка аппроксимации позволяет получать второй порядок интегральной сходимости на отрезках, пересекающих линию фронта ударной волны.

В частности, расчёты показали, что схемы МакКормака [2] и Русанова [3] гораздо хуже, чем TVD схема Хартена [4], локализуют фронт волны, имея на нём заметные осцилляции разностного решения. Несмотря на это, данные немонотонные схемы с существенно более высокой точностью передают условия Гюгонио через фронт ударной волны, что отражается в их более высоком порядке интегральной сходимости и в большей точности при вычислении инвариантов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант МК-3477.2013.1), проекта, выполняемого совместно НАН Украины и СО РАН (проект № 8), Президиума РАН (проект № 4.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О сходимости разностных схем сквозного счёта // ДАН. 2010. Т. 433, № 5. С. 599–603.
2. *MacCormack R. W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA. 1969. Paper 69–354.
3. *Русанов В. В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений // ДАН. 1968. Т. 180, № 6. С. 1303–1305.
4. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A CONJUGATION PROBLEM FOR SOME NONCLASSICAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Кожанов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozhanov@math.nsc.ru

Работа посвящается исследованию разрешимости задач сопряжения для неклассических дифференциальных уравнений вида

$$Lu \equiv (-1)^{p+1} D_t^{2p} u - h(x) u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$Mu \equiv (-1)^{p} D_t^{2p+1} u - h(x) u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{2}$$

здесь $x \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, $D_t^k = \dfrac{\partial^k}{\partial t^k}$, $p \geq 0$ — целое число. Функция $h(x)$ в уравнениях (1) и (2) положительна на $[0,1]$ и может иметь разрыв первого рода в точке x_0 интервала $(0,1)$. Условия сопряжения в рассматриваемых задачах определяются линейно-независимыми в каждый момент времени t векторами $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$ и $(\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t), \beta_4(t))$ и имеют вид

$$\alpha_1(t)u(x_0-0,t) + \alpha_2(t)u_x(x_0-0,t) + \alpha_3(t)u(x_0+0,t) + \alpha_4(t)u_x(x_0+0,t) = 0,$$

$$\beta_1(t)u(x_0-0,t) + \beta_2(t)u_x(x_0-0,t) + \beta_3(t)u(x_0+0,t) + \beta_4(t)u_x(x_0+0,t) = 0.$$

Для изучаемых задач сопряжения указываются условия на векторы $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$ и $(\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t), \beta_4(t))$, при выполнении которых существует регулярное решение задачи. Обсуждаются также некоторые ситуации, приводящие к неединственности решений. Далее, рассматриваются задачи, в которых функция $h(x)$ может иметь несколько точек разрыва (первого рода). Рассматриваются также задачи сопряжения и для некоторых других дифференциальных уравнений.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

STABILIZATION OF SOLUTIONS OF AN ANISOTROPIC HIGH ORDER PARABOLIC EQUATION IN UNBOUNDED DOMAINS

Кожевникова Л. М.[1], **Леонтьев А. А.**[2]

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия; [1]kosul@mail.ru, [2]alexey_leontiev@inbox.ru

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 3$. В цилиндре $D = \{t > 0\} \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{m_\alpha - 1} D_{x_\alpha}^{m_\alpha} \left(|D_{x_\alpha}^{m_\alpha} u|^{p_\alpha - 2} D_{x_\alpha}^{m_\alpha} u \right), \tag{1}$$

$$p_n \geq \ldots \geq p_1 > k > 1, \quad m_\alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha = \overline{1,n};$$

$$D_{x_\alpha}^{j} u(t,\mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \quad j = \overline{1, m_\alpha - 1}, \ \alpha = \overline{1,n}; \tag{2}$$

$$u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{3}$$

В работе установлены двусторонние оценки, характеризующие скорость убывания решения задачи (1)–(3) при $t \to \infty$.

Рассматриваются области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{2, n-1}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}_n^+[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \,|\, x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Введем обозначение: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, a < x_s < b\}$, значение $a = 0$ опускается. Предполагается, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega^{z_0}$, $z_0 > 0$.

Теорема 1. *Существует положительное число $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b})$ и решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) такие, что выполнено неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1 - k)}, \quad t > 0.$$

Определение. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ будем называть $\lambda[s]$-последовательностью области Ω, если существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leq \theta\lambda(z_N, z_{N+1})\Delta_N^{q_s}, \ \Delta_N = z_{N+1} - z_N, \ N = \overline{0,\infty}, \ \lambda(r_1, r_2) = \min_{\alpha=1,n} \{\lambda_\alpha^{p_\alpha}(r_1, r_2)\},$$

$$\lambda_\alpha(r_1, r_2) = \inf \left\{ \left\| D_{x_\alpha}^{m_\alpha} g \right\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_{r_1}^{r_2})} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \ \|g\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_{r_1}^{r_2})} = 1 \right\}, \ \alpha = \overline{1,n}.$$

Для $N = \overline{0,\infty}$ определим последовательность

$$\mu_1(N) = \inf \left\{ \left\| D_{x_1}^{m_1} g \right\|_{L_{p_1}(\Omega^{z_N})} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \ \|g\|_{L_k(\Omega^{z_N})} = 1 \right\}.$$

Пусть $N(t)$ — произвольная положительная функция, для которой

$$\left(\mu_1^{p_1}(N(t))t\right)^{-1/(p_1 - k)} \exp\left(\kappa N(t)\right) \geq 1, \quad t > 0.$$

Теорема 2. *Пусть существует $\lambda[s]$-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \mu_1(N) = 0$. Тогда найдется число $M(p_s, p_1, m_s, k, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}) > 0$ и решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) такие, что справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M \left(\mu_1^{p_1}(N(t))t\right)^{-1/(p_1 - k)}, \quad t > 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-0081 а).

МЕТОД СРАВНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

A COMPARISON METHOD FOR STABILITY ANALYSIS OF DELAY SYSTEMS

Козлов Р. И., Козлова О. Р., Ульянов С. А.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; kozlov@icc.ru

Для систем с последействием, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями в банаховых пространствах E, B (E вложено в B)

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t),\ t \in T \equiv [0, \infty),\ x \in E,\ x_t \in X \subseteq C(H, E),\ \dot{x} \in B\ (H \equiv [-h, 0]), \quad (1)$$

даются достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости в терминах метода сравнения с векторными функционалами Ляпунова (ВФЛ) $v(t, x_t)$. В отличие от известных подходов предлагается использовать более адекватные задаче функционально-дифференциальные (ФД) системы сравнения (СС)

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t),\ t \in T,\ y \in \mathbb{R}^k,\ y_t \in Y, \quad Y \text{ — область в } C(H, \mathbb{R}^k), \quad (2)$$

где $f(t, \varphi)$ измерима по t, интегрально ограничена в каждой ограниченной области $U \subset Y$ и *квазимонотонно не убывает* по φ ($\forall i = \overline{1,k}\ f_i(t, \varphi) \le f_i(t, \psi)\ \forall \varphi$, $\psi \in Y$: $\varphi \le \psi$, $\varphi_i(0) = \psi_i(0)$) [1]. Эти условия обеспечивают существование для уравнения (2) *обобщенного решения Матросова* — абсолютно непрерывной по t на промежутке $T(y) = [t_0, \tau(y)) \subseteq T_{t_0} \equiv [t_0, \infty)$ функции $y(t, t_0, \varphi)$, $\dot{\forall}$ (для почти всех) $t \in T(y)$ удовлетворяющей неравенствам $\underline{\lim}_{\psi \to y_t} f(t, \psi) \le \dot{y}(t) \le \overline{\lim}_{\psi \to y_t} f(t, \psi)$ и начальному условию $y_{t_0} = \varphi$, в том числе верхнего решения $\overline{y}(t, t_0, \varphi)$. Обоснованием применения таких ФД СС служит следующая лемма о неравенствах.

Лемма. *Пусть $v(t, \varphi)$ — непрерывная функция, $v'(t, \varphi)$ — ее производная в силу* (1)*, определяемая соотношением: $v'(t, x_t) \ge \underline{\lim}_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau}(v(t + \tau, x_{t+\tau}) - v(t, x_t))$. Если $\dot{\forall} t \in T_{t_0}\ \forall \varphi \in X\ v'(t, \varphi) \le f(t, v_t(t, \varphi))$ и $v(t_0, x_{t_0}) \le y_{t_0}$, где $v_t(t, \varphi)(\theta) \equiv v_{t+\theta}(t + \theta, \varphi(\theta))$, то $\forall t \in T(x) \cap T(\overline{y})\ v(t, x_t) \le \overline{y}(t, t_0, y_{t_0})$ (мажорирование ВФЛ v решениями СС).*

Обычным образом на основе леммы получаются теоремы сравнения с ВФЛ, сводящие задачу к установлению соответствующих свойств устойчивости в СС. Как и для дифференциальных СС, анализ их значительно облегчается наличием квазимонотонности. Так, экспоненциальная устойчивость ФД СС может эффективно проверяться с помощью следующего утверждения. Пусть $\beta(\lambda, z) \equiv \max_{i=\overline{1,k}}(f_i^*(z_{e_\lambda})/z_i)$, $f^*(\varphi) \equiv \sup_{c \in [0,1]}(f(c\varphi)/c)$, $z_{e_\lambda}(\theta) \equiv z\mathrm{e}^{\lambda\theta}$ ($\beta(\lambda, z)$ убывает по λ).

Теорема. *Автономная СС* (2) *обладает свойством экспоненциальной устойчивости $\mathcal{ES}$, если существует точка $z \in \mathbb{R}^k_+$ такая, что $\beta(0, z) < 0$. При этом в качестве экспоненциального показателя можно взять любое число $\lambda_z < 0$ такое, что $\beta(\lambda_z, z) \le \lambda_z$ (в частности — решение (единственное) уравнения $\beta(\lambda, z) = \lambda$). Когда f субдифференцируема в 0, для $\mathcal{ES}$ достаточно, чтобы матрица $\Gamma(0)$ (позитивная), где $\Gamma(\lambda) \equiv \underline{\mathrm{line}}_{j=\overline{1,k}}\{f'(0; 1^j_{e_\lambda})\}$, 1^j — j-й орт в $\mathbb{R}^k$, была гурвицевой.*

Последняя часть теоремы обобщает один результат из [1].

Работа выполнена при частичной поддержке Президиума РАН (программа № 17) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith H. L.* Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Providence: AMS Publ., 1995.

О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ON GENERALIZED SOLUTION CONSTRUCTION OF THE SYSTEM OF THE FIRST ORDER QUASILINEAR EQUATIONS

Колпакова Е. А.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; eakolpakova@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных уравнений [1]

$$\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} + H_{x_i}(t,x,w(t,x)) = 0, \quad w(0,x) = \sigma(x),\ i = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Здесь $(t,x) \in \Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Задача (1) решается при следующих предположениях:

A1 Функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным и выпукла по s для любых $(t,x) \in \Pi_T$.

A2 Функции $H(t,x,s)$, $D_sH(t,x,s)$, $D_xH(t,x,s)$ обладают подлинейным ростом по s, локально липшицевы относительно x, s.

A3 Функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема.

В силу предположений $A1$–$A3$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует, единственно и продолжимо на весь интервал $[0,T]$ решение системы

$$\dot{\tilde{x}} = D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_xH(t,\tilde{x},\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{z}} = \langle D_sH(t,\tilde{x},\tilde{s}),\tilde{s}\rangle - H(t,\tilde{x},\tilde{s}), \tag{2}$$

$$\text{с краевыми условиями } \tilde{x}(T,\xi) = \xi,\ \tilde{s}(T,\xi) = \sigma(\xi),\ \tilde{z}(T,\xi) = \int_0^\xi \sigma(x)dx. \tag{3}$$

Определение. Локально ограниченная измеримая по Лебегу функция $w : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется обобщенным решением задачи (1), если

$$w(t,x) \in \mathrm{co}\{\tilde{s}(T-t,\xi) :\ \tilde{x}(T-t,\bar{\xi}) = x,\ \min_{\xi\in\mathbb{R}^n} \tilde{z}(T-t,\xi) = \tilde{z}(T-t,\bar{\xi})\}.$$

Здесь $\tilde{x}$, $\tilde{s}$, $\tilde{z}$ — решение системы (2), (3).

Теорема. *Если выполнены условия $A1$–$A3$, тогда решение задачи Коши существует и единственно.*

Показана связь между обобщенным решением задачи (1) и минимаксным решением соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - H\Big(t,x,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \quad u(T,x) = \int_0^x \sigma(y)dy.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31300, № 11-01-21400) и молодежного гранта Института математики и механики им. Н. Н. Красовского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dafermos C. M.* Hyperbolic conservation law in continuum physics. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
2. *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В СЛУЧАЕ ФИНАЛЬНОГО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

INVERSE PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH THE UNKNOWN LOWER COEFFICIENT IN THE CASE OF FINAL REDEFINITION

Колтуновский О. А.

Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики, Южно-Сахалинск, Россия; koltoleg@rambler.ru

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка ограниченной области D пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, t — число из ограниченного интервала $(0, T)$, $Q = D \times (0, T)$.

В цилиндре Q рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + q(x)u_t = f_0(x, t), \tag{1}$$

где функция $f_0(x, t)$ известна и задана при $(x, t) \in \overline{Q}$, Δ — оператор Лапласа по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$.

В работе изучается

Обратная задача. Найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, связанные в Q уравнением (1) такие, что выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \; x \in D, \quad u(x, t)|_{\Gamma \times (0,T)} = \mu(x, t), \tag{2}$$

$$u(x, T) = \bar{u}_0(x), \quad x \in D. \tag{3}$$

Функции $\mu(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\bar{u}_0(x)$ известны и заданы при $x \in \overline{D}$, $t \in [0, T]$.

Условия (2) являются условиями первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения (1). Условие (3) — условие финального переопределения, позволяющее найти вместе с решением $u(x, t)$ неизвестный коэффициент $q(x)$.

Предположение 1. Существует функция $U = U(x, t) \in C^5(\overline{Q})$, удовлетворяющая граничным условиям (2) и уравнению

$$U_{tt} - \Delta U = f_0(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

Достаточные для этого условия гладкости границы Γ, функций $f_0(x, t)$, $\mu(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и условия согласования функций приведены в [1].

Предположение 2. Размерность области D равна 2 или 3, граница $\Gamma \in C^2$.

Введем пространство функций

$$V = \left\{ v(x, t) \colon v(x, t) \in W_2^2(Q), v_t(x, t) \in W_2^2(Q), v_{tt}(x, t) \in W_2^2(Q) \cap L_\infty\left(0, T; W_2^2(D)\right) \right\}$$

с нормой $\|v\|_V = \|v\|_{W_2^2(Q)} + \|v_t\|_{W_2^2(Q)} + \|v_{tt}\|_{W_2^2(Q)} + \|v_{tt}\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))}$.

Пусть в области $\overline{D}$ выполняется неравенство $|U_t(x, t)| \geq U^*$, где U^* — достаточно большое число по сравнению с нормами

$$\|f_0(x, 0) + \Delta u_0(x)\|_{C(\bar{D})}, \; \|U_{tx_i}(x, T)\|_{C(\bar{D})}, \; \|\Delta \bar{u}_0(x) - \Delta U(x, T)\|_{C^1(\bar{D})}, \; \|u_1(x)\|_{C^1(\bar{D})}.$$

Тогда справедливы теоремы существования и локальной единственности регулярного решения $\{u(x, t), q(x)\}$ обратной задачи (1)–(3) такого, что $u(x, t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

USING SINGULARITIES OF A GENERALIZED SOLUTION FOR HYPERBOLIC SYSTEMS

Коновалова Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
dsk@math.nsc.ru

Рассмотрим гиперболическую систему n дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка с неизвестной вектор-функцией $\overline{u}(x,y) = \{u_1(x,y), \ldots, u_n(x,y)\}$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,y,\overline{u}(x,y)), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Здесь (x,y) — независимые переменные, λ_i — различные константы. Функции $f_i(x,y,\overline{u})$ определены в полосе $\mathbb{R}^Y = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < y < Y\}$. Предположим также, что в множестве $\mathbb{R}^Y$ задана ограниченная строго выпуклая область G с гладкой границей $\partial G \in C^1$. Будем предполагать, что функции $f_i(x,y,\overline{u})$ непрерывно дифференцируемы и ограничены вместе со своими производными до 2-го порядка включительно по переменным x, y, $u_1,\ldots,u_n$ на множестве $G \cup (\mathbb{R}^Y \setminus \overline{G})$, а в каждой точке ∂G функции $f_i(x,y,\overline{u})$ имеют ненулевой разрыв 1-го рода по переменным x, y.

Ставится и исследуется следующая задача.

Задача. Локализовать в $\mathbb{R}^Y$ линию разрывов функции $\overline{f}(x,y,\overline{u})$, если известны только значения решения на линиях $y = Y$ и $y = Y^*$, $Y > Y^*$, т. е. $\overline{u}(x,Y)$ и $\overline{u}(x,Y^*)$ (линия $y = Y^*$ лежит выше неоднородности G).

Отметим, что в задаче не требуется полного восстановления границы ∂G — речь идет лишь о нахождении некоторой оболочки неоднородности G. Для решения задачи предлагается следующий алгоритм.

- На линиях $y = Y$ и $y = Y^*$ численно дифференцируются функции $\overline{u}(x,Y)$ и $\overline{u}(x,Y^*)$.
- Фиксируются точки, в которых значения производных u_{i_x}, $i = 1,\ldots,n$, неограниченны. Для каждой компоненты u_i таких точек будет две на прямой $y = Y$ и столько же на прямой $y = Y^*$.
- На прямых $y = Y$ и $y = Y^*$ для каждой компоненты u_i имеется по две точки — этого достаточно, чтобы провести через них пару параллельных прямых, которые и являются искомыми прямыми, соответствующими компоненте u_i.
- Многоугольник, составленный из найденных отрезков характеристик и, быть может, отрезков прямых $y = Y^*$ и $y = 0$, и является локализацией линии разрывов функции $\overline{f}(x,y,\overline{u})$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00275).

КОЛЕБАНИЯ В ЗАДАЧАХ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

OSCILLATIONS IN PROBLEMS OF CHEMICAL KINETICS

Кононенко Л. И.[1], **Тресков С. А.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]larak@math.nsc.ru, [2]treskov@math.nsc.ru

1. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая бимолекулярную реакцию на поверхности катализатора

$$\dot{x}_1 = a - x_1 - \alpha[\omega_1 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_1],$$
$$\dot{x}_2 = b - x_2 - \alpha[\omega_2 + \omega_4 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_2],$$
$$\dot{y}_1 = \beta(2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4), \quad \dot{y}_2 = \beta(\omega_2 - \omega_3),$$

где $\omega_1 = \varkappa_1 x_1(1 - y_1 - y_2)^2 - \varkappa_{-1} y_1^2$, $\omega_2 = \varkappa_2 x_2(1 - y_1 - y_2) - \varkappa_{-2} y_2$, $\omega_3 = y_1 y_2$, $\omega_4 = \varkappa_4 x_2 y_1$ — обезразмеренные скорости четырёх стадий реакции.

Областью изменения переменных является множество

$$W = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid 0 \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le b,\ 0 \le y_1,\ 0 \le y_2,\ y_1 + y_2 \le 1\}.$$

Данная система изучалась в [1].

В силу иерархии $\varkappa_{-2}$, $\varkappa_{-1}$, $\varkappa_4 \ll \varkappa_1$, $\varkappa_2 \ll 1$, которую мы используем при анализе модели, $\varepsilon = 1/\beta$ — малый параметр, x_1, x_2 — медленные переменные, y_1, y_2 — быстрые переменные.

В системе имеют место релаксационные колебания, т. е. периодические траектории, которые содержат как участки медленных движений (проходимых за конечное время), так и участки быстрых движений (проходимых за бесконечно малое время).

2. Изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая модель реакции Жаботинского в реакторе непрерывного перемешивания

$$\varepsilon\dot{x} = -x^3 + x - y,$$
$$\dot{y} = k_2 x^2 + k_1 x - y - k_3,$$
$$k_1, k_2 \ge 0, \quad k_3 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Найдены устойчивые циклы, в том числе имеющие характерную форму решений-уток.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00074) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононенко Л. И.* Катастрофа сборки в математической модели каталитического реактора идеального перемешивания // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1. С. 116–119.
2. *Волокитин Е. П., Тресков С. А.* Бифуркационная диаграмма одной системы уравнений. Новосибирск, 1988. (Препринт / ИМ СО АН СССР; № 17).

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

ON SOME INVERSE PROBLEMS FOR A LINEARIZED HEAT AND MASS TRANSFER SYSTEM

Короткова Е. М.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
kem@uriit.ru

Рассматривается линеаризованная система уравнений тепломассопереноса

$$u_t - \nu\Delta u + \nabla p = \sum_{j=1}^{n} B_j u_{x_j} + B_0 u + f + \beta_C C + \beta_\theta \Theta, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1}$$

$$\Theta_t - \lambda_\theta \Delta\Theta + \sum_{j=1}^{n} b_j \Theta_{x_j} + b_0 \Theta = f_\theta + \sum_{j=1}^{n} b^j u_j, \tag{2}$$

$$C_t - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} C_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} c_j C_{x_j} + c_0 C = f_c + \sum_{j=1}^{n} c^j u_j, \tag{3}$$

где $\nu = \text{const} > 0$, $(x,t) \in Q = G \times (0,T)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$, $T < \infty$), $u = (u_1, \ldots, u_n)$, Θ, p, $C = (C_1, \ldots, C_m)$ — вектор скорости, температура жидкости, давление, вектор концентраций примесей в жидкости и f_c — объемная плотность источников примесей. Коэффициенты в левой части (3) — матрицы-функции размерности $m \times m$. Система (1)–(3) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_S = g_1(t,x), \quad \Gamma = \partial G, \quad S = \Gamma \times (0,T), \tag{4}$$

$$\Theta|_{t=0} = \Theta_0, \quad \Theta|_S = g_2(t,x), \quad C|_{t=0} = C_0, \quad C|_S = g_3(t,x) \tag{5}$$

и условиями переопределения

$$C|_{S_i} = \psi_i \quad \big(S_i = (0,T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, \ldots, m_0, \quad r = m_0 m\big), \tag{6}$$

где $\{\Gamma_i\}$ — множество гладких s-размерных поверхностей, лежащих в G. По данным (4)–(6) восстанавливается решение u, Θ, C задачи (1)–(5) и функция $f_c = f_0(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{r} f_i(x,t) q_i(x',t)$ ($x' = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$). Здесь функции f_i известны и функции q_i подлежат определению с использованием условий (6).

Указываются условия на геометрию области G и данные задачи, когда задача (1)–(6) имеет единственное решение из класса $u \in W_q^{2,1}(Q)$, $p \in L_q(0,T;\dot{W}_q^1(G))$ (здесь символ $\dot{W}_q^1(G)$ обозначает класс функций $p \in W_{q,loc}^1(G)$ таких, что $\nabla p \in L_q(G)$), $q_j \in L_q$ $(j = 1, \ldots, r)$ в соответствующей области изменения переменных (x',t), Θ, $C \in W_q^{2,1}(Q)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00260).

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА

AN IDENTIFICATION PROBLEM OF THE SOURCE FUNCTION IN A MULTIDIMENSIONAL BURGERS TYPE EQUATION

Коршун К. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
korshun007@inbox.ru

В работе исследуется задача определения функции источника для многомерного уравнения типа Бюргерса

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} a(t) u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b(t) u u_{x_i} + g(t) f(t,x).$$

Здесь $\mu_i(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции, $u(t,x)$, $g(t)$ — неизвестные функции. Аналогичная задача для одномерного уравнения типа Бюргерса рассматривалась ранее в работе [1]. Рассматривается случай задачи Коши в полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \,|\, 0 \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

В предположении достаточной гладкости входных данных исследуемая обратная задача приводится к прямой задаче Коши, которая решается методом расщепления [2].

На основании полученных априорных оценок доказаны существование и единственность решения задачи Коши в классе гладких ограниченных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я., Коршун К. В.* О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 4. С. 497–506.
2. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.

ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

CONSTRUCTING THE CORRECT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE NONHOMOGENEOUS POLYHARMONIC EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN

Кошанов Б. Д.[1], Китапбаева Б. Т.[2], Бакытбек М. Б.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; [1]koshanov@list.ru, [2]kitapbaeva62@mail.ru

Пусть m и n — натуральные числа. В единичном шаре $\Omega = \{x : |x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим неоднородное полигармоническое уравнение

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial^{k_j} u}{\partial n_x^{k_j}}\right|_{x\in\partial\Omega} = \varphi_j(x), \quad x \in S, \quad j = 1, \ldots, m; \quad 0 \le k_1 < \ldots < k_m \le 2m-1. \tag{2}$$

Обычно для существования регулярного решения на исходные данные $f(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ накладываются ограничения двух типов [1, 2]:
1) требуется некоторая их гладкость;
2) некоторые условия типа ортогональности к решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

В данной работе удается сформулировать критерий разрешимости задачи (1), (2) в исходных терминах [3]. Даны представления функции Грина задачи Дирихле (когда $k_1 = 0$, $k_2 = 1, \ldots, k_m = m-1$) для полигармонического уравнения в шаре без ограничений на число пространственных переменных и порядок уравнения [4], а также построены некоторые классы корректных краевых задач в ограниченной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Begehr H., Du J., Wang Y.* A Dirichlet problem for polyharmonic functions // Ann. Mat. Pura Appl. 2008. V. 187, N 4. P. 435–457.
3. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения // Уфимск. мат. журн. 2010. № 2. С. 41–52.
4. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 534–539.

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ABOUT SOME NONLOCAL AND INVERSE PROBLEMS FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS

Кошелева Ю. А.

Сахалинский государственный университет, Южно-Сахалинск, Россия;
ynuta@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости задач нахождения вместе с решением $u(x,t)$ ультрапараболических уравнений с временными переменными t и a также неизвестного внешнего воздействия или же неизвестного коэффициента при решении.

Пусть x есть точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$, t и a есть точки интервалов $(0,T)$ и $(0,A)$ соответственно.

Рассматриваются задачи нахождения решения $u(x,t,a)$ и неизвестных коэффициентов $g_1(x,a),\dots,g_m(x,a)$ или же $g_1(t),\dots,g_m(t)$ в уравнениях

$$u_t + u_a - \Delta u + c(x,t,a)u = f(x,t,a) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x,a)h_k(x,t,a),$$

$$u_t + u_a - \Delta u + c(x,t,a)u = f(x,t,a) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)h_k(x,t,a)$$

при задании естественных начально-краевых условий, а также некоторых условий переопределения точечного или интегрального вида (количество условий переопределения совпадает с количеством неизвестных коэффициентов $g_1,\dots,g_m$, функции $h_1,\dots,h_m$ здесь заданы и являются линейно независимыми).

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Методы исследования основываются на сведении исходной обратной задачи к прямой задаче для "нагруженного" ультрапараболического уравнения, использовании метода регуляризации и метода априорных оценок.

При некоторых ограничениях малости на входные данные исследована также разрешимость некоторых задач определения коэффициентов.

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЧЛЕНЕ В ДВУМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

AN IDENTIFICATION PROBLEM OF THE SPECIAL FORM COEFFICIENT AT A NONLINEAR TERM FOR A TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Кригер Е. Н.[1], **Фроленков И. В.**[2]

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
[1]e_katherina@mail.ru, [2]igor@frolenkov.ru

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T,\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + M(t,u(t,x,z))\lambda(t,x,z) + f(t,x,z), \quad t \in (0,T),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2,$$

с начальным условием: $u(0,x,z) = u_0(x,z)$, $(x,z) \in \mathbb{R}^2$.

Неизвестными в задаче являются функция $u(t,x,z)$ и коэффициент $\lambda(t,x,z)$, относительно которого известна априорная информация о его виде:

$$\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z).$$

Заданы условия переопределения:

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \quad u(t,\beta,z) = \psi(t,z), \quad \alpha,\beta = \text{const}.$$

Относительно нелинейной функции $M(t,u)$ предполагаем, что она является достаточно гладкой и удовлетворяет следующему условию:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t,y)\right| \le M_0(1+|y|^p), \quad k = 0,\dots,6, \quad t \in [0,T], \quad y \in \mathbb{R},$$

где M_0 — постоянная, p — фиксированное натуральное число.

Используя набор условий переопределения, обратная задача сводится к прямой для нагруженного параболического уравнения, разрешимость которой исследуется с использованием метода слабой аппроксимации [1]. Доказаны теоремы существования и единственности решения исходной задачи в малом временном интервале.

Ранее в работе [2] была исследована задача идентификации зависящего от t, x коэффициента при нелинейном члене. В [3] изучен случай, когда неизвестный коэффициент зависит от временной и одной пространственной переменной, а условия переопределения заданы на гладкой кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
2. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В.* Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений // ДАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 583–585.
3. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В.* О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой // Специальный выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н. Н. Яненко. 2006. Т. 11, ч. 1. С. 46–54.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ
ABOUT ONE DIFFERENTIAL EQUATION

Куркина М. В.[1], **Родионов Е. Д.**[2], **Славский В. В.**[1]

[1] *Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;*
[2] *Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;*
mavi@inbox.ru, edr2002@mail.ru, slavsky2004@mail.ru

Теория выпуклых подмножеств (кривых) на плоскости Лобачевского H^2_κ отрицательной кривизны $(-\kappa)$ тесно связана с обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$y(t)y''(t) - \frac{1}{2}\left(y'(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y(t)\right)^2 = K_{1/2}(t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{1}$$

Доказана теорема.

Теорема. *Для произвольной измеримой 2π-периодической ограниченной функции $K_{1/2}(t)$ существует 2π-периодическое решение $y(t)$ уравнения* (1)*, принадлежащее классу $C^{1,1}$.*

Замечание. Доказательство основано на связи [1–4] между локально выпуклыми кривыми на плоскости Лобачевского H^2_κ отрицательной кривизны $(-\kappa)$ и функциями $y(t)$, $0 < t < 2\pi$, удовлетворяющими (1) с условием $|K_{1/2}(t)| \le \kappa/2$.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект № 12-12-22000-а(р)), ФЦПК "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (соглашение № 8206, номер заявки 2012-1.1-12-000-1003-014) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Об одномерных конформных плоских сплайнах // Сборник научн. статей междунар. школы-семинара "Ломоносовские чтения на Алтае", Барнаул, 20–23 ноября, 2012: в 4 ч. Барнаул: АлгГПА, 2012. Ч. 1. С. 306–311.
2. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Конформные сплайн-функции // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. 6, вып. 2. С. 112–129.
3. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Численные методы интерполяции, основанные на выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестн. НГУ (в печати).
4. *Родионов Е. Д., Славский В. В.* Конформно-плоские римановы пространства и их обобщения // Тр. междунар. конф. "Дни геометрии в Новосибирске, 2011". Новосибирск, 2012. С. 45–93.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ТРЕХМЕРНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

GLOBAL SOLVABILITY OF A THREE-DIMENSIONAL INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF MIXTURE OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLUIDS

Кучер Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
nakycher@rambler.ru

В работе рассматривается начально-краевая задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику смеси вязких сжимаемых жидкостей, в общем случае трех пространственных переменных. Доказывается глобальная по времени разрешимость указанной выше начально-краевой задачи в классе регулярных обобщенных функций.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ТРЕЩИНЫ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО

EXISTENCE OF AN OPTIMAL CRACK SHAPE IN THE EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A TIMOSHENKO TYPE PLATE

Лазарев Н. П.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; nyurgun@ngs.ru

Рассматривается задача о равновесии упругой изотропной пластины (модели Тимошенко), содержащей вертикальную сквозную трещину. При этом на кривой, описывающей трещину, задаются краевые условия вида неравенств [1]. Исследуется зависимость решений задачи от формы кривой, задающей трещину. Доказано существование оптимальной кривой, доставляющей экстремум для функционала качества, описывающего отклонение от заданного обобщенного вектора перемещений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31076 мол_а, № 13-01-00017 а) и Минобрнауки РФ (соглашение № 8222).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. *Лазарев Н. П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 32–43.
3. *Рудой Е. М.* Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 430–445.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ТИПА КОШИ – РИМАНА

POLYNOMIAL SOLUTIONS OF CAUCHY–RIEMANN TYPE SYSTEMS

Латфуллин Т. Г.

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия;
tlatfullin@ya.ru

В задачах, связанных с дифференцированием отображений в пространствах гиперкомплексных чисел и в банаховых алгебрах, естественно возникают системы — аналоги условий Коши – Римана для отображений комплексной плоскости, это системы однородных линейных УЧП первого порядка с постоянными коэффициентами. Наиболее известные из них: 1) условия односторонней дифференцируемости кватернионных отображений [1], 2) условие аналитичности по Фютеру (Fueter) кватернионных отображений [1], 3) система Моисила – Теодореско [2, с. 242].

Множество решений системы 1) содержит только линейные функции, а множество решений систем 2), 3) и системы Коши – Римана значительно богаче, содержит, например, полиномиальные отображения любой натуральной степени. Оказывается, этот эффект довольно просто можно объяснить языком линейной алгебры.

Используем обозначение $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задан набор $u = (u^1, \dots, u^k)$ из k действительных функций. Зададим mk дифференциальных операторов

$$\Phi_i^j u = a_{i1}^j u_1^j + \cdots + a_{in}^j u_n^j, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k,$$

и составим систему первого порядка

$$\begin{array}{l} (\Phi_1^1 + \quad \Phi_1^2 + \quad \cdots \quad + \Phi_1^k)u = 0, \\ (\Phi_2^1 + \quad \Phi_2^2 + \quad \cdots \quad + \Phi_2^k)u = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\Phi_m^1 + \quad \Phi_m^2 + \quad \cdots \quad + \Phi_m^k)u = 0. \end{array} \tag{1}$$

Матрицу коэффициентов системы (1) обозначим A_1, считаем, что строки матрицы линейно независимы и что $m < nk$, иначе решения системы (1) будут постоянными. Ищем решения среди бесконечно-дифференцируемых функций.

Систему (r) УЧП порядка r получим дифференцированием каждого уравнения из (r – 1) по всем переменным x_j, матрицу системы (r) обозначим A_r. Ясно, что горизонтальный и вертикальный размеры A_r будут больше, чем размеры A_{r-1}.

Теорема. *Если каждый столбец матрицы A_1 содержит ненулевые элементы и для некоторого $r \ge 2$ ранг матрицы A_r равен рангу системы ее столбцов, а ранг системы строк матрицы A_{r-1} меньше ранга системы ее столбцов, то решение системы* (1) *состоит из многочленов степени не выше $r - 1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sudbery A.* Quaternionic analysis // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V. 85. P. 199–225.
2. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.

АНАЛИЗ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ СЕДЛОВОГО ТИПА

STUDYING THE INVARIANT MANIFOLDS OF SADDLE STEADY STATES

Лашина Е. А.[1], **Чумакова Н. А.**[1], **Чумаков Г. А.**[2]

[1] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;*
lashina@catalysis.ru, chum@catalysis.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
chumakov@math.nsc.ru

Работа посвящена развитию методов исследования инвариантных многообразий стационарных состояний седлового типа систем двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, y, z), \qquad \dot{y} = g(x, y, z)$$

с вещественным параметром z. Для уточнения гомоклинической траектории — петли сепаратрисы грубой стационарной точки типа седла (с седловой величиной, отличной от нуля) нами предложен итерационный алгоритм [1], в котором при переходе от краевой задачи на числовой оси к краевой задаче на конечном интервале для вычисления инвариантных подпространств использованы проекторы на собственные подпространства линеаризованной системы в окрестности стационарного состояния. Доказано, что оператор, определяющий линейную часть возмущения проектора, является вещественным, и получено его аналитическое представление.

Эффективность данного алгоритма показана при изучении динамики одной нелинейной кинетической модели с параметром $z \in [0, 1]$ (см. [1]):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1(1 - x - y)^2 - k_{-1}x^2 - 2k_3e^{-\mu_3 y}x^2y, \\ \dot{y} &= k_2(1 - x - y)^2 - k_4e^{-\mu_4 y + \mu_5 z}y - k_3e^{-\mu_3 y}x^2y, \end{aligned} \tag{1}$$

где параметры μ_i ($i = 3, 4, 5$) и k_j ($j = \pm 1, 2, 3, 4$) положительны, переменные x и y рассматриваются в области $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$. Были уточнены значения параметров, при которых происходит бифуркация вырождения устойчивого периодического решения в петлю сепаратрисы седла.

В настоящей работе предложено обобщение алгоритма для уточнения петли сепаратрисы негрубого стационарного состояния типа седло-узел. При изучении максимальных семейств периодических решений системы (1) показано, что существуют значения параметров μ_i и k_j такие, что при $z > z_*$ система имеет неустойчивое стационарное состояние типа фокуса и устойчивый предельный цикл; при $z = z_*$ устойчивый предельный цикл вырождается в петлю сепаратрисы седло-узел; при $z < z_*$ существуют три грубых стационарных состояния: неустойчивый фокус, устойчивый узел и седло. Исследуя глобальное поведение решений в окрестности устойчивого инвариантного многообразия седла, мы доказали, что при $z < z_*$ рассматриваемая система не имеет предельных циклов.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лашина Е. А., Чумаков Г. А., Чумакова Н. А.* Максимальные семейства периодических решений кинетической модели гетерогенной каталитической реакции // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 4. С. 3–20.

О СДВИГЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО СИГНАЛА В МОДЕЛЯХ МАТРИЧНОГО СИНТЕЗА

ON THE SHIFT OF A CONTROLLING SIGNAL IN MODELS OF MATRIX SYNTHESIS

Лихошвай В. А.[1], **Фадеев С. И.**[2]

[1] *Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
likho@bionet.nsc.ru
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
fadeev@math.nsc.ru

В работе представлены результаты исследования решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида, возникающих при описании матричных процессов синтеза ДНК, РНК и белков — нерегулярных биополимеров большой и сверхбольшой протяженности. Данное направление инициировано потребностями математической биологии гена в теоретическом обосновании методов моделирования биологических систем, функционирующих под управлением молекулярно-генетических систем [1–3].

В настоящей работе мы продолжаем исследования в данном направлении. Матричные процессы рассматриваются как процессы переноса управляющего сигнала вдоль последовательной цепочки промежуточных стадий процесса синтеза. Рассмотрен случай, в котором процессы матричного синтеза имеют ветвления, а количество промежуточных стадий (размерность системы) не определено. Сформулирован ряд гипотез о свойствах сдвига управляющего сигнала, проведена их численная проверка. Для частного случая дано строгое обоснование.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00344) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Задачи теории функционирования генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 2. С. 64–80.
2. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В. Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
3. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

STABILITY ESTIMATES OF SOLUTIONS OF INVERSE EXTREMAL PROBLEMS FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

Лобанов А. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
akekslobanov1@mail.ru

В последние годы большое внимание уделяется исследованию обратных задач для моделей акустического и электромагнитного рассеяния на неоднородных включениях. С помощью оптимизационного метода указанные задачи сводятся к обратным экстремальным задачам. К необходимости решения такого типа задач приводят, в частности, задачи маскировки материальных объектов в жидких средах (см. [1–3]).

Предположим, что во внешности Ω_e^∞ области Ω возникло поле p^{inc}. Поскольку область Ω является препятствием для поля p^{inc}, то падение этого поля на Ω приводит к появлению в области Ω входящего поля p, а в области Ω_e^∞ — к появлению рассеянного поля p^s. Математически задача определения полей p в Ω и p^s в Ω_e^∞ сводится к задаче нахождения поля p в Ω и внешнего поля $p_e = p^{\text{inc}} + p^s$ в Ω_e^∞ путем решения следующей задачи сопряжения:

$$\Delta p + k^2 \eta p = -f \ \text{ в } \ \Omega, \ \Delta p_e + k^2 p_e = 0 \ \text{ в } \ \Omega_e^\infty, \quad p = p_e, \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_e}\frac{\partial p_e}{\partial n} \ \text{ на } \Gamma_e, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = g \ \text{ на } \ \Gamma_i, \quad \frac{\partial p^s(\mathbf{x})}{\partial r} - ikp^s(\mathbf{x}) = o(r^{-1}) \ \text{ при } \ r = |\mathbf{x}| \to \infty. \quad (2)$$

Здесь k — постоянное волновое число, $\eta = \eta(x)$ — переменный индекс рефракции в Ω, f — плотность объемных источников в Ω, функция g описывает плотность поверхностных источников звукового поля на внутренней границе Γ_i области Ω.

В данной работе рассматривается обратная экстремальная задача для модели (1), (2). Она заключается в нахождении неизвестных функций (управлений) η, g и решения задачи (1), (2), доставляющих минимум определенному функционалу качества. Доказывается ее разрешимость, строится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума, и выводятся оценки устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционала качества, так и одной из функций (падающей волны), входящей в исходную задачу сопряжения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00313, № 12-01-31288 мол_а) и проекта № 12-1-П17-03 ДВО РАН, тематика которого соответствует Программе № 17 фундаментальных исследований Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cummer S. A., Schurig D.* One path to acoustic cloaking // New J. Phys. 2007. V. 9. P. 45.
2. *Романов В. Г.* Обратная задача дифракции для уравнений акустики // ДАН. 2010. Т. 431, № 3. С. 319–322.
3. *Алексеев Г. В., Романов В. Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 1–6.

ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ А. А. САМАРСКОГО ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

SPACE NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH A. A. SAMARSKII CONDITIONS FOR ULTRAPARABOLIC EQUATIONS

Лукина Г. А.

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия; lukina-g@mail.ru

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, $Q = \Omega \times (0,T_1) \times (0,T_2)$, $0 < T_1 < +\infty$, $0 < T_2 < +\infty$. Далее, пусть $c(x,t,\tau)$, $f(x,t,\tau)$, $\alpha_i(t,\tau)$, $\beta_i(t,\tau)$, $i = 1, 2$, — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T_1]$, $\tau \in [0,T_2]$.

Краевая задача I: найти функцию $u(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения

$$u_t + u_\tau - u_{xx} + c(x,t,\tau)u = f(x,t,\tau) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0,\tau) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tau \in (0,T_2), \tag{2}$$

$$u(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T_1), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &u_x(0,t,\tau) = \alpha_1(t,\tau)u(0,t,\tau) + \alpha_2(t,\tau)u(1,t,\tau), \quad t \in (0,T_1), \quad \tau \in (0,T_2), \\ &u_x(1,t,\tau) = \beta_1(t,\tau)u(0,t,\tau) + \beta_2(t,\tau)u(1,t,\tau), \quad t \in (0,T_1), \quad \tau \in (0,T_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x,t,\tau)$, являющуюся в параллелепипеде Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также условия

$$\begin{aligned} &u_x(0,t,\tau) = \alpha_1(t,\tau)u(0,t,\tau) + \alpha_2(t,\tau)u_x(1,t,\tau), \quad t \in (0,T_1), \quad \tau \in (0,T_2), \\ &u(1,t,\tau) = \beta_1(t,\tau)u(0,t,\tau) + \beta_2(t,\tau)u_x(1,t,\tau), \quad t \in (0,T_1), \quad \tau \in (0,T_2). \end{aligned}$$

Краевые задачи с условиями вида (4) для линейных параболических уравнений были исследованы в работе А. И. Кожанова [1]. Нелокальные краевые задачи с условиями А. А. Самарского для ультрапараболических уравнений ранее не изучались.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. ун-та. Сер. естественнонаучная. 2008. № 3 (62). С. 165–174.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ ОСНОВНОМ И КОМБИНАЦИОННОМ РЕЗОНАНСАХ

INSTABILITY OF A NONLINEAR SYSTEM OF TWO OSCILLATORS DUE TO MAIN AND COMBINATIONAL RESONANCES

Люлько Н. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
natlyl@mail.ru

В [1] построена математическая модель водонефтяных газосодержащих систем. Показано, что при периодических внешних возмущениях в линеаризованной распределенной системе возникает параметрический резонанс, приводящий к разрушению всей системы. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1], по изучению неустойчивости нелинейной модели газосодержащих слоистых систем относительно внешних периодических возмущений малой амплитуды. В данной работе исследуется задача Коши для нелинейной системы двух осцилляторов

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\sigma_1^2\right)u=f,\\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+\sigma_2^2\right)f=q\left(\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)u^2+\varepsilon\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2\right)(u\sin(\omega t))\right),\end{gathered}\tag{1}$$

являющейся модельной для нелинейной системы в [1]. Здесь $q>0$ — малый физический параметр, $\varepsilon>0$ — амплитуда внешнего возмущения, $\omega>0$ — частота внешнего возмущения, положительные числа σ_1, σ_2, ω_1, ω_2 — параметры модели.

Цель работы — исследование характера неустойчивости нулевого решения системы (1) при $\omega=2\sigma_1$ (основной резонанс) и при $\omega=\sigma_1+\sigma_2$ (комбинационный резонанс) для малых значений параметра q в зависимости от значений ε. Система (1) не является ни гамильтоновой (при записи в переменных u, f, $\dot u$, $\dot f$), ни системой слабо связанных осцилляторов, наиболее часто исследуемых. Поэтому основным подходом при решении рассматриваемой задачи является применение метода усреднения Крылова – Боголюбова к системе (1) и анализ усредненной автономной системы следующего вида:

$$\frac{d\Psi}{dt}=q\varepsilon B(\omega)\Psi+q^2\left(\frac{\varepsilon^2}{i}D\Psi+\frac{S_3(\Psi)}{i}\right),\tag{2}$$

где $B(\omega)$, D — постоянные матрицы, $S_3(\Psi)$ — однородный полином третьей степени относительно вектора $\Psi\in C^4$; все выражения имеют вещественные коэффициенты. Для системы (2) удается найти два независимых интеграла (для каждого резонанса), позволяющих исследовать поведение ее траекторий в целом при всех значениях q, ε и определить максимальную амплитуду колебаний решений системы (2), а следовательно, и системы (1). В терминах параметров q, ε найдена область неустойчивости системы (2) при $\omega=2\sigma_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 15 и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В.* Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 2. С. 37–70.

КЛАССЫ ХАРДИ И ПРОСТРАНСТВА ВИНЕРА – СОБОЛЕВА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ВОЛН

HARDY CLASSES AND WIENER–SOBOLEV SPACES IN NONLINEAR PROBLEMS OF THE WAVE THEORY

Макаренко Н. И.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
makarenko@hydro.nsc.ru

Задача об уединенных волнах и фронтах в неоднородной несжимаемой жидкости формулируется как задача на собственные значения для квазилинейного эллиптического уравнения, к которому надлежащим образом редуцируются гидродинамические уравнения Эйлера. Семейства решений типа одиночных волн, как правило, ответвляются от основного безволнового решения в граничных точках непрерывного спектра линеаризованного оператора [1–4]. При этом структура спектра, как и сам вид исходного уравнения, существенно зависит от поля плотности жидкости в невозмущенном течении. Кроме того, ветви волновых решений могут претерпевать вторичные бифуркации, связанные с существованием специфических предельных волновых режимов.

Строгое математическое описание упомянутого выше бифуркационного сценария обычно использует двухступенчатую процедуру типа модифицированного метода Ньютона. Первым шагом в ней является анализ свойств резольвенты оператора, линеаризованного на основном безволновом решении. На втором этапе методами возмущений строится асимптотическое решение типа уединенной волны, в окрестности которого устанавливается сходимость итераций метода последовательных приближений к искомому точному решению. Реализация этой схемы часто осложняется необходимостью рассмотрения бифуркаций не изолированных решений, а их орбит, связанных с групповой инвариантностью исходной задачи. По этой причине адекватный выбор функциональных пространств для получения оценок резольвенты линеаризованного оператора и согласованных с ними оценок возмущающих нелинейных операторов играет ключевую роль. В докладе в данном контексте обсуждаются свойства некоторых весовых классов функций с экспоненциальной асимптотикой затухания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Makarenko N. I.* Equivariant cosimmetry and front solutions of the Dubreil–Jacotin–Long equation // C. R. Acad. Sci. Ser. I. 2003. Part 1: V. 337, N 11. P. 753–756. Part 2: V. 337, N 12. P. 815–818.
2. *Makarenko N. I., Maltseva J. L., Kazakov A. Yu.* Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves // Nonlin. Proc. Geophysics. 2009. V. 16, N 2. P. 169–178.
3. *Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.* О спектре фазовых скоростей внутренних волн в слабостратифицированной двухслойной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 125–145.
4. *Голосов К. В., Макаренко Н. И.* Об одной краевой задаче теории внутренних волн // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 21–31.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

ON A PURSUIT PROBLEM WITH DELAY

Мамадалиев Н.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; m_numana59@mail.ru

В настоящей работе получено достаточное условие разрешимости задачи управления пучками траекторий при наличии запаздывания.

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t) + a, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; h — величина запаздывания; a — точка пространства $\mathbb{R}^n$; A, B, C, D — постоянные матрицы. Преследующий и убегающий игроки в качестве *допустимых* управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ выбирают из класса измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям: $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq \rho$, $v(t) \in Q$, где Q — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^q$, ρ — неотрицательная константа.

Через $R(t)$, $-h \leq t \leq 0$, обозначим произвольное измеримое многозначное отображение. В $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M. Кроме того, задано множество $N(R(\cdot))$, из точек которого исходят траектории уравнения (1), называемое начальным множеством.

Пусть $\operatorname{co} X$ — выпуклая оболочка множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Через $[\operatorname{co} X]$ обозначим несущую плоскость множества $\operatorname{co} X$, его размерность обозначим через m. Пусть E — постоянная матрица такая, что $E : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, $E\mathbb{R}^m = [\operatorname{co} Q]$.

Предположение. Для всех $t \in [0, \tau]$ имеет место включение $\pi K(t)C\mathbb{R}^p \supset \pi K(t)DE\mathbb{R}^m$, где матричная функция $K(t)$, $-\infty \leq t \leq \tau$, определена в [1].

При выполнении предположения, как хорошо известно [2], существует матрица $F(\tau, t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такая, что имеет место равенство $\pi K(t)CF(\tau, t) = \pi K(t)D$ на отрезке $[0, \tau]$.

Пусть $\chi(\tau)$ — арифметический корень числа

$$\chi^2(\tau) = \sup\Big\{\int_0^\tau |F(\tau, t)v(t)|^2 dt : \ v(t) \in Q,\ 0 \leq t \leq \tau\Big\}.$$

Множество $\widehat{W}_2[M_1 \dot{-} H[\tau, N(R(\cdot))], \tau]$ определим следующим образом:

$$\widehat{W}_2[M_1 \dot{-} H[\tau, N(R(\cdot))], \tau] = \Big[M_1 \dot{-} H[\tau, N(R(\cdot))]\Big] + W(\tau).$$

Теорема. *Пусть выполнены условия предположения и существует момент времени $\tau = \tau_1(z_o(\cdot)) > 0$ такой, что при $\tau = \tau_1(z_o(\cdot))$ имеет место включение*

$$\int_0^\tau \pi K(t)adt \in \widehat{W}_2[M_1 \dot{-} H\left[\tau,\ N\left(R\left(\cdot\right)\right)\right], \tau].$$

Тогда в игре (1) *пучок траекторий можно перевести из множества $N(R(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М: Мир, 1967.
2. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Т. 2. М: Наука, 1988.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE EQUATIONS OF VISCOUS COMPRESSIBLE BIFLUIDS

Мамонтов А. Е.[1], **Прокудин Д. А.**[2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* mamont@hydro.nsc.ru

[2] *Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;* daprokudin@kemsu.ru

Рассматриваются уравнения движения бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей, в том числе теплопроводных. В качестве основы при формулировке модели взяты идеи, изложенные в [1, 2]. А именно, для каждой компоненты смеси пишутся уравнения неразрывности и импульсов (и энергии, для теплопроводных моделей), а взаимодействие между компонентами происходит как через обмен импульсом (что не создает существенных математических трудностей), так и через вязкие члены, т. е. за счет недиагональности матрицы вязкостей. Последнее обстоятельство представляет собой основную черту, отличающую рассматриваемые модели от уже хорошо развитой теории движения однокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей и не позволяющую автоматически распространить известные результаты на случай смесей.

В докладе будут представлены теоремы существования решений стационарных краевых задач для нескольких моделей движения смесей, будут обсуждаться перспективы и трудности дальнейшего развития теории, а также нюансы, связанные с формулировкой моделей. Некоторые из представленных результатов опубликованы или готовятся к публикации в [3–5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00529).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
2. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. Singapore: World Scientific Publishing, 1995.
3. *Кучер Н. А., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1338–1353.
4. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20, N 2.
5. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Изв. РАН. Сер. мат. 2013 (в печати).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ СФЕРЕ

STABILITY OF THE SOLUTION WITH THE CONTACT DISCONTINUITY OF SHALLOW WATER EQUATIONS ON A ROTATING ATTRACTING SPHERE

Мамонтов Е. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; mamontov@hydro.nsc.ru

Рассматривается система уравнений мелкой воды, записанная в виде законов сохранения

$$\begin{aligned}
&(r\,h\,\sin\theta)_t + (q\,\sin\theta)_\theta + Q_\varphi = 0,\\
&(r\,q\,\sin\theta)_t + \left(\left(qv + \frac{gh^2}{2}\right)\sin\theta\right)_\theta + (qV)_\varphi - \left(QV + \frac{gh^2}{2}\right)\cos\theta\\
&= W\left(W\,h\,\sin^2\theta\,\cos\theta + Q\,\sin 2\theta\right),\\
&(r\,Q\,\sin\theta)_t + (Qv\,\sin\theta)_\theta + \left(QV + \frac{gh^2}{2}\right)_\varphi + qV\,\cos\theta = -Wq\,\sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь g — ускорение свободного падения, r — радиус сферы, $s(\theta,\varphi)$ — ее точка, θ, φ — сферические координаты, Ω — угловая скорость вращения, h — высота жидкости, $\mathbf{q} = h\,\mathbf{v}$ — полный импульс, $\mathbf{a}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ — единичные векторы, касательные соответственно к меридиану и параллели, проходящим через точку s. Используется представление

$$\mathbf{v} = v\mathbf{a} + V\mathbf{b}, \quad \mathbf{q} = q\mathbf{a} + Q\mathbf{b}, \quad q = hv, \quad Q = hV, \quad W = \Omega r.$$

Система (1) допускает частное решение с контактным разрывом. Малые возмущения указанного решения описываются линейной системой уравнений. После полного разделения переменных и некоторых упрощений задача сводится к нахождению собственных значений в сингулярной краевой задаче для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными коэффициентами. Оказывается, что имеются собственные значения с положительной вещественной частью. Тем самым, рассматриваемое решение является неустойчивым.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00026 а) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (проект НШ–6706.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остапенко В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П.* О разрывных решениях уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. 2011. № 2. С. 33–51.

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

ON THE SOLUTION CONTINUATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A QUASILINEAR SOBOLEV TYPE EQUATION

Манакова Н. А.[1], **Богатырева Е. А.**[2]

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]manakova@susu.ac.ru, [2]bogatyrevaea@susu.ac.ru

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным, $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}^*)$ и $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*)$ — дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{P} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{P}^* \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$ плотны и непрерывны.

Пусть оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{P}; \mathfrak{P}^*)$ симметричный, положительно определенный. Оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s-монотонный, p-коэрцитивный [1], однородный порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и удовлетворяет условию Липшица, причем производная Фреше оператора M симметрична.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для абстрактного квазилинейного операторного дифференциального уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}(L(u)) + M(u) = 0, \quad L(u) = Au + \lambda M(u), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Вектор-функцию $u \in C^1((-\tau;\tau);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую (2) на $(-\tau_0, \tau_0)$ при некотором $\tau_0 = \tau_0(u_0)$ и условию (1), назовем (*классическим*) *локальным решением* данной задачи, *проходящим через точку* u_0.

Лемма [2]. *Для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное локальное решение задачи* (1), (2), *проходящее через точку* u_0.

Вектор-функцию $u \in L_\infty(0,\tau;\mathfrak{U})$ такую, что $\dfrac{du}{dt} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{H})$ при $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовем (*обобщенным*) *глобальным решением* задачи (1), (2), если она удовлетворяет соотношениям $\left\langle \frac{d}{dt} L(u(t)), v \right\rangle + \langle M(u(t)), v\rangle = 0$ при почти всех $t \in (0,\tau)$ и $\langle u(0) - u_0, v\rangle = 0$ при всех $v \in \mathfrak{U}$.

Теорема. *Локальное решение задачи* (1), (2), *проходящее через точку $u_0 \in \mathfrak{U}$, единственным образом продолжимо до глобального решения на $(0,T)$ при любом $T \in \mathbb{R}_+$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свиридюк Г. А.* Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Изв. вузов. Матем. 1989. № 2. С. 55–61.
2. *Манакова Н. А., Кононова Е. А.* О начально-краевой задаче для уравнения Баренблатта – Гильмана // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 270–271.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER DIMENSION

Матвеева И. И.[1], **Уварова И. А.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]matveeva@math.nsc.ru, [2]sibirochka@ngs.ru

В работе рассматривается некоторый класс систем нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности n с коэффициентами, зависящими от нескольких параметров. Мы изучаем свойства решений систем и получаем оценки для их компонент. Используя эти оценки и опираясь на методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, предложенные Г. В. Демиденко (см., например, [1–4]), мы устанавливаем, что при больших n последняя компонента решения приближенно описывается решением одного уравнения с запаздывающим аргументом [5]. Оценки аппроксимации существенно зависят от размерности n и параметров, входящих в систему. Полученные результаты дают способ приближенного нахождения решений рассматриваемого класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности с использованием уравнений с запаздывающим аргументом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
2. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
3. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Матем. форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
4. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.
5. *Матвеева И. И., Мельник И. А.* О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 312–324.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE POLYHARMONIC EQUATION IN UNBOUNDED DOMAINS

Матевосян О. А.

Высшая школа науки, НИЛ "Фундаментальная и прикладная математика", Московский финансово-юридический университет, Москва, Россия;
hmatevossian@graduate.org

Изучаются вопросы единственности решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения во внешности компакта и в полупространстве в предположении, что обобщенное решение этой задачи обладает конечным интегралом Дирихле с весом $|x|^a$. В зависимости от значений параметра a доказаны теоремы единственности, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений этой же задачи во внешности компакта и в полупространстве.

В области Ω рассматривается задача Дирихле

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \ldots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где ν — направление внешней нормали к $\partial\Omega$. Решение $u(x)$ задачи (1), (2) рассматривается в классе $\overset{\circ}{W}{}^m_{loc}(\Omega)$ и понимается в смысле теории обобщенных функций.

Условием, характеризующим поведение решения на бесконечности, является ограниченность интеграла Дирихле $D_a(u(x),\Omega) := \int\limits_\Omega |x|^a \sum\limits_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx < \infty$ с весом $|x|^a$, $a \in \mathbb{R}^1$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди, в данной работе удалось получить критерий единственности решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения. Для построения решения используется вариационный метод [1], т. е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Задача Дирихле во внешности компакта. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus G$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, где G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ $(n > 4)$, $0 \in G$. Пусть $\binom{n}{m}$ — число сочетаний из n по m, $\binom{n}{m}$=0, если $m > n$.

Теорема 1. *Задача Дирихле* (1), (2) *с условием* $D_a(u(x),\Omega) < \infty$ *имеет:*
i) $\binom{n+m-1}{n}$ *линейно независимых решений, если* $-n \le a < n - 2m$;
ii) $\binom{n+m-2}{n-1}$ *линейно независимых решений, если* $n - 2m \le a < n - m$;
iii) *лишь тривиальное решение, если* $n - m \le a < \infty$;
iv) $k(r,n)$ *линейно независимых решений, если* $-2r - n + m \le a < -2r - n + 2m$, $r > 1$, *где* $k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-2m)!}{n!(r-2m)!}$.

Задача Дирихле в полупространстве. Пусть $\Omega \equiv \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 1\}$ с границей $\partial\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$, $n \ge 2$.

Теорема 2. *Задача Дирихле* (1), (2) *с условием* $D_a(u(x),\Omega) < \infty$ *имеет:*
i) *тривиальное решение, если* $-n \le a < \infty$;
ii) $k(r,n)$ *линейно независимых решений, если* $-2r - n + m \le a < -2r - n + 2m$, $r \ge 2$, *где* $k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-2m)!}{n!(r-2m)!} - \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(r-j+n-1)!}{(n-1)!(r-j)!}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

CONSERVATION LAWS AND OTHER FORMULAS IN THE DIFFERENTIAL GEOMETRY AND THEIR APPLICATIONS IN THE MATHEMATICAL PHYSICS

Мерабов А. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; mag@sscc.ru

Полученные формулы обобщают результаты статей автора в ДАН (2009. Т. 424, № 5; 2010. Т. 433, № 3, 4; 2011. Т. 441, № 3) на трехмерный случай.

1. Пусть $\{L_\tau\}$ — семейство гладких пространственных кривых L_τ с ортами Френе τ, ν, β (касательной, главной нормали и бинормали), сплошь заполняющих область D в пространстве x, y, z. Найден ряд законов сохранения (дивергентных тождеств) вида $\operatorname{div}\bar F = 0$, где вектор $\bar F$ выражается через орты Френе $\bar\tau$, $\bar\nu$, $\bar\beta$ кривых L_τ, их кривизну k и кручение $\varkappa$ как функции x, y, z. Вектор $\bar F$ содержит векторы кривизны некоторых кривых, например, кривых L_τ и векторных линий полей $\bar\nu$, $\bar\beta$. Все величины $\bar\nu$, $\bar\beta$, k, $\varkappa$ можно явно выразить через $\bar\tau$.

Найдены также дивергентные представления $K = \operatorname{div}\bar S_K$ и $H = \operatorname{div}\bar S_H$ для гауссовой кривизны K и средней кривизны H поверхности S, заданной уравнением $u(x, y, z) = 0$. Поля $\bar S_K$, $\bar S_H$ явно выражаются только через $\bar\tau$, $\operatorname{div}\bar\tau$, $\operatorname{rot}\bar\tau$, где $\bar\tau = \operatorname{grad} u/|\operatorname{grad} u|$ — направление или касательный орт векторной линии поля $\operatorname{grad} u$ ($\bar\tau$ на S есть нормаль к S). Эти формулы обобщены для поверхностей S_τ с нормалью $\bar\tau$, задаваемых другим способом.

2. Пусть L_τ — векторные линии произвольного гладкого поля $\bar v = \bar v(x, y, z) = |\bar v|\bar\tau$ с модулем $|\bar v| \neq 0$ и направлением $\bar\tau = \bar v/|\bar v|$. Тогда величины $\bar\tau$, $\bar\nu$, $\bar\beta$, k, $\varkappa$ и формулы п. 1 могут быть явно выражены через поле $\bar v$, а законы сохранения для семейства $\{L_\tau\}$ равносильны дивергентным тождествам для поля $\bar v$.

3. Даны приложения формул пп. 1 и 2 к классическим уравнениям математической физики; роль кривых L_τ играют при этом векторные линии рассматриваемого физического поля $\bar v$. Открыты дифференциальные законы сохранения для поля времен $\tau(x, y, z)$ (решений τ уравнения эйконала $|\operatorname{grad}\tau|^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = n^2(x, y, z)$, при этом $\bar v = \operatorname{grad}\tau$, L_τ — лучи, $\tau(x, y, z) = \text{const}$ — фронт, n — показатель преломления) в кинематической сейсмике (геометрической оптике). Найдены новые дифференциальные законы сохранения для решений гидродинамических уравнений Эйлера (здесь $\bar v$ — скорость) и для уравнений Максвелла.

В плоском случае они переходят в формулы из упомянутых статей. Например, в законы сохранения $\operatorname{div}\bar S(\bar\tau) = 0$ ($\bar S(\bar\tau) = \bar\tau\operatorname{div}\bar\tau - k\bar\nu$) для семейства кривых $\{L_\tau\}$; $\operatorname{div}\{\Delta\tau\operatorname{grad}\tau/n^2 - \operatorname{grad}\ln n\} = 0$ для решений τ уравнения эйконала; $\operatorname{div}\bar G = 0$, где $\bar G = |\bar v|^{-2}\{\bar v_t + \bar v\operatorname{div}\bar v + \operatorname{grad} p/\rho - \bar F\}$, ρ — плотность, p — давление, $\bar F$ — массовая сила, для гидродинамических уравнений Эйлера. Найдены также дивергентные формулы для гауссовой и средней кривизны фронта $\tau(x, y, z) = \text{const}$ и поверхностей S_τ с нормалью $\bar\tau$, ортогональных к линиям тока (векторным линиям скорости $\bar v$ при $t = \text{const}$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00648).

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ИЗ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

EVOLUTION EQUATIONS FOR HYDRODYNAMIC MOMENTS OF CONTINUOUS MEDIUM OF NONINTERACTING PARTICLES

Медведев С. Б.

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; medvedev@ict.nsc.ru

В работе В. В. Козлова [1] было получено обратимое по времени уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial N_0(t,x)}{\partial t} = t\sigma^2 \frac{\partial^2 N_0(t,x)}{\partial x^2}$$

для нулевого гидродинамического момента, которое получается усреднением по скоростям функции распределения с начальными данными специального вида.

В данном докладе рассмотрены более общие начальные данные и абсолютно непрерывные и дискретные распределения скоростей, в том числе распределения, не имеющие первых и вторых моментов. Для таких начальных данных получены эволюционные уравнения первого и произвольного порядков по времени. Найдены условия на начальные данные, для которых имеет место обратимость по времени.

Обсуждается существование индикаторов эволюции для уравнения Лиувилля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-12075 офи-м, № 12-01-00648 а) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых (договор № 11.G34.31.0054).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. Москва, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2008.

О МЕТОДЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ON A METHOD FOR PROVING THE EXISTENCE OF A GENERALIZED SOLUTION FOR SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Мередов М.[1], **Мередова М. М.**[2]

[1] *Международный Туркмено-Турецкий университет, Ашхабад, Туркменистан;*
[2] *Компания "Алтын Умыт", Ашхабад, Туркменистан;* mmuham@gmail.com

В данной работе предлагается метод доказательства однозначной разрешимости задачи Дарбу в области G для уравнения

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i(t) u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + bu_t + cu = F(x,t), \tag{1}$$

где $K_i(t) > 0$ при $t < 0$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$, $F(x,t) \in W_2^1(G)$. Область G ограничена снизу характеристическим конусом уравнения (1) с вершиной в точке $O(0,0,\ldots,t_0)$, $t_0 < 0$, сверху — частью S_0 гиперплоскости $t = 0$. Поверхность конуса обозначим через S, границу области G — через $\Gamma = S \cup S_0$.

Задача Дарбу. В области G найти функцию $u(x,t) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G}) \cap W_2^1(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,t)|_{S_1} = 0,$$

где S_1 — часть поверхности S, для точек которой $n_1 = \cos(n, x_1) > 0$.

На базе множеств функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющих сопряженным граничным условиям $v(x,0) = 0$, $v(x,t)|_{S_2} = 0$, где $S_2 = S \backslash S_1$, определяем два гильбертовых пространства H_1 и H_2. Доказывается, что билинейная форма, устанавливающая изоморфизм между данными пространствами, является ограниченным линейным функционалом, тогда в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $u_0(x,t) \in H_1$, который и является обобщенным решением задачи Дарбу.

Аналогично доказывается однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения (1) и следующей краевой задачи.

Задача. Требуется найти вектор-функцию $u(x,t) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G}) \cap W_2^1(G)$, удовлетворяющую в области G системе уравнений

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + bu_t + cu = F(x,t),$$

где $u = (u_1, u_2)$, a_i, b, c — двумерные матрицы, и следующим граничным условиям:

$$u_1(x,t)|_{\Gamma} = 0, \quad u_2(x,t)|_{S_0} = 0.$$

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЕМОДИНАМИКИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ КЛИНИЧЕСКИМ ДАННЫМ

AN INVERSE PROBLEM OF CONSTRUCTING THE GEMODYNAMICS DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE USE OF EXPERIMENTAL CLINICAL DATA

Михайлова А. В.[1], **Черевко А. А.**[2], **Чупахин А. П.**[2], **Кривошапкин А. Л.**[3], **Орлов К. Ю.**[3], **Панарин В. А.**[3]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* cherevko@mail.ru
[3] *Новосибирский научно-исследовательский институт патологии кровообращения им. ак. Е. Н. Мешалкина, Новосибирск, Россия*

Построение гемодинамических моделей сопряжено с большими трудностями, которые объясняются сложностью получения и неоднозначностью экспериментальных данных, сложностью самого объекта. Гидродинамика сосудов головного мозга — это нестационарная гидродинамика в сложной трехмерной сети каналов, стенки которых имеют различные прочностные свойства, погруженной в гелеобразную субстанцию головного мозга.

В докладе предлагается способ построения простой модели движения крови в артериях головного мозга, основанный на клинических (экспериментальных) данных о скорости и давлении крови, получаемых во время реальных операций в Нейрохирургическом центре ННИИ Патологии кровообращения.

Построена модель типа уравнения нелинейного осциллятора для давления крови, в которой скорость потока играет роль управления:

$$P'' = a_1 P' + a_2 P + b_2 P' P + b_3 P^2 + c_3 P' P^2 + c_4 P^3 + kV + l,$$

где P — давление, V — скорость, $a_1, a_2, b_2, b_3, c_3, c_4, k, l \in \mathbb{R}$.

Индивидуальность пациента задается вектором коэффициентов этого уравнения. Показано, что данная модель описывает процесс эмболизации (заклейки) аномалии сосудов головного мозга, типа артерио-венозной мальформации (шунт между артериями и венами). Полученные результаты представляют большой интерес для теоретической гемодинамики и предоперационного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (интеграционный проект № 44), Программы ОЭММПУ РАН (проект № 2.13.4), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31112 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1979.
2. *Редько С. Ф., Ушаков В. Ф., Яковлев В. В.* Идентификация механических систем. Киев: Наукова думка, 1985.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

A NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY IN ONE REGULARIZED PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL

Мусабеков К. С.

Академия Кокше, Кокшетау, Казахстан; it.kgu@mail.ru

Рассмотрим задачу оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} &= a\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - cv_1 f(v_2),\\
\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} &= b\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + kv_1 f(v_2) + g(v_3(t) - v_2(x,t)),\\
\frac{dv_3(t)}{dt} &= d\left(\int_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)\right) + u(t)(E - v_3(t)),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
a\frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \quad \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0,\\
b\frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \quad \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), \quad v_2(x,0) = v_{20}(x), \quad v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, d, E, v_{30} — константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно; $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $Q_T = (0,1) \times (0,T)$.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1,t)dt, \tag{4}$$

т. е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора. В работе [1] доказаны существование и единственность классического решения системы (1)–(3) при произвольной ограниченной и измеримой функции $u(t)$, и осуществлена регуляризация функционала (4). В данной работе для регуляризованной задачи получено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусабеков К. С.* Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 71–84.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ДИРИХЛЕ – НЕЙМАНА

DIFFERENTIAL PROPERTIES OF THE DIRICHLET–NEUMANN OPERATOR

Налимов В. И.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Оператор Дирихле – Неймана ставит в соответствие гармонической внутри "полупространства" $y_{d+1} < \eta(y)$ ($y \in \mathbb{R}^d$) функции Φ значение её производной по внешней нормали на Γ, умноженной на плотность поверхностной меры:

$$\varphi(y) \to G(h)\varphi(y) = (1 + |\nabla h(y)|^2)^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y, h(y)).$$

Интерес к этому оператору обусловлен тем, что с его помощью задача о безвихревых волнах на воде сводится к эволюционной (нелокальной) системе уравнений на свободной поверхности. Такой подход к задаче о волнах на воде позволил доказать её корректность в малом по времени. Поскольку оператор Дирихле – Неймана играет центральную роль в доказательстве, необходимо знать его свойства. Возможны различные способы его описания. В работе предполагается, что поверхность Γ допускает параметрическое представление $y = \zeta(x) = x + \eta(x)$ и в новых переменных оператору Дирихле – Неймана отвечает оператор $\varphi \to G(\xi)\varphi$. Параметрическое представление определяет матрицу $a = (\xi'^{*}\xi')^{-1}(\det \xi')^2$ и операторы $u \to Au = \operatorname{div}(a\,\nabla u)$ и $K = \sqrt{-A}$.

В работе получены следующие результаты [1].

Установлено, какому пространству H^q должна принадлежать векторная функция η, для того чтобы выполнялась оценка $\|G(\xi)\varphi\|_s \le c\| \, |\nabla|^{1/2} \, \varphi\|_{s+1/2}$ с постоянной, зависящей от η.

Аналогично установлено, какому пространству H^q должна принадлежать векторная функция η, чтобы было верно неравенство $\|G\varphi - K\varphi\|_s \le c\| \, |\nabla|^{1/2} \, \varphi\|_{s-1/2}$ с постоянной, зависящей от η.

Кроме того, в коммутаторе $[\Lambda^s, G(\xi)]$ (здесь $\Lambda = \sqrt{1 - A}$) выделено главное по η слагаемое и получена оценка остатка.

Основной математический аппарат, используемый в работе, — это теория полугрупп и оценки решений эллиптических уравнений в соболевских пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Налимов В. И.* Дифференциальные свойства оператора Дирихле – Неймана // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 355–388.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

REGULARIZED TRACE OF AN ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATOR WITH AN INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

Нальжупбаева Г. М.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
nalzhuppa@list.ru

Обыкновенные дифференциальные уравнения с интегральными краевыми условиями возникают в теории турбулентности (см. работу А. Зоммерфельда [1]), в теории марковских процессов (см. работу У. Феллера [2]) и в других отраслях естественных наук.

В функциональном пространстве $L_2(0,\,1)$ исследуются спектральные свойства обыкновенного дифференциального оператора второго порядка l, соответствующего выражению

$$l(y(x)) := -y''(x) + q(x)y(x), \quad 0 < x < 1,$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) - \int\limits_0^1 (l(y(x)))\overline{k(x)}dx = 0,$$

где $k(x)$ — граничная функция из пространства $L_2(0,1)$, $\overline{z}$ означает комплексное сопряжение числа $z \in \mathbb{C}$ и $q(x)$ — непрерывная и вещественнозначная функция на отрезке $[0,1]$.

Получен первый регуляризованный след исследуемого оператора в исходном термине граничной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Atti IV Congr. Intern. Matem. Rome. 1909. N 3. P. 116–124.
2. *Feller W.* The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations // Ann. Math. 1952. V. 55, N 3. P. 468–518.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

NONLOCAL AND INVERSE PROBLEMS FOR SOME CLASSES OF PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

Намсараева Г. В.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия; gerel@inbox.ru

В работе изучается разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением $u(x,t)$ также неизвестного внешнего воздействия в уравнениях

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t),$$

$$u_t - u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) + q_1(t)h_1(x,t) + q_2(t)h_2(x,t)$$

(функции $q(t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ являются неизвестными, функции $h_1(x,t)$ и $h_2(x,t)$ во втором случае предполагаются линейно независимыми). В качестве условий переопределения в рассматриваемых задачах используются условия граничного переопределения.

Исходные обратные задачи эквивалентным образом редуцируются к новым пространственно-нелокальным краевым задачам для уравнений соболевского типа. Эти задачи имеют и самостоятельное значение. Разрешимость нелокальных задач устанавливается с помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок. Решение обратных задач строится по решениям соответствующих нелокальных задач.

Заметим, что обратные задачи указанного выше вида для псевдопараболических уравнений ранее изучались лишь в случае интегрального переопределения (А. И. Кожанов, В. Е. Федоров).

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ АДИАБАТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

ASYMPTOTIC INTEGRATION OF ADIABATIC OSCILLATORS

Нестеров П. Н.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия; nesterov.pn@gmail.com

В докладе исследуется поведение при $t \to \infty$ решений уравнений из класса адиабатических осцилляторов

$$\ddot{x} + x + q(t)x(t) = 0, \tag{1}$$

где $q(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. К уравнениям вида (1) приводят, в частности, различные проблемы квантовой механики. Примером такой задачи служит задача изучения спектральных свойств одномерного оператора Шредингера с убывающим потенциалом [1] (потенциалом типа Вигнера – фон Неймана). Классическим и подробно изученным адиабатическим осциллятором является уравнение (1) с функцией $q(t)$ вида

$$q(t) = \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} \qquad \left(q(t) = \frac{a \cos \lambda t}{t^\rho} \right), \tag{2}$$

где a, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\rho > 0$ (см. [2]).

С помощью варианта метода усреднения [3] и асимптотической теоремы Н. Левинсона (см., например, [4]) нами строятся асимптотические формулы для решений уравнения (1) при $t \to \infty$ для некоторых функций $q(t)$. Рассматривается вопрос об особенностях параметрического резонанса в уравнениях данного типа [5]. Кроме того, в докладе также обсуждаются особенности колебания решений адиабатического осциллятора (1) с функцией $q(t)$ вида (2) при введении в это уравнение фактора запаздывания

$$\ddot{x} + x + q(t)x(t-h) = 0, \tag{3}$$

где $h > 0$ (см. [6]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31004), а также гранта Президента РФ (договор № 14.124.13.80-МК).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Denisov S. A., Kiselev A.* Spectral properties of Schrödinger operators with decaying potentials // B. Simon Festschrift, Proc. of Symposia in Pure Mathematics. V. 76, part 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 565–589.
2. *Бурд В. Ш., Каракулин В. А.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 5. С. 658–666.
3. *Нестеров П. Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 731–742.
4. *Eastham M. S. P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.
5. *Burd V., Nesterov P.* Parametric resonance in adiabatic oscillators // Result. Math. 2010. V. 58, N 1–2. P. 1–15.
6. *Nesterov P.* Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. (to appear). [DOI: 10.1007/s00605-012-0437-2].

КЛАССЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

CLASSES OF THE GENERALIZED FUNCTIONAL-INVARIANT SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION

Нещадим М. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
neshch@math.nsc.ru

Относительно неискажающимися волнами называются [1] решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, \quad c = \text{const} > 0,$$

вида $u = gf(\theta)$, где функции $\theta = \theta(x, y, z, t)$ и $g = g(x, y, z, t)$ — соответственно фаза и амплитуда — фиксированы, а форма волны f — произвольная функция одного переменного. Н. П. Еругин [2] называет решения такого вида обобщенными функционально-инвариантными решениями (ОФИР). Данное определение, очевидно, переносится на случай любого числа $n \geq 1$ пространственных переменных и, более того, определение ОФИР может быть дано для любой системы дифференциальных уравнений.

Если амплитуда постоянна ($g = 1$), то получаем определение функционально-инвариантного решения (ФИР). Так, например, в работе С. Л. Соболева [3] доказано, что все ФИР уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ даются формулой Смирнова – Соболева $t\sqrt{a^2(u) + b^2(u)} + xa(u) + yb(u) = c(u)$, где a, b, c — произвольные функции переменной u. Нетрудно проверить, что для случая n пространственных переменных аналогичная формула

$$t\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2(u)} + \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(u) = a_0(u),$$

где $a_k(u)$ — произвольные функции от u, $k = 0, \ldots, n$, дает ФИР волнового уравнения $\Delta u = u_{tt}$. Но в размерности $n \geq 3$ есть ФИР, которые не описываются этой формулой [2].

В работе доказывается, что формула Смирнова – Соболева дает полное описание вещественнозначных ФИР волнового уравнения в пространстве произвольной размерности. Доказывается, что многофазные решения являются существенно комплекснозначными. Рассматривается задача полного описания амплитуд для фазовых функций, приведенных в вышеуказанных работах. И, кроме того, исследуются некоторые переопределенные системы, связанные с задачей построения ОФИР.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.–Л.: ГТТИ, 1945.
2. *Еругин Н. П., Смирнов М. М.* Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 853–865.
3. *Соболев С. Л.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259–264.

РЕДУКЦИЯ СИСТЕМЫ СКИРМА – ФАДДЕЕВА
REDUCED SKYRME–FADDEEV SYSTEM

Новиков Д. П.[1], **Павлов М. В.**[2]

[1] *Омский государственный технический университет, Омск, Россия;*
nvdmpr@mail.ru
[2] *Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия;*
maxim.pavlov@mtu-net.ru

Рассматривается редуцированная система Скирма – Фаддеева [1]

$$w_{tt} = w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}, \quad w_t^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 - \epsilon,$$

$$u_t w_t = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z,$$

$$(w_s^2 - \epsilon) u_k u_m w_{km} = 2 u_s w_s u_k w_m w_{km} - (u_k w_k)^2 w_{mm}$$

(индексы s, k, m пробегают значения x, y, z, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Первые два равенства в ней образуют систему уравнений Д'Аламбера – эйконала [2], которая связана с задачей построения функционально инвариантных решений [3] волнового уравнения (путем применения преобразования годографа).

В [2] получено полное описание решений w в терминах неявных функций. На этой основе получено, что на решениях w последнее уравнение (квадратичное по первым производным u) можно представить в виде

$$(Au_x + Bu_y + Cu_z)(Du_x + Eu_y + Fu_z) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martina L., Pavlov M. V., Zykov S. A.* Waves in the Skyrme–Faddeev model and integrable reductions // arXiv: 1210.1873.
2. *Фущич В. И., Жданов Р. З., Ревенко И. В.* Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 11. С. 1471–1486.
3. *Соболев С. Л.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1934. Т. 5. С. 259–264.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

GLOBAL SOLVABILITY OF A SOBOLEV TYPE EQUATION WITH DELAY

Омельченко Е. А.

Уральский филиал Российской академии правосудия, Челябинск, Россия;
omeka@ya.ru

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (линеен, замкнут и плотно определен в пространстве $\mathfrak{U}$). Рассмотрим задачу

$$u(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{1}$$

для линейного интегродифференциального уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \int\limits_{-r}^{0} \mathcal{K}(s)u(t+s)ds + f(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{2}$$

где $\mathcal{K} : [-r, 0] \to \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. *Решением* задачи (1), (2) называется такая вектор-функция $u \in C^1([0, +\infty);\mathfrak{U}) \cap C([-r, +\infty);\mathfrak{U})$, которая удовлетворяет уравнению (2) на полуоси $[0, +\infty)$ и условию (1) на отрезке $[-r, 0]$.

Теорема 1 [1]. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален. Тогда*
(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;
(ii) $L|_{\mathfrak{U}^k} \equiv L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M|_{\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^k} \equiv M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;
(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0$ *нильпотентен степени не больше* p.

С помощью результатов теоремы 1 и теоремы о сжимающем отображении получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален, $f \in C^{p+1}([0, +\infty);\mathfrak{F})$, $h \in C([-r, 0];\mathfrak{U})$, $h(0) \in \operatorname{dom} M$, $\mathcal{K} \in C^{p+1}([-r, 0];\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}))$, $\mathcal{K}^{(n)}(-r) = \mathcal{K}^{(n)}(0) = 0$ при $n = 0, \ldots, p$,*

$$(I - P)h(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I - Q) \left((-1)^k \int\limits_{-r}^{0} \mathcal{K}^{(k)}(s)h(s)ds + f^{(k)}(0) \right).$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.

ФОРМУЛА СЛЕДА ВОЛЬТЕРРОВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

THE TRACE FORMULA OF A VOLTERRA–STURM–LIOUVILLE OPERATOR IN THE SPACE WITH AN INDEFINITE METRIC

Оразов И. О.[1], **Шалданбаев А. Ш.**[2]

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. О. Ауезова, Шымкент, Казахстан; [1]orazov51@mail.ru, [2]shaldanbaev51@mail.ru

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ вольтерровый оператор Штурма – Лиувилля

$$Ly = -y''(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2), \tag{2}$$

где a_{ij} $(i = 1,\ 2;\ j = 1,\dots,4)$ — произвольные комплексные постоянные.

Пусть оператор S определен формулой [1, с. 42]

$$Su(x) = u(1-x), \quad x \in (0,1). \tag{3}$$

Если оператор SL самосопряжен в пространстве H, то в силу ядерности он имеет конечный след [2, с. 125].

Вольтерровость оператора (1)–(2) обеспечивается условиями [3, с. 30]

$$\Delta_{24} = 0, \quad \Delta_{14} + \Delta_{32} = 0, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0,$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$ $(i = 1,2;\ j = 1,\dots,4)$. Условия самосопряженности оператора SL отличаются от этих условий, поэтому класс изучаемых нами операторов не пуст.

Постановка задачи. Вычислить след оператора $(SL)^{-1}$, где L — вольтерровый оператор Штурма – Лиувилля (1)–(2), а оператор S определен формулой (3).

Теорема. *Если*

а) $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{14} + \Delta_{32} = 0$, $\Delta_{12} + \Delta_{34} \neq 0$,

б) $\overline{\Delta}_{12} = e^{i\vartheta}\Delta_{12}$, $\overline{\Delta}_{34} = e^{i\vartheta}\Delta_{34} = 0$, $\overline{\Delta}_{14} = -e^{i\vartheta}\Delta_{14} = 0$,

где $e^{i\vartheta} = \overline{\Delta_{12} + \Delta_{34}}/\Delta_{12} + \Delta_{34}$, *то оператор Штурма – Лиувилля* (1)–(2) *вольтерров, оператор* SL *имеет полную и ортогональную систему собственных векторов в пространстве* H, *оператор* $(SL)^{-1}$ *самосопряжен и компактен, а его след вычисляется по формуле*

$$\operatorname{tr}(SL)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^1 G(x, 1-x)dx = -\frac{1}{4},$$

где $G(x,t)$ *— ядро функций Грина оператора Штурма – Лиувилля, т. е. является ядром обратного оператора* L^{-1} *оператора Штурма – Лиувилля* L.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т. Ш., Ахметова С. Т., Шалданбаев А. Ш.* К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал (Алматы). 2004. Т. 4, № 3. С. 41–48.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
3. *Кальменов Т. Ш., Шалданбаев А. Ш.* О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2000. № 3. С. 29–34.

О СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ ТИПА БЕЛЬТРАМИ
ON A SINGULAR SYSTEM OF BELTRAMI TYPE

Оспанов К. Н.

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан; kordan.ospanov@gmail.com

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -v_y + a_{11}u_x + a_{12}u_y + a_1u + a_2v = f, \\ u_y + a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_3u + a_4v = g, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{kl} $(k,\ l = 1,\ 2)$ непрерывно дифференцируемы и обеспечивают эллиптичность системы, a_j $(j = \overline{1,4})$ — ограниченные на каждом компакте функции, а $f,\ g \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Общеизвестны применения системы (1) в динамике жидкости и газа, теории поверхностей и оболочек, квантовой механике, а также в изучении свойств квазиконформных и других отображений. Наиболее распространенными представителями таких систем являются обобщенная система Коши – Римана и система Бельтрами. В ограниченной области качественные характеристики решения системы (1), краевые задачи для нее изучались в многочисленных работах, относительно полный их список можно найти в монографиях И. Н. Векуа и Л. Берс. Для решения краевых задач в них, в основном, применялись методы функций комплексного переменного и интегральных уравнений. В случае неограниченной области (сингулярный случай) система (1) исследована в меньшей мере, в основном, когда коэффициенты a_j $(j = \overline{1,4})$ с определенной скоростью стремятся к нулю около бесконечности (поточечно или в среднем). В сингулярном случае, когда хотя бы один из коэффициентов a_j $(j = \overline{1,4})$ строго отделен от нуля (т. е. когда, например, $a_1(x,y) \geq \delta > 0$), методы указанных работ не применимы, из-за чего система (1) исследована лишь в частных случаях.

В настоящей работе получены достаточные условия однозначной разрешимости системы (1), а для дифференциального оператора, соответствующего системе, приведены достаточные условия компактности резольвенты, двусторонние оценки s-чисел, указан тип резольвенты. Ранее аналогичные результаты были установлены, в основном, для уравнений типа Шредингера. Отметим, что решение системы (1) может не иметь обобщенных производных в смысле С. Л. Соболева, вследствие чего возникают вопросы с изучением его спектральных свойств.

Утверждения, касающиеся спектральных свойств резольвенты, получены благодаря установленной нами оценке коэрцитивного типа для решения системы.

К виду (1) приводится общая эллиптическая система двух вещественных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} d_{11}u_x + d_{12}u_y + b_{11}v_x + b_{12}v_y + d_1u + d_2v = g_1, \\ d_{21}u_x + d_{22}u_y + b_{21}v_x + b_{22}v_y + d_3u + d_4v = g_2 \end{cases}$$

с ограниченными коэффициентами d_{kl}, b_{kl} $(k,\ l = 1,\ 2)$.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF RIEMANN–HILBERT TYPE FOR SOME CLASSES OF SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ошоров Б. Б.[1], **Ошоров Бато Б.**[2]

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия; [1]oshorovbb@pochta.ru, [2]scalderfree@mail.ru

В докладе речь идет о краевых задачах для систем уравнений в частных производных первого порядка. Исследования в данном направлении начинались с изучения эллиптической системы уравнений Бицадзе, для которой задача Дирихле некорректна. Поиски корректных постановок для произвольных областей привели к необходимости предварительного изучения краевых задач для системы уравнений Коши – Римана. В частности, рассматривались краевые задачи Римана – Гильберта с разрывными граничными условиями, корректные как в прямоугольнике, так и в произвольных областях с достаточно гладкой границей. Это позволило найти корректные постановки задач для системы Бицадзе в произвольных областях [1].

При изучении системы Коши – Римана естественно возник интерес к ее многомерным аналогам. Матричное представление комплексных чисел и кватернионов [2] позволило подойти к этому вопросу с единых позиций. Изучаемые задачи в этом случае называем четырехмерными аналогами задачи Римана – Гильберта с разрывными краевыми условиями [3].

Все системы, упомянутые выше, являются эллиптическими по классификации Петровского. Возникает вопрос о существенности типа системы для рассматриваемых задач. Оказалось, что подобные постановки краевых задач с разрывными граничными условиями возможны для систем, не являющихся эллиптическими по Петровскому и имеющих коэффициентами матрицы с такой же структурой, что и в системах Коши – Римана, Моисила – Теодореско, системы для кватернион-функций [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ошоров Б. Б.* Задачи Римана – Гильберта и Пуанкаре с разрывными краевыми условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 696–704.
2. *Ошоров Б. Б.* Краевые задачи с разрывными граничными условиями для некоторых классов векторных и матричных функций. М.: Академия естествознания, 2010.
3. *Ошоров Б. Б.* О некоторых модельных эллиптических системах уравнений в четырехмерном пространстве // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, вып. 3. С. 91–98.
4. *Ошоров Б. Б., Ошоров Бато Б.* О неклассических системах уравнений в частных производных первого порядка // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы IV Междунар. конф. Ч. 2. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. С. 131–133.

СПЛАЙН ДЕФЕКТА 2 ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

THE DEFECT 2 SPLINE FOR A FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

Павлов В. П.[1], **Абдрахманова А. А.**[2]

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; [1]victor.pavlov.1951@gmail.com, [2]abdrahmanova-a@mail.ru

Рассматриваются возможности метода сплайнов пятой степени дефекта 2 для решения задачи об изгибе балки, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка для функции перемещения точек оси балки [1].

Внешняя распределенная нагрузка, действующая на балку, может иметь любой вид. Поэтому допускаем разрывы четвертых производных в узлах сплайна, что не допускается при использовании сплайнов пятой степени дефекта 1 [2]. Исключаем возможность разрыва третьей и второй производных, что приводит к необходимости учета сосредоточенной внешней силы и сосредоточенной внешней пары сил через распределенную нагрузку, действующую на малом отрезке вблизи точки приложения сосредоточенной силы.

При замене искомой функции перемещения осевой линии $w = w(x)$ на ее сплайновую аппроксимацию $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ определяется поперечная нагрузка $\widetilde{q}_z = \widetilde{q}_z(x)$, при которой сплайн $\mathbf{W}_{5,2}(x)$ является точным решением дифференциального уравнения равновесия

$$\widetilde{q}_z(x) = EI_y \frac{d^4\mathbf{W}_{5,2}(x)}{dx^4} + 2\frac{d(EI_y)}{dx}\frac{d^3\mathbf{W}_{5,2}(x)}{dx^3} + \frac{d^2(EI_y)}{dx^2}\frac{d^2\mathbf{W}_{5,2}(x)}{dx^2}.$$

Для определения сплайн-функции $\mathbf{W}_{5,2}(x)$, близкой к искомому решению $w = w(x)$, используем условие эквивалентности внешних действующих на балку нагрузок, заключающееся в том, что в пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, N-1$, точные $q_z = q_z(x)$ и приближенные $\widetilde{q}_z = \widetilde{q}_z(x)$ распределенные нагрузки приводятся к центру приведения, имеющему координату x_i,

$$\begin{cases} R_z^{(i)} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q_z(x)dx, & \widetilde{R}_z^{(i)} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{q}_z(x)dx, \\ M_y^{(i)} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q_z(x)(x-x_i)dx, & \widetilde{M}_y^{(i)} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{q}_z(x)(x-x_i)dx. \end{cases}$$

Приравнивая главные векторы $R_z^{(i)}$ и $\widetilde{R}_z^{(i)}$, и главные моменты $M_y^{(i)}$ и $\widetilde{M}_y^{(i)}$, и добавив четыре уравнения, учитывающие краевые условия, получаем систему из $2N+2$ алгебраических линейных уравнений, однозначно определяющую сплайн-функцию $\mathbf{W}_{5,2}(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов В. П.* Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2003.
2. *Павлов В. П., Абдрахманова А. А.* Расчет изгиба балок методом сплайнов // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 11. С. 98–104.

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

GROUP CLASSIFICATION OF A CLASS OF PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

Панов А. В.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; pan@csu.ru

Рассматривается полулинейное уравнение вида

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u), \tag{1}$$

где α и $f = f(u)$ — постоянный и функциональный параметры, $u = u(t, x)$ — неизвестная функция. Данное уравнение при $f(u) = e^u$ или $f(u) = ue^{u^2}$ и $\alpha \neq 0$ описывает физические явления в полупроводниках при учёте дебаевской экранировки и источников свободных зарядов [1]. В случае $f(u) = u^3$ уравнение описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов [1], а при $f(u) = u$ получается уравнение стратификации объемного заряда в полупроводнике [1]. Теорией полупроводников не ограничивается область применения уравнений такого класса. Например, при $f(u) = u - au^3$ получается известное уравнение Хоффа, описывающее выпучивание двутавровой балки.

В результате групповой классификации [2, 3] найдены ядра основных групп симметрий: для $\alpha \neq 0$ ядро состоит из сдвигов по независимым переменным, а для $\alpha = 0$ к сдвигам добавляется растяжение $X_3 = x\partial_x - 2t\partial_t$. Все нелинейные спецификации параметра f, расширяющие ядро, находятся в классах эквивалентности функций e^u, u^β, u^{-3}, $\pm e^u + 1$. Для всех этих спецификаций найдены группы симметрий уравнения (1).

Утверждение 1. *При $\alpha \neq 0$ уравнение (1) с функцией $f = u^{-3}$ обладает алгеброй допускаемых преобразований с базисными операторами*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = 4t\partial_t + u\partial_u,$$

$$X_4 = e^{2x}\partial_x + e^{2x}u\partial_u, \quad X_5 = e^{-2x}\partial_x - e^{-2x}u\partial_u.$$

Утверждение 2. *При $\alpha = 0$ уравнение (1) с функцией $f = e^u$ допускает бесконечномерную алгебру с базисом из операторов*

$$X_1 = \tau(t)\partial_t - \tau'(t)\partial_u, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = x\partial_x - 2\partial_u.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Мелешко С. В.* Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 56–62.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ON THE EXPONENTIAL ASYMPTOTIC FORMULA FOR HARMONIC FUNCTIONS

Парфёнов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
parfenov@math.nsc.ru

Для финитной липшицевой функции $\omega : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, где $n \in 1 + \mathbb{N}$, существует и единственно (см. теорему 3 в [1]) классическое решение U_ω задачи

$$\begin{cases} U_\omega(x) = x_n + o(|x|) & \text{при } x_n > \omega(x') \text{ и } x = (x', x_n) \to \infty, \\ \Delta U_\omega \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} D_i^2 U_\omega = 0 & \text{при } x_n > \omega(x'), \\ U_\omega = 0 & \text{при } x_n = \omega(x'). \end{cases}$$

Если E — фундаментальное решение оператора Лапласа, а расстояние R от x до $\operatorname{supp} \omega \times \{0\}$ достаточно велико, то по теореме 2 из [1]

$$\left| U_\omega(x) - x_n + 2 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega(\xi) D_n E\big(x - (\xi, 0)\big)\, d\xi \right| \leqslant C(n, \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}) x_n R^{-n} \|\omega\|^2_{\dot{H}^{1/2}}. \quad (1)$$

Доказательство использует метод дискретизации сингулярных интегралов, предложенный в [2, с. 67]. Неравенство Кашина – Бесова – Коляды

$$\|f\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(d) \|f\|_{\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

позволяет вывести из (1) поточечную оценку устойчивости

$$\big|U_\omega(x) - x_n\big| \leqslant C'(n, \|\omega\|_{\mathrm{Lip}}) x_n R^{-n} \|\omega\|_{L^1}.$$

В докладе обсуждается, как посредством развития техники из [1] получить асимптотическую формулу для градиента $\nabla U_\omega(x)$ при $x \to X$, где $X_n = \omega(X')$, аналогичную экспоненциальным асимптотическим формулам из работ [3] и [4], но при слабых предположениях о гладкости функции ω. Эта формула показывает, что при $h \downarrow 0$ градиент $\nabla U_\omega(X + he_n)$ отделён от нуля и бесконечности, если

$$\int\limits_0^1 \min_{\gamma\colon \gamma \text{ — многочлен в } \mathbb{R}^{n-1} \text{ степени } \leqslant 1} \|\omega - \gamma\|_{L^1(\{\xi\colon |\xi - X'| < t\})} \frac{dt}{t^{n+1}} < \infty. \quad (2)$$

Условие (2) менее ограничительно, чем условие Ляпунова – Дини (Видман, 1967), условие Бурдзи (1986) и локальное условие Ляпунова – Дини из [2, с. 110].

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парфенов А. И.* Оценка погрешности обобщенной формулы М. А. Лаврентьева нормой дробного пространства Соболева // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 335–377.
2. *Парфенов А. И.* Весовая априорная оценка в распрямляемых областях локального типа Ляпунова – Дини // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 65–150.
3. *Kozlov V., Maz'ya V.* Asymptotic formula for solutions to elliptic equations near the Lipschitz boundary // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 2005. V. 184, N 2. P. 185–213.
4. *Warschawski S. E.* On conformal mapping of infinite strips // Trans. Amer. Math. Soc. 1942. V. 51. P. 280–335.

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА: ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА

GENERALIZED NAVIER–STOKES EQUATIONS: EXISTENCE THEOREMS AND ENERGY EQUALITIES

Пастухова С. Е.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, Москва, Россия; pas-se@yandex.ru

Предполагается изложить известные на настоящий момент времени результаты о разрешимости уравнений Навье – Стокса для неньютоновых несжимаемых жидкостей. Порядок нелинейности в уравнениях может быть переменным, при этом — лишь измеримой функцией. Будут рассмотрены нестационарные и стационарные уравнения.

Особый интерес представляет вопрос о восстановлении энергетического баланса, нарушение которого теоретически допустимо, в частности, для трехмерного классического нестационарного уравнения Навье – Стокса. При построении слабого решения в процессе предельной процедуры возникает мера — предел плотностей вязких энергий. Предельная мера, вообще говоря, содержит неотрицательную сингулярную (относительно меры Лебега) компоненту. Именно эта сингулярная компонента поддерживает энергетическое равновесие. Изучены достаточные условия отсутствия сингулярной компоненты — в этом случае выполнено обычное энергетическое равенство.

Во многих отношениях надо следить лишь за регулярной компонентой предельной меры: важно, чтобы сохранялся её естественный вид — произведения тензора вязких напряжений на градиент решения. Это фундаментальное соотношение гарантирует разрешимость задачи. Найдены условия, обеспечивающие указанное представление абсолютно непрерывной компоненты предельной меры.

Подробно эти вопросы излагаются в [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00331) и гранта-субсидии Минобрнауки РФ (№ 14.B37.21.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об уравнениях Навье – Стокса: теоремы существования и энергетические равенства // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2012. Т. 278. С. 75–95.

ВАРИАЦИОННОЕ УСВОЕНИЕ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

SPLITTING SCHEME-BASED VARIATIONAL DATA ASSIMILATION FOR MULTIDIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION MODELS

Пененко А. В., Пененко В. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; aleks@ommgp.sscc.ru

В работе представлен численный алгоритм решения задачи усвоения данных, в которой по набору возмущённых значений функции состояния многомерной нестационарной конвективно-диффузионной модели во внутренних точках пространственно-временной области требуется уточнить и продолжить функцию состояния модели от имеющихся точек наблюдения. Схема усвоения данных со слабыми ограничениями строится посредством добавления в структуру априорных моделей физических процессов функций управления. Для такой расширенной модели рассматривается функционал невязки, описывающий расхождение между измеренными и вычисленными значениями. Введённые управляющие функции выступают в роли переменных для задачи минимизации функционала на фазовом пространстве модели. Таким образом, математическая модель выступает как естественный регуляризатор для некорректной задачи интерпретаций данных наблюдений.

Добавлением математической модели физических процессов в обобщенной постановке к целевому функционалу формируется расширенный функционал для задачи усвоения данных. Конструируются дискретные аналоги рассматриваемых агрегатов. Из условий стационарности для расширенного функционала получаются системы прямых и сопряженных уравнений, а также уравнения на введённые функции управления [1]. В общем случае полученная система может быть решена итерационно при определённых ограничениях на параметры усвоения.

Для моделей процессов конвекции-диффузии и окна усвоения длиной в один временной шаг дискретной модели многомерная модель может быть декомпозирована с помощью методов расщепления на набор нестационарных одномерных моделей. Мы предлагаем усваивать посредством прямых алгоритмов всю доступную информацию на одном модельном шаге по времени и соответствующих отдельных стадиях расщепления. Каждый такой одномерный фрагмент задачи усвоения, порождаемый расщеплением исходной модели, имеет вид трехдиагональной матричной задачи и может быть решен методом матричной прогонки [1, 2]. Такие версии алгоритмов экономичны с вычислительной точки зрения, эффективно распараллеливаются, и могут быть использованы в интегрированных моделях динамики и химии атмосферы.

Работа выполнена при частичной поддержке Президиума РАН (программа № 4), Программы ОМН РАН № 3, Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00187) и Сибирского отделения РАН (интеграционные проекты № 8, № 35).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Penenko V. V.* Variational methods of data assimilation and inverse problems for studying the atmosphere, ocean, and environment // Numer. Analysis Appl. 2009. V. 2, N 4. P. 341–351.
2. *Пененко А. В.* Некоторые теоретические и прикладные вопросы последовательного вариационного усвоения данных // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. С. 35–40.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ И ИНТЕГРИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ

A METHOD FOR CONSTRUCTION OF NUMERICAL MODELS OF MATHEMATICAL PHYSICS BASED ON VARIATIONAL PRINCIPLES AND INTEGRATING FACTORS

Пененко В. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; penenko@asscc.ru

Представлен новый метод построения численных моделей для решения прямых и обратных задач математической физики с помощью вариационных принципов. Теоретическую основу метода составляет оригинальный способ конструктивной реализации фундаментальной идеи Л. Эйлера об интегрирующих множителях для решения дифференциальных уравнений в рамках вариационного принципа.

Для построения численных схем используется разработанный нами аппарат локальных сопряженных задач для дискретизации интегральных тождеств вариационного принципа в комбинации с методами расщепления и декомпозиции [1]. Аналитические решения таких сопряженных задач играют в нем роль интегрирующих множителей. Подынтегральная структура вариационных принципов организуется с использованием формул Дирихле и Грина и тождества Лагранжа для дифференциальных операторов в рамках декомпозиции 4D функционалов по методу конечных объемов. Все построения численных схем для прямых и сопряженных операторов выполняются стандартной техникой вариационного исчисления.

В результате получаются семейства однородных дискретно-аналитических численных схем, обладающих свойствами аппроксимации, устойчивости, монотонности и транспортивности. Так, для операторов конвекции-диффузии-реакции, в предположении кусочно-постоянных коэффициентов в пределах каждого конечного объема, построенные трехточечные схемы являются точными для равномерных и неравномерных сеточных интервалов. Краевые условия первого, второго и третьего рода и условия на границах раздела областей с разными свойствами также выполняются точно. Все это существенно при исследовании разномасштабных процессов.

Конкретные реализации предлагаемого метода демонстрируются на примере объединенных моделей динамики и химии атмосферы [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00187), Президиума РАН (программа № 4), Программы ОМН РАН № 3, а также Сибирского отделения РАН (интеграционные проекты № 8, № 35).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Penenko V. V., Tsvetova E. A.* Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 226. P. 319–330.
2. *Пененко В. В., Цветова Е. А.* Вариационные методы построения монотонных аппроксимаций для моделей химии атмосферы // Сиб. журн. вычисл. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 239–252.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ТЕОРЕМА ТИХОНОВА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

BOUNDED SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACE AND TIKHONOV THEOREM ON A FIXED POINT

Перов А. И.[1], **Коструб И. Д.**[2], **Иванова Е. В.**[3]

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]anperov@mail.ru, [2]ikostrub@yandex.ru, [3]lena.ivanova.lica@yandex.ru

В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ произвольной размерности рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение n-го порядка, *не разрешённое относительно старшей производной* и имеющее следующий вид:

$$A_0x^{(n)} + A_1x^{(n-1)} + \cdots + A_nx = f\big(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}\big).$$

Предполагается, что $A_0, \ldots, A_n$ — постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{H}$, причём оператор A_0 непрерывно обратим. Также предполагается, что операторный характеристический многочлен $L_n(\lambda) \equiv A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_n$ удовлетворяет *условию нерезонансности*: $L_n(i\theta)$ непрерывно обратим при $-\infty < \theta < +\infty$.

Введём в рассмотрение *частотные постоянные* $\sigma_j = \sup\limits_{-\infty<\theta<+\infty} |(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)|$, $j = 0, \ldots, n$. Отметим, что $\sigma_j^2 \le \sigma_{j+1}\sigma_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Относительно нелинейной функции $f(t, x_0, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ предполагается, что она непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет *условию типа Липшица* по пространственным переменным $|f(t, x_0, \ldots, x_n)| \le \sum\limits_{j=0}^{n} l_j|x_j| + a$, где $l_0, \ldots, l_n$ — некоторые неотрицательные постоянные. Предполагается, что при любых ограниченных множествах $S_0, \ldots, S_n$ из $\mathbb{H}$ множество элементов вида $y = f(t, x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}$ при $t \in [a, b]$ и $x_0 \in S_0, \ldots, x_n \in S_n$ компактно в $\mathbb{H}$ (условие компактности).

Пусть выполнено основное частотное условие $q_\sigma \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} \sigma_j l_j < 1$.

Теорема. *При выполнении всех перечисленных выше предположений рассматриваемое уравнение имеет ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *вместе с производными до порядка* n *включительно (все они компактны).*

Если операторный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *гурвицев, то нелинейное уравнение диссипативное.*

При доказательстве ограниченности решения используется теорема Тихонова о неподвижной точке. Объясним, что функция $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ называется компактной, если компактно множество её значений $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{H}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986.
3. *Коструб И. Д., Перов А. И.* Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Saarbücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
5. *Эрдвардс Ф.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ НА РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

EXPONENTIAL ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF LINEAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Перцев Н. В.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; homlab@ya.ru

В работе рассматривается проблема построения двусторонних оценок вида

$$0 \le x(t) \le c\,e^{-\gamma\,t},\ c \in \mathbb{R}^m,\ c > 0,\ \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0,\quad t \ge 0, \tag{1}$$

для решения $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = \int\limits_{-\tau}^{0} dA(\theta)x(t+\theta) - Bx(t),\quad t > 0, \tag{2}$$

$$x(t) = x^{(0)}(t),\quad t \in [-\tau, 0]. \tag{3}$$

Неравенства между векторами из $\mathbb{R}^m$ понимаются как неравенства между их компонентами. Для u, $w \in \mathbb{R}^m$ записи $u \ge 0$, $w > 0$ означают, что все компоненты u неотрицательны, все компоненты w положительны. В (1), (2) принято, что $x(t) \in \mathbb{R}^m$ — искомая функция, $t > 0$, $x^{(0)}(t) \in \mathbb{R}^m$ — заданная на $[-\tau, 0]$ начальная функция с непрерывными неотрицательными компонентами. Запаздывание $0 < \tau < \infty$. Интеграл $\int\limits_{-\tau}^{0} dA(\theta)x(t+\theta)$ понимается в смысле Римана – Стилтьеса, где $A(\theta) = (a_{ij}(\theta))$ — $m \times m$-матрица, элементы которой — неубывающие на $[-\tau, 0]$ функции. Матрица $B = diag(b_{11}, \ldots, b_{mm})$ такова, что $b_{ii} > 0$, $1 \le i \le m$. Полагаем, что каждая строка матрицы $V_A = A(0) - A(-\tau)$ является ненулевой, т. е. система (2) не содержит уравнений вида $dx_i(t)/dt = -b_{ii}x_i(t)$.

Теорема. *Пусть выполнены предположения относительно матриц и начальных функций, входящих в* (2), (3). *Тогда, если $B - V_A$ является невырожденной М-матрицей, то для решения $x(t)$ задачи* (2), (3) *справедлива оценка* (1), *где $\gamma \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют системе неравенств*

$$0 < \gamma < \min(b_{11}, \ldots, b_{mm}), \tag{4}$$

$$c > 0,\quad \left(B - \gamma\,I - \int\limits_{-\tau}^{0} e^{-\gamma\,\theta}dA(\theta)\right)c \ge 0, \tag{5}$$

$$c \ge \sup_{t\in[-\tau,0]} \left(e^{\gamma\,t}\,x^{(0)}(t)\right). \tag{6}$$

Представлено два семейства решений неравенств (4)–(6). Для нахождения этих решений применяются свойства М-матриц, итерационный метод решения систем линейных уравнений и простейшие численные методы нахождения корней уравнений с монотонными функциями.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

STABILIZABILITY OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Петренко П. С.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; petrenko_p@mail.ru

Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)

$$F(t, x(t), x'(t), u(t)) = 0, \quad t \in T = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \tag{1}$$

где $F(t, x, x', u)$ — n-мерная достаточно гладкая вектор-функция, определенная в окрестности точки $(t_0, 0, 0, 0)$, $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция, $u(t)$ — функция управления, $\varepsilon = \text{const} > 0$. Полагается, что $\det\dfrac{\partial F(t, x, x', u)}{\partial x'} = 0$ и $F(t, 0, 0, 0) = 0\ \forall t \in T$. Под мерой неразрешенности ДАУ (1) относительно производной понимается индекс дифференцирования [1]. Доказана теорема о стабилизируемости по линейному приближению системы (1) со скалярным управлением.

Исследуется стабилизируемость линейной системы ДАУ

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, $U(t)$ — $(n \times l)$-матрица, $u(t)$ — l-мерная вектор-функция управления, $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция, $\det A(t) \equiv 0$. При анализе в работе используется эквивалентная структурная форма, в которой разделены "дифференциальная" и "алгебраическая" подсистемы [2]

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} L_j(t)u^{(j)}(t) = 0,\ x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} G_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \tag{3}$$

где $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Qx(t)$, Q — соответствующая матрица перестановок.

Предложен конструктивный способ замены управления

$$\begin{pmatrix} G_0(t) & G_1(t) & \dots & G_r(t) \\ L_0(t) & L_1(t) & \dots & L_r(t) \end{pmatrix} \operatorname{colon}\Big(u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)\Big) = b(t)w(t),$$

преобразующий ДАУ (3) к системе со скалярным управлением ($w(t)$ — скалярная функция управления). Такая замена позволила получить условия стабилизируемости для ДАУ (2) на основе известных теорем о стабилизируемости системы со скалярным входом, разрешенной относительно производной [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00287), Президиума РАН (проект № 17.1) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R.* Numerical solutions of initial-value problems in differential-algebraic equations. Philadelphia: SIAM, 1996.
2. *Щеглова А. А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 2010. № 9. С. 57–70.
3. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1999.

О ПРИНЦИПЕ КОМПАКТНОСТИ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ON THE COMPACT SUPPORT PRINCIPLE FOR SOLUTIONS OF THE SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

Пикулин С. В.

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия; spikulin@gmail.com

Эффект локализации носителя, или эффект "мёртвой зоны", заключается в том, что решение дифференциального уравнения обращается в нуль на некотором подмножестве области определения с непустым открытым ядром. Известно, что решения уравнения вида $\Delta u - u^\sigma = 0$ при $\sigma \in (0,1)$ подчиняются принципу компактности носителя: решение, определенное во внешности компакта, обращается в нуль в окрестности бесконечности.

Доклад посвящен обобщению принципов локализации и компактности носителя решения для полулинейных эллиптических уравнений вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)|u|^{\sigma-1}u = 0 \quad \text{в } \Omega$$

с краевым условием Дирихле $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, где Ω — ограниченная область либо внешность компакта в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\sigma \in (0,1)$, $a(x)$ — положительная в Ω измеримая функция, $a_{ij} \equiv a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$, при некотором $\lambda \geq 1$ выполняется условие равномерной эллиптичности: $\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Решения $u(x)$ рассматриваются в классе Соболева $W_2^1(\Omega)$ (либо $W_{2,loc}^1(\Omega)$) и понимаются в смысле распределений. Дополнительно на u налагается условие ограниченности в Ω. Функция φ считается продолженной в Ω, равенство $u = \varphi$ на $\partial\Omega$ понимается также в смысле W_2^1.

Положим $A(\rho) := \operatorname{mes}\{x \in \Omega : a(x) < \rho\}$ — функция, принимающая значения из множества $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ при $\rho > 0$. Допустим, что выполнены следующие условия: (i) $|\varphi| \leq M$ на $\partial\Omega$, где $M = \text{const} \geq 0$; (ii) $A(\rho) \leq A_0\,\rho^{n+s}$ при $\rho \in (0, \rho_0)$, где $s \geq 0$, $\rho_0, A_0 > 0$ — некоторые константы (в частности, достаточно выполнения неравенства $a(x) \geq a_0|x|^s$).

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, и выполнены условия* (i), (ii). *Тогда существует число $c > 0$, такое, что $u = 0$ на множестве* $\left\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq (M/c)^{\frac{1-\sigma}{2+s}}\right\}$.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$, где K — компакт, содержащий начало координат, и выполнены условия* (i), (ii). *Тогда существует число $c_1 > 0$ такое, что носитель $u(x)$ при достаточно больших M содержится в шаре с центром в начале координат и радиусом $(M/c_1)^\gamma$, где $\gamma = \frac{1-\sigma}{n+s-(n-2)\sigma} < \frac{1-\sigma}{2+s}$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00923) и Программы ОМН РАН № 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 3. С. 346–360.
2. *Littmann W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (3). 1963. V. 17, N 1–2. P. 43–77.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОМЕХАНИКИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

NUMERICAL METHOD OF STUDYING MATHEMATICAL MODELS OF MICROMECHANICS WITH PERIODIC IMPULSE IMPACT

Пиманов Д. О.[1], **Косцов Э. Г.**[2], **Фадеев С. И.**[3]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
pimanov-daniil@yandex.ru
[2] *Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия;*
kostsov@iae.nsk.su
[3] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
fadeev@math.nsc.ru

В последние годы получила развитие технология принципиально новых микроэлектромеханических приборов с широким спектром практического применения, а вместе с этим математическое моделирование их функционирования. В данной работе рассматривается серия математических моделей простых по конструкции приборов микроэлектромеханических систем (MEMS), в которых в качестве подвижного электрода используется недеформируемая платформа на пружине (прибор “платформа”), упругая балка с жестким закреплением концов (прибор “балка”) и упругая балка консольного типа (прибор “консоль”). Неподвижный электрод, покрытый слоем диэлектрика, отделён от подвижного узким зазором. Под воздействием периодически повторяющегося импульса напряженности электростатического поля между подвижным и неподвижным электродами возникают колебания подвижного электрода. Рассматриваемые математические модели описывают движение материальной точки (“платформа”) и цилиндрический изгиб упругой балки (“балка”, “консоль”).

Предложен эффективный метод расчётов периодических колебаний с периодом импульсного воздействия на основе численного решения соответствующих нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с условиями периодичности, формулировка которых связана с использованием метода прямых. Методом продолжения решения по параметру найдена область параметров модели, в которой существуют два периодических решения с периодами импульсного воздействия, из которых одно устойчиво, а второе — неустойчиво.

В итоге указаны условия, при которых колебания подвижного электрода не будут сопровождаться столкновениями с поверхностью диэлектрика, покрывающего неподвижный электрод. Благодаря микро-нанометровым размерам эти приборы могут быть использованы в роли механических резонаторов, генерирующих высокочастотные колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фадеев С. И., Пиманов Д. О.* Численное исследование математических моделей микромеханики при периодическом импульсном воздействии // Сиб. журн. индустр. математики. 2013 (в печати).
2. *Фадеев С. И., Пиманов Д. О.* Исследование периодических решений в математических моделях микромеханики при импульсном периодическом воздействии // Вестн. НГУ. 2013 (в печати).

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DEGENERATE EQUATIONS OF SOBOLEV TYPE IN NONCYLINDRICAL DOMAINS

Пинигина Н. Р.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; n-pinig@mail.ru

Для уравнений соболевского типа с эллиптико-параболическими операторами достаточно хорошо исследована разрешимость краевых задач в цилиндрических областях. В случае нецилиндрической области ранее были доказаны теоремы существования обобщенного решения начально-краевой задачи, а также теоремы существования локального и глобального по времени решений начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с эллиптическими операторами. Существование регулярного решения краевых задач доказано для общих нелинейных уравнений.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^m$ переменных $y_1, \dots, y_m$ с компактной и гладкой границей Γ, $G = \{(x,t) : 0 < x < \varphi(t),\ 0 < t < T\}$, $\varphi(0) = 1$, $0 < T < +\infty$, $Q = G \times \Omega$ — нецилиндрическая область. Функции $a^{ij}(y)$, $b^{ij}(y)$, $i, j = 1, \dots, m$, $a_0(y)$, $b_0(y)$, $f(x,y,t)$ — заданные, определенные при $y \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \varphi(t)]$, $t \in [0,T]$.

Оператор A — эллиптико-параболический оператор вида

$$Au = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}(a^{ij} u_{y_j}) + a_0(y)u, \quad a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0, \quad y \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^m;$$

оператор B — эллиптический такого же вида

$$Bu = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_i}(b^{ij} u_{y_j}) + b_0(y)u, \quad b^{ij}\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2, \quad k_0 > 0, \quad y \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Краевая задача. В области Q найти решение уравнения

$$u_t - u_{xxt} - Au_t - Bu = f(x,y,t),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,t)|_{t=0} = 0,$$
$$u(x,y,t)|_{x=0} = u(x,y,t)|_{x=\varphi(t)} = 0,$$
$$u(x,y,t)|_{(x,t)\in G, y\in\Gamma} = 0.$$

В работе доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения данной краевой задачи из пространства Соболева. Для доказательства теорем применяются метод регуляризации и метод продолжения по параметру.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.A18.21.0367).

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОДУ С АВТОНОМНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА МАЛЫХ ПАРАМЕТРА

PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF ODE WITH THE AUTONOMOUS RIGHT-HAND SIDE AND TWO SMALL PARAMETERS

Письменный Н. А.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
n.pismennyy@gmail.com

В настоящей работе рассматриваются нелинейные периодические колебания, описываемые системой

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1). \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что f_1, $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, γ_1, $\gamma_2 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1(t+T, x_1) \equiv \gamma_1(t, x_1)$, $\gamma_2(t+T, x_1) \equiv \gamma_2(t, x_1)$. Правые части системы допускают непрерывные частные производные первого порядка.

Порождающей назовем систему, отвечающую нулевым значениям параметров μ_1 и μ_2,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_2), \end{cases} \tag{2}$$

каждое из уравнений которой допускает однопараметрическое семейство T-периодических решений $\varphi_1(t, h_1)$, $\varphi_2(t, h_2)$, где h_1, h_2 — одномерные параметры.

Также предполагается, что единица является простым собственным значением операторов сдвига по траекториям линеаризованных на периодических решениях n-мерных уравнений системы (2): $\frac{dy_1}{dt} = f_1'(\varphi_1(t))y_1$, $\frac{dy_2}{dt} = f_2'(\varphi_2(t))y_2$.

Через $\psi_1(t, h_1)$, $\psi_2(t, h_2)$ обозначим периодическое решение сопряженных уравнений $\frac{dz_1}{dt} + (f_1'(\varphi_1(t+h_1)))^* z_1 = 0$, $\frac{dz_2}{dt} + (f_2'(\varphi_2(t+h_2)))^* z_2 = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *допускала ветвь периодических решений, обращающихся при* $\mu_1 = \mu_2 = 0$ *в* $\varphi_1(t, {h_1}^*)$, $\varphi_2(t, {h_2}^*)$, *необходимо, чтобы параметры* ${h_1}^*$, ${h_2}^*$ *удовлетворяли системе*

$$\begin{cases} P_1(h_1, h_2) = \displaystyle\int_0^T \langle \gamma_1(\tau, \varphi_2(\tau, h_2)), \psi_1(\tau, h_1) d\tau \rangle = 0, \\ P_2(h_1, h_2) = \displaystyle\int_0^T \langle \gamma_2(\tau, \varphi_1(\tau, h_1)), \psi_2(\tau, h_2) d\tau \rangle = 0, \end{cases}$$

если при этом выполняется условие

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial P_1}{\partial h_1} & \frac{\partial P_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial h_1} & \frac{\partial P_2}{\partial h_2} \end{matrix} \right| \Bigg|_{({h_1}^*, {h_2}^*)} \neq 0,$$

то отвечающее этим параметрам решение действительно существует и является единственным периодическим в окрестности $\varphi_1(t, {h_1}^*)$, $\varphi_2(t, {h_2}^*)$.

НЕЛИНЕЙНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ШАРПА – ЛОТКИ
A NONLINEAR INTEGRAL SHARPE–LOTKA MODEL

Пичугин Б. Ю.[1], **Пичугина А. Н.**[2]

[1] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* boris.pichugin@gmail.com

[2] *Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Институт математики и информационных технологий, Омск, Россия;* anna.pichugina@gmail.com

В работе [1] исследована нелинейная интегральная модель динамики изолированной популяции типа модели Шарпа – Лотки, но учитывающая самолимитирование и конечность времени жизни индивидуумов:

$$x(t) = y(t)\, e^{-\int\limits_0^t \lambda(x(s))\, ds}, \qquad y(t) = x^\circ(t) + \int\limits_0^t R(a)\, z(t-a)\, da,$$

$$b(t) = z(t)\, e^{-\int\limits_0^t \lambda(x(s))\, ds}, \qquad z(t) = b^\circ(t) + \int\limits_0^t \mu(a)\, R(a)\, z(t-a)\, da,$$

$$x^\circ(t) = \int\limits_t^\infty R(a)\, \varphi(a-t)\, da, \qquad b^\circ(t) = \int\limits_t^\infty \mu(a)\, R(a)\, \varphi(a-t)\, da, \quad t \geqslant 0.$$

Смысл входящих в уравнения функций следующий: $x(t)$ — численность индивидуумов популяции в момент $t \geqslant 0$; $b(t)$ — скорость появления новых индивидуумов в момент $t \geqslant 0$; $y(t)$ — численность индивидуумов популяции в момент $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования; $z(t)$ — скорость появления новых индивидуумов в момент $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования; $\lambda(x)$ — интенсивность гибели индивидуумов вследствие самолимитирования, $\lambda(x)$ локально липшицева; $R(a)$ — функция дожития: доля индивидуумов, доживающих до возраста a при условии отсутствия самолимитирования, $R(a)$ неотрицательна, не возрастает, $R(0) = 1$ и $\tau = \sup\{a \geqslant 0 : R(a) > 0\} < \infty$; $\mu(a)$ — весовая функция, определяющая вклад индивидуумов возраста a в производство потомства, $\mu(a)$ неотрицательна, ограничена и почти всюду непрерывна на $[0; \tau]$; $\varphi(s)$ — скорость рождения новых индивидуумов в момент $t = -s < 0$, $\varphi(s)$ неотрицательна, $\varphi(s) \in \mathcal{L}^1[0; \tau]$; $x^\circ(t)$ — численность первоначальных индивидуумов, которые дожили бы до момента $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования; $b^\circ(t)$ — скорость производства новых индивидуумов первоначальными индивидуумами в момент $t \geqslant 0$ при условии отсутствия самолимитирования.

Для данной модели доказаны: теорема о существовании, единственности и неотрицательности решения; теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных на конечном отрезке времени; теорема о существовании предела решения и теорема об устойчивости решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пичугина А. Н., Пичугин Б. Ю.* Асимптотические свойства решений нелинейной модели Шарпа – Лотки в наиболее общих предположениях // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 227–240.

О ДВУСТОРОННИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ABOUT DOUBLE-SIDED SOLUTIONS OF ONE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Плаксина В. П.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; vpplaksina@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + kx(t-\omega) + (Tx)(t) = f(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Получены условия разрешимости уравнения (1) в терминах сходимости рядов Брювье и малости оператора T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Vogl F.* On the uniform approximation of a class of analytic functions by Bruwier series // J. Approx. Theory. 2000. V. 107. P. 281–292.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ABOUT SOLVABILITY OF ONE SINGULAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Плаксина И. М.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; impl@list.ru

Определим пространство D^p, $1 < p < \infty$, абсолютно непрерывных функций $x\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, имеющих производную, принадлежащую пространству L^p, т. е. суммируемую со степенью p. Также определим сопряженный к p индекс $p' = \frac{p}{p-1}$.

Пусть оператор $T\colon D^p \to L^p$ вполне непрерывен. Пусть $1 \leqslant \rho < \infty$. Рассмотрим полуоднородную задачу Коши

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \frac{k}{t}x\left(\frac{t}{\rho}\right) + (Tx)(t) = f(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,b], \tag{1}$$

для сингулярного по независимой переменной линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка.

Решение задачи Коши будем искать в пространстве D^p. Для получения условий разрешимости уравнения (1) будем использовать вспомогательную задачу

$$(\mathcal{L}_\rho x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \frac{k}{t}x\left(\frac{t}{\rho}\right) = z(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0,b], \tag{2}$$

для модельного [1, с. 30] сингулярного уравнения.

Лемма. *Если $k < \frac{1}{p'}\rho^{1/p'}$, то уравнение краевой задачи* (2) *однозначно разрешимо при любой правой части $z \in L^p$.*

Решение уравнения краевой задачи (2) имеет вид $x = C_\rho z$. Здесь оператор $C_\rho\colon L^p \to D^p$ является линейным интегральным вольтерровым оператором: $(C_\rho z)(t) = \int\limits_0^t C_\rho(t,s)z(s)\,ds$ с ядром вида $C_\rho(t,s) = \sum\limits_{n=0}^{\left[\log_\rho \frac{t}{s}\right]} (-1)^n \frac{k^n}{n!}\left(\ln \frac{t}{\rho^n s}\right)^n$ при $\rho > 1$ или $C_1(t,s) = \left(\frac{t}{s}\right)^{-k}$ при $\rho = 1$. Здесь $\left[\log_\rho \frac{t}{s}\right]$ — целая часть выражения $\log_\rho \frac{t}{s}$.

Теорема 1. *Пусть $k < \frac{1}{p'}\rho^{1/p'}$ и оператор $I + C_\rho T$ обратим. Тогда задача Коши* (1) *однозначно разрешима при любой правой части $f \in L^p$.*

Теорема 2. *Пусть $k < \frac{1}{p'}$ и оператор $I + C_1 T$ обратим. Тогда для всех значений $\rho \geqslant 1$ задача Коши* (1) *однозначно разрешима при любой правой части $f \in L^p$.*

Замечание. Получены оценки функции $C_\rho(t,s)$ и эффективные признаки обратимости оператора $I + C_\rho T$, $\rho \geqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Абдуллаев А. Р.* О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // Тр. ин-та прикладной математики им. И. Н. Векуа. 1990. № 37. С. 5–12.
3. *Плаксина И. М.* Об одном сингулярном линейном функционально-дифференциальном уравнении // Изв. вузов. Матем. 2012. № 2. С. 92–96.

КРИТЕРИЙ ε-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЗА СВОБОДНОЕ ВРЕМЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

FREE TIME ε-CONTROLLABILITY CRITERION FOR A DEGENERATE EVOLUTION SYSTEM

Плеханова М. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
mariner79@mail.ru

Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$), $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$. Исследуем ε-управляемость систем, динамика которых описывается уравнением

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t). \tag{1}$$

Существование единственного сильного решения задачи Коши для уравнения (1) при условии сильной (L,p)-радиальности оператора M доказано в [1]. При том же условии на оператор M в [2] показано существование проекторов P и Q, которые позволяют пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ представить в виде прямых сумм подпространств $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^0$, $\mathcal{Y}^1$ соответственно. Там же доказано существование операторов $L_k : \mathcal{X}^k \to \mathcal{Y}^k$, $M_k : \mathrm{dom}M \cap \mathcal{X}^k \to \mathcal{Y}^k$, $k = 0, 1$, и (C_0)-непрерывной полугруппы $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geq 0\}$, порожденной оператором $L_1^{-1}M_1$.

Теорема. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $B \in C^1([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)B \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$. Тогда система (1) ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}\, X^{s_1}L_1^{-1}QB(s_2),\ s_1,s_2 \geq 0\} = \mathcal{X}^1,$$

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\ l=0,\ldots,p\right\} = \mathrm{dom}\, M_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75, № 2. С. 177–194.
2. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ИЛИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND CONTROL PROBLEMS FOR DEGENERATIVE PARABOLIC EQUATIONS IN NONCYLINDRICAL DOMAINS

Подгаев А. Г.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия;
pvu1707@mail.ru

Представлены результаты исследования задачи Стефана и задач в заданных нестационарных областях в направлении уменьшения требований на гладкость неизвестной границы фазового перехода или, соответственно, заданной границы и при допущении возможности вырождения уравнения. Целью является наиболее сложный вопрос — доказательство существования решения. В отличие от многих работ последнего времени в постановке задачи Стефана участвует в явном виде граница фазового перехода. В одномерном случае рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(u_x) + a(x,t)u_x + b(x,t)u.$$

При допущении довольно произвольного вырождения ($\varphi' \geq 0$) для заданной необязательно монотонной границы $x = s(t)$, $s \in W_2^1(0,T)$, установлены теоремы существования. В случае задачи Стефана неизвестная граница s находится из класса $W_2^1(0,T)$.

В трехмерном случае предложена новая нерассмотренная другими авторами задача также с неизвестной границей. В ней нахождению подлежит не только температура и граница фазового перехода, как в задаче Стефана, но и требуется подобрать такой коэффициент скрытой удельной теплоты плавления, при котором к заданному моменту времени масса (или объём) жидкой фазы достигнет заданной величины. В этой задаче требуется определить постоянную k (скрытая удельная теплота плавления), функцию $s(t)$, определяющую границу фазового перехода, и решение $c(x_1, x_2, x_3, t)$ вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности $c_t = (rc)^m \Delta_x c$ в области $Q_s = \{(x,t) : r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < s(t), 0 < t < T\}$. Установлена теорема существования. Наконец, изложены результаты по построению недостающей базы для исследования многомерных вырождающихся нелинейных уравнения в нецилиндрических областях в естественных координатах, на основании которой и с помощью предложенной модификации метода монотонности для таких областей доказаны теоремы однозначной разрешимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мейерманов А. М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Подгаев А. Г.* Задачи типа Стефана и с управляющим параметром // Торическая топология и автоморфные функции. Междунар. конф. Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2011. С. 164–169.
3. *Лисенков К. В.* Проекционный метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1 // Торическая топология и автоморфные функции. Междунар. конф. Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2011. С. 160–161.
4. *Podgaev A. G.* On the control problem of melting substance mass amount // VI Intern. Conf. on Mathematical Modeling: Abstracts. Yakutsk, 2011. P. 54–55.

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА И КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В МНОГОМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF THE SOURCE FUNCTION AND THE COEFFICIENT AT THE FIRST DERIVATIVE IN A SPACE VARIABLE FOR A MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION OF SPECIAL TYPE

Полынцева С. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия; siriuspsv@mail.ru

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t,x_i)u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t,x)u_{x_i}$$

$$+g_1(t)u_{zz} + b_1(t,x)u_z + g_2(t)u + b_2(t,x)f(t,x,z), \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{2}$$

Здесь функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_{n+1} соответственно, коэффициенты $\alpha_i(t,x_i)$, $i = \overline{1,n}$, $g_j(t)$, $j = 1, 2$, — непрерывные действительнозначные функции переменных t, x_i и t соответственно, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 0$ — const, причем $g_1(t) > 0$ при $t \in [0,T]$, $\alpha_i(t,x_i) > 0$. Коэффициенты $\beta_i(t,x)$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывные действительнозначные функции переменных t, x. E_n — n-мерное евклидово пространство, $n \in \mathbb{N}$.

Неизвестными в задаче являются коэффициенты $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Предполагается, что выполняются условия переопределения

$$u(t,x,a) = \psi_1(t,x), \quad u_z(t,x,a) = \psi_2(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{3}$$

где $a = \text{const}$, $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)\,|\,0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_n\}$, $\psi_1(t,x)$, $\psi_2(t,x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\psi_1(0,x) = u_0(x,a), \quad \psi_2(0,x) = u_{0z}(x,a), \quad x \in E_n.$$

Под решением задачи (1)–(3) в полосе $G_{[0,t^*]}$, $0 < t^* \leqslant T$, понимается тройка функций $b_1(t,x)$, $b_2(t,x)$, $u(t,x,z)$, которые удовлетворяют соотношениям (1)–(3).

В работе доказана теорема существования и единственности классического решения обратной задачи (1)–(3) в классе гладких ограниченных функций. При доказательстве использовался подход, позволяющий с помощью условий переопределения свести исходную обратную задачу (1)–(3) к прямой вспомогательной задаче Коши для нагруженного уравнения. Разрешимость прямой задачи доказана методом слабой аппроксимации [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.
2. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

INVESTIGATION OF SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS

Попов Н. С.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; popovnserg@mail.ru

Работа представляет собой исследование разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием А. А. Самарского с переменными коэффициентами для одномерных и с граничным условием интегрального вида для многомерных псевдогиперболических уравнений третьего порядка.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, $Q = \Omega \times (0,T)$ $(0 < T < +\infty)$, $S = \Gamma \times (0,T)$.

Краевая задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t - \Delta u\right) - Bu = f(x,t), \quad Bu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b(x,t)u, \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S}.$$

В одномерном случае уравнение (1) имеет вид

$$u_{tt} - a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u - u_{xxt} = f(x,t), \tag{3}$$

для которого рассматриваются пространственно нелокальные краевые условия

$$a_{11}(t)u_x(0,t) + a_{12}(t)u_x(1,t) + b_{11}(t)u(0,t) + b_{12}(t)u(1,t) = 0, \tag{4}$$

$$a_{21}(t)u_x(0,t) + a_{22}(t)u_x(0,t) + b_{21}(t)u(0,t) + b_{22}(t)u(1,t) = 0. \tag{5}$$

Краевая задача 2. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (3) и такую, что для нее выполняются краевые условия (4), (5), а также начальные условия (2).

Методом продолжения по параметру и априорных оценок доказывается разрешимость краевых задач 1 и 2. Ранее подобные методы в близкой ситуации эффективно использовались в работах [1, 2].

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.132.21.1349).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1116–1172.
2. *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 82–95.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGES OF THE TIME DIRECTION

Попов С. В.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; madu@ysu.ru

В краевых задачах для параболических уравнений с меняющимся направлением времени гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения гельдеровским пространствам [1]. Пространственно нелокальные краевые задачи для параболических уравнений, а также для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением времени рассматривались в работах [2, 3].

В настоящей работе рассматриваются пространственно нелокальные краевые задачи для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания.

Для таких задач применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Применение единого подхода при общих условиях склеивания (сопряжения) для таких уравнений показывает, что нецелый показатель $p - [p]$ гельдеровского пространства может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением времени.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проекты № 4402, № 5562).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственных нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. ун-та. Сер. естественнонаучная. 2008. № 3 (62). С. 165–174.
3. *Туласынов М. С.* Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с меняющимся направлением времени с нелокальными граничными условиями Самарского // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2010. С. 279–292.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A CLASS OF COMPOSITE TYPE EQUATIONS WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT AT THE HIGHEST DERIVATIVE

Потапова С. В.

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; sargyp@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (-T,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (-T,T)$ — его боковая граница, $a^{ij}(x)$, $i, j = 1,\dots,n$, $a_0(x)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$ функции, $f(x,t)$ — функция, заданная при $(x,t) \in \overline{Q}$, $h(t)$ — разрывная функция такая, что $h(t) > 0$ при $t > 0$, $h(t) < 0$ при $t < 0$ и $h(t) \in C^1([-T,0])$, $h(t) \in C^1([0,T])$, $h(+0) \neq h(-0)$, функции $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $k = 1,\dots,4$, заданы при $x \in \Omega$ и векторы $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x))$, $(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ линейно независимы при всех $x \in \overline{\Omega}$.

Обозначим

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u,$$

$$Q^+ = \{(x,t) : (x,t) \in Q, t > 0\}, \quad Q^- = \{(x,t) : (x,t) \in Q, t < 0\}, \quad Q_1 = Q^+ \cup Q^-.$$

Краевая задача: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения

$$u_{tt} - h(t)\triangle u_t + Lu = f(x,t), \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия

$$u(x,t)\big|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,T) = u(x,-T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

а также условия сопряжения

$$\alpha_1(x)u(x,+0) + \alpha_2(x)u(x,-0) + \alpha_3(x)u_t(x,+0) + \alpha_4(x)u_t(x,-0) = 0, \tag{4}$$

$$\beta_1(x)u(x,+0) + \beta_2(x)u(x,-0) + \beta_3(x)u_t(x,+0) + \beta_4(x)u_t(x,-0) = 0. \tag{5}$$

В случае непрерывной функции $h(t)$ в [1] показано, что для таких уравнений корректной может быть как начально-краевая задача, так и задача с данными на всей границе (в частности, задача Дирихле). В случае разрывных коэффициентов разрешимость тех или иных краевых задач для уравнений соболевского типа вида (1) ранее практически не изучалась — отметим лишь работу [2]. В данной работе методом регуляризации и методом продолжения по параметру доказано существование регулярных решений краевой задачи (1)–(5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. *Potapova S. V.* Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction // TWMS J. Pure Appl. Math. 2012. V. 3, N 1. P. 75–91.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ON SOME CLASSES OF EVOLUTIONARY INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

Пятков С. Г.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
pyatkov@math.nsc.ru

Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида в параболических уравнениях и системах. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^{2m} и $Q = (0,T) \times G$. Параболическая система имеет вид

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x) q_i(t,x') + f, \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и A — матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(t,x) D^\alpha, \quad D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}).$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(t,x) D^\beta u|_S = g_j(t,x), \tag{2}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1, \dots, m$, и $S = (0,T) \times \Gamma$. Неизвестными в (1), (2) являются решение u, функции $q_i(t,x')$ $(i = 1, \dots, r)$, входящие в правую часть (1). Условия переопределения для нахождения этих функций q_i имеют вид

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_n}\Big|_{S_i} = \psi_{ik}(t,x'), \quad S_i = (0,T) \times \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad k = 0, \dots, r_i - 1, \tag{3}$$

где $\{\Gamma_i\}$ — множество гладких $n-1$-мерных поверхностей, лежащих в G, $r_i \ge 1$ для всех i и $r = h(r_1 + \dots + r_s)$. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. Основное условие на область G и поверхности Γ_i состоит в следующем: существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с границей класса C^{2m} такая, что $G \subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = \varphi^i(x'), x' \in \Omega\}$, $\varphi^i(x') \in C^{2m}(\overline{\Omega})$ при всех $i = 1, \dots, s$, и существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$U_{\delta i} = \{(x', \varphi^i(x') + \eta) : x' \in \Omega, |\eta| < \delta\} \subset G, \quad U_{\delta i} \cap U_{\delta j} = \emptyset$$

при $i \ne j$, $i, j = 1, \dots, s$.

При выполнении условия параболичности системы мы указываем условия на граничные операторы и данные задачи, когда задача (1)–(3) имеет единственное решение из класса $u \in W_p^{1,2m}(Q)$, $q_i \in L_p(Q_0)$, где $Q_0 = (0,T) \times \Omega$ и $i = 1, \dots, r$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00260).

КОНВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРОХОЖДЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА КРИВОЛИНЕЙНОМ КОНТАКТЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

CONVOLUTION-TYPE TRANSMISSION OPERATORS OF ACOUSTICS WAVES AT CURVILINEAR CONTACT OF INHOMOGENEOUS MEDIA

Ракшаева Е. Ж.[1], **Айзенберг А. М.**[2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* rcatherine89@gmail.com

[2] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* aizenbergam@ipgg.sbras.ru

Строгое описание явления отражения и преломления на границе двух сред играет важную роль для развития теории методов решения прямых и обратных задач сейсмики. Были предприняты многочисленные попытки использовать строгие постановки краевых задач математической теории волн с целью описания этого явления в терминах операторов прохождения (отражения и преломления). Впервые граничные условия на плоском контакте однородных акустических сред были записаны в форме преобразования отражения-преломления с конволюционными операторами прохождения в [1]. Позже это представление граничных условий было обобщено на случаи плоского или криволинейного контакта неоднородных акустических и упругих сред [2–4]. Операторы прохождения также имеют вид двукратных сверток по криволинейной границе. Их ядра содержат быстро осциллирующие и дробно-радикальные функции, которые зависят от локальных значений материальных параметров сред и средней кривизны границы.

В данной работе определены условия, при которых операторы прохождения не зависят от геометрических параметров границы. В каждом полупространстве общее решение системы уравнений движения частиц представляется в виде обобщенного пространственного спектрального разложения, подобного разложению Зоммерфельда – Вейля, по локальным аналогам плоских волн. Доказано существование такой криволинейной метрики в тонкой окрестности криволинейной границы (из класса поверхностей А. Д. Александрова), в которой система уравнений движения частиц инвариантна по отношению к ограниченному регулярному возмущению плоской границы. Граничные условия задачи прохождения редуцированы к линейному преобразованию отражения-преломления на границе. Оно записано в терминах матричных операторов прохождения конволюционного типа, которые действуют на предельные значения волновых мод, распространяющихся в тонкой окрестности границы во встречных направлениях. Элементы матричных ядер этих операторов представлены двукратным преобразованием Фурье от коэффициентов отражения или преломления плоских волн с материальными параметрами сред, фиксированными в точке вычисления свертки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berkhout A. J.* Applied seismic wave theory (Advances in exploration geophysics). Vol. 1. Amsterdam: Elsevier, 1987.
2. *Ракшаева Е. Ж., Айзенберг А. М., Айзенберг М. А., Андерссон Ф.* Описание отраженных и преломленных сейсмических волн на контакте однородных сред в терминах конволюционных операторов прохождения // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, 2011. С. 50–51.
3. *Ayzenberg M., Tsvankin I., Ayzenberg A. M., Ursin B.* Effective reflection coefficients for curved interfaces in transversally isotropic media // Geophysics. 2009. V. 74, N 5. P. WB33–WB53.
4. *Klem-Musatov K. D., Aizenberg A. M., Helle H. B., Pajchel J.* Reflection and transmission at curvilinear interface in terms of surface integrals // Wave Motion. 2004. V. 39, N 1. P. 77–92.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СОПРЯЖЁННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ON THE ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE ADJOINT PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS

Резникова И. А.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
ilona_reznikova@mail.ru

Изучается неоднородное тело в виде шара, у которого ядро

$$\overline{\Omega}_1 = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant R_1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

и слой

$$\overline{\Omega}_2 = \{(r,\theta,\varphi) \mid R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

состоят из разных материалов (схематическое представление о строении Земли в первом приближении). Соответствующие поля температур $u_j(r,\theta,\varphi,t)$, $j = 1,2$, неизвестны, они удовлетворяют уравнениям

$$u_{jt} = \chi_j \Delta u_j + f_j(r,\theta,\varphi,t), \quad t > 0, \quad (r,\theta,\varphi) \in \Omega_j,$$

где χ_j — известные положительные постоянные — коэффициенты температуропроводностей, f_j — заданные внутренние источники тепла.

Кроме того, имеются начальные и граничные условия

$$u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = 0,$$

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \quad k_1 u_{1r}(R_1,\theta,\varphi,t) = k_2 u_{2r}(R_1,\theta,\varphi,t), \tag{1}$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0, \quad |u_1(0,\theta,\varphi,t)| < \infty, \tag{2}$$

$u_j \in W_2^1(\Omega_j)$, k_j — известные положительные постоянные — коэффициенты теплопроводностей. Для функций u_j, удовлетворяющих только граничным условиям (1), (2), доказано неравенство типа Фридрихса

$$\int\limits_{\Omega_1} u_1^2 \, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} u_2^2 \, d\Omega_2 \leqslant M_0 \left(k_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 \, d\Omega_1 + k_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 \, d\Omega_2 \right),$$

причём положительная постоянная M_0 не может быть уменьшена.

Предположим, что (ниже A_{01}, A_{02}, A_1, A_2, A_3 — положительные постоянные)

$$\|f_j(r,\theta,\varphi,t)\|_{L_2(\Omega_j)} \leqslant A_{0j} e^{-\gamma t}, \quad \gamma > \delta = \frac{1}{M_0} \min\left(\frac{\chi_1}{k_1}, \frac{\chi_2}{k_2} \right), \tag{3}$$

тогда оценки функций u_j имеют следующий вид

$$|u_2| \leqslant A_1 e^{-\frac{\delta t}{2}} \qquad \forall r \in [R_1, R_2],\ t \in [0,T],$$

$$|u_1| \leqslant A_2 e^{-\frac{\delta t}{2}} + A_3 e^{-\gamma t} + h(t) \qquad \forall r \in [0, R_1],\ t \in [0,T],$$

$T > 0$ — произвольное число, величина δ зависит от геометрии области и физических параметров контактирующих сред. Для Земли $\delta \approx 1,08 \cdot 10^{-18}/c$. Заметим, что при $t \to \infty$ температуры в средах стремятся к нулю, а условие (3) влечёт экспоненциальное затухание интенсивности внутренних источников тепла.

Замечание. Если на внешней границе задано неоднородное условие $u_2|_{r=R_2} = v(\theta,\varphi,t)$, то замена $u_2 = \overline{u}_2 + v(\theta,\varphi,t)(r-R_1)^2(R_2-R_1)^{-2}$ делает задачу однородной для функций u_1, $\overline{u}_2$. Изменится лишь внутренний источник тепла f_1.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. К. Андрееву за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

IDENTIFICATION PROBLEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INCOMPLETE INFORMATION

Ройтенберг Е. Я.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; lavrov@imec.msu.ru

При исследовании динамических объектов для измерения какой-либо физической величины используется измерительный прибор. Нельзя точно предсказать результаты измерения даже при наличии всей возможной информации об условиях, при которых оно происходит. Большое число исследований основано на допущении о стохастической природе погрешностей эксперимента: ошибок измерений в канале наблюдения, возмущений в динамике объекта, ошибок в задании априорной информации о его начальном состоянии. Задача оценивания состояния и идентификации параметров динамических объектов впервые была рассмотрена А. Н. Колмогоровым [1] и Н. Винером [2]. Весьма распространена ситуация, когда какое-либо статистическое описание неизвестных данных исследуемого динамического объекта отсутствует. В связи с этим развивается теория, оперирующая с перечисленными погрешностями как неопределёнными факторами. Исследование динамических систем с неполной информацией осуществляется путём привлечения методов минимакса и теории игр. Доклад посвящён оценке решений и идентификации нестационарных дифференциальных уравнений с неопределёнными параметрами. В банаховом пространстве рассматривается нелинейное нестационарное дифференциальное уравнение с неопределёнными параметрами, для которых известны информационные области. Построен идентификатор — дифференциальное уравнение с обратной связью, решение которого является оценкой решения исходного уравнения [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1941. Т. 5, № 1. С. 5–16.
2. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. New York: Wiley, 1949.
3. *Ройтенберг Е. Я.* Обратные задачи для нелинейных систем с неизвестными переменными параметрами // Материалы X Междунар. семинара "Дискретная математика и её приложения" (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 134–136.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕРАССЕИВАЮЩИХ АКУСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

AN EXISTENCE OF ACOUSTICAL OBJECTS NONSCATTERING WAVES IN THE ANISOTROPIC MEDIUM

Романов В. Г.[1], **Чиркунов Ю. А.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
romanov0511@gmail.com

[2] *Новосибирский государственный технический университет, Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
chr101@mail.ru

Для модели линейной акустики, описывающей в анизотропной среде специального вида дифракцию звуковых волн на локальной неоднородности, показано существование локальных неоднородностей (областей), для которых отсутствует рассеянное поле, возникающее при падении на неоднородность высокочастотного поля, создаваемого внешними компактно распределенными источниками. Получены явные формулы, определяющие основные параметры таких областей. Эти результаты, в частности, могут быть использованы при проведении геофизической разведки нефти и газа в пористых средах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством приглашенных исследователей (соглашение № 12-01-00012), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект № НШ 6706.2012.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00648, № 11-01-00105).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чиркунов Ю. А.* Установившиеся колебания в непрерывно-неоднородной среде, описываемые обобщенным уравнением Дарбу // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 140–149.
2. *Романов В. Г.* Обратная задача дифракции для уравнений акустики // ДАН. 2012. Т. 431, № 3. С. 319–321.
3. *Алексеев Г. В., Романов В. Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 15–20.

О ДИХОТОМИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

ABOUT DICHOTOMY OF LINEAR SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE

Романовский Р. К., Назарук Е. М.

Омский государственный технический университет, Омск, Россия;
elmarnaz@mail.ru

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \left[x(t) - \int\limits_0^1 [dT(s)]\, x(t-s)\right]' = \int\limits_0^1 [dF(s)]\, x(t-s), \quad t \geq 1, \\ x\big|_{[0,1]} = \varphi \in E = C\left([0,1] \to \mathbb{C}^N\right), \end{cases} \tag{1}$$

$F,\ T : [0,1] \to \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, N)$, $0 < V_0^1[F] < \infty$, T — липшицева.

Лемма. *Задача* (1) *эквивалентна разностной задаче Коши в фазовом пространстве* E

$$x_n = \Gamma x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad x_0 = \varphi \in E, \tag{2}$$

где $x_n = x(t+n)$, $t \in [0,1]$, $\Gamma = (I - A)^{-1}B$, $A,\ B : E \to E$,

$$A\varphi = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau d[F(s)]\varphi(1+\tau-s) + \int\limits_t^1 d[T(s)]\varphi(1+t-s) - \int\limits_0^1 d[T(s)]\varphi(1-s) + \varphi(1),$$

$$B\varphi = \int\limits_0^t d[T(s)]\varphi(t-s) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau d[F(s)]\varphi(\tau-s).$$

Теорема 1. *Оператор* Γ *компактен. Собственные числа* Γ *даются формулой* $\lambda = e^\xi$, *где* ξ *пробегает множество корней уравнения*

$$\det\left[\xi\left(I - \int\limits_0^1 e^{-\xi s} dT(s)\right) - \int\limits_0^1 e^{-\xi s} dF(s)\right] = 0. \tag{3}$$

Будем говорить, что имеет место *экспоненциальная дихотомия* решений задачи Коши (1), если имеет место прямое разложение $E = E_1 \dot{+} E_2$, $E_k \neq \{0\}$, такое, что для решений задачи Коши (2) верны при некоторых $\mu,\ \nu > 0$ оценки

$$\varphi \in E_1 \Rightarrow \|\Gamma^n \varphi\| \leq \mu e^{-\nu n}\|\varphi\|, \quad \varphi \in E_2 \Rightarrow \|\Gamma^n \varphi\| \geq \mu e^{\nu n}\|\varphi\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Теорема 2. *Экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши* (1) *имеет место точно тогда, когда корни уравнения* (3) *не лежат на мнимой оси и хотя бы один корень лежит в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\xi > 0$.

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ON THE CONTROLLABILITY OF ONE NONCLASSICAL MODEL OF MATHEMATICAL PHYSICS

Рузакова О. А.[1], **Олейник Е. А.**[2]

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]oruzakova@gmail.com, [2]oleynikekaterinaa@gmail.com

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса

$$v_t(x,t) = \nu\nabla^2 v(x,t) - r(x,t) + u(x,t), \tag{3}$$

$$\nabla(\nabla \cdot v) = u_r(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{4}$$

Здесь $\nu > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $v = v(x,t)$ — поле скоростей вязкой несжимаемой жидкости, $r = r(x,t) = \nabla p$ — градиент давления, $u = u(x,t)$ — функция управления, определяемая внешним воздействием на систему.

В [1] задача (1)–(4) редуцирована к задаче Коши $x(0) = x_0 \in \operatorname{dom} M$ для уравнения соболевского типа [2]

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad t \in (0,T),$$

с операторами

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & 0 & 0 \\ \nu\Pi A & \nu A_\pi & -1 \\ 0 & -F & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя тот факт, что оператор M сильно $(L,1)$-секториален, и учитывая результаты, изложенные в [3], получаем следующую теорему.

Теорема. *Система* (1)–(4) *ε-управляема за время T.*

Замечание. Если в качестве уравнения (4) рассматривать уравнение несжимаемости

$$\nabla(\nabla \cdot v) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{5}$$

которое определяет решение v системы как функцию со значениями в $\mathbb{H}_\sigma$, то система (1)–(3), (5) не будет являться ε-управляемой даже за свободное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свиридюк Г. А., Кузнецов Г. А.* Об относительно сильной p-секториальности линейных операторов // ДАН. 1999. Т. 365, № 6. С. 736–738.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. *Рузакова О. А., Олейник Е. А.* Об управляемости линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором // Вестн. ЮУрГУ. № 5 (264). Сер. Матем. модел. програм. 2012. Вып. 11. С. 54–61.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Рузиев М. Х.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; mruziev@mail.ru

Рассмотрим уравнение $(\mathrm{sign}y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0$, где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, в области D, ограниченной полупрямыми $x = 0$, $x = 1$, расположенными в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$, выходящими из точек $O(0;0)$ и $B(1;0)$. Обозначим $D^+ = D \cap \{(x,y) : y > 0\}$, $D^- = D \cap \{(x,y) : y < 0\}$. Пусть C_0 и C_1 — соответственно точки пересечения характеристик OC и BC с характеристиками, выходящими из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (0,1)$ — интервал оси $y = 0$.

Отметим, что задача Трикоми для уравнения изучена в работе [1], а при $\beta_0 = 0$ исследована в работе [2]. В данной работе изучается обобщение задачи Трикоми с краевым условием Трикоми на части OC_0 характеристики OC и условием Бицадзе – Самарского на части C_0C характеристики OC и параллельной ей характеристике EC_1. Задача с такими условиями для уравнения в конечной области исследована в работе [3].

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;

4) $\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ равномерно по $x \in [0,1]$;

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$u(0,y) = \varphi_1(y)$, $u(1,y) = \varphi_2(y)$, $y \geqslant 0$, $u\big|_{OC_0} = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{c}{2}$,

$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x)$, $c \leqslant x \leqslant 1$, и условию сопряжения $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y = \lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0}u_y$, $x \in J\backslash\{c\}$, причем эти пределы при $x = 0$, $x = 1$ и $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ — заданные функции, $\mu \leqslant 0$, $\theta(x_0)$ и $\theta^*(x_0)$ — точки пересечения характеристик $OC(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0)$, $x_0 \in [c,1]$.

Теорема. *Пусть* $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}}\varphi_i(y) \in L(0,\infty)$, *где* $i = 1, 2$, $\varphi_1(\infty) = \varphi_2(\infty) = 0$, $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\psi(x) \in C\left[0, \frac{c}{2}\right] \cap C^{1,\delta}\left(0, \frac{c}{2}\right)$, $\rho(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta}(c,1)$, $\mu \leqslant 0$, $\psi\left(\frac{c}{2}\right) = 0$, $\rho(c) = 0$. *Тогда задача однозначно разрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рузиев М. Х.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой — полуполоса // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. Вып. 1. С. 33–40.
2. *Репин О. А.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой — полуполоса // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 565–567.
3. *Мирсабуров М.* Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе – Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 8. С. 1281–1284.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ПОТЕНЦИАЛЫ ДИВЕРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ADDITIONAL CONSERVATION LAWS OF GAS DYNAMICS AND POTENTIALS OF DIVERGENT EQUATIONS

Рылов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
rylov@math.nsc.ru

Рассмотрено несколько подходов к выявлению, построению и анализу дополнительных законов сохранения газовой динамики.

1. Для известных законов сохранения трехмерной нестационарной газовой динамики (Е. Д. Терентьев и Ю. Д. Шмыглевский, 1975) построен целый ряд новых достаточно простых соотношений, связывающих законы сохранения. Каждый из законов сохранения, участвующих в каждом из указанных соотношений по определению является дополнительным (по С. К. Годунову) по отношению к оставшимся.

Отметим, что некоторые авторы (В. В. Козлов, Ю. А. Чиркунов) под дополнительными законами сохранения понимают новые, отличные от общепринятых, законы сохранения. Это указывает на актуальность унификации терминологии в указанной области, учитывая что дополнительные (по С. К. Годунову) законы сохранения могут быть и уже известными, и принципиально новыми, что и будет продемонстрировано в разделах 2 и 3.

2. Для точных решений уравнений Чаплыгина на плоскости годографа, полученных разделением переменных, каждой константе разделения на физической плоскости отвечают четыре закона сохранения (А. И. Рылов, 2002). Этим четырем законам, в свою очередь, отвечают два новых дополнительных закона сохранения, в построении каждого из которых участвуют два закона непосредственно (левые части дивергентных уравнений), а два других представлены их потенциалами. Этот результат интересен и тем, что в нем, по-видимому, впервые участвуют потенциалы дивергентных уравнений в построении новых законов сохранения. Этот факт непосредственно подтолкнул к следующему результату.

3. Для плоских стационарных потенциальных течений для двух произвольных, возможно и не связанных с разделением переменных, законов сохранения существует дополнительный закон сохранения, получаемый сложением левых частей дивергентных уравнений, каждое из которых умножено на потенциал другого дивергентного уравнения. При этом потенциал дополнительного закона сохранения является произведением потенциалов исходных уравнений (А. И. Рылов, 2012).

4. Важным приложением результатов разделов 2 и 3 является применение законов сохранения к односвязной области, образованной обтекаемым телом, удаленным от тела, в том числе и на бесконечность, контуром и линией схода, которая рассматривается в качестве разреза. Данная ситуация имеет место в ТФКП, в газовой динамике при доказательстве теорем о циркуляции и подъемной силе, в теории векторных полей (М. А. Красносельский и др., 1963; А. И. Рылов, 2011). Но данный анализ имеет смысл, лишь если вдоль линии схода разрыв потенциала постоянен. Но это требование выполнено далеко не всегда, что и приводит к еще одному критерию для классификации законов сохранения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00648 а).

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА – ЖЕЛТОВА – КОЧИНОЙ

THE OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS TO THE BARENBLATT–ZHELTOV–KOCHINA NONSTATIONARY EQUATION

Сагадеева М. А.[1], **Бадоян А. Д.**[2]

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]sam79@74.ru, [2]badoyanani@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ из класса C^∞. Рассмотрим в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ задачу Дирихле для уравнения в частных производных

$$(\lambda - \Delta)x_t = \alpha(t)\Delta x + u, \tag{1}$$

которое моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [1]. В уравнении (1) вещественный параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ и скалярная функция $\alpha : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}_+$ характеризуют среду, причем λ может принимать и отрицательные значения, а вектор-функция $u : \mathbb{R} \to L_2(\Omega)$ характеризует внешнее воздействие на систему и является функцией управления. Уравнение (1) относится к классу уравнений соболевского типа [2], составляющих обширную область неклассических уравнений математической физики. В работе [2] в частности рассматривается задача оптимального управления для стационарных уравнений соболевского типа, т. е. при $\alpha(t) \equiv \text{const}$.

Нашей задачей является отыскание пары $(\hat{x}, \hat{u}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \mathfrak{U}_{ad}$, для которой

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x,u)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x, u), \tag{2}$$

где все пары (x, u) удовлетворяют задаче Дирихле для уравнения (1) при условии Шоуолтера – Сидорова [3]: $P(x(0) - x_0) = 0$, множество $\mathfrak{U}_{ad}$ — некоторое замкнутое и выпуклое подмножество допустимых управлений в пространстве $H^1(L_2(\Omega)) = \{u \in L_2(\Omega) : \dot{u} \in L_2(\Omega)\}$, а функционал качества $J(x, u)$ при заданном плановом наблюдении z_d имеет вид:

$$J(x, u) = \sum_{q=0}^{1} \left(\int_0^T \|x^{(q)} - z_d^{(q)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} dt + \int_0^T \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{L_2^1(\Omega)} dt \right).$$

Теорема. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in C^1([0, T); \mathbb{R}_+)$, тогда при любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ существует единственное оптимальное управление $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ задачи* (2) *решениями задачи Дирихле для уравнения* (1) *при условии Шоуолтера – Сидорова.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 58–73.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
3. *Свиридюк Г. А., Загребина С. А.* Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 104–125.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ШАРЕ

PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION IN A BALL

Садыбеков М. А.[1], **Турметов Б. Х.**[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;* makhmud-s@mail.ru

[2] *Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан;* turmetovbh@mail.ru

Хорошо известно, что задачи Дирихле и Неймана являются основными задачами теории гармонических функций. В одномерном случае, а также при рассмотрении уравнения в многомерном параллелепипеде, также одной из основных задач является периодическая краевая задача. Однако при рассмотрении уравнения в многомерном шаре аналогов периодических краевых задач построено не было.

В настоящем докладе рассматривается новый класс краевых задач для уравнения Пуассона в многомерном шаре. Эти задачи являются аналогами классических периодических краевых задач.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : r = |x| < 1\}$ — единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Обозначим $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, $\partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, $I = \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ сопоставим *"противоположную"* ей точку $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) \in \Omega$, где α_j, $j = 2, \ldots, n$, принимают одно из значений ± 1. Очевидно, что если $x \in \partial\Omega_+$, то $x^* \in \partial\Omega_-$. Рассмотрим следующие два типа задач ($k = 1, 2$).

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющую в* Ω *уравнению Пуассона*

$$-\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

а на его границе — краевым условиям

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = \tau(x),\ x \in \partial\Omega_+, \tag{2_k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) + (-1)^k \frac{\partial}{\partial r} u(x^*) = \mu(x),\ x \in \partial\Omega_+, \tag{3_k}$$

где $\tau(x) \in C^{1+\varepsilon}(\partial\Omega_+)$, $\mu(x) \in C^{\varepsilon}(\partial\Omega_+)$ *и* $f(x) \in C^{\varepsilon}(\overline{\Omega})$, $0 < \varepsilon < 1$.

При $k = 1$ задачу будем называть *антипериодической краевой задачей*, а при $k = 2$ — *периодической*.

Доказана корректность рассматриваемых задач. Единственность решения задач обосновывается применением принципа экстремума. Существование решения доказано методом функции Грина.

При этом, решение задачи (1), (2_1), (3_1) существует и единственно. А для разрешимости задачи (1), (2_2), (3_2) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} f(y)dy = \int\limits_{\partial\Omega_+} \mu(y)ds_y.$$

Если решение задачи (1), (2_2), (3_2) существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

В докладе также обосновывается, что обе задачи являются самосопряженными. Показана методика построения всех собственных функций задачи.

ДВУХМАСШТАБНЫЕ МЕРЫ ЯНГА ДЛЯ УСРЕДНЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ВЯЗКИХ БАРОТРОПНЫХ ГАЗОВ

TWO-SCALE YOUNG MEASURES FOR HOMOGENIZATION OF A ONE-DIMENSIONAL MOTION OF A MIXTURE OF VISCOUS BAROTROPIC GASES

Саженков С. А.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; sazhenkovs@yandex.ru

Рассматривается одномерная математическая модель динамики смеси вязких баротропных газов с быстро осциллирующими начальными распределениями удельного объема, заданная в массовых лагранжевых переменных $x \in \Omega = (0, X)$, $t \in [0, T]$ ($X = \text{const} > 0$, $T = \text{const} > 0$). Быстрые осцилляции моделируются посредством малого параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего частоты осцилляций. Существование решений у этой модели при фиксированных значениях параметра ε гарантируется известными положениями теории уравнений вязкого баротропного газа. Проводится гомогенизация рассматриваемой модели, т. е. предельный переход в уравнениях и краевых условиях при $\varepsilon \to 0$. При этом возникает сложность, связанная с тем, что в рассматриваемой постановке не предполагается, чтобы начальные распределения удельного объема $\eta^\varepsilon|_{t=0}$ имели какую-либо упорядоченную микроструктуру: периодическую, квазипериодическую, случайную однородную и т. п. В настоящей работе для изучения предельных режимов, возникающих при $\varepsilon \to 0$, вводятся в рассмотрения двухмасштабные меры Янга, ассоциированные с подпоследовательностями $\{\eta^\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$. Функции распределения двухмасштабных мер Янга становятся новыми искомыми функциями. Для них конструируется дополнительное кинетическое уравнение, которое точно описывает эволюцию быстрых осцилляций в пространстве и времени. Это уравнение совместно с усредненными уравнениями баланса массы, количества движения, напряженного состояния, усредненным кинематическим уравнением движения частиц и набором граничных и начальных условий составляет замкнутую гомогенную модель. Построенная модель и строгое обоснование процедуры гомогенизации являются первым основным результатом исследования.

Второй основной результат заключается в следующем: показано, что в случае, когда осцилляции начальных распределений удельного объема являются периодическими, построенная модель может быть сведена к классической модели квазиосредненных уравнений Бахвалова – Эглит. Иными словами, в случае периодических начальных данных решения системы уравнений Бахвалова – Эглит выражаются через решения модели, построенной в настоящей работе.

Настоящее исследование является развитием работы автора [1] и существенно на нее опирается.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00390, № 13-01-00529) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саженков С. А.* Версия усредненной модели Бахвалова – Эглит с кинетическим уравнением эволюции осцилляций // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1150–1165.

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РОТОРА И СТОКСА В ШАРЕ

SOLVING SOME SPECTRAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CURL AND STOKES OPERATOR IN A BALL

Сакс Р. С.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; romen-saks@yandex.ru

В работе решаются явно спектральные задачи для операторов ротора, градиента, дивергенции и Стокса в шаре B радиуса R. Собственные вектор-функции ротора $\mathbf{q}_\kappa^\pm$ отвечают ненулевым собственным значениям $\pm\lambda_\kappa = \pm\rho_{n,m}/R$, а вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$ соответствуют $\lambda = 0$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{q}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa\,\mathbf{q}_\kappa^\pm, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa^\pm|_S = 0; \quad \operatorname{rot}\mathbf{q}_\kappa = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa|_S = 0, \quad \kappa = (n,m,k).$$

Они же являются собственными для оператора градиент дивергенции:

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{q}_\kappa^\pm = 0; \quad \nabla\operatorname{div}\mathbf{q}_\kappa = \mu_\kappa\mathbf{q}_\kappa, \quad \mu_\kappa = \alpha_{n,m}/R, \quad \psi_n'(\alpha_{n,m}) = 0, \quad n \geq 0.$$

Здесь $\psi_n(z) = (-z)^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right)$, $\psi_n(\pm\rho_{n,m}) = 0$, n, $m \in \mathbb{N}$, $|k| \leq n$.

При их построении используются собственные функции оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана [1]. Система собственных вектор-функций ротора образует в $\mathbf{L}_2(B)$ ортонормированный базис.

В ответ на вопрос О. А. Ладыженской [2]: "Как вычислить явно собственные функции $\mathbf{v}_\kappa$ оператора Стокса в шаре?" мы доказываем, что $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{q}_\kappa^+ + \mathbf{q}_\kappa^-$.

Мы решаем краевую задачу $\operatorname{rot}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f}$ в B, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\,\big|_S = 0$ при любых λ.

Теорема 1. *Если $\lambda \neq 0$, $\pm\lambda_{n,m}$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{E}_\gamma^0(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2 : \operatorname{div}\mathbf{f} \in L_2, \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,\big|_S = 0\}$, то единственное решение $\mathbf{u}$ задачи дается суммой рядов $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\sum_\kappa (\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa)\,\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_\kappa \left[(\lambda + \lambda_{n,m})^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^+)\,\mathbf{q}_\kappa^+(\mathbf{x}) + (\lambda - \lambda_{n,m})^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_\kappa^-)\,\mathbf{q}_\kappa^-(\mathbf{x})\right].$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1(B)$ [3].
Если $\mathbf{f} \in \mathcal{A} = \{\nabla h : h \in H^1(B)\}$, то оператор $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}$ отображает $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$.
Если $\mathbf{f} \in \mathcal{B}\perp\mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(B)$, то $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ отображает $\mathcal{B}$ в $\mathbf{H}^1(B)$.
Если же $\mathbf{f} \in C_0^\infty(B)$, то $\mathbf{u}$ есть классическое решение задачи класса $C^\infty(\overline{B})$.
При $\lambda = \pm\lambda_{n,m}$ задача разрешима по Фредгольму, а при $\lambda = 0$ — по Хаусдорфу.

Теорема 2. *Если λ не принадлежит спектру оператора ротор, то оператор задачи есть изоморфизм пространств $\mathbf{H}_{\gamma\gamma}^{s+1}(B) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(B) : \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\,\big|_S = \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u}\,\big|_S = 0\}$ и $\mathbf{E}_\gamma^s(B) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(B) : \operatorname{div}\mathbf{f} \in H^s(B), \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,\big|_S = 0\}$, $s \geq 0$.*

Первая часть работы принята в Уфимский математический журнал (2013. Т. 5, № 2). Ее краткое содержание опубликовано в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
2. *Ладыженская О. А.* О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 306. С. 71–85.
3. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
4. *Сакс Р. С.* Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса // ДАН. 2007. Т. 416, № 4. С. 446–450.

К УНИФИКАЦИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

UNIFICATION OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION FOR LIQUIDS AT LARGE REYNOLDS NUMBERS

Саттаров М. А.

Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии АН РТ, Душанбе, Таджикистан; msattarov@mail.ru

Предлагается унификация коэффициентов замкнутой системы уравнений среднего движения Навье – Стокса – Рейнольдса. Принятие гипотезы Рейнольдса о тензорном характере добавочных напряжений в трактовке Буссинеска – Колмогорова и ее развитие позволили автору представить тензор полных напряжений в обобщенном виде.

Далее, в силу неразрывности частиц несжимаемых жидкостей при различных степенях турбулентности компоненты рейнольдсовых напряжений разложены в ряд в окрестности точки экстремума.

Учитывая тензор полных напряжений, получена обобщенная системы уравнений среднего движения Навье – Стокса – Рейнольдса в виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=\frac{X_i}{\rho}-\frac{\partial \bar{p}}{\rho\partial x_i}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\tau^*_{ij}}{\rho}+(\nu+\varepsilon^*_{ij})\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2!}{\varepsilon'}^*_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)^2+\dots\right].$$

Здесь u_i, u'_i, $\bar{u}_i$ — мгновенные, пульсационные и осредненные составляющие скорости частиц, $\bar{p}$, ρ и ν — давление, плотность и кинематическая вязкость жидкости, X_i — проекции объемных сил, Δ — оператор Лапласа. Величины $\tau^*_{ii}/\rho=\bar{u}_i^2$ $(i=j)$ и $\tau^*_{ij}/\rho=\bar{u}_*^2$ $(\text{см}^2/\text{с}^2)$ — прототипы добавочного давления и "скорости трения" $\bar{u}_*$ Кармана. Величина ε^*_{ij}, $\text{см}^2\text{с}^{-1}$, — вязкость по Буссинеску, возникающая в точке экстремума как эффект отклонения линии тока (по Рейнольдсу "извилистость"). Новые характеристики потока ε^*_{ij} и ее производные формируют турбулентность разной степени в русле. Видно, что при $\nu=0$ система превращается в обобщенную систему уравнений турбулентности Эйлера. При больших числах Рейнольдса решающую роль в изменении характеристик турбулентности, в частности, деформации вихрей при росте градиента давления, определяющую роль играют не коэффициент вязкости, а свойство неразрывности однородной жидкости, при котором разница между уравнениями Эйлера и Навье – Стокса исчезает.

В докладе дано развитие работы [1], где получены частные решения уравнения для случая двумерного турбулентного потока в открытых руслах и трубах, сравнение которых с данными опытов Никурадзе, Базена и других исследователей дали полное согласие. Установлены соотношения и условия возникновения вихревой вязкости, длины пути смешения, частоты турбулентности, показана частость логарифмического закона распределения осредненных скоростей в открытых и напорных каналах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саттаров М. А.* Гидромеханические аспекты изучения структуры турбулентного потока с поперечным сдвигом в каналах и пористых средах // Вестн. ХНУ. 2009. № 863. Сер. Мат. мод. Информ. технологии. Автом. сист. упр. Вып. 12. С. 190–202.

ОДНА ТЕОРЕМА УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
A THEOREM OF CONDITIONAL STABILITY

Сафаров Ж. Ш.

Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан; jurabek-safarov@mail.ru

Рассматривается прямая задача Коши с сосредоточенным источником, состоящая в нахождении обобщенного решения $u(x,t)$:

$$u_{tt} = u_{xx} - \int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = 0, \qquad u_t\,|_{t=0} = \delta(x), \tag{2}$$

где $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $k(t)$, $t > 0$, по дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2):

$$u(0,t) = f_1(t), \qquad u_x(0,t) = f_2(t), \qquad t > 0. \tag{3}$$

В работе [1] доказывается существование единственного решения задачи (1)–(3) для достаточно малых $T_0 \in [0,T]$ в классе $k(t) \in C[0,T_0]$. Данная работа посвящается оценке условной устойчивости полученного решения.

Допустим, $K(k_0)$ — класс функций $k(t)$ таких, что $k(t) \in C[0,T]$ и $|k(t)| \le k_0$, где k_0 — фиксированная постоянная.

Теорема. *Пусть $k^1(t)$, $k^2(t) \in K(k_0)$ — два решения обратной задачи* (1)–(3) *с данными (f_1^1, f_2^1), (f_1^2, f_2^2) соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(k_0, T)$, что выполняется неравенство*

$$\|k^1(t) - k^2(t)\|_{C[0,T]} \le C\Big(\|f_1^1 - f_1^2\|_{C^3[0,T]} + \|f_2^1 - f_2^2\|_{C^2[0,T]}\Big).$$

Теорема доказывается по схеме, изложенной в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Решение операторного уравнения, связанного с одной задачей для гиперболического интегро-дифференциального уравнения // Республиканская науч. конф. с участием зарубежных специалистов “Операторные алгебры и смежные вопросы”. Ташкент, 2012. С. 128–129.
2. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ON SOLVABILITY OF SOME INVERSE PROBLEM FOR A SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION

Сафиуллова Р. Р.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия; regina-saf@yandex.ru

Для уравнений гиперболического типа второго порядка исследуется разрешимость некоторой задачи нахождения вместе с решением $u(x,t)$ дополнительной неизвестной функции, зависящей от t.

Ранее гиперболические задачи в подобного рода постановке рассматривались в работе В. Я. Якубова.

Пусть Q есть цилиндр конечной высоты T, $Q = \{(x,t) \mid x \in [0,1],\ t \in [0,T]\}$.

Пусть $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$, $\mu(t)$ — заданные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$ функции.

Рассматривается следующая обратная задача: найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} + q(t)u_t = f(x,t)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$u_t(x,0) = u_1(x),$$

$$u_x(0,t) = \varphi_0(t),$$

$$u(0,t) = \mu(t),$$

$$u(1,t) = \psi_0(t).$$

Для поставленной обратной задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

При доказательстве используется техника, основанная на переходе от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной задаче, доказательстве разрешимости этой задачи и далее построении с помощью решения вспомогательной задачи решения исходной задачи.

При решении вспомогательной задачи используются метод регуляризации, срезки и метод продолжения по параметру.

АЛГОРИТМ ПОСЛОЙНОГО ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ $3D$-ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ B-СПЛАЙНОВ

AN ALGORITHM USING THE B-SPLINES FOR SLICE-BY-SLICE NUMERICAL SOLVING A $3D$-VECTOR TOMOGRAPHY PROBLEM

Светов И. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
svetovie@math.nsc.ru

Лучевое преобразование $\mathcal{I}$ в $\mathbb{R}^3$ преобразует векторное поле $v = (v_j)$ в функцию $[\mathcal{I}v]$, определенную на множестве ориентированных прямых $l = \{x + t\xi \mid x, \xi \in \mathbb{R}^3,\ |\xi| = 1,\ \langle x, \xi\rangle = 0,\ t \in \mathbb{R}\}$, по формуле

$$[\mathcal{I}v](l) = \sum_{j=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_j v_j(x + t\xi)\, dt.$$

Потенциальные поля, потенциал которых обращается в нуль на границе области, лежат в ядре лучевого преобразования [1]. Поэтому только соленоидальная часть ${}^s v$ векторного поля v может быть восстановлена по $[\mathcal{I}v]$.

Задача восстановления векторного поля ${}^s v$ по $[\mathcal{I}v]$ переопределена по размерности, так как необходимо восстановить функции ${}^s v_j(x)$, где $x \in \mathbb{R}^3$, по функции $[\mathcal{I}v]$, определенной на четырехмерном множестве ориентированных прямых. Поэтому естественно рассматривать задачу восстановления ${}^s v$ по неполным данным $[\mathcal{I}v]|_{M^3}$, где M^3 — некоторое трехмерное множество ориентированных прямых.

В работе В. А. Шарафутдинова [2] предложены формулы для восстановления соленоидальной части векторного поля при параллельной схеме сбора данных по данным, имеющим размерность 3. В работе [3] на основе этих формул построен и реализован алгоритм численного решения задачи восстановления соленоидальной части векторного поля в $\mathbb{R}^3$ по его известным лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль всех прямых, параллельных одной из координатных плоскостей. Для единственности восстановления соленоидальной части векторного поля достаточно набора, состоящего из двух координатных плоскостей, но для устойчивого восстановления необходим набор, состоящий из трех координатных плоскостей.

В качестве альтернативы этому алгоритму в докладе предлагается алгоритм численного решения задачи векторной томографии, основанный на методе наименьших квадратов. В качестве аппроксимирующей последовательности выступают векторные поля, построенные на основе трехмерных B-сплайнов.

Работа осуществлена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31178 мол_а, № 11-07-00447 а), интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и УрО РАН (проект № 32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharafutdinov V. A.* Integral geometry of tensor fields. Utrecht: VSP, 1994.
2. *Sharafutdinov V. A.* Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data // Inverse Probl. 2007. № 23. P. 2603–2627.
3. *Светов И. Е.* Восстановление соленоидальной части трехмерного векторного поля по лучевым преобразованиям, вычисленным вдоль прямых, параллельных координатным плоскостям // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 329–344.

КВАЗИОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

THE LAPLACE QUASI-OPERATOR IN THE QUASI-BANACH SPACES

Свиридюк Г. А.[1], **Аль-Делфи Д. К.**[1,2]

[1] *Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;* geosv@inbox.ru

[2] *University of Al-Mustansiriyah, Baghdad, Iraq;* rassian71@mail.ru

Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — неубывающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Построим множества

$$l_q^m = \left\{ x = \{x_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |x_k| \right)^q < +\infty \right\}, \quad m \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{R}_+.$$

В [1] показано, что пространства l_q^m квазибанаховы, причем они банаховы, только если $q \in [1, +\infty)$. По аналогии с пространствами W_q^m назовем пространства l_q^m квазисоболевыми. Имеют место [1] аналоги теорем вложения Соболева: $l_q^m \hookrightarrow l_q^n$ при всех $m \geq n$. Определим еще квазиоператор Лапласа $\Lambda x = \{\lambda_k x_k\}$, очевидно, что $\Lambda : l_q^m \to l_q^{m-2}$ — топлинейный изоморфизм, причем квазиоператор Грина $\Lambda^{-1} : l_q^{m-2} \to l_q^m$ имеет вид $\Lambda^{-1} x = \{\lambda_k^{-1} x_k\}$.

Теперь пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. По аналогии с [2] назовем оператор M (L, σ)-ограниченным, если его L-спектр $\sigma^L(M)$ ограничен. (L, σ)-ограниченный оператор M назовем (L, p)-ограниченным, если, вдобавок, его L-резольвента $(\mu L - M)^{-1}$ имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Эти определения дают возможность распространить теорию относительно p-ограниченных операторов и вырожденных аналитических групп операторов с банаховых пространств (см. [2, гл. 4]) на квазибанаховы. В частности, верна следующая

Теорема о расщеплении. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, причем операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$. Кроме того, существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$, где L_k (M_k) есть сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.*

Пример. Пусть $\mathfrak{U} = l_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = l_q^m$, оператор $L = \lambda - \Lambda$, $M = \alpha\Lambda$. При всех m, $\lambda \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аль-Делфи Д. К.* Квазисоболевы пространства l_p^m // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5, № 1. С. 107–109.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO A DIFFERENCE EQUATION

Сгибнев М. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sgibnev@math.nsc.ru

Функция $\varphi(x)$, $x \geq 0$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\,\varphi(y)$, $x,\, y \geq 0$. Имеют место соотношения

$$\gamma := \gamma(\varphi) := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \inf_{x>0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} < \infty.$$

Будем предполагать, что $\gamma(\varphi) > -\infty$. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^\infty z(t-u)\,\mu(du) = f(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

в котором $z(t)$ — неизвестная функция, μ — σ-конечная комплекснозначная мера, $f(t)$ — известная функция такая, что $\int_0^\infty e^{\gamma t}|f(t)|\,dt < \infty$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$; кроме того, $\int_0^\infty e^{\xi x}\,|\mu|(dx) < \infty$ для некоторого $\xi > \gamma$; здесь $|\mu|$ — полная вариация меры μ. Зададим начальное условие в виде

$$z(t) = g(t), \qquad t \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

где $\int_{-\infty}^0 e^{\gamma t}|g(t)|\,dt < \infty$.

Для комплекснозначных меры ν и функции $h(t)$ положим $\widehat{\nu}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{sx}\,\nu(dx)$ и $\widehat{h}(s) := \int_0^\infty e^{st}h(t)\,dt$. Пусть $f_1(t)$, $t > 0$, — сужение функции $\int_t^\infty g(t-u)\,\mu(du)$ на $(0,\infty)$ и $f_2(t) := f(t) - f_1(t)$. Пусть $\mathcal{Z} = \{s_1, \ldots, s_l\}$ — множество всех корней характеристического уравнения $\widehat{\mu}(s) = 0$, лежащих в $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta \leq \gamma\}$. Обозначим через $m_1, \ldots, m_l$ кратности корней $s_1, \ldots, s_l$ соответственно. Из асимптотического разложения

$$\frac{\widehat{f_2}(s)}{\widehat{\mu}(s)} = \sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k \frac{b_{jk}}{(s-s_j)^k} + o\biggl(\frac{1}{s-s_j}\biggr), \qquad s \to s_j,$$

определим коэффициенты b_{jk}, $k = 1, \ldots, m_j$. Пусть $\mu = \mu_{\mathfrak{c}} + \mu_{\mathfrak{d}} + \mu_{\mathfrak{s}}$ — разложение меры μ на абсолютно непрерывную, дискретную и сингулярную компоненты.

Теорема. *Предположим, что $\varphi(t)$, $t \geq 0$, — полумультипликативная функция такая, что $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, — неубывающая функция, и выполнено условие*

$$\inf_{\operatorname{Re} s \leq \gamma} \bigl|\widehat{\mu}_{\mathfrak{d}}(s)\bigr| - \int_0^\infty e^{\gamma x}\,|\mu_{\mathfrak{s}}|(dx) > 0.$$

Пусть N — максимальная кратность корней характеристического уравнения, лежащих на $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = r_+(\varphi)\}$. Предположим, что $\int_0^\infty (1+t)^N \varphi(t)|f(t)|\,dt < \infty$. Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) *с начальным условием* (2) *справедливо разложение*

$$z(t) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} b_{jk}\frac{t^{k-1}e^{-s_j t}}{(k-1)!} + r(t),$$

в котором остаток $r(t)$ удовлетворяет соотношению $\int_0^\infty \varphi(t)|r(t)|\,dt < \infty$.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATORS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Седипков А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sedipkov@mosk.ru

Исследована обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля, определенного краевой задачей

$$-\frac{1}{\sigma(x)}(\sigma(x)w_x)_x = \lambda w, \quad x > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad w_x|_{x=0} = 0.$$

Здесь коэффициент $\sigma(x)$, называемый *импедансом*, является строго положительной кусочно-гладкой функцией с разрывами первого рода в точках $x_1 > \ldots > x_n$. Обозначим через $e(x,\omega)$, $\lambda = \omega^2$, решение импедансного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to+\infty} e(x,\omega)e^{-i\omega x} \equiv 1, \quad e,\, \sigma e_x \in W^1_{2,loc}(0,\infty).$$

Функцию $e(x,\omega)$ называют *решением Йоста*, а функцию $j(\omega) = e_x(0,\omega)$ — *функцией Йоста*.

Обратная спектральная задача для рассматриваемой краевой задачи состоит в восстановлении импеданса $\sigma(x)$ функции Йоста $j(\omega)$, при этом число n и точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ также подлежат восстановлению.

Доказано, что если точки разрыва импеданса $\sigma(x)$ несоизмеримы, т. е. никакая их линейная комбинация с целыми коэффициентами не равна нулю, то импеданс $\sigma(x)$ однозначно определяется функцией Йоста $j(\omega)$. Построена конструктивная процедура восстановления импеданса $\sigma(x)$ по функции Йоста $j(\omega)$.

Полученные результаты представляют собой дальнейшее развитие работ [1, 2]. Подробные выкладки и доказательства по данной работе см. в [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00390), Президиума РАН (программа фундаментальных исследований № 15) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shepelsky D. G.* The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions // Advances in Soviet Mathematics. 1994. V. 19. P. 209–231.
2. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Probl. 2002. V. 18, N 3. P. 757–773.
3. *Седипков А. А.* Восстановление разрывов коэффициентов оператора Штурма – Лиувилля // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 114–125.
4. *Sedipkov A. A.* The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous potential // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 2. P. 139–167.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ВОЗМУЩЕНИЯХ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

GENERAL SOLUTION OF THE LINEAR PROBLEM OF SHOCK WAVE DISTURBANCE

Семенко Е. В.

Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирск, Россия; semenko54@gmail.com

Рассматривается классическая задача о возмущениях ударной волны. Описывающая течение система уравнений включает законы сохранения массы (уравнение неразрывности), импульса и энергии. Ищется разрывное решение, причем на разрыве (ударной волне) ставятся условия Гюгонио. В качестве основного решения рассматривается кусочно-постоянное с линией разрыва (основной ударной волной) $x = 0$. Рассматривается задача, линеаризованная на основном решении.

Найдено общее решение линеаризованной задачи Коши, однородной и неоднородной, в том числе вычислена функция Грина, т. е. решение представлено в форме интегрального оператора над правой частью и начальными условиями. Это, в частности, позволяет находить асимптотику решения задачи Коши для однородного уравнения (в том числе асимптотику формы ударной волны) в зависимости от начальных данных.

Как известно, в линеаризованной задаче (или задаче о возмущениях ударной волны в линейной постановке) различают варианты параметров основного решения, для которых либо не существует решений однородной линеаризованной задачи, имеющих вид $e^{i(\xi x+\eta y-\omega t)}$ с $\operatorname{Im}\xi, \eta = 0$, $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$ (так называемый случай устойчивости), либо когда существуют решения указанного вида с $\operatorname{Im}\omega = 0$ (случай гофрировочной неустойчивости или нейтральной устойчивости) и, наконец, когда существуют решения с $\operatorname{Im}\omega > 0$ — случай абсолютной неустойчивости. В случаях устойчивости, в том числе нейтральной, установлена непрерывность оператора решения задачи Коши (однородной и неоднородной), что позволяет применить метод Ньютона для доказательства разрешимости и исследования решений исходной нелинейной задачи. В случае абсолютной неустойчивости линеаризованная задача, как известно, некорректна по Адамару, для этого случая установлено подпространство правых частей и/или начальных данных, на котором оператор решения непрерывен, что позволяет строить условное решение исходной задачи и в этом случае.

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕЦИАЛА КЕПЛЕРА

METHOD OF REGULARIZATION OF SOLUTIONS TO AN INVERSE PROBLEM OF THE KEPLER POTENTIAL

Серикбаев А. У.[1], **Надырбекова А. Ш.**[2]

[1] *Казахский национальный аграрный университет, Алматы, Казахстан;*
aserikbayev@rambler.ru

[2] *Таразский государственный педагогический институт, Тараз, Казахстан*

Рассмотрим трехмерный потенциал Кеплера [1]

$$\int\limits_D \mu(y)\frac{1}{|x-y|^2}dy = w(x), \tag{1}$$

где $y \in D$, $x \in D_1$, $D \cap D_1 = \emptyset$, $D \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная звездная область относительно начала координат. Задача: найти плотность $\mu(y)$, распределенную в области D, по значениям потенциала Кеплера.

В работе [2] была исследована обратная задача потенциала Вебера, доказана в классе непрерывных функций теорема единственности решений и получены на множестве корректности оценки, характеризующие устойчивость решения.

В данной работе рассматривается вопрос о равномерном приближении точного решения уравнения (1) по методу регуляризации дробного порядка. В качестве приближения к точному решению в методе регуляризации дробного порядка берется $\mu_{\alpha\delta}$, доставляющий минимум сглаживающему функционалу

$$M^\alpha[\mu, w_\delta] = \|A\mu - w_\delta\|^2 + \alpha\Omega[\mu],$$

где стабилизирующий функционал $\Omega[\mu] = \|\mu\|^2 + \|\partial^{1/2}\mu\|^2 > 0$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $\partial^{1/2}$ — оператор дифференцирования порядка $1/2$. Регуляризация дробного порядка обеспечивает принадлежность приближенных решений множеству корректности $\overline{M}$ из пространства непрерывных функций $C(D)$.

Применяя метод регуляризации дробного порядка, интегральное уравнение первого рода сводится к регуляризованному уравнению второго рода, которое заменяется системой разностных уравнений. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mu \in \overline{M}$ — точное решение уравнения* (1). *Тогда при $\delta \to 0$ решение регуляризирующего уравнения $A^*A\mu_{\alpha\delta} + \alpha(\mu_{\alpha\delta} + \nabla\mu_{\alpha\delta}) = A^*w_\delta$ на множестве корректности стремится к точному решению и справедливо неравенство*

$$\|\mu_{\alpha\delta} - \mu\| \le \varepsilon(\delta) + \frac{2C\delta}{CK - \delta},$$

где $\varepsilon(\delta)$ — величина, характеризующая устойчивость решения от малой погрешности правой части, стремящаяся к нулю при $\delta \to 0$, при этом оптимальный параметр $\alpha_{оп} = \frac{K\delta}{C}$,

$$\max_{x\in D_1, y\in D}\frac{1}{|x-y|^2} < \infty, \quad C = \|\mu\|_{W_2^1}, \quad \overline{M} = \left\{\mu \in C(D) : |\operatorname{grad}\mu| < \overline{C}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кирейтов В. Р.* Прямая и обратная задачи Дирихле для потенциала Кеплера. Новосибирск: Манускрипт, 2002.
2. *Серикбаев А. У.* Об устойчивости решений обратной задачи потенциала Вебера // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 1992. № 5. С. 41–44.

О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ПОЛНОЙ МАТРИЦЕЙ УСЛОВИЙ СКЛЕИВАНИЯ

PARABOLIC EQUATIONS WITH CHANGES OF THE TIME DIRECTION WITH A FULL MATRIX OF GLUING CONDITIONS

Синявский А. Г.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; sinyavsk_88@mail.ru

В области $Q^+ = (-\infty, +\infty) \times (0, T)$ рассматривается система уравнений

$$u_t^1 = Lu^1, \quad -u_t^2 = Lu^2 \quad \left(L = (-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\right). \tag{1}$$

С. А. Терсенов изучал уравнения вида (1) в гёльдеровских классах функций, разрешимость их сводил к разрешимости сингулярного интегрального уравнения и эти связи (условия разрешимости) выписывал в явном виде [1]. При этом предполагалось, что условия склеивания на линии раздела должны быть непрерывными, включая соответствующие производные.

В настоящей работе изучаются краевые задачи для параболических уравнений 4-х и 6-х порядков с меняющимся направлением времени в пространствах Гёльдера (1) при $n = 2, 3$, устанавливаются разрешимости краевых задач в случае полных матриц условий склеивания, а также зависимости показателей гёльдеровских пространств от весовых функций склеивания.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проекты № 4402, № 5562).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tersenov S. A.* On a method of solving initial boundary value problems for higher order equations // Мат. заметки ЯГУ. 2010. Т. 17, вып. 1. С. 138–145.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ABOUT STABILITY OF SOLUTIONS OF ONE CLASS OF EVOLUTIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Сказка В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
skazka@math.nsc.ru

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H следующее дифференциальное уравнение:

$$u'' = -A^2u + \varepsilon B(t)u. \tag{1}$$

Для уравнения (1) задаются начальные данные

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \tag{2}$$

Будем предполагать, что A — самосопряжённый ограниченный оператор, а $B(t)$ — почти периодическая по t операторнозначная функция. Если $H = \mathbb{R}$, то (1) — это аналог уравнения Хилла и у задачи (1), (2) может возникнуть эффект параметрического резонанса (см., например, [1]). Однако, если спектр у оператора A абсолютно непрерывный, то можно привести достаточные условия на операторы A и B для того, что бы нулевое решение задачи (1), (2) было устойчиво при малых ε. К сожалению, эти условия достаточно громоздки, поэтому мы приведем просто пример уравнения, для которых они выполняются.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u(s,t)}{dt^2} = -s^2u + \varepsilon \int\limits_1^2 K(\xi,s,t)u(\xi,t)\,d\xi,\\ u|_{t=0} = u_0(s), \quad u'_t|_{t=0} = u_1(s),\end{gathered} \tag{3}$$

в пространстве $H = L_2(1,2)$. Здесь $K(\xi,s,t) = \sum\limits_{n>0} c_nK_n(\xi,s)e^{i\lambda_n t}$ — почти периодическая по t функция. Предполагается, что $K_n(\xi,s) \in C^3([1,2]\times[1,2])$, причём $K_n = 0$ на границе $[1,2]\times[1,2]$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < C, \quad \|K_n\|_{C^3} \le C,$$

где C — некоторая константа.

Утверждение. *При выполнении вышеперечисленных условий существуют константы $\varepsilon_0 > 0$ и $L > 0$ такие, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ для решений задачи (3) справедлива оценка: $\|u(t)\|_H \le L\left(\|u_0\|_H + \|u_1\|_H\right)$.*

Работа выполнена при поддержке Президиума РАН (программа № 15) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1962.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

ON STABILITY OF SOLUTIONS TO THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

Скворцова М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sm-18-nsu@yandex.ru

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau(t))) = Ay(t) + By(t-\tau(t)) + F(t, y(t), y(t-\tau(t))),\ t > 0. \quad (1)$$

Здесь A, B, D — вещественные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $\tau(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\tau(t) > 0$, $F(t,u,v) \in C(\mathbb{R}_+^{2n+1})$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2, \omega_1, \omega_2 \ge 0.$$

В случае, когда $\tau(t) \equiv \tau = \text{const}$, $F(t,u,v) \equiv 0$, условия асимптотической устойчивости хорошо известны (см., например, [1]). Результаты формулируются в терминах принадлежности корней квазимногочленов левой полуплоскости или в виде матричных неравенств. Последний подход основан на использовании функционалов Ляпунова – Красовского, однако, используя данные функционалы, далеко не всегда удается получить оценки скорости убывания решений.

В последние годы были предложены методы получения оценок экспоненциального убывания решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [2–4]). В данных работах были рассмотрены различные модификации функционалов Ляпунова – Красовского, которые позволили получить требуемые оценки.

В настоящей работе, используя аналог функционала, введенного в [4], указаны достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), получены оценки областей притяжения нулевого решения и оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31030, № 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems // Syst. Control Lett. 2004. V. 53, N 5. P. 395–405.
3. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-РЕАКЦИИ

UNIQUENESS AND STABILITY OF A SOLUTION OF THE IDENTIFICATION PROBLEM FOR THE STATIONARY DIFFUSION-REACTION EQUATION

Соболева О. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
soboleva22@mail.ru

Большое внимание в последние годы уделяется постановке и исследованию новых классов задач для моделей массопереноса и теплообмена. Примерами таких задач являются задачи идентификации. Теоретическому исследованию указанных задач для линейных и нелинейных моделей посвящен ряд работ [1–4].

Целью настоящей работы является анализ единственности и устойчивости решений обратных экстремальных задач для линейной модели массопереноса, имеющей вид стационарного уравнения диффузии-реакции с переменными коэффициентами диффузии и реакции. Рассматриваемая в ограниченной области Ω из пространства $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, краевая задача описывается следующими соотношениями:

$$-\mathrm{div}(\lambda\,\nabla\varphi) + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\lambda \equiv \lambda(x) > 0$ — переменный коэффициент диффузии, зависящий от точки $x \in \Omega$, $k \equiv k(x) \geq 0$ — величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, $f(x)$ — плотность объемных источников.

Исследуемая в работе задача идентификации заключается в нахождении неизвестных параметров λ и k по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Указанная задача формулируется как задача минимизации определенного функционала качества на решениях исходной краевой задачи. Исследование поставленной коэффициентной обратной задачи сводится к исследованию соответствующей экстремальной задачи [3]. Это позволяет применять для ее решения хорошо развитые методы условной оптимизации.

В работе доказывается разрешимость задач идентификации, выводятся системы оптимальности, описывающие необходимые условия экстремума, и исследуются некоторые их свойства. Основываясь на этих свойствах, устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений задачи идентификации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00313, № 12-01-31288 мол_а) и проекта № 12-1-П17-03 Дальневосточного отделения РАН, тематика которого соответствует Программе 17 фундаментальных исследований Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
2. *Ito K., Kunisch K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Probl. 1997. V. 13, N 4. P. 995–1013.
3. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.
4. *Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 12. С. 2190–2205.

УРАВНЕНИЕ ГОЛУЗИНА – КОМАЦУ ДЛЯ КОНЕЧНОСВЯЗНОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

THE EQUATION OF THE GOLUZIN–KOMATSU FOR A MULTIPLY CONNECTED CIRCULAR DOMAIN

Сорокин А. С.

Филиал Кузбасского государственного технического университета им. Т. Ф. Горбачева, Новокузнецк, Россия; andsor@mail.ru

По аналогии с параметрическим представлением однолистных функций в круге И. Комацу и Г. М. Голузиным [1–4] было дано параметрическое представление функций, однолистных в круговом кольце.

Проведение разреза в конечносвязной круговой области при условии сохранения ее связности меняет хотя бы один ее модуль и, следовательно, выводит область с разрезом из класса областей, конформно изоморфных исходной многосвязной области.

Указанные в теоремах 1 и 2 формулы, обобщающие формулу Голузина – Комацу на случай конечносвязных круговых областей, представляют собой развитие и усиление результатов И. А. Александрова, Г. М. Голузина, В. Я. Гутлянского [1, 2, 5].

Теорема 1. *Пусть* $F(\zeta,t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}[H(\zeta,\exp(i\theta))-i\mathrm{Im}H(q_t,\exp(i\theta))]\mu_t'(t,d\theta)$, *где*

$$H(\zeta,t)=1+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{k=0}^{n}\frac{\zeta+\overline{L_0}E_{2\nu}L_k(z)}{\zeta-\overline{L_0}E_{2\nu}L_k(z)}\Bigg|_{b_k}^{t},\ \mu(t,\theta)\in G,\ q_t=q\exp(-t),\ 0<q<1.$$

Тогда решение $\zeta=f(z,t;\mu)$ *дифференциального уравнения* $\frac{d\zeta}{dt}=-\zeta F(\zeta,t)$, *удовлетворяющее начальному условию* $f(z,0;\mu)=z$, $z\in K(R_j,a_j,j=1,\dots,n;R_0)$, *как функция от* z *регулярна и однолистна в* $K(R_j,a_j,j=1,\dots,n;R_0)$ *при каждом фиксированном значении* t, $0<t<\infty$, *нормирована условиями* $f(R_n,t)=R_n\exp(-t)$, $|f(z,t)|_{|z|=R_n}=R_n\exp(-t)$. *Кроме того, существует равномерный по* z *внутри* $K(R_j,a_j,j=1,\dots,n;R_0)$ *предел* $f(z)=\lim\limits_{t\to\infty}\exp(t)f(z,t)$, *представляющий собой функцию класса* $S(R_j(t),a_j(t),j=1,\dots,n;R_n/R_n)$.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 1 *положить* $n=1$, *то получаем известную теорему И. А. Александрова* [2, 5].

Теорема 2. *Для принадлежности функции* $f(z)$ *классу* $S(R_j(t),a_j(t),j=1,\dots,n;R_n/R_n)$ *необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде* $f(z)=\lim\limits_{t\to\infty}\exp(t)f(z,t;\mu)$, *где* $\zeta=f(z,t;\mu)$, $f(z,0;\mu)=z$, $z\in K(R_j,a_j,j=1,\dots,n;R_0)$, — *решение дифференциального уравнения* $\frac{d\zeta}{dt}=-\zeta H(\zeta,t)$ *и* $\mu\in G$.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 2 *положить* $n=1$, *то получаем известную теорему Г. Я. Гутлянского* [2, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сорокин А. С.* Структурные формулы некоторых аналитических функций в конечносвязной области // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 12. С. 107–134.
2. *Сорокин А. С.* Параметрическое представление функций в конечносвязных областях // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1164–1178.
3. *Komatsu Y.* Untersuchungen uber konforme Abbildung von zweifachzusammenhangenden Gebieten // Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 1943. V. 25, N 1. P. 1–42.
4. *Голузин Г. М.* О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце // Мат. сб. 1951. Т. 29, № 2. С. 469–478.
5. *Сорокин А. С.* Краевые задачи в многосвязных областях и их приложения. Новокузнецк: СибГИУ, 1998.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

ON CORRECT SOLVABILITY OF AN EXTREMUM PROBLEM FOR THE ACOUSTICS EQUATIONS OF AN ANISOTROPIC MEDIUM

Спорышев М. С.[1], **Ларькина О. С.**[2]

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;
[1]coockoombra@gmail.com, [2]larkinabad@gmail.com

В последние годы большое внимание уделяется исследованию обратных задач для моделей акустического и электромагнитного рассеяния на неоднородных включениях. С помощью оптимизационного метода указанные задачи сводятся к обратным экстремальным задачам для указанных моделей. К необходимости решения такого типа задач приводят, в частности, рассматриваемые в последнее время задачи маскировки материальных объектов в жидких средах. В этих работах доказано существование маскировочных оболочек, причем установлено, что необходимым условием их существования является условие анизотропии исходной среды [1].

Рассмотрим уравнение Гельмгольца с переменными коэффициентами, имеющее в сферических координатах r, θ, φ вид [1]:

$$\rho_2(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{\rho_1(r)}\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \Delta_{\theta,\varphi}p + r^2\rho_2(r)\eta(r)k_0^2 p = 0. \tag{1}$$

Здесь η — индекс рефракции, k_0 — постоянное волновое число для однородной среды, p — звуковое давление, функция $\rho_1(r)$ характеризует изменение плотности в направлении изменения переменной r, тогда как $\rho_2(r)$ характеризует изменение плотности в ортогональных направлениях.

Целью настоящей работы является теоретический анализ обратной экстремальной задачи для уравнения (1). Рассматриваемая обратная задача заключается в нахождении индекса рефракции $\eta \in H^s(\Omega)$, входящего в уравнение Гельмгольца (1), и решения исходной краевой задачи, доставляющих минимум определенному функционалу качества. В качестве функционала качества выбирается квадрат среднеквадратичной интегральной нормы рассеянного поля. С использованием математического аппарата работ [2, 3] доказывается разрешимость так поставленной обратной экстремальной задачи и выводятся достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость оптимальных решений.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение № 14.A18.21.0353 "Современные проблемы вещественного и комплексного анализа, алгебры и математической физики".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В., Романов В. Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 1–6.
2. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 652–656.
3. *Alekseev G. V.* Cloaking via impedance boundary condition for the 2-D Helmholtz equation // Appl. Anal. 2013. [DOI:10.1080/00036811.2013.768340].

УЛУЧШЕНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЕЙШТАДТА

IMPROVEMENT OF THE CONVERGENCE RATE OF THE NEUSTADT METHOD

Старов В. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$, V — область управляемости в начало координат. Компоненты вектора управления принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям: $|u_j| \leqslant M_j$, $M_j > 0$, $j = \overline{1,m}$.

Задача. Найти управление u, переводящее систему (1) из начального состояния x_0 в начало координат $x(t_k) = 0$ за минимальное время $T = t_k - t_0$.

В [1] изложен метод Нейштадта, который разработан для решения задач линейного быстродействия. Сущность его составляет нахождение такого начального значения сопряженной системы ψ_0, определяющее оптимальное управление. Это значение находится с помощью решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_0}{d\tau} = -[x_0 - \xi(\psi_0)], \quad \text{где} \quad \xi(\psi_0) = (\xi^1(\psi_0) \dots \xi^n(\psi_0)), \tag{2}$$

$$\xi^i(\psi_0) = -\int_0^T \xi^i(\tau) B u(\tau, \psi_0) d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Здесь $u(\tau, \psi_0)$ — управление, соответствующее функции $\psi(t, \psi_0)$.

Далее осуществляется переход к разностному уравнению. Вместо вычисления всего непрерывного решения $\psi_0(\tau)$ уравнения (2) строится "дискретное решение", т. е. последовательность $\psi_{0(1)}, \psi_{0(2)}, \dots$ по формуле

$$\psi_{0(k+1)} = \psi_{0(k)} + \Delta\tau_k[x_0 - \xi(\psi_{0(k)})]. \tag{4}$$

В [2] отмечена медленная сходимость метода Нейштадта.

Предлагается кусочно-линейная аппроксимация решения уравнения (4) по методу наименьших квадратов [3] с последующей экстраполяцией, которая дает существенное улучшение сходимости.

Эффективность предложенного подхода проверялась численным моделированием для различных вариантов систем с размерностями $n = 3$ и $n = 4$. Под эффективностью понимается сумма времени интегрирования системы (3) на всех итерациях. Численные расчеты показали, что время интегрирования уменьшилось более, чем на 40% .

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1966.
2. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
3. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. М.: ГИФМЛ, 1962.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА НЕВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ

SOLVABILITY OF A CLASS OF NONDEGENERATE EVOLUTION EQUATIONS WITH MEMORY

Стахеева О. А.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; osta@csu.ru

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ банахову алгебру линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, через $\mathcal{C}l(\mathfrak{X})$ — множество линейных замкнутых операторов с плотной областью определения в $\mathfrak{X}$. Кроме того, пусть D_A — область определения оператора A, снабженная нормой $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|A\cdot\|_{\mathfrak{X}}$. В случае замкнутого оператора A пространство D_A является банаховым.

Рассмотрим эволюционное уравнение с эффектом памяти $\dot v(t) = Av(t)+(Jv)(t)$. Интегральный оператор памяти $(Jv)(t)$ имеет вид

$$(Jv)(t) = \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(s)v(t-s)ds = \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + \int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t+s)v_-(-s)ds, \quad t \geq 0,$$

и при заданных оператор-функции $\mathcal{K} : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и вектор-функции $v_- : (-\infty, 0] \to \mathfrak{X}$ описывает "историю" системы. Обозначим

$$\int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t+s)v_-(-s)ds = f(t), \quad t \geq 0,$$

тогда уравнение примет вид

$$\dot v(t) = Av(t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(s)v(t-s)ds + f(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Решением задачи Коши

$$v(0) = v_0 \in \operatorname{dom} A \tag{2}$$

назовем функцию $v \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{X}) \cap C([0,+\infty);D_A)$, удовлетворяющую уравнению (1) на полуоси $[0,+\infty)$ и условию (2).

По сравнению с работами [1, 2] здесь рассматривается более общая постановка задачи и доказана разрешимость исследуемой задачи на всей положительной полуоси.

Теорема. *Пусть оператор A порождает (C_0)-непрерывную полугруппу операторов, $\mathcal{K} \in C([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathfrak{X}))$, $f \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{X})$. Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е., Стахеева О. А.* О локальной разрешимости линейных эволюционных уравнений с памятью // Вестн. ЮУрГУ. 2008. № 27 (127). Сер. Матем. модел. програм. Вып. 2. С. 104–109.
2. *Стахеева О. А.* Локальная разрешимость одного класса линейных уравнений с памятью // Вестн. ЧелГУ. 2009. № 20 (158). Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 11. С. 70–76.

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

THE DYNAMIC PROGRAMMING METHOD IN INVERSE PROBLEMS OF DYNAMICS

Субботина Н. Н.[1], **Токманцев Т. Б.**[2]

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия;
[1]subb@uran.ru, [2]tokmantsev@imm.uran.ru

Рассматривается управляемая система

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, управление $u \in \mathbb{R}^n$ стеснено ограничениями

$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+], \quad a_i^- < a_i^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Предполагается, что задана непрерывная функция $y(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ — история замеров фазовой переменной системы, причем известно, что точное движение $x_*(t)$ содержится в полосе достоверности замеров Ω_δ:

$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n : \ \|x - y(t)\| \le \delta\},$$

где параметр погрешности измерений $\delta > 0$, а символ $\|z\|$ означает евклидову норму конечномерного вектора z.

Обратная задача динамики состоит в построении управления и траектории системы (1), (2), максимально приближенной к исходному движению $x_*(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций [2].

Вводится вспомогательная задача оптимального позиционного управления [1] системой (1), (2), на минимум функционала невязки:

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T \left[\frac{(x(t) - y(t))^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\|u(t)\|^2 \right] dt,$$

здесь $\alpha > 0$ — малый регуляризирующий параметр.

С помощью метода динамического программирования Беллмана в полосе допустимых погрешностей статистики строятся траектории системы (фазовые характеристики) [3]. Приводится доказательство того факта, что фазовые характеристики, доставляющие минимум функционалу невязки в полосе допустимых погрешностей статистики, аппроксимируют точное решение $x_*(\cdot)$ обратной задачи динамики. Получены оценки сходимости аппроксимации при $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00214) и Программы сотрудничества УрО и СО РАН "Качественная теория и численные методы для задач динамики, управления и оптимизации".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
3. *Субботина Н. Н., Колпакова Е. А., Токманцев Т. Б., Шагалова Л. Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОРЕЗОНАНСА

EFFECT OF PERTURBATIONS ON AUTORESONANCE STABILITY

Султанов О. А.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; oasultanov@gmail.com

Под авторезонансом понимается эффект значительного роста амплитуды нелинейных колебаний под действием малой накачки. На начальном этапе захвата в авторезонанс приходится исследовать систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{dr}{dt} = \sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + t\Big] = \cos\psi. \tag{1}$$

Здесь $r(t)$ — амплитуда, $\psi(t)$ — сдвиг фазы гармонических колебаний. Интерес представляют решения, амплитуда которых неограниченно растет на бесконечности по времени ($r(t) \approx \sqrt{t}, t \to \infty$). Из-за нелинейностей рассматриваемой модели явные формулы для решений получить не удается. Однако для некоторого частного решения можно построить асимптотическое разложение на бесконечности:

$$R_0(t) = \sqrt{t} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - \frac{1}{2}t^{-1/2} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \to \infty.$$

Такое решение оказывается устойчивым по Ляпунову [2, 3]. Наряду с системой (1) рассматриваются возмущенные уравнения:

$$\frac{dr}{dt} = (1+\xi)\sin\psi, \quad r\Big[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + t + \varphi\Big] = (1+\eta)\cos\psi. \tag{2}$$

Функции ξ, η, φ играют роль возмущений. Ставится вопрос: при каких возмущениях система (2) имеет авторезонансные решения?

Описываются классы детерминированных и случайных возмущений, при которых решение $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ оказывается устойчивым относительно постоянно действующих возмущений. Анализ устойчивости основан на функции Ляпунова для невозмущенной системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калякин Л. А.* Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 3–72.
2. *Султанов О. А.* Устойчивость моделей авторезонанса при постоянно действующих возмущениях // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 254–264.
3. *Калякин Л. А., Султанов О. А.* Устойчивость моделей авторезонанса // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 3. С. 279–293.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

AN APPROXIMATE SOLUTION TO AN INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Табаринцева Е. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
e1tab@rambler.ru

Пусть $A : H \to H$ — линейный неограниченный оператор; $A^* = A$; $A \geq 0$; $\overline{D(A)} = H$. Рассмотрим задачу вычисления $\varphi \in H$ такого, что решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} = -Au + f(t,u), \quad u(t_0) = \varphi, \quad \varphi \in H, \quad t \in (t_0, T), \tag{1}$$

удовлетворяет условию $u(T) = \chi$. Здесь $f : [t_0; T] \times H \to H$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица по u и условию Гельдера по t. Пусть существует решение φ задачи (1), принадлежащее заданному множеству $M \subset H$, но вместо точного $\chi \in H$ дан $\chi_\delta \in H$ такой, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$.

Наряду с (1) рассмотрим задачу вычисления $\varphi_\tau \in H$ такого, что решение линейной задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -Av, \quad v(\tau) = \hat{\varphi}_\tau, \quad t \in (\tau, T), \tag{2}$$

удовлетворяет условию $v(T) = \hat{\chi}$. Пусть линейные операторы $R_\alpha^{T-\tau} : H \to H$ действуют по правилу $R_\alpha^{T-\tau} = \Phi(\alpha, e^{-A(T-\tau)})$, где $\Phi(\alpha, \mu)$ $(\alpha > 0, \mu > 0)$ — функция, удовлетворяющая условиям, сформулированным в [1]. Приближенное решение (2) определим равенством (при подходящем выборе зависимости $\alpha = \alpha^*(\delta)$)

$$v_\alpha^\delta(\tau) = R_\alpha^{T-\tau}\hat{\chi}_\delta. \tag{3}$$

Обозначим через $u_\alpha^\delta(t)$ решение интегрального уравнения

$$u_\alpha^\delta(t) = R_\alpha^{T-t}\hat{\chi}_\delta - \int_t^T R_\alpha^{T-t} e^{A(T-s)} f(s, u_\alpha^\delta(s))ds.$$

Приближенное решение задачи (1) определим равенством

$$\varphi_\alpha^\delta = u_{\alpha^*}^\delta(t_0). \tag{4}$$

Рассмотрим следующие величины:

$\Delta_M(\alpha, \delta) = \sup\{\|\varphi_\delta^\alpha - \varphi\| : \varphi \in M, \|\chi - \chi_\delta\| \leq \delta\}$ — погрешность приближенного решения (4) нелинейной задачи (1) на множестве M;

$\hat{\Delta}_M(\alpha, \delta) = \sup\{\|R_\alpha^{T-t_0}\hat{\chi}_\delta - \hat{\varphi}_0\| : \hat{\varphi}_0 \in M, \|\hat{\chi} - \hat{\chi}_\delta\| \leq \delta\}$ — погрешность приближенного решения (3) линейной задачи (2) на множестве M.

Теорема. *Существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что для всех $0 < \delta < \delta_0$*

$$\Delta_M(\alpha^*, \delta) \leq 4e^{L(T-t_0)}\hat{\Delta}_M(\alpha^*, \delta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 672–677.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ АВТОМОРФНЫХ СИСТЕМ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

ON INTEGRATION OF AUTOMORPHIC SYSTEMS OF FINITE-DIMENSIONAL LIE GROUPS

Талышев А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
tal@academ.org

Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы Ли G, если любое решение этой системы получается из одного фиксированного решения посредством действия преобразований группы G [1, § 25].

В работе [2] показано, что некоторое конечное продолжение (как правило, нулевого порядка) всякой автоморфной системы конечномерной группы Ли является вполне интегрируемой системой.

В настоящей работе доказана следующая теорема, которая является обобщением аналогичной теоремы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1, § 8].

Теорема. *Пусть система Пфаффа $dy - \varphi(x,y)dx = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$), вполне интегрируема и допускает однопараметрическую группу Ли с инфинитезимальным оператором $L = \xi(x,y)\,\partial_x + \eta(x,y)\,\partial_y$. Тогда знание универсального инварианта оператора $\tilde{L} = L - \xi\,\partial_x - (\varphi\xi)\,\partial_y$ позволяет понизить на единицу размерность этой системы Пфаффа.*

Вычисление допускаемой группы для вполне интегрируемой системы Пфаффа (также как и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений), вообще говоря, не проще интегрирования исходной системы. Но автоморфная система конечномерной группы Ли G допускает группу Ли, которая дается "даром": является ограничением действия группы G на многообразие, определяемое системой.

Если размерность группы G больше единицы (а именно такие и представляют интерес), то и размерность системы Пфаффа можно попытаться понизить более чем на единицу. Возможность понижения размерности определяется общим рангом нового представления алгебры Ли соответствующей группе G. Построение нового представления совершается в два этапа: ограничение алгебры на многообразие, определяемое системой, и потом переход от операторов L к $\tilde{L}$, который означает факторизацию алгебры Ли по идеалу, порожденному ограничениями операторов полного дифференцирования на многообразие, определяемое системой. Этот бесконечномерный идеал допускается системой Пфаффа и также дается "даром".

Итак, если общий ранг нового представления указанной алгебры равен r и удастся посчитать универсальный инвариант этой алгебры, то размерность системы можно понизить на величину r. Приводятся примеры применения указанной технологии интегрирования к конкретным автоморфным системам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Талышев А. А.* Об автоморфных системах конечномерных групп Ли // Уфимск. мат. журн. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.

ВНЕШНЯЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

AN EXTERIOR DIRICHLET VARIATIONAL PROBLEM FOR DEGENERATE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Тарасова Г. И.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; gi-tarasova@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная n-мерная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Пусть $\Omega^* = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, $\rho(x)$ — регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega^*$ до границы $\partial\Omega$. Символами Ω_1 и K_R обозначаем соответственно область в $\mathbb{R}^n$ с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega_1$ класса C^∞ и шар радиуса R с центром в начале координат такие, что для них выполнено условие $\overline{\Omega} \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset K_R$.

Далее, r — фиксированное натуральное число, $p \in (1, +\infty)$; α, β, γ — действительные числа. Символом $\sigma_{\alpha,\beta}(x)$ обозначаем бесконечно дифференцируемую положительную в Ω^* функцию, для которой выполнено условие

$$\sigma_{\alpha,\beta}(x) \sim \begin{cases} \rho(x)^{\alpha} & \forall\, x \in K_R \backslash \overline{\Omega}, \\ \rho(x)^{-\beta} & \forall\, x \in \Omega_1^*. \end{cases}$$

Функция $\sigma_{\alpha,\beta}(x)$ является основной весовой функцией.

Ниже символом B обозначим банахово пространство с нормой $\|u; B\|$:

$$\|u; V^r_{p,\alpha,\beta}(\Omega^*)\| = \left\{ \sum_{|k|\le r} \int\limits_{\Omega^*} (\sigma(x)\rho(x)^{|k|-r}|u^{(k)}(x)|)^p dx \right\}^{1/p}.$$

Исследована разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями.

Постановка задачи. Для заданного функционала $F \in V^{-r}_{q,-\alpha,-\beta}(\Omega^*)$, $q = p/(p-1)$, найти обобщенное решение дифференциального уравнения

$$Lu \equiv \sum_{|k|\le r} (-1)^{|k|} \left(a_k(x)|u^{(k)}(x)|^{p_k-2}u^{(k)}(x) \right)^{(k)} = F, \quad x \in \Omega,$$

в пространстве $V^r_{p,\alpha,\beta}(\Omega^*)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирошин Н. В.* Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1992. Т. 194. С. 179–195.
2. *Iskhokov S. A.* Existence and uniqueness of solutions for variational Dirichlet problems of a nonlinear degenerate differential equation // Мат. заметки ЯГУ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 22–38.

КОЭРЦИТИВНОСТЬ И ГЛАДКОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ

COERCIVENESS AND SMOOTHNESS OF A FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION WITH ORTHOTROPIC CONTRACTIONS

Тасевич А. Л.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
atasevich@gmail.com

Пусть B_r — круг радиуса r. Рассмотрим следующее функционально-дифференциальное уравнение в B_r:

$$A_R u(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right) = f(x), \tag{1}$$

$$R_i u(x_1, x_2) = a_{i0} u(x_1, x_2) + a_{i1} u\left(\frac{x_1}{q}, p x_2\right) + a_{i,-1} u\left(q x_1, \frac{x_2}{p}\right). \tag{2}$$

Здесь $p, q > 1$, коэффициенты $a_{ij} \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2;\ j = 0, \pm 1)$, функция $f(x) \in L_2(B_r)$. Будем продолжать функцию $u(x)$ нулем перед применением к ней операторов R_i, $i = 1, 2$.

Уравнение (1), (2) будем называть сильно эллиптическим в $\overline{B_r}$, если $\exists\, c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$, что для всех $u \in C_0^\infty(B_r)$ выполнено неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}\left(A_R u, u\right)_{L_2(B_r)} \geq c_1 \|u\|^2_{W_2^1(B_r)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(B_r)}. \tag{3}$$

Теорема. *Уравнение* (1), (2) *является сильно эллиптическим в области* $\overline{B_r}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{2} \left(\xi_i^2 \left(a_{i0} + a_{i1}\lambda + a_{i,-1}\frac{1}{\lambda}\right)\right) > 0$$

при $|\lambda| = \sqrt{\frac{q}{p}}$, $|\xi| = 1$.

Значение неравенства типа Гординга определяется тем, что для рассматриваемого уравнения оно обеспечивает фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи Дирихле. Также сильно эллиптический оператор удовлетворяет гипотезе Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора (см. [1]). Для дифференциально-разностных уравнений проблема нахождения алгебраического эквивалента неравенству (3) была решена А. Л. Скубачевским [2], а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — Л. Е. Россовским [3, 4].

Некоторые результаты о внутренней гладкости в подобластях будут также представлены в докладе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00395, № 12-01-31454).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // Differ. Equ. 1986. V. 63, N 3. P. 332–361.
3. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 59, вып. 1. С. 103–113.
4. *Россовский Л. Е.* Об одном классе секториальных функционально-дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 227–237.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ON SOLVABILITY OF A LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER PARABOLIC EQUATION

Телешева Л. А.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
love_20_09@mail.ru

В докладе рассматривается вопрос о разрешимости обратной задачи определения правой части для параболического уравнения четвертого порядка с граничным условием переопределения.

Пусть Q есть прямоугольник $\{(x,t) : x \in (0,1),\ t \in (0,T),\ T < \infty\}$. Далее, пусть $f(x,t)$, $c(x,t)$, $h(x,t)$ суть функции, определенные в $\overline{Q}$, $u_0(x)$ есть известная функция, определенная при $x \in [0,1]$. Требуется найти функции $u(x,t)$, $q(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t + u_{xxxx} + c(x,t)u = f(x,t) + q(t)h(x,t),$$

причем для функции $u(x,t)$ должны выполняться условия

$$\begin{gathered} u_x(0,t) = 0, \\ u_x(1,t) = 0, \\ u_{xxx}(0,t) = 0, \\ u_{xxx}(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1]. \end{gathered}$$

Доказывается также существование решения нелокальной задачи для уравнения параболического типа четвертого порядка.

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

ON CONVERGENCE OF AN ITERATIVE PROCESS FOR SOLVING AN EXTREMUM PROBLEM FOR HEAT CONVECTION EQUATIONS

Терешко Д. А.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
ter@iam.dvo.ru

Данная работа посвящена теоретическому исследованию вопросов сходимости одного итерационного процесса, предложенного для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Указанная система возникает при рассмотрении экстремальных задач для стационарной модели тепловой конвекции. В данной модели процесс движения вязкой теплопроводной жидкости в ограниченной области Ω с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N, описывается следующей краевой задачей:

$$-\nu\,\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = -\beta\,T\mathbf{G}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma,$$

$$-\lambda\,\Delta T + \mathbf{u}\cdot\nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda\frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Gamma_N.$$

Здесь $\mathbf{u}$, p и T — вектор скорости, давление и температура, $\nu = \text{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, β — коэффициент теплового расширения, $\mathbf{G}$ — вектор ускорения свободного падения, $\lambda = \text{const} > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Функция χ, имеющая смысл потока тепла, ниже играет роль управления. С помощью пространств Соболева стандартным образом получается слабая формулировка данной задачи, которая для краткости записывается в виде операторного уравнения $F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0$.

Далее задача управления сводится к задаче условной минимизации

$$J(\mathbf{u}, p, T, \chi) \to \inf, \quad F(\mathbf{u}, p, T, \chi) = 0, \quad \chi \in K,$$

где K — некоторое выпуклое замкнутое множество управлений. Для того чтобы сделать задачу минимизации безусловной, вводится лагранжиан, зависящий от исходного состояния $(\mathbf{u}, p, T)$, управления χ и сопряженного состояния $(\mathbf{q}, \sigma, \theta)$. Затем выводится система оптимальности, имеющая смысл необходимых условий экстремума первого порядка. Она состоит из слабых формулировок исходной краевой задачи, сопряженной задачи и условия оптимальности управления.

Для ее решения в монографии [1] предложен итерационной процесс, основанный на методе Ньютона – Канторовича для операторного уравнения в функциональных банаховых пространствах. Так как этот подход применяется до этапа дискретизации, то вопрос о сходимости алгоритма можно рассматривать в рамках теории краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных независимо от используемых далее численных методов. Основной целью исследования является получение достаточных условий на исходные данные, обеспечивающих сходимость итерационного процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00313).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В., Терешко Д. А.* Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.

О РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ P-ЛАПЛАСИАНА

RADIALLY-SYMMETRIC SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE P-LAPLACE EQUATION

Терсенов Ар. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
aterseno@math.nsc.ru

Одним из классических примеров нелинейных вырождающихся и сингулярных эллиптических уравнений является p-лапласиан и его анизотропный аналог. Нас интересует вопрос существования ограниченного обобщенного решения задачи Дирихле для указанных уравнений. Известно, что разрешимость задачи Дирихле в классе ограниченных решений для уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^{N}(|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} = c(\mathbf{x})g(u) + f(\mathbf{x}) \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

где постоянные $p_i > 1$, $i = 1, \ldots, N$, а Ω — строго выпуклая ограниченная область, существенно зависит от размерности области, в которой она исследуется. Причем такая зависимость имеется только в сингулярном случае, т. е. когда присутствуют показатели $p_i < 2$. Аналогичный результат имеет место и для параболических версий p-лапласиана и его анизотропного аналога. В настоящем докладе речь пойдет о существовании ограниченных радиально-симметричных решений задачи Дирихле для уравнения

$$-\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = c(|\mathbf{x}|)g(u) + f(|\mathbf{x}|) \ \text{ в } \ B_R \subset \mathbb{R}^N, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial B_R,$$

где B_R — шар радиуса R, $p > 1$. Предполагаем, что нелинейность функции g может быть как полиномиальной, так и экспоненциальной. Мы не налагаем каких-либо условий на правую часть уравнения, которая гарантировала бы нам знак решения или необращение в нуль u_r, где $r = |\mathbf{x}|$.

Доказана разрешимость задачи в классе $C^{1+\alpha}$. Показано, что в сингулярном случае $1 < p < 2$ радиально-симметричное решение удовлетворяет уравнению в классическом смысле почти всюду. Метод аппроксимации исходного уравнения последовательностью невырождающихся уравнений позволяет получать условия разрешимости в явном виде через данные задачи. В частности, из полученных условий разрешимости вытекает, что зависимость существования решения от размерности имеется не только в сингулярном случае $1 < p < 2$, но и для $p \geq 2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00390 а), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 30) и Президиума РАН (программа № 15, проект № 121).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Starovoitov V., Tersenov Al. S.* Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source // Nonlinear Anal. 2010. V. 72, N 6. P. 3009–3027.
2. *Tersenov Al., Tersenov Ar.* The problem of Dirichlet for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations // Differ. Equ. 2007. V. 235, N 2. P. 376–396.
3. *Терсенов Ар. С.* Новые априорные оценки решений анизотропных эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 672–686.

О КОРРЕКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТАКТНОГО РАЗРЫВА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

ON WELL-POSEDNESS IN SOBOLEV SPACES OF THE PROBLEM FOR CONTACT MHD DISCONTINUITIES

Трахинин Ю. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
trakhin@math.nsc.ru

В магнитной гидродинамике (МГД) идеальной сжимаемой жидкости существует два вида сильных разрывов, являющихся контактными в том смысле, что отсутствует поток массы через поверхность разрыва. Это тангенциальные и, собственно, *контактные* разрывы [1]. Они оба являются характеристическими поверхностями для уравнений МГД, представляющих собой гиперболическую систему законов сохранения.

Локальная по времени теорема существования и единственности в весовых анизотропных пространствах Соболева для тангенциальных разрывов доказана недавно в [2] при условии, что в начальный момент времени в каждой точке разрыва выполнено найденное достаточное условие устойчивости. Что же касается контактных МГД разрывов, которым посвящен настоящий доклад, то до сих пор про них было известно только то, что плоский разрыв всегда устойчив в смысле выполнения условия Лопатинского для линеаризованной задачи с постоянными коэффициентами, что следует из диссипативности граничных условий.

Принципиальным моментом для контактного разрыва является *неэллиптичность символа свободной границы*, что означает неразрешимость граничных условий для пространственно-временного градиента $\nabla_{t,x}F$ функции, описывающей разрыв $F(t,x)=0$. Это препятствует переносу L^2 оценки, полученной для случая постоянных коэффициентов на случай переменных коэффициентов. Аналогичная трудность имеет место также для задачи со свободной границей между газом и вакуумом [3], для которой возникает условие Рэлея – Тейлора $\partial p/\partial n<0$ на знак производной по нормали давления в каждой точке границы.

Для контактных МГД разрывов для двумерного случая нами доказана корректность в пространствах Соболева H^m линеаризованной задачи с переменными коэффициентами, если в каждой точке невозмущенного разрыва выполнено условие Рэлея – Тейлора $[\partial p/\partial n]<0$ на знак скачка производной по нормали давления плазмы. При нарушении этого условия впервые аналитически доказана неустойчивость Рэлея – Тейлора контактного МГД разрыва, на возможность которой ранее указывалось в некоторых вычислительных работах.

Соответствующую локальную по времени теорему существования и единственности для исходной нелинейной задачи планируется в ближайшее время доказать, как и в [2, 3], с помощью метода Нэша – Мозера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
2. *Trakhinin Y.* The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. V. 191, N 2. P. 245–310.
3. *Trakhinin Y.* Local existence for the free boundary problem for nonrelativistic and relativistic compressible Euler equations with a vacuum boundary condition // Commun. Pure Appl. Math. 2009. V. 62, N 11. P. 1551–1594.

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОСТОЯННОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

ON INVARIANCE OF A CONSTANT MULTIVALUED MAPPING IN A HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM WITH DELAY

Тухтасинов М.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; mumin51@mail.ru

В отличие от работы [1] здесь рассмотрены задачи с граничным управлением. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Через A обозначим положительно определенный эллиптический оператор.

Пусть оператор P определен равенством

$$P\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cos(\ell, x_i) + k(x)\varphi, \quad x \in \partial\Omega,$$

где ℓ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $k(x)$ — заданная положительная непрерывная функция в $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую задачу управления теплообмена с запаздыванием [2]

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} + Az(t) = z_0(t-h), \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

с граничным

$$Pz(t) = u(t), \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

и начальным

$$z(0) = z_0(0) \tag{3}$$

условиями, где $z_0(\cdot) \in X$, $X = \{z(\cdot) : z(t) \in H_r(\Omega),\ -h \le t \le 0\}$.

Здесь $z(\cdot)$, $u(\cdot)$ — абстрактные функции, т. е. при каждом $t > 0$ являются элементами пространств $H_r(\Omega)$ и $L_2(\partial\Omega)$ соответственно, h — положительная фиксированная константа, T — положительное число.

Теорема 1. *При выполнении естественных условий на X и допустимых управлениях существует единственное решение задачи* (1)–(3) *в пространстве $C(0,h;H_r(\Omega))$, причем отображение $\{\{z_{0k}^0\}, z_0, \tilde{u}\} \to z$ пространства $\ell_r \times L_2(0,h;H_r(\Omega)) \times \tilde{L}_2(0,h;H_r(\Omega))$ в $C(0,h;H_r(\Omega))$ непрерывно.*

Определение. Многозначное отображение $D : [-h,T] \to 2^{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, называется сильно инвариантным на отрезке $[-h,T]$ относительно задачи (1)–(3), если для любых $\|z_0(t)\|_{H_r} \in D(t)$, $-h \le t \le 0$, и допустимых $u(\cdot)$ выполняется включение $\|z(t)\| \in D(t)$ при всех $0 < t \le T$, где $z(\cdot)$ — соответствующее решение задачи (1)–(3) [1, 2].

Теорема 2. *Пусть $\rho \le (\lambda_1 - 1)b$. Тогда постоянное многозначное отображение $D(t) = [0,b]$, $t \in [-h,T]$, сильно инвариантно на отрезке $[-h,T]$ относительно задачи* (1)–(3) *для любого $T > 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тухтасинов М., Мустапакулов Х.* Инвариантные множества в системах с распределенными параметрами // Тез. докл. Междунар. Российско – Болгарского симпозиума. Нальчик, 2010. С. 232–233.
2. *Tukhtasinov M., Ibragimov U. M.* Sets invariant under an integral constraint on controls // Russian Math. (Izv. VUZ. Mat.). 2011. V. 55, N 8. P. 59–65.

L_p-ОЦЕНКИ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

L_p-ESTIMATES OF THE INNER PRODUCTS OF VECTOR FIELDS AND THEIR APPLICATION FOR STUDYING ELECTROMAGNETIC PROCESSES IN HETEROGENEOUS MEDIA

Тюхтина А. А.[1], **Калинин А. В.**[1,2], **Жидков А. А.**[1,2], **Молодкина В. Е.**[1]

[1] *Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;*
[2] *Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия;*
kalinmm@yandex.ru, avk@mm.unn.ru

В настоящей работе на основе некоторых специальных представлений вектор-функций через дифференциальные операции векторного анализа доказываются неравенства, связывающие скалярное произведение вектор-функций и нормы их роторов и дивергенций в пространствах Лебега. Различные интегральные представления для функций и вектор-функций могут быть использованы, в частности, при доказательстве L_p-оценок для норм, известных в литературе под названием неравенств Корна, играющих важную роль в теории дифференциальных уравнений [1–3]. Полученные в настоящей работе оценки для скалярных произведений векторных полей обобщают ряд известных неравенств и могут быть использованы при исследовании физических полей в неоднородных средах. В качестве приложений доказанных оценок исследуется корректность постановок различных задач, связанных с системой уравнений Максвелла. В частности, исследуются стационарные задачи для системы уравнений Максвелла для неоднородных ограниченных и неограниченных областей, исследуются асимптотические свойства решений для сред со слабо- и сильнопроводящими включениями. Рассматриваются начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и квазистационарном электрическом приближении. Исследуются различные постановки задач в терминах электромагнитных полей и в терминах векторного магнитного и скалярного электрического потенциала. Приводятся различные калибровочные соотношения, обеспечивающие корректность рассматриваемых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) и гранта Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0048).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
3. *Решетняк Ю. Г.* Об интегральных представлениях дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 173–186.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGH DIMENSION

Уварова И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; sibirochka@ngs.ru

Мы продолжаем исследование связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. В работах [1–3] были определены классы систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x),$$

для которых было установлено, что приближенное нахождение значений компонент решений задачи Коши для этих систем можно свести к решению начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1}$$

В данной работе мы рассматриваем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -n\varphi_1(x)x_1 + g(t, x_n), \quad t > 0, \\ \dfrac{dx_j}{dt} = n\varphi_{j-1}(x)x_{j-1} - n\varphi_j(x)x_j, \quad j = 2, \ldots, n-1, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = n\varphi_{n-1}(x)x_{n-1} - \theta x_n. \end{cases} \tag{2}$$

Опираясь на методы, предложенные Г. В. Демиденко, нами сформулированы условия на функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n-1$, при которых последняя компонента $x_n(t)$ решения системы (2) при $n \gg 1$ является приближенным решением уравнения с запаздывающим аргументом (1). Получена оценка аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$ при $n \gg 1$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Г. В. Демиденко за постановку задачи и полезные дискуссии.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
2. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Матем. форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
3. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МКЭ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

FEM FOR AN ELLIPTIC PROBLEM WITH STRONG DEGENERATION

Урев М. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; mih.urev2010@yandex.ru

Рассматривается решение первой краевой задачи для вырождающегося эллиптического уравнения

$$-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda u}{x^2} = f(x,y), \quad \lambda \geq 1, \tag{1}$$

в области $D = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, лежащей в полуплоскости $x > 0$.

При $\lambda = 1$ уравнению (1) (с переобозначением (x,y) на (r,z)) удовлетворяет в цилиндрических координатах азимутальная компонента магнитного потенциала осесимметричного стационарного магнитного поля. Решение такой задачи методом конечных элементов (МКЭ) рассматривалось, например, в работах [1, 2]. При $\lambda \neq 1$ трехмерный осесимметричный образ задачи (1) отсутствует, и привлекается теория весовых функциональных пространств и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений [3].

В соответствующих задаче функциональных пространствах с "согласованными весами" [3] рассмотрены слабая и сильная вариационные постановки. Используя прием мультипликативного выделения особенности для метода конечных элементов с использованием кусочно-линейных элементов, доказана сходимость в весовой норме приближенного решения к точному с оценкой не хуже, чем в случае эллиптического уравнения без вырождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Урев М. В.* Сходимость метода конечных элементов для осесимметричной задачи магнитостатики // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 63–79.
2. *Gopalakrishnan J., Pasciak J. E.* The convergence of V-cycle multigrid algorithms for axisymmetric Laplace and Maxwell equations // Math. Comput. 2006. V. 75, N 256. P. 1697–1719.
3. *Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Матем. 1988. № 8. С. 4–30.

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ

ON AN ANALOGUE OF THE GOURSAT PROBLEM FOR THE GENERALIZED EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION

Уринов А. К.[1], **Исмоилов А. И.**[2]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
[1]urinovak@mail.ru, [2]baron_2408@mail.ru

В четырехугольнике $\Delta = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < 1\}$ плоскости $\xi O \eta$ рассмотрим обобщенное уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу в виде

$$u_{\xi\eta} + \frac{\alpha}{\eta + \xi}(u_\xi + u_\eta) + \frac{\beta}{\eta - \xi}(u_\xi - u_\eta) + \gamma u = 0, \tag{1}$$

где α, β и γ — заданные действительные числа.

В работе [1] изучена задача Гурса об определении регулярного в области $\Delta \backslash \{(\xi, \eta) : 0 < \xi = \eta < 1\}$ решения $u(\xi, \eta) \in C(\overline{\Delta})$ уравнения (1) с заданными значениями $u(\xi, \xi)$ на соседних сторонах $(\xi = 0, \eta = 1)$ четырехугольника Δ. В данном докладе речь будет идти об одном аналоге задачи Гурса для уравнения (1) с краевыми условиями на противоположных сторонах четырехугольника Δ.

Задача $\tilde{\Gamma}$. Найти регулярное в области $\Delta \backslash \{(\xi, \eta) : 0 < \eta = \xi < 1\}$ решение $u(\xi, \eta) \in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, \eta) = \varphi_0(\eta), \quad u(1, \eta) = \varphi_1(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1,$$

и условию склеивания на отрезке $\{(\xi, \eta) : 0 < \xi = \eta < 1\}$:

$$\lim_{\eta \to \xi + 0} (\eta - \xi)^{2\beta} (u_\xi - u_\eta) = \lim_{\eta \to \xi - 0} (\xi - \eta)^{2\beta} (u_\xi - u_\eta), \quad 0 < \xi < 1,$$

где $\varphi_0(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$ — заданные непрерывные функции из $C[0, 1]$.

Замечание. Эта задача при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие $\varphi_0(\eta) = \varphi_1(\eta) + C$, где C — некоторое число из $\mathbb{R}$. При этом, если $\varphi_0(\eta) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, то задача имеет бесчисленное множество решений вида $u(\xi, \eta) = f(\xi) + \varphi_0(\eta)$, $(\xi, \eta) \in \overline{\Delta}$, где $f(\xi) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(1) = C$.

Исследование показало, что справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha \le \beta < 1/2$, $\gamma = 0$; $\varphi_0(x) = x^k \tilde{\varphi}_0(x)$, $k > 0$, $\tilde{\varphi}_0(x) \in C^4[0, 1]$; $\varphi_1(x) = x^l \tilde{\varphi}_1(x)$, $l > 1$, $\tilde{\varphi}_1(x) \in C^4[0, 1]$;

$$\int_0^1 \left[\varphi_1(z)(1 + z)^\alpha (1 - z)^\beta\right]'_z z^{-\alpha-\beta}(1 + z)^\alpha (1 - z)^\beta dz = 0.$$

Тогда решение задачи $\tilde{\Gamma}$ *существует и оно единственно.*

Единственность решения задачи $\tilde{\Gamma}$ доказывается методом интегралов энергии, а существование решения — эквивалентным сведением задачи $\tilde{\Gamma}$ к сингулярному интегральному уравнению [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уринов А. К., Исмоилов А. И.* Задача Гурса для обобщенного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Материалы республиканской науч. конф. “Актуальные проблемы математического анализа”. Ургенч, 2012. С. 89–92.
2. *Салахитдинов М. С., Хасанов А.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 9, № 1. С. 110–119.

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

THEORY OF GENERALIZED SOLUTIONS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION IN BANACH SPACES AND THEIR APPLICATIONS

Фалалеев М. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
mihail@ic.isu.ru

В докладе представлен обзор результатов по исследованию в классах распределений вырожденных интегродифференциальных уравнений вида

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \geq 0,$$

в банаховых пространствах с необратимым оператором B. Класс обобщенных функций с ограниченным слева носителем K'_+ является естественным для задач такого типа, а наиболее эффективным инструментарием для восстановления решений в нем — теория фундаментальных оператор-функций вырожденных интегродифференциальных операторов. На этом пути удается получать явные формулы для обобщенных решений, определять структуру решения, исследовать связь между обобщенными и гладкими (классическими) решениями, т. е. проводить исследования в полном объеме. При различных типах сингулярности оператора B и свойствах операторных пучков уравнения получены формулы для фундаментальных решений соответствующих интегродифференциальных операторов. В докладе отражены как опубликованные результаты [1–5], так и новые. Рассмотрены приложения полученных теорем к неклассическим начально-краевым задачам математической физики, теории вязкоупругости и др.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (госконтракт № 14.B37.21.0365).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фалалеев М. В.* Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2012. С. 235–244.
2. *Фалалеев М. В., Орлов С. С.* Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 286–297.
3. *Фалалеев М. В., Орлов С. С.* Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 10. С. 68–79.
4. *Sidorov N. A., Falaleev M. V.* Continuous and generalized solutions of singular integro-differential equations in Banach spaces // Вестн. ЮУрГУ. 2012. № 5 (264). Сер. Матем. модел. програм. Вып. 11. С. 62–74.
5. *Фалалеев М. В.* Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 2. С. 90–102.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

SOME PECULIARITIES OF MATHEMATICAL MODELING OF THE SUPER-HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC FIELDS

Федорук М. П.[1], **Шурина Э. П.**[2], **Михайлова Е. И.**[2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;* shurina@online.sinor.ru

В настоящее время особый интерес представляют методы моделирования высокочастотных электромагнитных полей в гетерогенных средах, в средах с малыми и разномасштабными включениями сложной геометрии. В связи с этим в последние десятилетия активно изучается возможность применения к решению таких задач многомасштабных методов, в частности, разрывного метода Галеркина (DG-методы) [1].

В данной работе рассматриваются особенности математического моделирования квазистационарного высокочастотного электромагнитного поля, поведение которого описывается уравнением Гельмгольца.

В разрывном методе Галеркина для решения уравнения Гельмгольца вводятся специальные функциональные пространства [2], позволяющие строить "сверхслабые" вариационные формулировки, для которых законы сохранения выполняются локально, т. е. на каждом конечном элементе. Эта особенность позволяет естественным образом комбинировать в сетке разномасштабные несогласованные элементы, конечные элементы различной геометрии, базисные функции разных порядков. Однако локальная консервативность требует построения специальных операторов следа на границах конечных элементов.

В работе выполнен анализ различных вариационных формулировок DG-метода для задач электромагнетизма, дискретный аналог которых конструируется на тетраэдральном, адаптивном разбиении области моделирования на векторных базисных функциях Nedelec'a первого и второго полного порядков [3].

Векторные базисные функции (edge-элементы) полного порядка обеспечивают выполнение условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля как на границах между конечными элементами, так и на межфрагментарных границах в области моделирования, и "скачок" нормальных компонент поля, ассоциированный с выполнением закона сохранения заряда. Для выполнения этих условий в DG-методе для корректного ассемблирования глобальной матрицы конечноэлементной системы линейных алгебраических уравнений необходимо вводить специальные операторы следа и лифтинг-операторы, что приводит к различным вариационным формулировкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cockburn B. et al.* The development of discontinuous Galerkin methods. Minneapolis, Mn, 2000. 220 p. (UMSI research report / University of Minnesota, Supercomputer institute; V. 99).
2. *Houston P., Perugia I., Schotzau D.* Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator // SIAM J. Numer. Anal. 2004. V. 42, N 1. P. 434–459.
3. *Webb J. P.* Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // IEEE Trans. Antennas Propag. 1999. V. 47, N 8. P. 1244–1253.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

A PERIODIC NONLOCAL PROBLEM FOR A CLASS OF SOBOLEV TYPE EQUATIONS

Фёдоров В. Е.[1], **Фёдорова Ю. Ю.**[2]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]kar@scu.ru, [2]yulia_f74@mail.ru

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — банаховы пространства, оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ линеен и непрерывен (для краткости обозначим $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$), $\ker L \neq \{0\}$, а оператор $M : D(M) \to \mathfrak{V}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$. Рассмотрим нелокальную задачу

$$\int_0^\infty u(t)\eta(t)dt = u_0 \tag{1}$$

для операторно-дифференциального уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Ранее эта нелокальная задача была исследована в работах И. В. Тихонова [1, 2] для эволюционного уравнения, разрешенного относительно производной.

Обозначим $\chi(z) = \int_0^\infty e^{zt}\eta(t)dt$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})\}$.

Теорема. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален* [3], *при этом*

(i) *разрешающая полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \geq 0\}$ уравнения* (2) *является экспоненциально убывающей, т. е.*

$$\exists\, K \geq 1 \quad \exists\, \beta > 0 \quad \forall\, t \geq 0 \quad \|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq Ke^{-\beta t};$$

(ii) *$\eta \in C^1[0, \infty)$, $\eta(0) \neq 0$, $\eta(t + T) = \eta(t)$ для всех $t \geq 0$;*

(iii) *ни один нуль функции $\chi(z)$ не принадлежит множеству $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Для любого $u_0 \in D(M_1)$ существует единственное обобщенное решение $u = u(t)$ задачи* (1), (2). *При этом оно удовлетворяет оценке устойчивости*

$$\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq Ke^{-\beta t}C \|Mu_0\|_{\mathfrak{V}} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Здесь $K \geq 1$ и $\beta > 0$ такие же, как в условии (i) *теоремы, а константа $C > 0$ не зависит от u_0 и t.*

(ii) *Обобщенное решение задачи* (1), (2) *является классическим тогда и только тогда, когда $u_0 \in D((L_1^{-1}M_1)^2)$.*

(iii) *Если $u_0 \in \mathfrak{U} \setminus D(M_1)$, то не существует обобщенного решения задачи* (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов И. В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 841–843.
2. *Тихонов И. В.* Нелокальная задача с "периодическим" интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Интегральные преобразования и специальные функции. 2004. Т. 4, № 1. С. 49–69.
3. *Фёдоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.

ИМПУЛЬСНО-СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

IMPULSE SLIDING MODES OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Финогенко И. А.[1], **Пономарев Д. В.**[2]

[1] *Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия;* fin@icc.ru

[2] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;* zmeigo.sc@gmail.com

Исследуется управляемый объект, представленный в виде:

$$\dot{x} \in F(t,x) + u, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, u — управляющее воздействие, задаваемое некоторым абстрактным оператором $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$, сопоставляющим каждому текущему моменту времени t и состоянию объекта x импульс $p(t,x)\delta_t$, вектор-функция $p(t,x)$ — интенсивность импульса, δ_t — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени t. Выражение $p(t,x)\delta_t$ ("бегущий импульс"), как обобщенная функция, смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе (1) функционирует импульсное позиционное управление, подразумевающее дискретную реализацию "бегущего импульса" в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках h: $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta$ разбиения отрезка I. Результатом такой последовательной коррекции является разрывная кривая $x^h(\cdot)$, называемая ломаной Эйлера, по определению совпадающая на промежутках $(t_k, t_{k+1}]$ с решением задачи Коши

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big).$$

Мы рассматриваем случай, когда в результате действия корректирующего импульса в момент времени t_k предельная справа точка $(t_k, x(t_k+0))$ интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии $S = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sigma^j(t,x) = 0,\ j = \overline{1,m}\}$. Тогда сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а траектории $r(\cdot)$, предельные для равномерно сходящихся на промежутке $(t_0, \theta]$ последовательностей ломаных Эйлера, — идеальными (предельными) импульсно-скользящим режимами. Мы доказываем, что начиная с момента $t_0 + 0$ выполняется $(t, r(t)) \in S$, $t \in (t_0, \theta]$ и методом эквивалентного управления получаем условия, при которых любой идеальный импульсно-скользящий режим $r(\cdot)$ является решением (обычным скользящим режимом) дифференциального включения вида

$$\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{u}(t,x),$$

где $B(t,x)$ — $n \times m$ матрица, $\tilde{u}(t,x) = (\tilde{u}_1(t,x), \ldots, \tilde{u}_m(t,x))$ — разрывное на множестве S позиционное управление релейного типа. Полученные результаты применяются для исследования режимов декомпозиции механических систем с сухим трением, представленных в форме уравнений Лагранжа второго рода.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 17, Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80) и ФЦП Минобрнауки РФ (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

О РЕЗОНАНСЕ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ
ABOUT RESONANCE IN A ROTATING IDEAL FLUID

Фокин М. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
fokin@math.nsc.ru

В докладе рассматривается задача о возбуждении гармонических колебаний в идеальной вращающейся жидкости, исходным состоянием которой является твердотельное вращение. В качестве математической модели этого процесса исследуются решения линеаризованных уравнений Эйлера (система уравнений Пуанкаре – Соболева) с дополнительно введенной внешней силой, меняющейся по гармоническому закону с частотой ω. Рассматриваются движения жидкости в бесконечном цилиндре с образующей, перпендикулярной оси вращения, удовлетворяющие условию непротекания на границе и инвариантные относительно сдвигов вдоль образующей. Известно, что в этом случае энергетический спектр решений существенно зависит от выбора начальных данных и геометрических свойств области, лежащей в сечении цилиндра, спектр решения может оказаться точечным, абсолютно непрерывным и сингулярно непрерывным. Появление участков непрерывного спектра связано с существованием однопараметрических семейств обобщенных (разрывных) решений линеаризованных уравнений Эйлера, которые могут быть истолкованы с физической точки зрения как колебания жидкости с некоторой заданной частотой, сосредоточенные в тонких слоях, отражающихся от стенок сосуда. В докладе описывается конструкция указанных обобщенных решений и построение на их основе точных гладких решений, описывающих резонанс в жидкости. Показано, что в случае, когда ω принадлежит точечному спектру задачи, наблюдается объемный резонанс, т. е. неограниченный рост компонент поля скоростей на множестве положительной меры. Если ω принадлежит интервалу абсолютно непрерывного спектра, то резонансный рост поля скоростей происходит только в точках некоторого конечного множества плоскостей, параллельных образующей цилиндра. Именно эти плоскости являются поверхностями разрыва обобщенных решений, соответствующих данному ω. При описании движения жидкости основную роль играет гамильтонова подсистема, состоящая из двух компонент поля скоростей. С ее помощью определяются вихревые структуры, связанные с точками локальных экстремумов по пространственным переменным гамильтониана, и описывается их эволюция. Для различных случаев резонансного возбуждения колебаний жидкости в докладе дается описание поведения вихревых структур, в частности, эффектов их прохождения через резонансные плоскости на непрерывном спектре. При этом цилиндр разбивается на некоторые подобласти, в части которых возникают вихревые пульсации: в течение периода воздействия вынуждающей силы есть промежутки времени, когда множество вихревых структур становится пустым, но в остальное время они присутствуют и их общее число увеличивается с ростом времени t. В оставшейся части подобластей пульсации отсутствуют: подвижные вихревые структуры существуют для всех моментов времени, общее их число неограниченно возрастает.

Отметим, что в ряде экспериментальных работ изучалось возбуждение гармонических колебаний во вращающемся цилиндре с жидкостью малой вязкости. Обнаруженные эффекты были охарактеризованы как "появление тонких интенсивно колеблющихся слоев, отражающихся от стенок сосуда". Такое описание близко к полученному в докладе для случая непрерывного спектра задачи.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ДАННЫМИ КОШИ

ON EXISTENCE OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A SPECIAL FORM WITH CAUCHY DATA

Фроленков И. В.[1], **Романенко Г. В.**[2]

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
[1]igor@frolenkov.ru, [2]galina.romanencko@yandex.ru

В работе исследовано существование решений задач Коши для системы двух уравнений параболического типа и системы составного типа специального вида.

В пространстве E_1 переменных x выберем r различных точек α_k, $k = \overline{1,r}$, и s различных точек β_m, $m = \overline{1,s}$.

Рассмотрим в полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T,\ x \in E_1\}$ систему нагруженных неклассических параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x + f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),\\ v_t &= a_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_{xx} + b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x + f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

и систему составного типа

$$\begin{aligned} u_t &= a_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_{xx} + b_1(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))u_x + f_1(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)),\\ v_t &= b_2(t,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t))v_x + f_2(t,x,u,v,\overline{\varphi}_u(t),\overline{\varphi}_v(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), \quad x \in E_1. \tag{3}$$

Через $\overline{\varphi}_u(t) = \Big(u(t,\alpha_k), \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(t,\alpha_k)\Big)$, $\overline{\varphi}_v(t) = \Big(v(t,\beta_m), \frac{\partial^j}{\partial x^j}v(t,\beta_m)\Big)$, $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,s}$, $j = \overline{0,p}$, обозначены вектор-функции, компоненты которых являются следами (зависящими только от переменной t) функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$, а также соответственно всех их производных по пространственной переменной x до порядка p включительно.

В работе получены достаточные условия существования решения в классе гладких ограниченных функций задачи (1), (3), а также задачи (2), (3).

Системы подобного вида возникают при исследовании коэффициентных обратных задач для систем параболических уравнений [1] или систем составного типа [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31033).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бендер О. А.* Разрешимость задачи идентификации функции источника в нелинейной системе параболического типа // Материалы VII Молодеж. науч. школы-конф. “Лобачевские чтения – 2009”. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2009. С. 133.
2. *Вячеславова П. Ю., Сорокин Р. В.* Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2009. Т. 2, № 3. С. 288–297.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

NUMERICAL SOLVING A HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия; hanhvladnick@mail.ru

В работах В. Н. Ханхасаева, посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа, численно и аналитически решались различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье. Развивая эти исследования, модифицируем математическую модель, заменяя гиперболическое уравнение теплопроводности гиперболо-параболическим уравнением в частных производных 2-го порядка

$$Lu = k(x,t)u_{tt} + a(x,t)u_t - \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} + c(x)u = f(x,t) \tag{1}$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega = [0, m] \times [0, n]$, $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, $m > 0$, $n > 0$; $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$, $\gamma = \partial\Omega$. При этом $k(x,t) = 0$, $t \le 0$; $k(x,t) > 0$, $t > 0$; $a(x,t) > 0$, $\forall\,(x,t) \in G$, т. е. при $t \le 0$ уравнение (1) параболическое, а при $t > 0$ — гиперболическое.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области G такое, что

$$u|_\Gamma = 0, \qquad u|_{t=T_1} = 0. \tag{2}$$

Для двумерной пространственной задачи как явная, так и неявная обычные разностные схемы приводят к одинаковому объему вычислений, пропорциональному N^4 операций. Вычисление решения приведенной разностной схемы осуществляется в два этапа. На первом — вычисление значений u_{ij} на полуцелом слое $t_{k+\frac{1}{2}}$ ведется прогонкой в направлении оси $0x_1$. Второй этап — прогонка на слое t_{k+1} по оси $0x_2$. Эту схему называют продольно-поперечной или схемой переменных направлений.

Всего на одном слое осуществляется $2N$ прогонок, т. е. число арифметических операций на одном слое пропорционально N^2. В используемой неявной схеме можем положить $\tau = h$ и тогда для расчета до момента T по времени надо сделать N шагов. Таким образом, трудоемкость решения всей задачи оценивается числом, имеющим порядок N^3, что более чем на порядок лучше по сравнению с вышеописанными схемами.

При некоторых условиях на коэффициенты уравнения реализована разностная схема численного решения вначале параболического уравнения, а затем гиперболического, и доказана следующая теорема.

Теорема. *Разностное решение краевой задачи* (1), (2) *устойчиво, и интерполяции* $u_h^\tau(x,t)$ *решений этой разностной задачи сходятся слабо в* $W_2^1(G)$ *при* $h \to 0$, $\tau \to 0$ *к решению* $u(x,t)$ *краевой задачи* (1), (2) *из пространства* $W_2^2(G)$.

Работа выполнена в рамках проекта "Государственное задание высшим учебным заведениям (2012–2014 гг.) для проведения НИР" (проект № 1.926.2011).

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR THE LOADED ALLER EQUATION

Холиков Д. К.

Архитектурно строительный институт, Ташкент, Узбекистан;
xoliqov23@mail.ru

Рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x,t)dx, \tag{1}$$

здесь $a(x,t)$ — заданная функция, а α, β — заданные постоянные, причем $0 \le \alpha < \beta \le l$.

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < h\}$ рассмотрим вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи с условиями типа Стеклова для уравнения (1) в следующей постановке: *найти в области D решение уравнения* (1) *из класса* $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и следующим граничным условиям

$$u_x(0,t) = \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u(l,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(l,t) = \beta_1 u(0,t) + \beta_2 u(l,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$— заданная функция, α_i, β_i $(i = 1, 2)$ — заданные постоянные, причем $\beta_1 \ne 0$.

Уравнения типа (1) возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах, в теории влагопереноса в почве, в теории теплопроводности в различных средах и исследовались, например, в работах [1, 2].

Отметим, что нелокальные условия (3) и (4) относятся к типу нелокальных условий Стеклова первого класса [1].

В работе рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения нелокальной задачи для нагруженного уравнения Аллера. С помощью метода Римана доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленной задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Керефов А. А., Плотникова Е. В.* Нелокальные задачи для одного уравнения третьего порядка // Владикавказский мат. журн. 2005. Т. 7, № 1. С. 51–60.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. ун-та. Сер. естественнонаучная. 2008. № 3 (62). С. 165–174.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУЦИЛИНДРАХ С ОСНОВАНИЕМ В ВИДЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛЕНКИ

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN SEMI-CYLINDERS WITH THE BASE IN THE FORM OF A DOUBLE-LAYER FILM

Холодовский С. Е.

Забайкальский государственный университет, Чита, Россия; hol47@yandex.ru

В полуцилиндре $D = (x < 0) \times (y \in Q \subseteq \mathbb{R}^m)$ для функции $u(x, y)$ рассматривается класс краевых задач с обобщенным граничным условием

$$\partial_x^2 u + L[u] = 0, \qquad M[u]\big|_{(x,y)\in S} = 0, \qquad AB\partial_x^2 u + Bk\partial_x u + u\big|_{x=0} = \varphi(y), \quad (1)$$

где $\partial_x^n = \partial^n/\partial x^n$, $S = \partial Q \times (x < 0)$, $\varphi(y) \in C(S)$, постоянные $A, B, k > 0$; L и M — произвольные линейные дифференциальные операторы по переменным y_i $(y = (y_1, \ldots, y_m))$ такие, что соответствующая классическая задача в D вида

$$\partial_x^2 f + L[f] = 0, \qquad M[f]\big|_{(x,y)\in S} = 0, \qquad f\big|_{x=0} = \varphi(y) \quad (2)$$

корректна. Граничное условие при $x = 0$ (1) соответствует условию на двухслойной пленке, состоящей из сильно проницаемой трещины $x = -0$ и слабопроницаемой завесы $x = +0$ [1]. Для волнового уравнения это условие соответствует наличию точечной массы на конце $x = 0$ полуограниченной струны $x < 0$ при упругом контакте (с подвижной пружинкой). Граничное условие типа (1) без пружинки рассмотрено в [2, с. 147]. Методом свертывания разложений Фурье [1, 3, 4] решение задачи (1) выражено через решение $f(x, y)$ задачи (2) в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^\infty f(x-z,y)\left(e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_2 z}\right) dz, \qquad \gamma_i = \frac{Bk + (-1)^i\sqrt{T}}{2AB},$$

и

$$u(x,y) = \frac{1}{AB} \int_0^\infty f(x-z,y) e^{-\gamma z} z dz, \qquad \gamma = \frac{k}{2A}$$

соответственно при $T = B(Bk^2 - 4A) \neq 0$ и $T = 0$.

Полученный результат имеет интерес при расчетах процессов тепломассопереноса в композитных материалах, в материалах с пленочными включениями и наноразмерными пленочными покрытиями, при расчетах колебаний нагруженных балок, пролетов мостов и т. д.

Работа выполнена в рамках государственного задания вузу Минобрнауки РФ (код проекта 1.3985.2011).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1550–1556.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 855–859.
4. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.

НЕКОТОРЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МОМЕНТОВ СТИЛЬТЬЕСА И МОМЕНТОВ ХАУСДОРФА, ПОРОЖДАЮЩИЕ НОВЫЕ ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

SOME STIELTJES AND HAUSDORF MOMENT SEQUENCES PRODUCING NEW GENERATING FUNCTIONS FOR THE GENERALIZED BESSEL FUNCTIONS

Хриптун М. Д.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Khriptun@math.nsc.ru

Решения многих задач математической физики и техники выражены с помощью классических специальных функций (функций Лежандра, функций Бесселя, гипергеометрических функций и др.). Найдены уже многие обобщения этих функций и применяются они в более сложных задачах: в статистических распределениях, в физических исследованиях, в инженерных вычислениях (теории сигналов), в теории массового обслуживания и др. (см., например, [1, 2]).

Понятие производящей функции $G(z,t)$ для последовательности функций $\varphi_n(z)$ (т. е. $G(z,t)=\sum_n \alpha_n\varphi_n(z)t^n$, где α_n — числа) является одним из основных, т. к. из таких функций можно получить другие свойства и формулы для функций $\varphi_n(z)$.

В докладе рассмотрим обобщенные функции Бесселя (ОФБ) вида

$$U_\nu^{(m)}(z)=U_\nu(z,m)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/m)^{\nu+mk}}{k!\Gamma[(m-k)k+\nu+1]}, \tag{1}$$

где $\nu=\nu_m=-(m-1)p$, $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера, p — комплексный параметр и z — комплексная переменная (при $m=2$ функция (1) является модифицированной функцией Бесселя $I_\nu(z)=U_\nu(z,2)$) (см. [3, с. 287, формула (3)]).

Эти ОФБ при $m>2$ находят приложения в операционном исчислении, в теории чисел, в сложных задачах математической физики и др. При целом индексе ν применяются при решении одноканального уравнения теории массового обслуживания.

Для функций (1) построим некоторые новые производящие функции типа $G_\gamma(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n U_n^{(m)}(z)t^n$, используя уже известные для них производящие функции типа $G(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{(m)}(z)t^n$, где $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ есть последовательности действительных чисел, не зависящие от z, t, которые являются некоторыми интегральными преобразованиями определенного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mathai A. M., Saxena R. K.* Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and physical sciences. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1973.
2. *Srivastava H. M., Kashyap B. R. K.* Special functions in queueing theory and related stochastic processes. New York: Acad. Press, 1982.
3. *Хриптун М. Д.* Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.

МОДЕЛИ ШЕСТАКОВА – СВИРИДЮКА С РЕЗОНАНСОМ

SHESTAKOV–SVIRIDYUK'S MODELS WITH RESONANCE

Худяков Ю. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
hydyakov74@gmail.com

Рассмотрим модель Шестакова – Свиридюка с учетом резонанса.

Пусть $\aleph = \{x \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\}$ — *пространство состояний* и $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\}$ — *пространство измерений* при некотором фиксированном $\tau \in \mathbb{R}^+$. Выделим в $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_\partial$ — *множество допустимых измерений*. Требуется найти *оптимальное измерение* $v \in \mathfrak{U}_\partial$, почти всюду на $(0,\tau)$ удовлетворяющее уравнению леонтьевского типа

$$L\dot{x} = Mx + Du \tag{1}$$

при начальных условиях Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\mu L - M)^{-1}L\right]^{p+1} x(0) = 0,$$

минимизирующее значение функционала

$$J(v) = \min_{u\in\mathfrak{U}_\partial} \left(\sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| My^{(q)}(t) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt + \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^\tau \left\langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt \right).$$

В технических приложениях уравнение (1) — математическая модель измерительного устройства (ИУ), предполагающего k измеряемых параметров u_j и m наблюдаемых параметров x_j, $j = n-m+1,\dots,n$, $(x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, 0, \dots, 0)$ и $(0,\dots,0,x_{n-m+1},\dots,x_n)$ — вектор-функции состояния ИУ и наблюдений, $k+m \le n$, причем восстановление динамически искаженного сигнала осуществляется по $l < m$ параметрам, таким образом y может иметь вид $(0,\dots,0,x_{n-l+1},\dots,x_n)$. Кроме того, $y_0(t) = (0,\dots,0,x_{0,n-l+1},\dots,x_{0,n})$ — наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента; n — число параметров системы; $u : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $F_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — самосопряженные положительно определенные операторы, $\theta = 0,\dots,p+1$, $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ соответственно. Функционал качества состоит из двух слагаемых, его минимизация позволяет находить такое оптимальное измерение, при котором 1) достигается наименьшее расхождение как значения выходного сигнала к выходному сигналу модели датчика, так и их производных, 2) нивелируется воздействие резонанса. Таким образом, второе слагаемое играет роль резонансных фильтров [1].

Кроме технических приложений в докладе представлена модель Шестакова – Свиридюка с резонансами, применяемая для решения маркетинговых и экономических задач предприятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А.* Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. № 17 (234). Сер. Матем. модел. програм. 2011. Вып. 8. С. 70–75.

ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДЕ С ПАМЯТЬЮ

THE PROBLEM OF WAVE PROPAGATION IN A MEDIUM WITH MEMORY

Царицанский А. Н.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; TsaritsanskiiAN@gmail.com

Исследуется волновое уравнение для среды с памятью следующего вида

$$\beta u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_{txx} + c\int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\}\, u_{xx}(\tau, x)d\tau \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами. Введение функции $v(t,x) = \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} \times u_{xx}(\tau, x)d\tau$ сводит уравнение (1) к различным системам в случае $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$.

Теорема 1. *Общее решение получаемой системы при $\alpha = 0$ имеет вид*

$$\begin{cases} u(t,s) = \dfrac{\delta\eta}{2\rho} f^-(t,s) + \dfrac{\delta\eta}{2\rho} f^+(t,s), \\ v(t,s) = -\dfrac{\delta}{2\eta} f^-(t,s) - \dfrac{\delta}{2\eta} f^+(t,s) + \dfrac{\rho+\delta}{\eta} f^0(t,s) - \dfrac{\delta}{2\rho} {f^-}_s(t,s) + \dfrac{\delta}{2\rho} {f^+}_s(t,s), \quad \text{где} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {f^-}_t(t,s) + {f^-}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2\eta} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2\eta} f^+(t,s) - \dfrac{\rho+\delta}{\eta} f^0(t,s), \\ {f^+}_t(t,s) - {f^+}_s(t,s) = \dfrac{\delta}{2\eta} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2\eta} f^+(t,s) - \dfrac{\rho+\delta}{\eta} f^0(t,s), \\ {f^0}_t(t,s) = \dfrac{\delta}{2\eta} f^-(t,s) + \dfrac{\delta}{2\eta} f^+(t,s) - \dfrac{\rho+\delta}{\eta} f^0(t,s). \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. *Общее решение получаемой системы при $\alpha \neq 0$ имеет вид*

$$\begin{cases} u(t,s) = \gamma f^4(t,s), \\ v(t,s) = f^1(t,s) - f^4(t,s), \quad \text{где} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {f^1}_t(t,s) = \dfrac{\eta}{\gamma} f^1(t,s) - \dfrac{1}{\gamma} f^2(t,s) - \dfrac{\eta}{\gamma} f^4(t,s), \\ {f^2}_t(t,s) = \delta f^1(t,s) - \delta f^4(t,s), \\ {f^3}_s(t,s) + {f^4}_t(t,s) = \dfrac{\rho\gamma+\eta^2}{\eta\gamma} f^1(t,s) + \dfrac{1}{\gamma} f^2(t,s) - \dfrac{\rho\gamma+\eta^2}{\eta\gamma} f^4(t,s), \\ {f^4}_s(t,s) = \dfrac{\eta}{\gamma} f^3(t,s). \end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что система (3), в отличие от системы (2), помимо волн содержит также и "параболическую" составляющую: дифференциальная часть третьего и четвёртого уравнений эквивалентна уравнению теплопроводности, так что "метод распространяющихся волн" дал нам на самом деле результат, явно выходящий за пределы теории чисто гиперболических уравнений и систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00155).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровских А. В.* Метод распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2004. Вып. 24. С. 3–43.
2. *Боровских А. В., Царицанский А. Н.* Формула распространяющихся волн для среды с памятью // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 6. С. 901–902.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ СИСТЕМ НАВЬЕ – СТОКСА

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE NAVIER–STOKES SYSTEMS

Чеботарев А. Ю.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;
cheb@iam.dvo.ru, kmf@imcs.dvgu.ru

Абстрактные постановки рассматриваемых задач с нелокальными данными для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости имеют следующий вид. Пусть V — вещественное гильбертово пространство; $A : V \to V'$ — линейный непрерывный оператор, $B : V \times V \to V'$ — билинейный непрерывный оператор такой, что $(B(y,z),z) = 0$; $B[y] = B(y,y)$; $\{Q_1,\dots,Q_m\}$ — линейно-независимые элементы сопряженного пространства V'.

Эволюционная задача. Найти $\alpha_j \in L^1(0,T)$, $y \in L^2(0,T;V)$ такие, что $y' = dy/dt \in L^1(0,T;V')$, $(Q_j, y(t)) = q_j(t)$, $1 \le j \le m$,

$$y' + Ay + B[y] = f(t) + \sum_1^m \alpha_k(t) Q_k, \quad t \in (0,T), \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $y_0 \in V$ и функции $f \in L^2(0,T;V')$, $q_j \in L^4(0,T)$ являются заданными.

Стационарная задача. Найти $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $y \in V$ такие, что

$$Ay + B[y] = f_d + \sum_1^m \alpha_k Q_k, \quad (Q_j, y) = q_j, \quad j = 1,\dots,m.$$

Вектор $q = (q_1,\dots,q_m) \in \mathbb{R}^m$ и функционал $f_d \in V'$ заданы.

Результат о нелокальной разрешимости эволюционной задачи устанавливается достаточно просто и позволяет доказывать существование решений обратных задач для различных моделей гидродинамики. В качестве примера рассмотрена задача для уравнений Буссинеска с неизвестными значениями тепловых потоков через заданные участки границы. Для трехмерных уравнений тепловой конвекции с неизвестной плотностью источников тепла доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость в случае, если начальные данные близки к соответствующим стационарным полям.

Для стационарной задачи получены априорные оценки, гарантирующие ее разрешимость и показывающие, что множество решений гомеоморфно конечномерному компакту. В качестве приложений рассмотрены стационарные задачи с нелокальными данными для уравнений магнитной гидродинамики и граничные обратные задачи тепловой конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чеботарев А. Ю.* Определение правой части системы Навье – Стокса и обратные задачи для уравнений тепловой конвекции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 12. С. 2279–2287.
2. *Чеботарев А. Ю.* Обратная задача для систем Навье – Стокса с конечномерным переопределением // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1166–1173.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ДИСПЕРСИИ И ДИССИПАЦИИ

PROPAGATION OF LONG-WAVE PERTURBATIONS IN A FLUID WITH ACCOUNTING FOR THE EFFECTS OF DISPERSION AND DISSIPATION

Чесноков А. А.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; chesnokov@hydro.nsc.ru

Рассматриваются математические модели распространения длинноволновых возмущений в пространственно-неоднородном движении жидкости. Основное внимание уделено анализу влияния вязкости и дисперсии на волновые процессы в жидкости и устойчивость течений.

На основе предложенного в [1] подхода изучены качественные свойства решений нелинейных интегродифференциальных уравнений, описывающих распространение волновых возмущений в тонком слое вязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости в поле силы тяжести. Показано, что уравнения движения жидкости допускают решения со слабыми разрывами, сосредоточенными на характеристиках. При этом в процессе эволюции течения амплитуда слабого разрыва может обращаться в бесконечность, что соответствует нелинейному опрокидыванию волны и образованию сильного разрыва. Предложена система дифференциальных балансовых соотношений, аппроксимирующая исходную интегродифференциальную модель. Выполнено численное моделирование распространения волн в жидкости на основе предложенных "многослойных" уравнений и осредненной бездисперсионной модели Шкадова. Если в процессе эволюции течения сильный разрыв не возникает, то результаты расчета по указанным моделям близки. В случае формирования сильного разрыва необходимо использовать более точные "многослойные" уравнения.

Модель распространения длинных волн в горизонтально-сдвиговом движении идеальной жидкости выведена в [2], где изучены характеристические свойства системы и сформулированы условия устойчивости течений в терминах гиперболичности уравнений движения. В [3] предложена более сложная модель пространственно-неоднородного движения жидкости, учитывающая эффект дисперсии волн. В данной работе рассмотрен класс стационарных сдвиговых течений жидкости и выполнен линейный анализ устойчивости в рамках обеих моделей. Установлено, что учет дисперсии волн при моделировании сдвигового движения тонкого слоя жидкости оказывает стабилизирующий эффект и препятствует развитию неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в области резкого изменения скорости потока.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00249).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липатов И. И., Тешуков В. М.* Нелинейные возмущения и слабые разрывы в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 1. С. 110–125.
2. *Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю.* Волновые движения жидкости в узком открытом канале // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 2. С. 61–71.
3. *Teshukov V. M., Gavrilyuk S. L.* Three-dimensional nonlinear dispersive waves on shear flows // Stud. Appl. Math. 2006. V. 116, N 3. P. 241–255.

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА С МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРОЙ

DEGENERATING STEKLOV SPECTRAL PROBLEMS WITH INHOMOGENEOUS MICROSTRUCTURE

Чечкина А. Г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; chechkina@gmail.com

Результаты работы получены совместно с академиком РАН В. А. Садовничим.

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ лежит в верхней полуплоскости, её гладкая граница $\partial\Omega$ состоит из объединения $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, часть Γ_2 в окрестности точек $(-\frac{1}{2}, 0)$ и $(\frac{1}{2}, 0)$ совпадает с отрезками прямых $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно, Γ_2 — гладкая. При этом $\Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon = \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^i$, $\Gamma_\varepsilon = \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^i$. Участки γ_ε^i и Γ_ε^i чередуются, и для любого i выполняются условия: $C^-\varepsilon \le |\Gamma_\varepsilon^i| \le C^+\varepsilon$, $C^-\varepsilon \le |\gamma_\varepsilon^i| \le C^+\varepsilon$, где $0 < C^- < C^+ < +\infty$, т. е. $|\Gamma_\varepsilon^i|$ и $|\gamma_\varepsilon^i|$ имеют одинаковый порядок малости. Здесь и далее ε — положительный малый параметр.

Случай, когда $|\Gamma_\varepsilon^i|$ существенно меньше $|\gamma_\varepsilon^i|$, рассмотрен в [1]. Результаты настоящего доклада частично опубликованы в [2].

Рассматривается следующая спектральная задача для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} L[u_\varepsilon] \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{2} a^{ij}(x)\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{на } \gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

где ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Коэффициенты $a^{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции на Ω, $\varkappa_1|\xi|^2 \ge a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \varkappa_2|\xi|^2$, где $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$.

Известно, что задача (1) имеет дискретный спектр, и её собственные значения λ_ε^k, $k \in \mathbb{N}$, — положительные действительные числа.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Первое собственное значение задачи* (1) *имеет порядок* $\dfrac{1}{\varepsilon}$, *т. е. удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\frac{K_1}{\varepsilon} \le \lambda_\varepsilon^1 \le \frac{K_2}{\varepsilon},$$

где K_1 *и* K_2 *— некоторые положительные константы. Более того, первая собственная функция* $u_\varepsilon^1 \to 0$ *сильно в* $L^2(\Omega)$ *и слабо в* $H^1(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чечкина А. Г.* О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий // Проблемы мат. анализа. 2009. Вып. 42. С. 129–143.
2. *Чечкина А. Г.* О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова с вырождающимся спектром // ДАН. 2011. Т. 440, № 5. С. 603–606.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

ON A DIFFERENTIAL MODEL OF THE SELF-GRAVITATING GAS DYNAMICS

Чуев Н. П.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия; n_chuev@mail.ru

Построение математических моделей эволюции гравитирующих газовых тел является важной и актуальной проблемой астрофизики. В данной работе рассматривается трехмерная нестационарная газодинамическая модель движения самогравитирующего газового облака. Показано, что вместо решения уравнения Пуассона для гравитационного потенциала можно использовать эквивалентное эволюционное дифференциальное уравнение силовой функции, что позволяет сформировать систему газовой динамики как систему типа Коши – Ковалевской.

Течения газа будут определены решением интегродифференциальной системы трехмерных уравнений газовой динамики в форме Л. Эйлера [1–6]:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\Phi, \tag{1}$$

где

$$\Phi(\mathbf{x},t) = G\iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(x',t)}{|x-x'|}d\mathbf{x}$$

— ньютоновский потенциал, созданный всей массой газа. В системе (1) уравнения неразрывности и энергии опущены. Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \triangle\Phi(\mathbf{x},t) = -4\pi G\rho. \tag{2}$$

В работе доказана теорема об эквивалентности (2) дифференциальному уравнению

$$\mathbf{F}_t = 4\pi G\rho\,\mathbf{u} + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{F})$$

для достаточно гладких функций, входящих в (1), при условии $\triangle\Phi_0 = -4\pi G\rho_0$ для $t = 0$ и непрерывного примыкания газа к вакууму, т. е. $\rho = 0$ на подвижной границе при $t \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
2. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
3. *Тассуль Ж.-Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982.
4. *Дерябин С. Л., Чуев Н. П.* Сферически-симметричное истечение самогравитирующего газа в вакуум // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.
5. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала. М.: ОГИЗ, 1953.
6. *Чуев Н. П.* Построение трехмерной эволюционной дифференциальной модели динамики политропного самогравитирующего газа // Вестн. УрГУПС. 2011. № 1 (9). С. 14–21.

ТРИ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

THREE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A NONCLASSICAL EQUATION

Чуешева Н. А.[1], **Соколова А. Г.**[2]

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
[1]chuesheva@ngs.ru, [2]sanechka1112s@mail.ru

Математическая модель малых колебаний идеальной вращающейся жидкости была предложена в работе С. Л. Соболева [1]. В данной работе при определенных условиях на коэффициенты уравнения доказывается теорема существования и единственности. Если условия на коэффициенты в теореме нарушены, то поставленная задача будет некорректной. В примерах 2, 3 рассмотрены другие условия на границе. В замечании приведено точное решение нелинейного уравнения подобного типа.

В области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \in (0, \pi)\}$ с границей Γ рассмотрим уравнение

$$u_{xxyy} - u_{xxx} + u_{yyy} + a_1 u_{xxy} + a_2 u_{yyx} + a_3 u_{yy} + a_4 u_{xx} + a_5 u_y + a_6 u_x + a_7 u = f(x, y) \quad (1)$$

с условиями на Γ:

$$u|_{x=0,x=\pi} = 0,\ u_{xx}|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0,y=\pi} = 0,\ u_{yy}|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Теорема. *Пусть правая часть уравнения* (1) $f(x, y) \in L_2(D)$. *Пусть для коэффициентов уравнения* (1) *выполнены условия:* 1) $a_3 < 0$, $a_4 < 0$, $a_1 \le 0$, $a_2 \ge 0$; 2) *существуют вещественные постоянные* $\delta_1 \in (0, 1)$, $\delta_2 \in (0, 1)$ *такие, что* $-\delta_1 \frac{8a_3}{\pi^3} - \delta_2 \frac{8a_4}{\pi^3} + a_7 \ge \delta_3 > 0$. *Тогда решение задачи* (1), (2) *существует и единственно в пространстве* $H^3(D)$.

Пример 1. В области D рассмотрим уравнение (1) с $f(x, y) = 0$, коэффициентами $a_1 = 1$; $a_2 = -2$; $a_3 = 0,2$; $a_4 = 0,3$; $a_5 = 2$; $a_6 = -3$; $a_7 = -0,5$ и условиями (2) на Γ. Решением этой задачи будет функция $u(x, y) = \sin x \sin y$.

Пример 2. В области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (0, x_0),\ y \in (0, \pi)\}$ $\left(x_0 \text{ — решение уравнения } e^{-x_0} + \sqrt{2}\sin\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0,\ x_0 \in \left(\pi + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxyy} - u_{xxx} + u_{yyy} + a_2 u_{yyx} + a_3 u_{yy} + u_y + (a_2 - 1)\, u_x + (a_3 - 1)\, u = 0$$

с условиями на Γ: $u|_{x=0,x=x_0} = 0,\ u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0,y=\pi} = 0,\ u_{yy}|_{y=0} = 0.$
Решением такой задачи будет функция $u(x, y) = \left(e^{-x} + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\sin y$.

Пример 3. В области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x, y \in (0, \pi)\}$ с границей Γ рассмотрим уравнение

$$u_{xxyy} - u_{xxx} + a_1 u_{xxy} + u_{yy} + a_4 u_{xx} + a_1 u_y - u_x + a_4 u = 0 \quad (3)$$

с условиями на Γ:

$$u|_{x=0,x=\pi} = 0,\ u_{xx}|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = \frac{\sin x}{n^3},\ u_y|_{y=0} = \frac{\sin x}{n^2}. \quad (4)$$

Решением задачи (3), (4) будет функция $u(x, y) = \frac{e^{ny}\sin x}{n^3}$.

Замечание. В ограниченной области $D \in \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ функция $u(x, y) = a + 2\sqrt{2}\tanh\left(-b + \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)\right)$ будет решением нелинейного уравнения

$$u_x u_{xxyy} - u_{xxx} + u_{yyy} - u_{xxy} + u_{yyx} + 3\,(u_x)^2 u_{xx} - u_x u_{xy} - u_y u_{xx} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

ON REGULARIZATION OF A LINEAR PERIODIC PROBLEM WITH IMPULSE ACTION

Чуйко С. М., Белущенко А. В.

Славянский государственный педагогический университет, Славянск, Украина; chujko-slav@inbox.ru

Предположим, что T-периодическая задача для системы $z' = A(t)z + f(t)$ некорректно поставлена для произвольной непрерывной функции $f(t)$. Нами исследованы условия регуляризации краевой задачи [1]

$$z' = A(t)z + f(t), \quad \ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0, \quad \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \tag{1}$$

в классе функций $z(t) \in C^1\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\}$; здесь $A(t)$ — непрерывная матрица, $\Delta z(\tau) := z(\tau+0) - z(\tau-0)$. Обозначим через $X_0(t)$ нормальную ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальную матрицу [2] однородной части дифференциальной системы (1),

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := -X_0(t) \int_t^\tau X_0^{-1}(s) f(s) ds, \qquad t \in [0, \tau),$$

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := X_0(t) \int_\tau^t X_0^{-1}(s) f(s) ds, \qquad t \in [\tau, T],$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши при $z(\tau) = 0$ для дифференциальной системы (1) и через $X(t)$ нормальную фундаментальную матрицу однородной части системы с импульсом (1): $X(t) = X_0(t)$, $t \in [0, \tau)$; $X(t) = X_0(t)(I_n + S)$, $t \in [\tau, T]$.

Теорема. *Если задача о нахождении T-периодических решений $z(t) \in C^1[0,T]$ дифференциальной системы* (1) *некорректно поставлена и для фиксированной матрицы $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет место неравенство* $\det[Q - X(T)\mathcal{S}] \neq 0$, *то для произвольной непрерывной функции $f(t)$ в пространстве $z(t) \in C^1\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\}$ существует не менее одного решения $z(t) = \mathcal{G}[f(s)](t)$ краевой задачи* (1), *где $Q := \ell X_0(\cdot)$, $\mathcal{Q} := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$,*

$$\mathcal{G}[f(s)](t) := \mathcal{K}[f(s)](t) - X(t)\mathcal{Q}^+ \ell \mathcal{K}[f(s)](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации периодической краевой задачи при помощи импульсного воздействия (1).

В зависимости от матрицы $\mathcal{S}$ импульсное воздействие (1) является невырожденным при условии $\det(I_n + \mathcal{S}) \neq 0$ (см. [1]) либо вырожденным, если $\det(I_n + \mathcal{S}) = 0$ (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations (World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser. A, Vol. 14). Singapore: World Scientific Publishing Co., 1995.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Utrecht; Boston: VSP, 2004.
3. *Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 8. С. 1132–1135.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

SOLVABILITY OF SOME SPACE-NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC AND PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Шадрина А. И.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; shadrina_ai@mail.ru

В настоящей работе изучается разрешимость краевых задач для уравнений

$$u_t - g(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$u_t - h(x)u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t)$$

с разрывными коэффициентами и нелокальными условиями.

Пусть Ω есть интервал $(0,a)$ оси Ox, $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Далее, пусть x_0 есть фиксированная точка Ω, и пусть для функции $g(x)$ выполняются условия:
(i) $g(x) \in C([0,x_0])$, $g(x) \geq k_0 > 0$ при $x \in [0,x_0]$,
(ii) $g(x) \in C([x_0,a])$, $g(x) \geq k_1 > 0$ при $x \in [x_0,a]$,
(iii) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} g(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} g(x)$.

Задачи с интегральными условиями для параболических и псевдопараболических уравнений ранее изучали А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, Н. С. Попов, но уравнения у них всегда имели непрерывные коэффициенты. С другой стороны, разрешимость локальных краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами также изучается давно (О. А. Олейник, О. А. Ладыженская и др.), но в сочетании с интегральными условиями подобные задачи ранее не рассматривались.

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402).

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ТРЕЩИНУ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНУЮ ГРАНИЦЕ

ON SOLVING SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE PIECEWISE-HOMOGENEOUS HALF-SPACE WITH A CRACK PERPENDICULAR TO THE BOUND

Шадрина Н. Н.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия; univer@bsu.ru

В полупространстве $D = (x \in \mathbb{R}) \times (y < 0) \times (\xi \in \mathbb{R}^{m-2})$ с трещиной $x = 0$, разделяющей D на две зоны $D^-(x < 0)$ и $D^+(x > 0)$ проницаемости $k^\pm$ в $D^\pm$, для потенциалов $\varphi^\pm(x, y, \xi)$ в $D^\pm$ рассматривается класс краевых задач

$$\Delta\varphi^\pm = 0, \quad G[\varphi^-]|_{y=0} = 0, \quad G[\varphi^+]|_{y=0} = f(x, \xi), \tag{1}$$

$$x = 0: \quad \varphi^+ = \varphi^-, \quad k^+\partial_x\varphi^- - k^-\partial_x\varphi^- = A\partial_x^2\varphi^-, \tag{2}$$

где A — параметр трещины, $G[\varphi]$ — оператор граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода. Пусть известно решение $F(x, y, \xi)$ соответствующей задачи (1) в однородном полупространстве D без трещины ($A = 0$, $k^+ = k^-$). Применяя метод свертывания разложений Фурье [1, 2], решение задачи (1), (2) выражено через функцию F:

$$\varphi^- = \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(x - t, y)dt, \qquad x \le 0,$$

$$\varphi^+ = F(x, y) - F(-x, y) + \frac{2k^+}{A}\int\limits_0^\infty e^{-\beta t}F(-x - t, y)dt, \qquad x \ge 0,$$

где $\beta = (k^- + k^+)/A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 855–859.
2. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай трещины (завесы) в неоднородном пространстве // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1204–1208.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБРАТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ON A METHOD FOR SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INVERSE PARABOLIC EQUATION

Шалданбаев А. Ш.[1], **Тенгаева А. А.**[2], **Оразова Р. С.**[3]

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. О. Ауезова, Шымкент, Казахстан;
[1]shaldanbaev51@mail.ru, [2]aijan0973@mail.ru, [3]orazovaraushan@mail.ru

Рассмотрим в области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ следующую краевую задачу

$$U_t + U_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

$$U|_{x=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{2}$$

$$U|_{t=1} = \alpha U|_{t=0}, \quad |\alpha| = 1. \tag{3}$$

Нашей целью является решение задачи (1)–(3) с использованием спектральной теории дифференциального уравнения Штурма – Лиувилля с отклоняющимся аргументом. Аналогичная задача с другими граничными условиями была рассмотрена в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalmenov T. S., Shaldanbaev A. S.* On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. V. 18, N 5. P. 471–492.

ОБЗОР СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

REVIEW OF INTEGRABLE CASES OF MOTION EQUATIONS OF FOUR-DIMENSIONAL RIGID BODY IN A NONCONSERVATIVE FIELD

Шамолин М. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Предлагаемая работа представляет собой обзор случаев интегрируемости динамической части уравнений движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Вид силового поля заимствован из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Материал отличается от работ по интегрируемости уравнений движения многомерного тела в консервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1–4].

Задача поиска полного набора трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) первых интегралов систем с диссипацией является достаточно актуальной. Ранее автором был введен новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии извне, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике четырехмерного (а также многомерного) твердого тела в неконсервативном поле.

В результате обнаружен ряд случаев интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. При этом изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле “в лоб” интегрировать основные уравнения динамики.

Данный материал может быть интересен как специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, так и механики жидкости и газа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00020 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // ДАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 343–346.
2. *Шамолин М. В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
3. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 3. С. 3–237.
4. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 4. С. 3–229.

ОБРАТНАЯ ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕКЛОВСКОГО СПЕКТРА

THE 2D INVERSE PROBLEM FOR THE STEKLOV SPECTRUM

Шарафутдинов В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sharaf@math.nsc.ru

Рассматривается обратная задача определения плоской области, ограниченной простой замкнутой гладкой кривой, по ее стекловскому спектру. Естественная гипотеза состоит в том, что область определяется своим стекловским спектром однозначно с точностью до изометрии. Мы показываем, что задача имеет две другие эквивалентные формы: (1) задача определения римановой метрики g на единичном круге по спектру ее Дирихле – Нейман оператора Λ_g, и (2) задача определения гладкой положительной функции a на единичной окружности по спектру оператора $a\Lambda_e$, где e — евклидова метрика. Для каждой из этих задач формулируется гипотеза, эквивалентная приведенной выше. Если предположение об изоспектральности заменить предположением о сплетаемости операторов, то каждая из наших гипотез становится теоремой; приводятся их доказательства.

ВЫПУКЛЫЕ ПОКРЫТИЯ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
CONVEX COVERINGS IN OPTIMAL CONTROL THEORY

Шевченко Г. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
shevch@math.nsc.ru

Выпуклое покрытие компактного тела Ω в $\mathbb{R}^n$ является специальным покрытием Ω семейством не пересекающихся по внутренности множеств определённого вида — n-мерными симплексами с вершинами на границе Ω. Доказано, что выпуклые покрытия существуют для любых компактных тел в $\mathbb{R}^n$. Выпуклое покрытие неединственно и определяется выбором начального симплекса.

Области достижимости во многих задачах оптимального управления динамическими объектами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений, являются компактными телами, поэтому в них можно использовать свойства и элементы выпуклых покрытий. Это применение позволило создать, обосновать и доказать сходимость численных методов решения ряда задач оптимального управления с закреплёнными концами: (i) задачи быстродействия (линейной [1] и нелинейной [2, 3]), а также её же для линейных систем с постоянным временным запаздыванием [4]; (ii) задачи минимизации расхода ресурсов [5–7]; (iii) задачи минимизации выпуклого функционала [8], а также этой же задачи для линейных систем с постоянным временным запаздыванием [9].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шевченко Г. В.* Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 8. С. 1166–1178.
2. *Шевченко Г. В.* Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстродействия с аддитивным управлением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1843–1853.
3. *Шевченко Г. В.* Численное решение нелинейной задачи оптимального быстродействия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 4. С. 580–593.
4. *Шевченко Г. В.* Численное решение задачи оптимального быстродействия для линейных систем с запаздыванием // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 2. С. 100–105.
5. *Шевченко Г. В.* Оптимальное по минимуму расхода ресурсов управление нелинейными системами специального вида // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 87–104.
6. *Шевченко Г. В.* Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // Автометрия. 2006. Т. 42, № 2. С. 49–67.
7. *Шевченко Г. В.* Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для нелинейных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 70, № 4. С. 119–130.
8. *Шевченко Г. В.* Численный метод решения задачи оптимального управления с фиксированными концами траекторий и выпуклым функционалом // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 125–135.
9. *Шевченко Г. В.* Задача минимизации выпуклого функционала для линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием и закрепленными концами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 6. С. 26–37.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

STUDYING THE STABILITY OF THE IDENTIFICATION PROBLEM SOLUTIONS FOR THE STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

Шепелов М. А.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
726577@mail.ru

В последние годы большое внимание уделяется постановке и исследованию задач управления для моделей тепломассопереноса [1–3]. Наряду с задачами управления важную роль в приложениях играют обратные задачи для моделей тепломассопереноса. Используя оптимизационный метод [4], указанные задачи можно свести к исследованию соответствующих обратных экстремальных задач на слабых решениях рассматриваемых краевых задач.

Целью работы является исследование устойчивости решений обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции-диффузии, рассматриваемого в ограниченной области при смешанных краевых условиях на границе области. Эти задачи заключаются в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от состояния (температуры T) и неизвестных функций (управлений), удовлетворяющих уравнениям состояния.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N, следующую краевую задачу:

$$\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad T = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Gamma_N.$$

Здесь T — температура, $\lambda = \text{const} > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$ — вектор скорости, $f(\mathbf{x})$ — плотность объемных источников тепла, $\chi(\mathbf{x})$ — заданная на участке Γ_N функция.

Предположим, что кроме решения T неизвестны функции $\mathbf{u}$ и f, и их требуется определить вместе с решением по дополнительной информации о состоянии системы. Для исследования данной задачи идентификации применяется оптимизационный метод, в соответствии с которым указанная задача сводится к решению соответствующей обратной экстремальной задачи. Исследуется разрешимость данной задачи, выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия экстремума, и устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость оптимальных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 12. С. 2190–2205.
2. *Алексеев Г. В., Шепелов М. А.* Об устойчивости решений коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного уравнения конвекции-диффузии // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 16, № 4. С. 4–16.
3. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ В СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

AN INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH UNKNOWN LOWEST COEFFICIENTS

Шипина Т. Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия; stn_71@mail.ru

В работе исследуется однозначная разрешимость обратной задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в случае, когда в уравнениях присутствуют неизвестные коэффициенты, зависящие только от временной переменной. В работах [1, 2] представлены обратные задачи для линейных систем составного типа с неизвестными коэффициентами, также зависящими только от переменной t.

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x) \mid t \in [0,T],\ x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций $U(t,x)$, $V(t,x)$, $b_{ij}(t)$, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + b_{11}(t)U^2 + b_{12}(t)VU + b_{13}(t)V^2 + m_1(t,x), \\ V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U^2 + b_{22}(t)UV + b_{23}(t)V^2 + m_2(t,x), \end{cases}$$

начальным условиям

$$U(0,x) = U_0(x), \quad V(0,x) = V_0(x), \quad x \in E_1,$$

и условиям переопределения

$$U(t,0) = \alpha_1(t), \quad V(t,0) = \alpha_2(t), \quad t \in [0,T],$$

$$U(t,a) = \beta_1(t), \quad V(t,a) = \beta_2(t), \quad a \neq 0, \quad t \in [0,T],$$

$$U(t,b) = \gamma_1(t), \quad V(t,b) = \gamma_2(t), \quad b \neq a \neq 0, \quad t \in [0,T],$$

где функции $m_i(t,x)$, $U_0(x)$, $V_0(x)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$, $i = 1,2$, — заданные действительнозначные функции.

Считаем, что для входных данных выполнены условия согласования.

Существование и единственность решения представленной обратной задачи доказывается в классе гладких ограниченных функций в $\Pi_{[0,T]}$. Используя условия переопределения, обратная задача приводится к задаче Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которые содержат следы производных $U_{xx}(t,0)$, $V_{xx}(t,0)$, $U_{xx}(t,a)$, $V_{xx}(t,a)$, $U_{xx}(t,b)$, $V_{xx}(t,b)$. Разрешимость полученной неклассической задачи доказывается методом слабой аппроксимации [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я., Шипина Т. Н.* Об одной обратной задаче для системы составного типа // ДАН. 2000. Т. 320, № 2. С. 155–157.
2. *Вячеславова П. Ю., Сорокин Р. В.* Задачи идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2009. Т. 2, № 3. С. 288–297.
3. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

SOLVING THE INTEGRAL EQUATIONS OF CONTACT INTERACTION MECHANICS FOR DOUBLY-CONNECTED DOMAINS

Шишканова А. А.

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина;
shganna@mail.ru

Рассматриваются двумерные интегральные уравнения Фредгольма со слабой особенностью, к которым приводятся пространственные задачи контактного взаимодействия [1].

С помощью предложенного в [2] способа вычисления интегралов со слабой особенностью, типа потенциалов простого слоя, применяем метод последовательных приближений для уравнения второго рода, или с α-регуляризацией в случае первого рода с помощью аналитического продолжения для замены параметра, в простейшем случае линейной, и др. Зная способ вычисления интеграла, определив норму оператора, подтверждаем выполнение условий существования и единственности. Из разложения потенциала предполагаем, что аналитическая в кольце искомая функция, соответствующая функции давления, имеет в нуле особую точку относительно аналитического продолжения правильного кругового элемента этой функции вдоль непрерывной кривой, проходящей через эту точку, и искомую функцию представляем в виде ряда.

Получаем бесконечные СЛАУ, имеющие мажорантные регулярные системы, которые можно решать методом последовательных приближений или урезкой. В случае гладкого штампа получаем системы, в числе которых есть однородные с треугольными матрицами с отличными от нуля элементами на диагонали, которые имеют единственное нулевое решение. В результате остаются лишь коэффициенты при четных положительных и нечетных отрицательных степенях, которые определяются точно для любого значения индекса.

С помощью разложений по малому параметру и производящей функции для полиномов Гегенбауэра, изложенных в [3], в случае отсутствия шероховатости в каждом приближении находится точное решение.

Для произвольной двусвязной области задача сведена к последовательности задач для кольца. Получено разложение нелинейного интегрального оператора по параметру, исходя из непрерывной дифференцируемости по Фреше неявной функции (оператор Гаммерштейна), когда пределы интегрирования зависят от параметра. Численное решение для неизвестной области контакта получено с применением кубатурных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
2. *Шишканова А. А.* О методе вычисления интегралов со слабой особенностью для пространственных контактных задач // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела. 2003. Т. 5. С. 127–136.
3. *Шишканова Г. А., Мелешко В. В.* Розв'язання двомірного інтегрального рівняння зі слабкою особливістю для двозв'язних областей // Проблеми механіки і математики. 2007. Т. 5. С. 178–185.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

REGULARIZATION OF THE CONTINUATION PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

Шишленин М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
mshishlenin@ngs.ru

Рассмотрим задачу продолжения

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + L(y)u = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y) = f(y), & u_x(0,y) = 0, \quad y \in \mathcal{D}, \\ u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, & x \in (0,h), \\ f|_{\partial\mathcal{D}} = 0. & \end{array}$$

Здесь $L(y)$ — эллиптический оператор, $\mathcal{D}$ связная ограниченная область с липшецевой границей, $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x \in (0,h),\ y \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n\}$.

Сформулируем задачу продолжения как обратную задачу.

Введем прямую задачу

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + L(y)u = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u_x(0,y) = 0, & y \in \mathcal{D}, \\ u(h,y) = q(y), & y \in \mathcal{D}, \\ u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, & x \in (0,h). \end{array}$$

Обратная задача: найти $q(y)$ по дополнительной информации

$$u(0,y) = f(y).$$

Операторная постановка обратной задачи: $Aq = f$.

В случае простой геометрии и постоянной среды аналитически получены сингулярные числа оператора A. Доказаны теоремы условной устойчивости и приведены оценки сходимости метода наискорейшего спуска.

Приведены результаты численных расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00105) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 122).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isakov V., Kindermann S.* Subspaces of stability in the Cauchy problem for the Helmholtz equation // Methods Appl. Anal. 2011. V. 18, N 1. P. 1–30.
2. *Kabanikhin S. I.* Inverse and ill-posed problems. Berlin: de Gruyter, 2012.
3. *Kabanikhin S. I., Gasimov Y. S., Shishlenin M. A., Kasenov S.* Stability analysis of a continuation problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013 (to appear).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SOME CLASSES OF DEGENERATING HIGH ORDER EQUATIONS

Шубин В. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vlad.v.shubin@gmail.com

В работе рассматриваются краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами.

Пусть $X, Y > 0$ и пусть $Q = (-X, X) \times (0, Y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -X < x < X, 0 < y < Y\}$. Пусть, далее, $\beta(x)$ — функция, имеющая разрыв в точке 0. В области Q рассматриваются краевые задачи для уравнения

$$u_{yyy} + \beta(x)u_{xx} + c(x, y)u = f(x, y)$$

с краевыми условиями на границе области и условиями сопряжения следующего вида

$$u(-0, y) = \alpha u(+0, y),$$
$$\gamma u_x(-0, y) = u_x(+0, y),$$

где α, γ — некоторые вещественные числа.

В работе доказываются теоремы существования и единственности решений рассмотренных краевых задач для данного уравнения.

Также рассмотрены краевые задачи для уравнения соболевского типа

$$(\alpha(t)A + \beta(t)I)u_t = Bu + f(x, t)$$

в области $Q = \Omega \times (0, T) = \{(x, t) \mid x \in \Omega,\ 0 < t < T\}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, $T > 0$. Здесь I — тождественный оператор, A, B — эллиптические операторы вида

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big), \quad Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big),$$

по повторяющимся индексам ведётся суммирование. Здесь $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$ — некоторые функции класса $C^1(\Omega)$. Функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ предполагаются таковыми, что оператор $\alpha(t)A + \beta(t)I$ вырождается при некоторых значениях t. Доказываются теоремы существования и единственности решений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31030) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ И СТРУКТУРОЙ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН

ON CONTROL OF SHAPES AND STRUCTURES OF THIN INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES WITH CRACKS

Щербаков В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; sherbakov87@gmail.com

В докладе обсуждаются результаты, относящиеся к задачам оптимального управления для проблем теории упругости с неизвестными границами. Рассматривается двумерное упругое тело, содержащее тонкое включение и трещину. На берегах трещины задаются краевые условия, имеющие вид равенств и неравенств и описывающие взаимное непроникание берегов трещины. Функционал стоимости совпадает с производной функционала потенциальной энергии по длине трещины. В роли функций управления выступают как форма, так и параметр жесткости тонкого включения. Основной полученный результат заключается в доказательстве теорем существования оптимальных решений. Такие решения реализуют наиболее безопасные положения равновесия с точки зрения критерия разрушения Гриффитса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00017) и Минобрнауки РФ (соглашение № 8222).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М: Физматлит, 2010.
2. *Щербаков В. В.* Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.
3. *Щербаков В. В.* Управление жесткостью тонких включений в упругих телах с криволинейными трещинами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13 (в печати).

СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ ШЕСТАКОВА – СВИРИДЮКА С ИНЕРЦИОННОСТЬЮ

MIXED CONTROL IN SHESTAKOV–SVIRIDYUK'S MODEL WITH INERTIA

Эбель А. А.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
ebelaa@rambler.ru

Пусть L и M — матрицы $n \times n$, $\det L = 0$, M — (L,p)-регулярна ($\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$: $\det(\lambda L - M) = 0$, $\exists p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, равное нулю, если L-резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M в точке ∞ имеет устранимую особую точку, и равное порядку полюса в противном случае).

Решение задачи смешанного управления для модели Шестакова – Свиридюка заключается в нахождении пары $(v_0, v(t)) \in U_\partial^0 \times U_\partial$, почти всюду на $(0,\tau)$ удовлетворяющей уравнению леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t) \tag{1}$$

с начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$\left[(\lambda L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - u_0) = 0,$$

при этом

$$J(v_0, v) = \min_{(u_0,u)\in U_\partial^0 \times U_\partial} J(u_0, u), \tag{2}$$

$$J(u_0, u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| My^{(q)}(u_0, u) - y_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt. \tag{3}$$

Уравнение (1) — математическая модель измерительного устройства (ИУ), предполагающего k измеряемых параметров u_j и m наблюдаемых параметров x_j, $j = n - m + 1, \ldots, n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, 0, \ldots, 0)$ и $(0, \ldots, 0, x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$ — вектор-функции состояния ИУ и наблюдений, $k + m \le n$, причем восстановление динамически искаженного сигнала осуществляется по $l < m$ параметрам, таким образом, y может иметь вид $(0, \ldots, 0, x_{n-l+1}, \ldots, x_n)$, $y_0(t)$ — наблюдение, полученное в ходе натурного эксперимента. В работах авторов модели [1] и последующих исследованиях [2] в качестве начальных значений входящих сигналов для простоты принимались нулевые, хотя натурные эксперименты показывали обратное. Функционал (3) показывает расхождение между значениями наблюдаемых сигналов на реальном ИУ и математической модели ИУ. Минимум функционала (2) обеспечивает более точные значения восстанавливаемых на основе математической модели сигналов.

Разработка численного метода решения задачи смешанного жесткого управления для уравнения леонтьевского типа позволила использовать модель Шестакова – Свиридюка в предположении о неизвестном начальном значении измеряемых сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. № 16 (192). Сер. Матем. модел. програм. 2010. Вып. 5. С. 116–120.
2. *Келлер А. В., Назарова Е. И.* Задача оптимального измерения: численное решение, алгоритм программы // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 3. С. 74–82.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

ON ONE PROBLEM FOR A HIGH ORDER EQUATION

Юлдашева А. В.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; asal-yuldasheva@yandex.ru

В настоящей работе для уравнения

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} = 0, \quad k,p \in \mathbb{N}, \quad (k-p) = 2n-1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

в области $D = \{(x,t) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le 2\pi\}$ рассматривается задача со следующими условиями:

$$\left.\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}\right|_{x=\pi} = 0, \quad m = 0,1,\ldots,k-1, \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{2}$$

$$u(\alpha\pi,t) = f(t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{3}$$

где α — некоторая постоянная из $(0,1)$ и $f(t)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Мы показываем, что если α — иррациональное число, то в классе $u \in C_{x,t}^{2k,2p}(D)$ справедлива теорема единственности решения задачи (1)–(3).

Отметим, что данная задача некорректна, т. к. малое изменение функции $f(t)$ в норме C^s $(s \in \mathbb{N})$ может вызвать сколь угодно большое изменение решения u в норме L_2 .

Регуляризировать эту задачу можно с помощью дополнительного условия, к примеру, с помощью задания априорной оценки [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Papi Frosali G.* On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1979. V. 6, N 4. P. 719–728.
2. *Fox D., Pucci C.* The Dirichlet problem for the wave equation // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1958. V. 46, N 1. P. 155–182.

УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССОВ КАПЕЛЬ В ВОЗДУХЕ
EQUATIONS OF PROCESSES OF DROPLETS IN THE AIR

Яашима Х. Ф.

Университет 8 Мая 1945, Гуельма, Алжир;
Университет Турина, Турин, Италия; hisao.fujitayashima@unito.it

Мы рассматриваем процессы капель в воздухе, т. е. их падение, коагуляцию, возможную конденсацию на них. Обозначаем через $\sigma(m,x,t)$ плотность воды, которая содержится в каплях массы m, а через $\pi(x,t)$ — плотность пара. Для этих искомых функций рассматриваются уравнения

$$\partial_t\sigma(m,x,t)+\nabla\cdot(\sigma(m)u(m))+\partial_m(mh_{gl}(m)\sigma(m))=h_{gl}(m,x)\sigma(m)$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m\beta(m-m',m')\sigma(m',x,t)\sigma(m-m',x,t)dm'$$

$$-m\int_0^\infty\beta(m,m')\sigma(m,x,t)\sigma(m',x,t)dm',$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}+\nabla\cdot(\pi v)=-H_{gl}(\pi,\sigma,x),$$

где $\beta(m_1,m_2)$ — вероятность встречи капли массы m_1 и капли массы m_2 (такая встреча составит каплю массы m_1+m_2), $u(m)$ — скорость капли массы m, $h_{gl}(m,x)$ — количество конденсации на капле массы m, а $H_{gl}(\pi,\sigma,x)$ — целое количество конденсации. Предположим, что

$$h_{gl}=\nu(m)(\pi-\overline{\pi}_{vs}(T(x))),\quad H_{gl}=\int_0^\infty h_{gl}\sigma dm,$$

где $\nu(m)$ — зависимый от m коэффициент, а $\overline{\pi}_{vs}(T(x))$ — плотность насыщенного пара.

Будем доказывать, что, если $\pi=\overline{\pi}_{vs}(T(x))$ (и поэтому $h_{gl}=0$, $H_{gl}=0$) и $u(m)=\left(\overline{v},0,-\frac{g}{\alpha(m)}\right)$ ($\overline{v}$, g — постоянные), то существует стационарное решение [1], а если кроме того $\overline{v}=0$, то существует единственное глобальное решение, и оно стремится к стационарному решению [2]. Для этих результатов важно переписать наше уравнение в виде обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве Банаха. Рассматриваем тоже случай, когда $u(m)=\left(0,0,v_3-\frac{g}{\alpha(m)}\right)$ с $v_3>0$ (и поэтому $u_3(m)>0$ для некоторых m, а $u_3(m)<0$ для других m) и $\pi>\overline{\pi}_{vs}(T(x))$ (подготовлена работа с M. Merad) и общий случай с маленькими заданными функциями (подготовлена работа с H. Belhireche).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Merad M., Belhireche H., Fujita Yashima H.* Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova (to appear).
2. *Belhireche H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima H.* Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute // Rend. Semin. Mat., Univ. Politec. Torino (to appear).

О ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ МНОГООБРАЗИИ

ON THE VARIATIONAL DIRICHLET PROBLEM FOR ELLIPTIC OPERATORS DEGENERATING ON A UNBOUNDED MANIFOLD

Якушев И. А.

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия; yakushevilya@mail.ru

Разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов более подробно исследована в случае, когда оператор задан в ограниченной области Ω n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ и имеет степенное вырождение на всей границе $\partial\Omega$ (см., например, [1–2] и имеющуюся там библиографию). В отличие от этого существуют лишь отдельные работы (см., например, [3–4]), посвященные случаю эллиптических операторов, вырождающихся на многообразиях размерности меньше $(n-1)$.

В докладе обсуждаются результаты автора о разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов, заданных в дополнении неограниченного многообразия размерности $m \in [1, n-1]$ и имеющих степенное вырождение на этом многообразии. Исследование основано на аналоге неравенства Гординга для вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка, установленного в работе [5].

Рассматриваемые неограниченные многообразия являются недифференцируемыми и удовлетворяют лишь условию конуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В.* Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Изв. вузов. Матем. 1988. № 8. С. 4–30.
2. *Байдельдинов Б. Л.* Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 3–11.
3. *Исхоков С. А., Сивцева Г. И.* Вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора, вырождающегося на многообразиях различных измерений // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, вып. 2. С. 28–41.
4. *Исхоков С. А., Тарасова Г. И.* Обобщенная задача Дирихле для эллиптических уравнений, вырождающихся на неограниченных многообразиях // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 4. С. 43–49.
5. *Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Якушев И. А.* Неравенство Гординга для эллиптических операторов высшего порядка с нестепенным вырождением // ДАН. 2012. Т. 443, № 3. С. 286–289.

ON THE SINGULAR POINTS OF THE RICCI FLOW ON SOME GENERALIZED WALLACH SPACES

Abiev N. A.[1], **Arvanitoyeorgos A.**[2], **Nikonorov Yu. G.**[3], **Siasos P.**[4]

[1] *Taraz State University named after M. Kh. Dulaty, Taraz, Kazakhstan;* abievn@mail.ru

[2] *University of Patras, Rion, Greece;* arvanito@math.upatras.gr

[3] *Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia;* nikonorov2006@mail.ru

[4] *University of Patras, Rion, Greece;* siasos@master.math.upatras.gr

We study the normalized Ricci flow for invariant Riemannian metrics on generalized Wallach spaces (see [1, pp. 6346–6347] and [2] for details). The equation $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + 2\mathbf{g}(t)\frac{S_{\mathbf{g}}}{n}$ for the normalized Ricci flow on such (n-dimensional) spaces reduces to the system of ODE of the following type

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

where $x_i = x_i(t) > 0$, $i = 1, 2, 3$, are the parameters of invariant metrics,

$$f(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_1 x_1 \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2}\right) + x_1 B,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_2 x_2 \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3}\right) + x_2 B,$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_3 x_3 \left(\frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3}\right) + x_3 B,$$

$$B = \left(\frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} - \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2}\right)\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{-1}$$

and $a_i \in (0, 1/2]$ are some real numbers. On the surface $V := x_1^{1/a_1} x_2^{1/a_2} x_3^{1/a_3} \equiv 1$ the system (1) is equivalent to the system of two differential equations of the type

$$\frac{dx_1}{dt} = \widetilde{f}(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \widetilde{g}(x_1, x_2), \tag{2}$$

where $\widetilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$, $\widetilde{g}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1^{-\frac{a_3}{a_1}} x_2^{-\frac{a_3}{a_2}}$. Let (x_1^0, x_2^0) be a singular point of (2) and λ_1, λ_2, ($|\lambda_1| \le |\lambda_2|$) be eigenvalues of the matrix J of linear parts of (2). In [3] we proved that all non-degenerate singular points ($\lambda_1\lambda_2 \neq 0$) of (2) are either nodes or saddles. We obtained also some general results by deducing a criterion for a_i to ensure degenerate singular points for (2). In particular, (2) has a unique linearly zero ($J = 0$) singular point $(1, 1)$ of the type "saddle" (with six hyperbolic sectors) at $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$. In the case $a_1 = a_2$, $x_1^0 = x_2^0$ we also classified semi-hyperbolic ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$) singular points of (2) and proved that there is no singular points of (2) of the nilpotent type ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $J \neq 0$). We also plan to discuss some qualitative results related to (2).

REFERENCES

1. *Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V.,* "Geometry of homogeneous Riemannian manifolds," J. Math. Sci. (New York), **146**, No. 7, 6313–6390 (2007).
2. *Nikonorov Yu. G.,* "On a class of homogeneous compact Einstein manifolds," Sib. Math. J., **41**, No. 1, 168–172 (2000).
3. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.,* "The Ricci flow on generalized Wallach spaces," arXiv: 1305.0440 (2013).

ON THE ε-APPROXIMATION OF THE HEAT CONVECTION EQUATIONS FOR THE KELVIN–VOIGHT FLUIDS

Abylkairov U. U.[1], **Danaev N. T.**[2], **Khompysh Kh.**[3]

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[1]u.abylkairov@gmail.com, [2]n.danaev@kaznu.kz, [3]konat_k@mail.ru

We consider the following initial-boundary value problem with free surface condition for one of correct ε-approximations of the modified equations of the heat convection [1–3] in $Q_T = \Omega \times [0, T]$:

$$\vec{v}^\varepsilon_t - \nu\Delta\vec{v}^\varepsilon + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\vec{v}^\varepsilon - \chi\Delta\vec{v}^\varepsilon_t + \frac{1}{2}\vec{v}^\varepsilon \operatorname{div} \vec{v}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon = \vec{f}(x,t) + g\vec{\gamma}S^\varepsilon, \quad (1)$$

$$S^\varepsilon_t - \lambda\Delta S^\varepsilon + (\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla)S^\varepsilon + \frac{1}{2}S^\varepsilon \operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon = q(x,t), \quad (2)$$

$$\vec{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad S^\varepsilon|_{t=0} = S_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\vec{v}^\varepsilon_n \equiv \vec{v}^\varepsilon \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\operatorname{rot}\vec{v}^\varepsilon \times n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad S^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, is a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega \in C^2$, and $\vec{v}_n$ is a normal component of the vector velocity $\vec{v}$ of fluid to the boundary $\partial\Omega$, S is a temperature, q, $\vec{f}$ are given functions, ν, χ, λ are some physical positive constants.

Theorem. *Let* $\vec{v}_0(x) \in J^2_n(\Omega)$, $S_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ *and* $\vec{f}(x,t)$, $q(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. *Then for any* $\varepsilon > 0$ *there exists a unique solution* $(\vec{v}^\varepsilon, S^\varepsilon)$ *of the problem* (1)–(4) *such that* $\vec{v}^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;H^2_n\right) \cap W^1_2\left(0,T;H^2_n\right)$, $S^\varepsilon_t \in L_2(Q_T)$, $S^\varepsilon \in L_\infty\left(0,T;\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)\right) \cap L_2\left(0,T;W^2_2 \cap W^1_2(\Omega)\right)$ *and*

$$\|\vec{v}^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|S^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))} + \|\vec{v}^\varepsilon_t\|^2_{L_2(0,T;H^2(\Omega))} + \|S^\varepsilon_t\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\|\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|S^\varepsilon\|^2_{L_2(0,T;W^2_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon\|^2_{2,Q_T} \le C_1 < \infty,$$

$$\|\vec{v} - \vec{v}^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|S - S^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|S - S^\varepsilon\|_{L_2(0,T;W^1_2(\Omega))} \le C_2\varepsilon.$$

If there exists $f_t(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, *then* $\vec{v}^\varepsilon \in W^1_\infty(0,T;H^2_n)$ *for any* $\varepsilon > 0$ *and*

$$\|\vec{v}^\varepsilon_{xxt}\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\operatorname{div}\vec{v}^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \le C_3.$$

REFERENCES

1. *Oskolkov L. P.,* "Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids," J. Sov. Math., **10**, No. 2, 133–177 (1978).
2. *Sakhaev Sh. S., Khompysh Kh.,* "Solvability global in time initial-boundary value problem with free surface condition for the modified equations of the heat convection" [in Russian], in: Transactions of the Conf. "Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khorezmiy–2009", Vol. 1, Tashkent, 2009, pp. 114–118.
3. *Khompysh Kh.,* "The initial-boundary value problem with a free surface condition for the modified equations of the heat convection and some their ε-approximations," Bulletin of al-Farabi KazNU. Math., Mec., Inf. series, **57**, No. 2, 36–41 (2008).

OSCILLATING TRAJECTORIES IN SOME NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

Akinshin A. A.[1], **Golubyatnikov V. P.**[2]

[1] *Polzunov Altay State Technical University, Barnaul, Russia;*
andrey.akinshin@gmail.com
[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
glbtn@math.nsc.ru

We study nonlinear dissipative cyclic dynamical systems of chemical kinetics

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_{j-1}) - m_j x_j, \quad m_j > 0, \qquad j = 1, 2, \dots n, \tag{1}$$

considered as models of functioning of gene networks regulated by negative feedbacks. Divergence of the vector field determined by its right-hand sides is strictly negative: $\mathrm{div} \equiv -\sum_{j=1}^{n} m_j$, hence, the volume of each bounded domain in the positive octant $\mathbb{R}^n_+$ decreases exponentially as $t \to \infty$. However, the limit sets of such systems can be much more complicated than just a stable stationary point. Here $x_i \geq 0$, all the functions are positive and monotonically decreasing, and $j - 1 = n$ for $j = 1$. In the odd-dimensional case $n = 2k+1$, we construct an invariant parallelepiped $Q \subset \mathbb{R}^{2k+1}_+$ and show that this system has a unique stationary point S_0 in the interior of Q. We prove that if this point is hyperbolic, then there exists a non-convex polyhedron $Q_* \subset Q$ which contains at least one cycle of the system (1). We obtain also some sufficient conditions of existence of stable cycles there.

Consider now the symmetric dimensionless case, when all the functions f_j coincide, and $m_j = 1$ for all j.

Theorem. *If the dimension $n = 2k+1$ is not a prime number, and if the stationary point S_0 is hyperbolic, then the system* (1) *has several cycles in Q.*

Each of these cycles c_i corresponds to an odd multiplier $2l_i + 1$ of $2k + 1$, and there exist an invariant $(2l_i + 1)$-dimensional plane, and a polyhedral domain $Q_i \subset Q$ containing the cycle c_i. Interiors of different domains Q_i are disjoint.

Analogous results can be obtained for even-dimensional symmetric dynamical systems of the type (1) as well.

For arbitrary dimensions n, we study symmetric systems (1) with piece-wise constant monotonically decreasing functions f_j which correspond to threshold negative feedbacks. In this case we construct 2-dimensional invariant surfaces of these systems which are contained in star shaped non-convex polyhedra similar to Q_*, and in turn, contain cycles of corresponding dynamical system.

If $n = 2k$, then the dynamical systems of the type (1) have three stationary points, two of them are stable, and their attracting basins are separated by an invariant hyper-surface $P^{2k-1} \subset Q \subset \mathbb{R}^{2k}_+$. This hyper-surface contains the diagonal $\Delta := \{x_1 = x_2 = \dots = x_{2k}\}$ of Q and the third stationary point $S_0 \in \Delta$ which is unstable. In this case, we construct $k - 1$ invariant 2-dimensional piece-wise linear surfaces $P^2_i \subset Q$, each of them contains at least one cycle c_i of the system (1), and all these surfaces are contained in P^{2k-1}.

If $n = 2k + 1$, then the phase portrait of odd-dimensional system (1) contains k invariant 2-dimensional piece-wise linear surfaces P^2_i in Q. Each of these surfaces contains at least one piece-wise linear cycle c_i.

A special software complex **PhasePortraitAnalyzer** was elaborated for numerical experiments with the gene networks models described above.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00074) and by grant of President of RF for young scientists (grant SP-561-2012.5).

GROUP ANALYSIS OF THE EQUATIONS OF A DYNAMIC MODEL OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC ELASTIC GEOMATERIALS SATISFYING GASSMANN CONDITIONS

Annin B. D.[1], **Belmetcev N. F.**[2], **Chirkunov Yu. A.**[3]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* annin@hydro.nsc.ru

[2] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;* weqsmachine@gmail.com

[3] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru

Deriving of a set of nontrivial exact solutions for models of a continuum mechanics is an actual problem because making of a database of such solutions will give the chance to test the results of the numerical experiments related to various applied problems.

Now researchers use the models of the inhomogeneous and anisotropic elastic materials [1]. The use of non-linear elasticity models creates essential computing difficulties, but the use of the classical linear theory does not allow to effectively describe the anisotropic materials, such as schistose materials, geomaterials, and others. However there is a set of the linear elasticity models which contain more than two independent elastic moduluses and allow describe geomaterials effectively. One of these models is the dynamic transversally isotropic elastic model [2].

On the basis of the given model we have gained some results connected with various fields of a science: theory of elasticity, geology, and mathematical physics. Also, we have gained a set of exact solutions for the equations of transverse-isotropic elastic media as a result of group analysis [3–5] of the first order partial equations gained as a result of a group foliation.

REFERENCES

1. *Annin B. D., Ostrosablin N. I.,* "Anisotropy of elastic properties of materials," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **49**, No. 3, 998–1014 (2008).
2. *Annin B. D.,* "Transversally isotropic elastic model of geomaterials" [in Russian], Sib. Zh. Ind. Mat., **12**, No. 3, 5–14 (2009).
3. *Ovsiannikov L. V.,* Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York (1982).
4. *Chirkunov Yu. A.,* Group Analysis of Linear and Quasilinear Equations, Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk (2007).
5. *Chirkunov Yu. A., Khabirov S. V.,* Elements of Symmetry Analysis of the Differential Equations of Continuum Mechanics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk (2012).

DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS IN SOBOLEV SPACES WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Antontsev S.[1], **Shmarev S.**[2]

[1] *University of Lisbon, Lisbon, Portugal;* antontsevsn@mail.ru
[2] *University of Oviedo, Oviedo, Spain;* shmarev@uniovi.es

The talk addresses the questions of global existence, nonexistence and uniqueness of solutions to the homogeneous Dirichlet problem for the anisotropic doubly nonlinear parabolic equations with nonstandard growth

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^{m(z)-1}u\right) = \sum_{i=1}^{n} D_i\left(a_i(z)|D_i u|^{p_i(z)-2}D_i u\right) + b(z)\,|u|^{\sigma(z)-2}u + g(z),$$

where $z = (x,t)$ denote the points of the cylinder $Q = \Omega \times (0,T)$, p_i, m and σ are given functions of the argument z.

- We derive conditions on the monotonicity and regularity of the exponents p_i, m, σ and the coefficients a_i, b which guarantee the existence of a strong solution in the Sobolev space with variable exponents:

$$\mathcal{V} = \left\{u:\ u \in L^\infty(Q),\ |D_{x_i}u|^{p_i(z)} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)),\ |u|^{m(z)-1}u_t^2 \in L^1(Q)\right\}.$$

- For the constructed solution the energy estimates are derived.
- Comparison and uniqueness theorems are established for the isotropic equations with $b = 0$ and under the additional assumption on the regularity of the solution: $\partial_t\left(|u|^{m(z)-1}u\right) \in L^1(Q)$. It is shown that this class of solutions is nonempty.
- It is proved that under certain conditions on the data the solutions may vanish blow-up in a finite time.

Part of the results can be found in the papers [1–5].

REFERENCES

1. *Antontsev S., Chipot M., Shmarev S.,* "Uniqueness and comparison theorems for solutions of doubly nonlinear parabolic equations with nonstandard growth conditions," Commun. Pure Appl. Anal., **12**, No. 4, 1527–1546 (2013).
2. *Antontsev S., Shmarev S.,* "Doubly degenerate parabolic equations with variable nonlinearity I: Existence of bounded strong solutions," Adv. Differ. Equ., **17**, No. 11–12, 1181–1212 (2012).
3. *Antontsev S., Shmarev S.,* "Existence and uniqueness for doubly nonlinear parabolic equations with nonstandard growth conditions," Differ. Equ. Appl., **4**, No. 1, 67–94 (2012).
4. *Antontsev S., Shmarev S.,* "Parabolic equations with double variable nonlinearities," Math. Comput. Simul., **81**, No. 10, 2018–2032 (2011).
5. *Antontsev S., Shmarev S.,* "Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity," Publ. Mat., **53**, No. 2, 355–399 (2009).

ON UNIQUE SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS

Asanova A. T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
anarasanova@list.ru

On the domain $\bar{\Omega} = [0,T]\times[0,\omega]$ we consider the nonlocal boundary value problem for system of hyperbolic second order equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x),$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T],$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega],$$

where $u = col(u_1,\ldots,u_n)$, $(n\times n)$-matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, vector-function $f(t,x)$ are continuous on $\bar{\Omega}$, $(n\times n)$-matrices $P(x)$, $S(x)$, vector-function $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0,\omega]$, vector-function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$, and the following condition is satisfied $P(0)\psi(0) + S(0)\psi(T) = \varphi(0)$.

We investigate questions of the existence, uniqueness and finding classical solutions of the problem. Nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic second order equations were considered by numerous authors. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of such problems were obtained by various methods. The nonlocal boundary value problems with data on characteristics were studied in [1–2] by the method of introduction of functional parameters.

In [3–5] necessary and sufficient coefficient conditions for the unique solvability of nonlocal boundary value problems were investigated.

In the present communication sufficient coefficient conditions of the unique solvability of the nonlocal boundary value problem for the system of hyperbolic type are obtained and an algorithm of finding its solution is proposed.

Unlike the above mentioned works [1–5] the boundary matrices $P(x)$, $S(x)$ and function $\varphi(x)$ are continuous differentiable.

REFERENCES

1. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.,* "Unique solvability of the boundary value problem for systems of hyperbolic equations with data on the characteristics," Comput. Math. Math. Phys., **42**, No. 11, 1609–1621 (2002).
2. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.,* "Unique solvability of the nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations," Differ. Equ., **39**, No. 10, 1414–1427 (2003).
3. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.,* "Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations," Dokl. Math., **68**, No. 1, 46–48 (2003).
4. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.,* "Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations," Differ. Equ., **41**, No. 3, 352–363 (2005).
5. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.,* "Well-posed solvability of linear nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations," Dopovidi (Reports) NAS Ukraine, No. 4, 7–11 (2010).

ON SOLVABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS ON THE REAL AXIS

Balandin A. S.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
balandin-anton@yandex.ru

Put $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$; denote by $\mathbb{C}$ the set of complex numbers, and by $L(E)$ and $D(E)$ the spaces of integrable functions and of absolutely continuous ones, respectively, defined on a set $E \subset \mathbb{R}$, with natural norms.

Consider a scalar differential-difference equation of the form

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - h_k) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_-, \tag{1}$$

where $a_k \in \mathbb{C}$, $h_k \in \mathbb{R}_+$, and $f \in L(\mathbb{R}_-)$. Put $D_0(\mathbb{R}_-) = \left\{ x \in D(\mathbb{R}_-) \colon \lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 0 \right\}$. Let us set a problem to find conditions of the unique solvability of equation (1) in the space $D_0(\mathbb{R}_-)$. Various classes of singular functional differential equations defined on a finite segment may be reduced to equations of the form (1), by using an appropriate change of variables. Questions on the unique solvability of such equations prove to be nontrivial.

If equation (1) has a solution in $D_0(\mathbb{R}_-)$, then one may consider the restriction of the solution to the segment $[-h, 0]$ ($h = \max\limits_k h_k$) as an initial function, and extend the solution successively step by step on the semiaxis $\mathbb{R}_+$. Since the delay operator is a Volterra one [1], the extension is unique. Therefore, equation (1) may be considered on the whole axis $\mathbb{R}$ in the same assumptions.

Let a function $x_0 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ be a solution of the equation

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - h_k) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

and satisfy the initial conditions $x(\xi) = 0$ for $\xi < 0$, and $x(0) = 1$. The function $x_0 = x_0(t)$ is defined uniquely by the conditions formulated above; in the theory of functional differentional equations it is customary called *a fundamental solution* [1].

Theorem. *The following propositions are equivalent:*

a) equation (1) *has a unique solution* $x \in D_0(\mathbb{R}_-)$ *for every right-hand part* $f \in L(\mathbb{R}_-)$, *and* $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} x_0(t - s) f(s)\, ds$;

b) all roots of the quasipolynomial $g(p) \equiv p + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{-p h_k}$ *lie to the left of the imaginary axis;*

c) the fundamental solution has an exponential estimate.

REFERENCES

1. *Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F.,* Introduction to the Theory of Functional Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1991).

A METHOD OF SYMMETRIC POLYNOMIALS FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM

Belyayev Yu. N.

Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia; ybelyayev@mail.ru

The solution of the homogeneous differential equations system $\dfrac{d\Psi(t)}{dt} = \|a_{ij}\|\Psi(t)$ with constant coefficients a_{ij} for given initial conditions $\Psi(0) = \Psi_0$ has a matrix representation: $\Psi(t) = \exp(At)\Psi_0$. Here $A \equiv \|a_{ij}\|$ is a matrix of n-th order, $\Psi(t)$ and Ψ_0 are column matrices, elements of which are, respectively, $\psi_i(t)$ and $\psi_{io} = \psi_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$. Calculations of $\exp(Az)$ with the aid of the Sylvester, Newton [1], Becker [2] formulas or matrix decomposition methods require the prior determination of the matrix A eigenvalues λ_j, $j = 1, \ldots, n$. This work presents the method of calculation of the fundamental matrix $\exp(At)$ which is based on the use of symmetric polynomials of n-th order $B_g(n)$. These polynomials are defined by the recurrence relations [3]: $B_g(n)$=0, $g = 0, \ldots, n-2$; $B_{n-1}(n) = 1$; $B_g(n) = \sum_{l=1}^{n} p_l B_{g-l}(n)$. Here $p_i = (-1)^{i-1}\sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$, σ_i are sums of all principal minors of i-th order of $\det A$: $\sigma_1 = a_{11} + \ldots + a_{nn}$, $\sigma_2 = \sum_{j>i} \left| \begin{smallmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{smallmatrix} \right|, \ldots, \sigma_n = \det A$.

Theorem 1. $\exp(At) = \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} (At)^l \frac{1}{l!}\Big(1 + l! \sum_{g=0}^{l} p_{n-l+g} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} B_{j-1-g}(n)\Big)$, *where* σ_i *and* $B_j(n)$ *are symmetric polynomials of matrix* At.

One of the possible ways to reduce rounding errors in the calculation of the above formula is scaling based on the fundamental property of the exponential function: $\exp(At) = [\exp(At/m)]^m$.

Corollary. $\exp(At) = X^m$, *where* m *is integer,*

$$X \simeq \|x_{ij}(J)\| = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{At}{m}\right)^l \frac{1}{l!}\Big(1 + l! \sum_{g=0}^{l} p_{n-l+g} \sum_{j=n}^{J} \frac{1}{j!} B_{j-l-g}(n)\Big), \quad J > n, \qquad (1)$$

σ_i, $i = 1, \ldots, n$, *and* $B_l(n)$ *are the elementary symmetric polynomials and symmetric polynomials of matrix* (Az/m) *of* n*-th order respectively.*

Approximate equality in (1) *is replaced by the exact if* J *goes to infinity.*

Theorem 2. *The relative truncation error of the matrix* X *calculation according to the formula* (1) $\epsilon = \max|1 - x_{ij}(J)/x_{ij}(\infty)| < \xi^{N+1}/\big[(N+n)\prod_{i=1}^{N}(n+i)\big]$, *provided that* $\xi = (2n-1)\max|a_{jl}t|/m < 1$.

Theorem 3. *Let* σ_i *and* $B_l(n)$ *be symmetric polynomials of matrix* X. *If* $m > n+1$, *matrix* X^m *calculation using the formula*

$$X^m = \sum_{l=0}^{n-1} X^l \sum_{g=0}^{l} (-1)^{n-l+g-1} \sigma_{n-l+g} B_{m-1-g}(n),$$

requires a smaller number of the elementary operations of addition and multiplication, and is more accurate (in terms of the round off error) than the computation X^m *by the usual matrix multiplication.*

REFERENCES

1. *MacDuffee C. C.,* The Theory of Matrices, Chelsea, New York (1956).
2. *Angot A.,* Compléments de Mathématiques: a l'Usage des Ingénieurs de l'Élektrotechnique et des Télécommunications, Masson, Paris (1982).
3. *Belyayev Yu. N.,* "Calculations of transfer matrix by means of symmetric polynomials," in: Proc. of the Intern. Conf. "Days on Diffraction 2012", St. Petersburg, 2012, pp. 36–41.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE STURM–LIOUVILLE OPERATOR ON A NONCOMPACT STAR-TYPE GRAPH

Buterin S. A.

Saratov State University, Saratov, Russia; buterinsa@info.sgu.ru

Denote by Γ a noncompact star-type graph with the vertices v_0, $v_1, \ldots, v_p$ and the edges $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, where $\varepsilon_j = [v_0, v_j]$, $j = \overline{1,p}$, are segments and ε_j, $j = \overline{p+1,m}$, are rays with the common vertex v_0. Let for simplicity the length of each compact edge be equal to 1 and for definiteness $p \geq 1$ and $m - p \geq 2$. All edges are parameterized by $x \geq 0$ and $x = 0$ corresponds to the internal vertex v_0. For the compact edges $x \in [0,1]$ and $x = 1$ corresponds to the boundary vertex. Any function on Γ has the form $y = [y_j(x)]_{j=\overline{1,m}}$, where $y_j(x)$ is defined on the edge ε_j. Consider the real-valued function $q = [q_j(x)]_{j=\overline{1,m}}$ on Γ, which is called the *potential*, and the vector $H = [H_j]_{j=\overline{1,p}}$. Let $q_j(x) \in L(0,1)$, $H_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,p}$, and $q_j(x)$, $xq_j(x) \in L(0,\infty)$, $j = \overline{p+1,m}$.

Consider the boundary value problem $L = L(q,H)$ on Γ:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j = \rho^2 y_j, \tag{1}$$

where $x \in (0,1)$ for $j = \overline{1,p}$; $x \in (0,\infty)$ for $j = \overline{p+1,m}$; λ is the spectral parameter,

$$y_1(0) = y_2(0) = \ldots = y_m(0), \quad y_1'(0) + y_2'(0) + \ldots + y_m'(0) = 0. \tag{2}$$

$$U_j(y_j) := y_j'(1) + H_j y(1) = 0, \quad j = \overline{1,p}. \tag{3}$$

Put $\Omega_+ := \{\rho : \operatorname{Im}\rho > 0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Let $\Psi_k(\lambda) = [\Psi_{kj}(x,\lambda)]_{j=\overline{1,m}}$, $k = \overline{1,p}$, be solutions of (1), (2) satisfying the boundary conditions $U_j(\Psi_{kj}) = -\delta_{jk}$, $j = \overline{1,p}$, and having the asymptotics $\Psi_{kj}(x,\lambda) = O(\exp(i\rho x))$, $x \to \infty$, $\rho \in \overline{\Omega_+}$, $j = \overline{p+1,m}$. The functions $\Psi_k(\lambda)$ and $M_k(\lambda) := \Psi_{kk}(1,\lambda)$ are respectively called the *Weyl solution* and the *Weyl function* associated with the boundary vertex v_k, $k = \overline{1,p}$.

Let $k = \overline{p+1,m}$ and $f_k(\rho) = [f_{kj}(x,\rho)]_{j=\overline{1,m}}$ be a solution of (1)–(3) such that $f_{kk}(x,\rho) \sim \exp(-i\rho x)$, $f_{kj}(x,\rho) = O(\exp(i\rho x))$, $x \to \infty$, $\rho \in \overline{\Omega_+}$, $j = \overline{p+1,m} \setminus k$. The function $f_k(\rho)$ is called the *scattering solution* associated with the kth edge. Let $e_k(x,\rho)$ be the Jost solution on ε_k, then $f_{kk}(x,\rho) = e_k(x,-\rho) + s_k(\rho)e_k(x,\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}^*$, and $s_k(\rho)$ is called the *reflection coefficient* associated with the noncompact edge ε_k.

The values of λ for which L has nonzero L_2-solutions $y = [y_j(x)]_{j=\overline{1,m}}$ are called *eigenvalues* of L and the corresponding nonzero solutions are called *eigenfunctions*. If $y_j(x) \equiv 0$ for each eigenfunction y related to an eigenvalue λ_0, then λ_0 is called *invisible* from the edge ε_j; otherwise it is called *visible* from ε_j. Denote by Λ the set of eigenvalues that are visible from at least one edge ε_j, $j \in \{p+1, \ldots, m-1\}$. Then $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=\overline{1,N}}$, $\lambda_n = \rho_n^2$, $\rho_n = i\tau_n$, $\tau_n > 0$. Moreover, $\operatorname{Res}\limits_{\rho=\rho_n} f_{kk}(x,\rho) = \alpha_{kn}e_k(x,\rho_n)$, where α_{kn} are called *norming constants* associated with the edge ε_k, $k = \overline{p+1,m}$.

Inverse Problem. The set $J = \{M_\nu(\lambda), s_k(\rho), \lambda_n, \alpha_{kn}\}_{\nu=\overline{1,p}, k=\overline{p+1,m-1}, n=\overline{1,N}}$ is given, find q and H.

Theorem. *The specification of J uniquely determines q and H.*

Remark. In J it is sufficient to specify only those eigenvalues that are not poles of any function $M_\nu(\lambda)$, $\nu = \overline{1,p}$, i.e. that are invisible from all compact edges.

Developing the idea of the method of spectral mappings [1] one can obtain a constructive procedure for solving Inverse Problem.

The author was supported by the RFBR (project no. 13-01-00134).

REFERENCES

1. *Yurko V. A.,* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory (Inverse and Ill-posed Problems Series), VSP, Utrecht (2002).

GLOBAL SOLVABILITY RESULT FOR THE MOTION OF THE RIGID BODY IN A VISCOUS FLUID WITH COLLISIONS

Chemetov N. V.[1], **Nečasová Š.**[2]

[1] *University of Lisbon, Lisbon, Portugal;* chemetov@ptmat.fc.ul.pt
[2] *Institute of Mathematics, Prague, Czech Republic;* matus@math.cas.cz

We consider the problem of the motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid, filling a bounded domain. This problem was studied by many authors, see for instance, [1–4]. They considered classical non-slip boundary conditions, which gave them very PARADOXICAL result of no collisions of the body with the boundary of the domain.

In this work [5] we study when Navier slip conditions are prescribed on the boundary of the body (instead of non-slip conditions). We prove for this model the GLOBAL existence of weak solution, which permits COLLISIONS with the boundary of the domain.

REFERENCES

1. *Feireisl E., Hillairet M., Nečasová Š.,* "On the motion of several rigid bodies in an incompressible non-Newtonian fluid," Nonlinearity, **21**, No. 6, 1349–1366 (2008).
2. *Gérard-Varet D., Hillairet M.,* "Regularity issues in the problem of fluid structure interaction," Arch. Ration. Mech. Anal., **195**, No. 2, 375–407 (2010).
3. *Hoffmann K.-H., Starovoitov V. N.,* "On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case," Adv. Math. Sci. Appl., **9**, No. 2, 633–648 (1999).
4. *San Martin J. A., Starovoitov V., Tucsnak M.,* "Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid," Arch. Ration. Mech. Anal., **161**, No. 2, 113–147 (2002).
5. *Chemetov N. V., Nečasová Š.,* "Global existence of weak solutions for the motion of the rigid body in a viscous fluid with Navier boundary conditions," submitted to: Arch. Ration. Mech. Anal.

REGULAR GLOBAL ATTRACTORS FOR AUTONOMOUS AND NON-AUTONOMOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Chepyzhov V. V.[1], **Zelik S. V.**[2]

[1] *Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia;* chep@iitp.ru

[2] *University of Surrey, Guildford, United Kingdom;* s.zelik@surrey.ac.uk

It is well known that longtime behavior of dissipative dynamical systems generated by autonomous PDEs can be described in terms of global attractors (see [1–4]). Moreover, the attractor $\mathcal{A}$ is frequently (in a sense) finite dimensional although the original phase space of such dynamical system is infinite dimensional. We however note that the attractor is not necessarily a submanifold of the phase space and can have rather complicated fractal structure.

Nevertheless, there is a wide model class of autonomous partial differential equations and systems (reaction-diffusion equations, damped wave equations, Cahn–Hilliard equation, etc.) whose global attractors have more or less complete description. We mean so-called *regular* (global) attractors introduced in [1, 2]. According to the theory developed there, a dynamical semigroup $\{S_t \mid t \geq 0\}$ has a regular global attractor if it has a global Lyapunov function, the equilibrium set $\mathcal{R}_0$ of the semigroup is finite, and each equilibrium $v \in \mathcal{R}_0$ is hyperbolic. More exactly, under these and some additional technical assumptions, the global attractor $\mathcal{A}$ is a finite union of the unstable manifolds $\mathcal{M}^+_{0,v}$ of all these equilibria v. What is more, the trajectories of the considered autonomous PDE approach to the regular attractor with exponential rate as time tends to infinity and the regular attractor is robust with respect to small autonomous perturbations.

In the present report we consider non-autonomous perturbations of regular attractors. To be more precise, we study the longtime behavior of the trajectories of dissipative non-autonomous dynamical processes $\{U_\varepsilon(t,\tau) \mid t \geq \tau\}$, which tend as $\varepsilon \to 0$ to the autonomous dynamical semigroup S_t under the assumption that this limit semigroup possesses a regular attractor $\mathcal{A}_0$. We study non-autonomous global attractors $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, of the processes $U_\varepsilon(t,\tau)$. The main theorem states that regularity of global attractors preserves under small non-autonomous perturbations. Besides, non-autonomous regular global attractors remain exponential and robust.

The main results are illustrated for a model non-autonomous wave equation with weak dissipation

$$\partial_{tt}u + \gamma\partial_t u = \Delta_x u - f(u) + g_0(x) + \varepsilon g(x,t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u_t|_{t=\tau} = p_\tau, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

in a bounded domain Ω from $\mathbb{R}^3$. Here $\gamma > 0$, the nonlinear function $f(u)$ satisfy some growth (w.r.t. u) conditions and $g(x,t)$ is a translation compact function (see [4]).

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 11-01-00339, no. 12-01-00203) and the Russian Ministry of Education and Science (agreement no. 8502).

REFERENCES

1. *Babin A. V., Vishik M. I.,* "Regular attractors of semigroups and evolution equations," J. Math. Pures Appl., **62**, 441–491 (1983).
2. *Babin A. V., Vishik M. I.,* Attractors of Evolution Equations, North-Holland, Amsterdam (1992).
3. *Temam R.,* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, New York (1997).
4. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.,* Attractors for Equations of Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence (2002).

ON ESTIMATION OF SOLUTIONS OF SCALAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON SEMIAXIS

Chudinov K. M.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; cyril@list.ru

We present an approach to the investigation of the asymptotic properties of solutions of scalar functional differential equations. The approach is based on ideas risen from the simplest theorems on differential inequalities. Below we consider some propositions illustrating the essence of our technique.

Suppose a function $f\colon [0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is nondecreasing with respect to the second argument, $f(\cdot,0)=0$, a function $h\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ is measurable, and $h(t)\le t$. Further, suppose functions x, $y\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ are absolutely continuous in every segment of $[0,+\infty)$, and almost everywhere satisfy the following equation and inequality respectively

$$\dot x(t)=f(t,x(h(t))),\quad \dot y(t)\le f(t,y(h(t))),\quad t\in[0,+\infty).$$

Lemma. *Suppose $x(t_0)=y(t_0)$ for some $t_0\ge 0$, and $x(t)\le y(t)$ for all $t\in[0,t_0)$, and $x(t_1)<y(t_1)$ for some $t_1\ge t_0$. Then there exists $t_2\in(t_0,t_1)$ such that $x(t_2)>y(t_2)$.*

The following results illustrate the application of Lemma for the investigation of the asymptotic properties of solutions of functional differential equations.

Let the function f satisfy the conditions indicated above, let y be the solution of the problem

$$\dot y(t)=f(t,y(t-\omega)),\quad t\in[0,+\infty);\quad y(t)=\alpha>0,\quad t\in[-\omega,0].$$

Theorem 1. *Suppose the function y is decreasing on $[0,+\infty)$. Then there exists $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\xi\ge 0$, and for the solution x of a problem*

$$\dot x(t)=f(t,x(h(t))),\quad t\in[0,+\infty);\quad 0\le x(t)\le\alpha,\quad t\in[-\omega,0],$$

where h is an arbitrary measurable function such that $0\le h(t)\le\omega$, we have $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\xi$.

Consider the case that y is not decreasing on $[0,+\infty)$. Define $H=H(\alpha)$ as the absolute value of the function y in its first minimum, that is $H=-y(t_0)$, where $t_0=\inf\{t>0\mid \dot y(t)\ge 0\}$. Denote by H^n the n-th iteration of the function H.

Theorem 2. *Suppose that $H^n(\alpha)\to 0$ as $n\to+\infty$. Then for the solution x of a problem*

$$\dot x(t)=f(t,x(h(t))),\quad t\in[0,+\infty);\quad 0\le x(t)\le\alpha,\quad t\in[-\omega,0],$$

where h is an arbitrary measurable function such that $0\le h(t)\le\omega$, we have $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$.

ON FREDHOLM-TYPE SOLVABILITY FOR SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL CONDITIONS

Darovskaya K. A.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia; k.darovsk@gmail.com

Consider an ordinary differential operator of the second order with a spectral parameter

$$Au + \lambda^2 u = -a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) + \lambda^2 u(x) \quad (x \in (0,1))$$

and integral conditions

$$B_\rho u = \sum_{k=0}^{1} \int_0^1 h_{\rho k}(x) u^{(k)}(x) dx \quad (\rho = 1, 2). \tag{1}$$

Here a_i $(i = 0, 1, 2)$ are real-valued functions such that $a_0 \geq m > 0$ $(x \in [0, 1])$ and a_0 is sufficiently smooth close to 0 and 1, a_1, $a_2 \in C[0, 1]$, and $\lambda \in \mathbb{C}$.

Weight functions in (1) are real-valued, belong to space $L_2(0, 1)$, and for a fixed ρ at least one of the functions $h_{\rho k}$ $(k = 0, 1)$ is not identically equal to zero. Suppose that among four functions $h_{\rho k}$ $(\rho = 1, 2, k = 0, 1)$ there exists a pair of functions (denote them H_1 and H_2) which are linearly independent and belong to the Hölder space C^α $(\alpha \in (1/2, 1])$ close to the ends of interval $[0, 1]$.

Our aim is to obtain an a priori estimate of solution for the problem

$$\begin{gathered}(A + \lambda^2 I)u(x) = f_0(x) \quad (x \in (0, 1)), \\ B_\rho u(x) = f_\rho \quad (\rho = 1, 2),\end{gathered} \tag{2}$$

where $f_0 \in L_2(0, 1)$ and $f_\rho \in \mathbb{C}$ $(\rho = 1, 2)$.

Let us introduce the determinant $\Delta_{12} = H_1(0)H_2(1) - H_1(1)H_2(0)$. Further, $\omega_{\varepsilon,q} = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg \gamma| \leq \varepsilon \text{ or } |\arg \gamma - \pi| \leq \varepsilon \text{ and } |\gamma| \geq q\}$, where $0 < \varepsilon < \pi/2$.

In the Sobolev space $W_2^2(0, 1)$ and in the space $\mathcal{W}[0, 1] = L_2(0, 1) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ we introduce equivalent norms depending on the spectral parameter:

$$\|u\|'_{W_2^2(0,1)} = \left(\|u\|^2_{W_2^2(0,1)} + |\lambda|^4 \|u\|^2_{L_2(0,1)}\right)^{1/2},$$
$$\|f\|'_{\mathcal{W}[0,1]} = \left(\|f_0\|^2_{L_2(0,1)} + |\lambda|^3 \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)\right)^{1/2}.$$

Here $f = \left(f_0, f_1, f_2\right)$ and $|\lambda| \geq 1$.

Theorem. *Let $\Delta_{12} \neq 0$. Then for any $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ there exists $q > 1$ such that for $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ any function $u \in W_2^2(0, 1)$ satisfies the inequality*

$$\|u\|'_{W_2^2(0,1)} \leq C|\lambda|^{1/2} \|f\|'_{\mathcal{W}[0,1]},$$

where $C > 0$ does not depend on λ and f.

Remark. Theorem immediately implies the Fredholm-type solvability of problem (2).

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-31454).

REFERENCES

1. *Darovskaya K. A., Skubachevskii A. L.,* "A spectral problem with integral conditions," J. Math. Sci. (New York), **179**, No. 3, 437–445 (2011).
2. *Skubachevskii A. L.,* "Nonclassical boundary-value problems. I," J. Math. Sci. (New York), **155**, No. 2, 199–334 (2008).

ON STABILIZATION OF SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS

Denisov V. N.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; vdenisov2008@yandex.ru

On the half-space $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, $N \geq 3$, consider the Cauchy problem

$$Lu \equiv \Delta u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) + c(x,t)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

We assume that:
1) the coefficients of equation (1) are real and satisfy the Hölder condition.
2) the coefficients $b_i(x,t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ satisfy condition (B): $\exists\, B > 0$

$$\sup_D \sum_{i=1}^{N} |b_i(x,t)| = B.$$

3) coefficient $c(x,t)$ satisfies condition (C): $\exists\, \alpha > 0$ and k, $0 < k < 1/2$,

$$c(x,t) \leqslant -\alpha^2 \min(1, r^{-2k}), \quad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}.$$

4) the initial function $u_0(x)$ is continuous in $\mathbb{R}^N$ and satisfies the inequality

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\{a r^{1-2k}\}, \quad 0 < k < 1/2, \quad a > 0. \tag{3}$$

We will say that a solution stabilizes at a point $x \in \mathbb{R}^N$ if there exists the limit

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0. \tag{4}$$

For the survey of papers on the stabilization of solutions to parabolic equations see [1, 2].

Theorem. *Suppose that a function $u(x,t)$ is a solution to the Cauchy problem (1), (2), the initial function $u_0(x)$ satisfies condition (3), the coefficients $b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)$ satisfy condition (B) and the coefficient $c(x,t)$ satisfies condition (C) for*

$$\alpha^2 > B(1-2k)a, \quad 0 < k < \frac{1}{2}.$$

Then the limit (4) exist uniformly in x on every compact K in $\mathbb{R}^N$.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00058).

REFERENCES

1. *Fridman A.,* Partial Differential Equation of Parabolic Type, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1964).
2. *Denisov V. N.,* "On the behavior of solutions of parabolic equations for large value of time," Russ. Math. Surv., **60**, No. 4, 721–790 (2005).

A KERNEL IDENTIFICATION PROBLEM IN THE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL MAXWELL EQUATIONS

Durdiev D. K.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan; durdiev65@mail.ru

We consider the generalized Cauchy problem for the system of Maxwell integro-differential equations [1] for homogeneous anisotropic crystals with zero initial data

$$\nabla \times H = \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} + \delta(x)\delta(t)\vec{e}, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4,$$

$$(E,H)|_{t\le 0} = 0. \tag{1}$$

Here

$$D(x,t) = \hat{\epsilon}E + \int\limits_0^t \varphi(t-\tau)E(x,t)d\tau,$$

$$B(x,t) = \hat{\mu}H + \int\limits_0^t \psi(t-\tau)H(x,t)d\tau, \tag{2}$$

$$E = (E_1, E_2, E_3), \quad H = (H_1, H_2, H_3), \quad D = (D_1, D_2, D_3), \quad B = (B_1, B_1, B_3),$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_{ij})_{3\times 3}$ and $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_{ij})_{3\times 3}$ are the permittivity and permeability matrices, respectively; $\varphi(t) = \mathrm{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ and $\psi(t) = \mathrm{diag}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ are diagonal matrices representing the memory; $\vec{e} = (1,0,0)$ is unit vector; $\delta(x)$ is the Dirac delta function. The matrices $\hat{\epsilon}$ and $\hat{\mu}$ in equations (1) are assumed to be known constant matrices. Moreover, $\hat{\epsilon}$ is a symmetric positive definite matrix.

The problem in which the vectors of electromagnetic field $E(x,t)$, $H(x,t)$ should be determined from (1), (2) for a given matrix functions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ will be called the *direct problem.*

Let $\tilde{E} = \big(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3\big)(\nu,t)$, $\tilde{H} = \big(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3\big)(\nu,t)$ be the Fourier image of $\big(E,H\big)(x,t)$ with respect to $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, i.e.

$$\tilde{E}_j(\nu,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} E_j(x,t)e^{i(x,\nu)}dx, \quad \tilde{H}_j(\nu,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} H_j(x,t)e^{i(x,\nu)}dx,$$

$$\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,\nu) = \sum_{\lambda=1}^{3} x_\lambda \nu_\lambda, \quad j = 1,2,3.$$

We pose the following inverse problem: find the functions $\varphi(t) = \mathrm{diag}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $\psi(t) = \mathrm{diag}(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ occurring in the integral in equations (1), (2) from the information on the Fourier image $\tilde{E}$, $\tilde{H}$ of the electric and magnetic fields at an arbitrary time $t \ge 0$ for the values $\nu = 0$ of the Fourier transformation:

$$\big(\tilde{E},\tilde{H}\big)(0,t) = g(t), \qquad g(t) = (g_1,\dots,g_6). \tag{3}$$

At the present paper it is shown that if the function $g(t)$ satisfies some conditions of agreement and smoothness, the solution to inverse problem (1)–(3) is uniquely defined in the class of a continuously differentiable functions on the intercept $[0,T]$, where T is any positive fixed number.

REFERENCES

1. *Landau L. D., Lifshits E. M.,* Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press, Oxford; London; New York; Paris (1960).

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITIONS FOR A SECOND ORDER EQUATION OF MIXED TYPE

Farmonov Sh. R.

Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan; farmonovsh@mail.ru

Let Ω be a finite simple-connected domain of the plane xOy, bounded by segments $\overline{AB} = \{(x,y) : x+y = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $\overline{OB^*} = \{(x,y) : y = 0,\ -1 \leq x \leq 0\}$, $\overline{OA^*} = \{(x,y) : x = 0,\ -1 \leq y \leq 0\}$ and by arcs $\overline{AA^*} = \{(x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1,\ x > 0,\ y < 0\}$, $\overline{BB^*} = \{(x,y) : \sqrt{-x} + \sqrt{y} = 1,\ x < 0,\ y > 0\}$, and $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) : x + y > 0,\ y < 0\}$, $\Omega_1^* = \Omega \cap \{(x,y) : x + y < 0,\ x < 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y) : x + y > 0,\ x < 0\}$, $\Omega_2^* = \Omega \cap \{(x,y) : x + y < 0,\ y < 0\}$.

Problem A_3. To find a function $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, satisfying the following conditions:

1) in the domain Ω_0 u is a regular solution of equation

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1/2; \tag{1}$$

2) it is a generalized solution of equation (1) from the class R_2 [1] in the domains Ω_1, Ω_1^*, Ω_2, Ω_2^*;

3) gluing conditions are valid:

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha} u_y(x,y) = -\lim_{y \to +0} y^{\alpha} u_y(x,y), \qquad 0 < x < 1;$$

$$\lim_{x \to -0} (-x)^{\alpha} u_x(x,y) = -\lim_{x \to +0} x^{\alpha} u_x(x,y), \qquad 0 < y < 1;$$

4) u satisfies boundary conditions:

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (0,y) \in \overline{AB};$$

$$u(0,y) + u(0,-y) = f(y), \qquad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u\left[x, -(1-\sqrt{x})^2\right] - u\left[(1-\sqrt{x})^2, -x\right] = p_1(x), \quad 1/4 \leq x \leq 1;$$

$$u\left[-(1-\sqrt{y})^2, y\right] - u\left[-y, (1-\sqrt{y})^2\right] = p_2(y), \quad 1/4 \leq y \leq 1;$$

$$\lim_{y \to +0} y^{\alpha} u_y(x,y) - \lim_{y \to +0} y^{\alpha} u_y(-x,y) = g(x), \quad 0 < x < 1.$$

Here $\varphi(x,y)$, $f(t)$, $g(t)$, $p_j(t)$ are given functions such as $p_j(1/4) = 0$, $j = \overline{1,2}$.

The main result is given by the following theorem.

Theorem. *Let given functions be satisfied to the following conditions:* $\varphi(x,y) = [x(1-x)]^{\varepsilon} \tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x) \in C[0,1]$, $\varepsilon > 1 + \alpha$; $f(t) = \Upsilon\left(t^{-2\beta} - 1\right) + \tilde{f}(t)$, $\tilde{f}(0) = \Upsilon$, $\tilde{f}(t) \in C^{(2,\gamma)}[0,1]$, $\gamma > 0$; $p_j(t) = (t - 1/4)^{\gamma_1} (1-t)^{\gamma_2} \tilde{p}_j(t)$, $\tilde{p}_j(t) \in C[1/4, 1]$, $\gamma_1 \geq 2 - 4\beta$, $\gamma_2 \geq 4$, $j = \overline{1,2}$; $g(t) = t^{1-\alpha} \tilde{g}(t)$, $\tilde{g}(t) \in C[0,1] \cap L(0,1)$, *where*

$$\Upsilon = \frac{4^{2\beta} \beta \Gamma^2(\beta)}{2\pi\Gamma(2\beta)} \int_0^1 \tilde{\varphi}(t)[t(1-t)]^{\beta+\varepsilon-1/2} dt.$$

Then there exists solution of the problem A_3.

The theorem can be proved by the reducing the problem A_3 equivalently to a singular integral equation.

REFERENCES

1. *Isamukhamedov S. S., Oramov Zh.,* "On boundary value problems for equations of mixed type of the second kind with a nonsmooth line of degeneracy" [in Russian], Differents. Uravneniya, **18**, No. 2, 324–334 (1982).

THE QUAD EQUATION WITH A NONSTANDARD GENERALIZED SYMMETRY STRUCTURE

Garifullin R. N.[1], **Mikhailov A. V.**[2], **Yamilov R. I.**[3]

[1] *Institute of Mathematics with Computer Center USC RAS, Ufa, Russia;* rustem@matem.anrb.ru
[2] *University of Leeds, Leeds, United Kingdom;* a.v.mikhailov@leeds.ac.uk
[3] *Institute of Mathematics with Computer Center USC RAS, Ufa, Russia;* rvlyamilov@gmail.com

The equation

$$u_{n+1,m+1}(u_{n,m} - u_{n,m+1}) - u_{n+1,m}(u_{n,m} + u_{n,m+1}) + 1 = 0 \tag{1}$$

has been found in article [1]. It is shown there that equation (1) has two generalized symmetries in different directions:

$$\frac{d}{dt_1}u_{n,m} = h_{n,m}h_{n-1,m}(a_n u_{n+2,m} - a_{n-1}u_{n-2,m}), \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt_2}u_{n,m} = (-1)^n \frac{u_{n,m+1}u_{n,m-1} + u_{n,m}^2}{u_{n,m+1} + u_{n,m-1}}, \tag{3}$$

where $h_{n,m} = 1 - 2u_{n+1,m}u_{n,m}$, $a_{n+2} = a_n$. One can see that n is an outer parameter in equation (3), and this equation is really a known (1+1)-dimensional autonomous equation of the Volterra type. In the case of equation (2), we have the essentially non-autonomous Itoh–Narita–Bogoyavlensky type equation with two-periodic coefficient a_n.

We show that equation (3) can be rewrite as the Tsuchida system [2] for odd and even $u_{n,m}$. We find Lax pairs for equations (1)–(3) in the form:

$$\Psi_{n+2,m} = N_{n,m}\Psi_{n,m}, \quad \Psi_{n,m+1} = M_{n,m}\Psi_{n,m},$$

$$\frac{d}{dt_1}\Psi_{n,m} = A_{n,m}\Psi_{n,m}, \quad \frac{d}{dt_2}\Psi_{n,m} = B_{n,m}\Psi_{n,m},$$

where $\Psi_{n,m}$ is a vector function, $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $N_{n,m}$, $M_{n,m}$ are 2×2 matrices.

We also construct for that discrete equation hierarchies of generalized symmetries and conservation laws and derive from it two integrable hyperbolic type systems. $L-A$ pair for equation (1) as well as hierarchies of generalized symmetries and conservation laws are nonstandard.

REFERENCES

1. *Garifullin R. N., Yamilov R. I.,* "Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters," J. Phys. A: Math. Theor., **45**, No. 34, 345205 (2012).
2. *Tsuchida T.,* "Integrable discretizations of derivative nonlinear Schrodinger equations," J. Phys. A: Math. Gen., **35**, No. 36, 7827–7847 (2002).

BURSTING EFFECT IN MODELS WITH DELAY

Glyzin S. D.

Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia; glyzin.s@gmail.com

We propose a new method for modeling the well-known phenomenon of "bursting behavior" in neuron systems by invoking delay equations. Namely, we consider a singularly perturbed nonlinear difference-differential equation with two delays describing the functioning of an isolated neuron. Under a suitable choice of parameters, we establish the existence of a stable periodic motion with any prescribed number of spikes on a closed time interval equal to the period length.

It is well known that self-oscillation processes in neuron systems exhibit the phenomenon of alternation of pulse bursts (sets of several consecutive intensive spikes) with relatively smooth regions of membrane potential variation. In the literature, this phenomenon is referred to as bursting behavior. Bursting behavior was studied in numerous works (see, for example, [1] and the bibliography given there). As the rule, the mathematical modeling of this behavior is based on singularly perturbed systems of ordinary differential equations with one slow and two fast variables; under certain conditions, such systems may possess stable bursting cycles (periodic motions with bursting behavior). However, we propose an essentially different approach to the solution of this problem by introducing time delays.

Following [2], for the mathematical model of an individual neuron we will take the difference-differential equation

$$\dot{u} = \lambda[f(u(t-h)) - g(u(t-1))]u. \tag{1}$$

Here $u(t) > 0$ is the membrane potential of the neuron, the parameter $\lambda > 0$ characterizing the time rate of change of electric processes in the system is assumed large, and the parameter h is fixed and belongs to the interval $(0, 1)$. We assume that the functions

$$\begin{gathered} f(0) = 1, \quad g(0) = 0; \qquad f(u) = -a_0 + O(1/u), \quad uf'(u) = O(1/u), \\ g(u) = b_0 + O(1/u), \quad ug'(u) = O(1/u) \quad \text{as} \quad u \to +\infty, \end{gathered} \tag{2}$$

where a_0 and b_0 are positive constants.

Our main result is as follows. For any fixed natural number n, one can choose the parameters h, a_0, b_0 (appearing in (1), (2)) so that, for all sufficiently large λ, equation (1) will have an exponentially orbitally stable cycle $u = u_*(t, \lambda)$ of period $T_*(\lambda)$, where $T_*(\lambda)$ tends to a finite limit $T_* > 0$ as $\lambda \to \infty$. On a closed time interval of period length, the function $u_*(t, \lambda)$ has exactly n consecutive asymptotically high (of order $\exp(\lambda h)$) spikes of duration $\Delta t = (1 + 1/a_0)h$, while it is asymptotically small at other times. In other words, under such a choice of the parameters h, a_0, b_0, bursting behavior is realized.

The author was supported by the Russian government project no. 11.G34.31.0053.

REFERENCES

1. *Coombes S., Bressloff P. C.,* Bursting: The Genesis of Rhythm in the Nervous System, World Scientific Publishing Company, Singapore (2005).
2. *Kashchenko S. A., Maiorov V. V.,* Models of Wave Memory [in Russian], Librokom, Moscow (2009).

THE DUAL STREAM FUNCTION APPROACH TO LAGRANGIAN COHERENT STRUCTURES ARISING IN TURBULENCE

Grebenev V. N.[1], **Oberlack M.**[2], **Frewer M.**[3]

[1] *Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
vngrebenev@gmail.com
[2] *Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany;*
oberlack@fdy.tu-darmstadt.de
[3] *Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany;*
frewer@fdy.tu-darmstadt.de

There are some numerical and physical experiments which show that in certain regimes the intermediate wavelengths tend to have vorticity aligned with velocity. These experiments on alignment suggest the following oversimplified picture of certain turbulent flows: The fluid evolves between distinct metastable states, one of which is Beltrami-like, i.e. where $\vec{u}_B \parallel \vec{\omega}_B$ and another that consists predominantly of two-dimensional coherent structures where $\vec{u}_B \perp \vec{\omega}_B$. The coherent structures possess large shear stresses which cause short wavelength three-dimensional instabilities. In turn, these instabilities produce short wavelength Beltrami fields that are themselves unstable and the process cycles. Hence Beltrami fields might play an important role when investigating the various intrinsic mechanisms of a turbulent flow. Despite their importance and inherent intricacy, very little is known about the dynamics of Beltrami fields apart from their numerical simulation. The present analytical study wants to throw more light on this subject which will be taken from the perspective of the dual stream function representation for 3D flows. The aim is to gain more insight into the general topological and geometrical structure of the full solution manifold for 3D inviscid steady Euler flows of an incompressible fluid. Although only the local structure of this manifold can be probed many practical insights can be extracted when trying to visualize the solution manifold via the dual stream function representation.

Using the methodology of Lie groups and Lie algebras we determine new symmetry and equivalence classes of the stationary three-dimensional Euler equations by introducing potential functions that are based on the so-called dual stream function representation of the steady state velocity field $\vec{u}(x, y, z) = \nabla\lambda(x, y, z) \times \nabla\mu(x, y, z)$, which itself can only be defined locally. In particular an infinite dimensional Lie algebra for Beltrami fields is gained. We show that this Lie algebra generates canonical transformations of a Hamiltonian flow for the dual pair of variables λ and μ. It enables us to make the classification of a two-dimensional Riemannian manifold M^2 wherein (λ, μ) presents the local coordinates of M^2. Furthermore the local geometry of this manifold is explored in detail. As a result an infinite set of locally conserved currents and charges in the context of the conformal field theory is finally observed.

This work was supported by DFG Foundation (grant no. OB 96/32-1) and partially the first author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00648 a) and by grant of the Government of RF for supporting of scientific investigations under the guidance of the invited investigator (grant no. 12.740.11.1430).

ON NON-TRIVIAL SOLUTIONS OF A HOMOGENEOUS TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Kalenyuk P. I.[1,2], **Nytrebych Z. M.**[1], **Kohut I. V.**[1]

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;*
[2] *University of Rzeszów, Rzeszów, Poland;*
pkalenyuk@gmail.com, znytrebych@gmail.com, ikohutua@yahoo.com

Problems with multipoint conditions for partial differential equations are known [1] to be generally ill-posed problems. That ill-posedness is mostly connected with the existence of non-trivial null space of the problem.

In the domain $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ we study the homogeneous problem:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t} + q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u(t,x) = 0,$$

$$u(0,x) = u(T,x) = 0,$$

where $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ are any differential polynomials with constant coefficients, $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$.

According to the differential-symbol method [2], we shall search for the solutions of problem (1), (2) in the form as follows:

$$u(t,x) = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{\mathrm{sh}[t\sqrt{D(\nu)}]}{\sqrt{D(\nu)}]}\exp[-p(\nu)t + \nu x]\right\}\Bigg|_{\nu=0},$$

where $D(\nu) = p^2(\nu) - a(\nu)$, $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ is a differential expression with (unknown) symbol $\varphi(\nu)$, $\nu \in \mathbb{C}$.

We investigate the following cases.

1. When $D(\nu) \equiv D = \mathrm{const} \neq \pi \mathrm{ki}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, problem (1), (2) has only trivial solution.

2. For the case when $D(\nu) \equiv D = \mathrm{const} = \pi \mathrm{ki}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, we find nontrivial solutions of problem (1), (2) with arbitrary entire function $\varphi(x)$ of certain order.

3. When $D(\nu) \neq \mathrm{const}$, we specify formulas for constructing nontrivial quasipolynomial solutions of problem (1), (2).

Separately, we consider the case when $p(\nu)$, $q(\nu)$ are arbitrary entire functions.

REFERENCES

1. *Ptashnyk B. I.,* Ill-Posed Boundary Value Problems for Partial Differential Equations [in Russian], Naukova dumka, Kyiv (1984).
2. *Kalenyuk P. I., Baranetskyi Ya. Ye., Nytrebych Z. N.,* Generalized Method of Separation of Variables [in Russian], Naukova dumka, Kyiv (1993).

OPTIMAL CONTROL OF ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE SOBOLEV SPACE W_1^l

Khurshudyan As. Zh.

Yerevan State University, Yerevan, Armenia; asaturkhurshudyan@yandex.ru

Unlike to control problems for wave equation with constant parameters, relatively little attention has been devoted to those for wave equation with variable parameters (see e.g. [1–3] and the references cited therein). In [1] such control problem has been considered in L^2, while in [2, 3] it has been considered in L^1. Here an optimal control problem is considered for one-dimensional wave equation with variable coefficients

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]-\rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=u(t)v(x),\quad x\in(0,1),\ t\in[0,T], \tag{1}$$

$$w(0,t)=u_0(t),\quad w(1,t)=u_1(t), \tag{2}$$

to find necessary and sufficient conditions of existence and to determine $u^o(t)$ control function optimal in the sense of criterion

$$\kappa[u]=\int\limits_{t_0}^{T}\left[|u(t)|+\sum_{s=1}^{l}|D^s u(t)|\right]dt\equiv\|u\|_{W_1^l},$$

where D^s denotes s-th generalized derivative, guaranteeing terminal condition

$$w(x,T)\equiv 0,\quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T}\equiv 0,\quad x\in[0,1],$$

for given initial data. Functions $u(t)$, $u_0(t)$ and $u_1(t)$ are supposed to be compactly supported in $[0,T]$, one of which can be considered as control function. The set of compactly supported in $[0,T]$ functions from $W_1^l[0,T]$ is taken as class of admissible controls. Using Fourier generalized integral transform the solution of the problem is reduced to system of moments problem. Then, on the bases of moments problem solution method outlined in [4] we obtain

$$u^o(t)=u_0^o\delta(t-t_0)+\sum_{j=1}^{l}u_j^o\delta^{(j)}(t-t_j),\quad t\in[0,T],$$

where $\delta(t)$ is Dirac delta function, $\delta^{(j)}(t)$ is its j-th derivative, $\{t_j\}_{j=\overline{0;l}}\subset[0,T]$.

Theorem. *For optimal controllability of system* (1), (2) *in the sense of* $W_1^l[0,T]$ *it is necessary and sufficient, that* $\rho_l^o=\sum\limits_{j=1}^{l}|u_j^o|\neq 0$ *for all* l.

REFERENCES

1. *Borovskikh A. V.,* "Boundary control formulas for an inhomogeneous string: I, II," Differ. Equ., **43**, No. 1, 69–95; No. 5, 656–666 (2007).
2. *Khurshudyan As. Zh.,* "On optimal null-finite control of non-homogeneous rod vibrations," in: Applied Mathematics, Informatics, Mechanics, Vol. 1, VSU Publisher, Voronezh, 2012, pp. 393–399.
3. *Khurshudyan As. Zh.,* "On optimal boundary control of non-homogeneous string vibrations under impulsive concentrated perturbations with delay in controls," in: Proc. of Intnern. Conf. dedicated to 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 2012, pp. 203–205.
4. *Krasovskii N. N.,* Motion Control Theory [in Russian], Nauka, Moscow (1968).

ON THE EXISTENCE OF A STATIONARY MEASURE FOR THE STOCHASTIC SYSTEM OF THE LORENZ MODEL FOR BAROCLINIC ATMOSPHERE ON A SPHERE

Klevtsova Yu. Yu.

Siberian Regional Hydrometeorological Research Institute, Novosibirsk, Russia;
yy_klevtsova@ngs.ru

We consider the system of equations of the two-layer quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere

$$\frac{\partial}{\partial t}A_1u+\nu A_2u+A_3u+B(u)=g,\qquad t>0, \tag{1}$$

on the two-dimensional unit sphere S centered at the origin of the spherical polar coordinates

$$(\lambda,\varphi),\ \lambda\in[0,2\pi),\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \mu=\sin\varphi.$$

Here $\nu>0$ is the kinematic viscosity, $u(t,x,\omega)=(u_1(t,x,\omega),u_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is an unknown vector field and $g(t,x,\omega)=(g_1(t,x,\omega),g_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is a given vector field, $x=(\lambda,\mu)$, $\omega\in\Omega$, (Ω,P,F) is a complete probability space,

$$A_1=\begin{pmatrix}-\Delta & 0\\ 0 & -\Delta+\gamma\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}\Delta^2 & 0\\ 0 & \Delta^2\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}-k\Delta & 2k\Delta\\ k\Delta & -(2k+k_1+\nu\gamma)\Delta+\rho\end{pmatrix},$$

$$B(u)=(J(\Delta u_1+2\mu,u_1)+J(\Delta u_2,u_2),J(\Delta u_2-\gamma u_2,u_1)+J(\Delta u_1+2\mu,u_2))^{\mathrm{T}}.$$

Also, γ, ρ, k, $k_1\geq 0$ are numerical parameters, $J(\psi,\theta)=\psi_\lambda\theta_\mu-\psi_\mu\theta_\lambda$ is the Jacobi operator, and $\Delta\psi=((1-\mu^2)\psi_\mu)_\mu+(1-\mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$ is the Laplace – Beltrami operator on the sphere S. A random vector field $g=f+\eta$ is taken as the right-hand side of (1); here the random external force $f(x,\omega)=(f_1(x,\omega),f_2(x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is independent of t and square summable in ω and the random vector field $\eta(t,x,\omega)=(\eta_1(t,x,\omega),\eta_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is a white noise in t. In [1] it was shown that the Cauchy problem with random initial data for this system has a unique solution and it was obtained an estimate for the continuous dependence of the solution on the set of random initial data and an external force on a finite interval of variation of variable t. Also, in [2] it was obtained the sufficient conditions on the parameters ν, γ, ρ, k, k_1 and the right-hand side of (1) for existence of a stationary measure of Markov semigroup which is defined by the solutions of the Cauchy problem.

The author is grateful to Academician of RAS V. P. Dymnikov and Professor V. N. Krupchatnikov for posing the problem.

REFERENCES

1. *Klevtsova Yu. Yu.*, "Well-posedness of the Cauchy problem for the stochastic system for the Lorenz model for a baroclinic atmosphere," Sb. Math., **203**, No. 10, 1490–1517 (2012).
2. *Klevtsova Yu. Yu.*, "On the existence of a stationary measure for the stochastic system for the Lorenz model for a baroclinic atmosphere," Sb. Math. (to appear).

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FIRST-ORDER HYPERBOLIC SYSTEMS: REGULARITY, FREDHOLMNESS, BIFURCATIONS, AND DICHOTOMY

Kmit I.

Humboldt University, Berlin, Germany;
Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine;
kmit@informatik.hu-berlin.de

We give an exposition of recent results on regularity [1, 2], Fredholm properties [3, 4], Hopf bifurcation [5], and robustness of exponential dichotomies [6] of boundary value problems for general first-order one-dimensional semi(linear) hyperbolic systems. For initial-boundary value problems we show that large classes of boundary operators (modeling processes in laser dynamics, population dynamics, and chemical kinetics) cause an effect that smoothness increases with time. This property is the key in finding parametrices for hyperbolic problems. We construct parametrices for dissipative periodic problems subjected to reflection boundary conditions and show that these problems are modeled by Fredholm operators of index zero. The problem of small denominators arising here is prevented by a certain dissipativity condition formulated in terms of the coefficients of PDEs and reflection boundary coefficients.

Moreover, we state conditions for Hopf bifurcation, i.e., for existence, local uniqueness (up to phase shifts), smoothness and smooth dependence on control parameters of time-periodic solutions bifurcating from the zero stationary solution. The proof is done by means of a Lyapunov–Schmidt reduction procedure, where the established Fredholm property of the linearization is essentially used. It should be noted that, among others, the question if a non-degenerate time-periodic solution depends smoothly on the system parameters is much more delicate for hyperbolic PDEs than in the case of parabolic PDEs or ODEs.

Finally, we examine robustness of exponential dichotomies of boundary value problems. The boundary conditions are supposed to be of types ensuring smoothing solutions in finite time. We show that the dichotomy survives in the space of continuous functions under small perturbations of all coefficients in the differential equations.

REFERENCES

1. *Kmit I.,* "Smoothing solutions to initial-boundary problems for first-order hyperbolic systems," Appl. Anal., **90**, No. 11, 1609–1634 (2011).
2. *Kmit I.,* "Smoothing effect and Fredholm property for first-order hyperbolic PDEs," in: Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics (Operator Theory: Advances and Applications, 231), Birkhäuser, Basel, 2013, pp. 219–238.
3. *Kmit I., Recke L.* "Fredholmness and smooth dependence for linear time-periodic hyperbolic problems," Differ. Equ., **252**, No. 2, 1962–1986 (2012).
4. *Kmit I., Recke L.* "Periodic solutions to dissipative hyperbolic systems. I: Fredholm solvability of linear problems," arXiv:1108.2882 [math.AP], 18 pages (2013).
5. *Kmit I., Recke L.* "Periodic solutions to dissipative hyperbolic systems. II: Hopf bifurcation for semilinear problems," arXiv:1302.1414 [math.AP], 48 pages (2013).
6. *Kmit I. Ya., Recke L., Tkachenko V. I.* "Robustness of exponential dichotomies of boundary-value problems for general first-order hyperbolic systems," Ukr. Math. J., **65**, No. 2, 1–16 (2013).

RIGHT-PART STABILITY OF A DELAY DIFFERENCE EQUATION

Kulikov A. Y.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; stphn@mail.ru

Put $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Delta_{\mathbb{N}} = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 : n \geq m\}$. Let $\mathbb{C}^r$ be the r-dimensional complex linear space; $\mathbb{C}^{r\times r}$ be the space of $r \times r$ complex matrices; $\mathbf{l}_p$, $1 \leq p < \infty$, be the space of functions $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}^r$ satisfying the condition $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p < \infty$ with norm $\|f\|_p = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p\right)^{1/p}$; $\mathbf{l}_\infty$ be the space of bounded functions $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}^r$ with norm $\|f\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |f(n)|$.

Consider a nonautonomous difference equation with several delays

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{k=0}^{N} a_k(n)x(n-h_k(n)) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

where $a_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}^{r\times r}$, $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}^r$, $h_k\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

The *Cauchy function* of equation (1) is a matrix function $K\colon \Delta_{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{r\times r}$ that for any fixed $m \in \mathbb{N}_0$ satisfies the equation

$$K(n+1,m) - K(n,m) = -A(n)K(n-h(n),m), \quad n \geqslant m,$$

and the initial conditions $K(m,m) = E$, $K(n,m) = \Theta$, $n < m$.

Define an operator $\mathbf{K}\colon \mathbf{l}_p \to \mathbf{l}_\infty$ by putting $(\mathbf{K}f)(n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} K(n,i+1)f(i)$.

It could be easily seen that the stability of equation (1) with respect to the right-hand part is equivalent to the boundedness of the operator $\mathbf{K}$. Moreover, the following proposition is valid.

Lemma. *For any p, $1 \leq p \leq \infty$, if the operator $\mathbf{K}$ acts from the space $\mathbf{l}_p$ to the space $\mathbf{l}_\infty$ then $\mathbf{K}$ is bounded.*

Theorem 1. *The operator $\mathbf{K}$ acts from the space $\mathbf{l}_1$ to the space $\mathbf{l}_\infty$ if and only if the Cauchy function of equation* (1) *is uniformly bounded.*

Suppose $h(n) = \max\limits_{k\in[0,N]} h_k(n)$; $a(n) = \sum\limits_{k=0}^{N} |a_k(n)|$ if $n \in \mathbb{N}_0$, $a(n) = 0$ if $n \notin \mathbb{N}_0$.

We say that equation (1) satisfies the *V-condition*, if $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \infty$.

Theorem 2. *Let equation* (1) *satisfy the V-condition. Then the following statements are equivalent:*

- *for some p, $1 < p \leq \infty$, the operator $\mathbf{K}$ acts from $\mathbf{l}_p$ to $\mathbf{l}_\infty$;*
- *for any p, $1 < p \leq \infty$, the operator $\mathbf{K}$ acts from $\mathbf{l}_p$ to $\mathbf{l}_\infty$;*
- *the Cauchy function of equation* (1) *has an exponential estimate.*

ON SOLUTIONS TO A SINGULAR ANISOTROPIC CURVATURE FLOW

Łasica M.

University of Warsaw, Warsaw, Poland; lasica@mimuw.edu.pl

Let $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be convex and one-homogeneous. Further, let Ω be a region in $\mathbb{R}^n$ with regular boundary and $\mathbf{n}$ — a consistently chosen field of vectors normal to $\partial\Omega$. Then, *weighted curvature* κ_γ of $\partial\Omega$ corresponding to anisotropy function γ is defined by

$$\kappa_\gamma = \operatorname{div}_{\partial\Omega} \nabla_\xi \gamma|_{\xi=\mathbf{n}}.$$

The restricted divergence $\operatorname{div}_{\partial\Omega}$ of a smooth vector field $\mathbf{v}$ on $\partial\Omega$ may be defined by

$$\operatorname{div}_{\partial\Omega}\mathbf{v} = \operatorname{tr}(\mathbb{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\nabla\mathbf{v}.$$

Corresponding generalized curvature flow is now given by vector field $\mathbf{v} = -\kappa_\gamma\mathbf{n}$. In case $\gamma(\xi) = \|\xi\|_2$ this is the mean curvature flow and in case $\gamma(\xi) = \|\xi\|_1$ (in appropriate weak formulation) this is the crystalline curvature flow investigated, among others, by Mucha and Rybka. An interesting feature of the latter case is formation of growing facets, i.e. flat parts of solution.

The poster will present work in progress on a somehow intermediate case of (one-homogeneous) anisotropy function on $\mathbb{R}^2$ given by

$$\gamma(\xi) = (\xi_1 + a\operatorname{sgn}\xi_1)^2 + (\xi_2 + a\operatorname{sgn}\xi_2)^2, \quad 0 < a < 1,$$

for $\xi \in \gamma^{-1}(1)$. Locally, when $\partial\Omega$ is a graph of function $y = u(x)$ this gives rise to a singular parabolic equation of form

$$u_t = (G(u_x))_x + (F(u_x)\operatorname{sgn} u_x)_x,$$

where $G' > 0$, $F > 0$. We will concentrate, beside matters of existence and regularity, on behaviour of facets which in this case is more complicated than in pure crystalline case (e.g. they might disappear) due to competition between regular and singular diffusion which is present in this equation.

REFERENCES

1. *Mucha P. B., Rybka P.,* "A note on a model system with sudden directional diffusion," J. Stat. Phys., **146**, No. 5, 975–988 (2012).
2. *Mucha P. B., Rybka P.,* "A caricature of a singular curvature flow in the plane," Nonlinearity, **21**, No. 10, 2281–2316 (2008).

FRACTIONAL-ORDER DIFFERENTIAL / DIFFERENCE EQUATIONS AROUND US

Latawiec K. J.[1], **Stanisławski R.**[2], **Łukaniszyn M.**[3]

Opole University of Technology, Opole, Poland; [1]k.latawiec@po.opole.pl, [2]r.stanislawski@po.opole.pl, [3]m.lukaniszyn@po.opole.pl

The most popular time-domain model of a dynamical system is an ordinary differential equation (ODE) with the system input $u(t)$, output $y(t)$ and t being the continuous time. Both input and output can be either scalar or vector variables, with the latter case being referred to as a multi-input / multi-output (MIMO) system. In the classical well-known case ODE contains ordinary derivatives of input(s) and output(s) with the orders of the derivatives being integers. In case of a linear integer-order system the shares of particular derivatives within ODE are weighted by the associated parameters. The birth of noninteger or fractional-order systems can be traced back to 1695 when Leibnitz and L'Hospital communicated to each other on a possibility for a derivative to assume a noninteger / fractional value, e.g. 1/2. However, it is not until the 19th century that rigorous mathematical approaches addressed a fractional-order derivative (FOD) as a result of the wide-spread involvement of prominent mathematicians. Consequently, various types of FOD were defined, of which the three most popular ones, that is those of Riemann–Liouville, Caputo and Grünwald–Letnikov, have been attracting the research interest until now. In a historical survey, three representative publications on theory and applications of FOD-based systems can be recalled. The selection of the books and papers in this presentation is by no means complete, in fact there are hundreds of them appearing each month on the FOD-related market. In the first attempt at commenting on a myriad of applications of FOD in a variety of scientific disciplines, selected general application areas are listed, ranging from electrical / control, mechanical, chemical, civil and computer engineering, through signal / image processing and nanotechnology up to biology, bioengineering and medicine. Selected FOD application topics are specified and supported with some publications. These include viscoelasticity, ultra / supercapacitors, diffusion problems, image processing and medicine. Important implementation issues are related with the advent of computers and the introduction of the Grünwald–Letnikov fractional-order difference (GLFD or shortly FD), which is used to model discrete-time dynamical systems but which may face the computational explosion problem. In the second attempt at commenting on application / implementation issues, including our contributions in the field, two FD-related research problems are specified, that is 1) approximation or modeling of FD (in order to avoid the computational explosion) and 2) asymptotic stability of FD-based LTI MIMO discrete-time state space systems. Our contribution to the solution of the first problem lies in the introduction of new, effective models of FD, including finite fractional difference (FFD), normalized FFD (NFFD), adaptive FFD (AFFD) and finite fractional / Laguerre-based difference (FFLD). The models provide both accuracy and computational efficiency to the solution of the modeling problem for FD. The solution to the second problem is culminated with the presentation of the authors' original result that is an ultimate stability criterion for FD-based LTI discrete-time systems, the long-awaited result paralleling the existing one for continuous-time FOD-based systems. The above two effective solutions to the FD-related problems in the analysis of fractional-order LTI MIMO systems are supported with selected publications of our group affiliated with the Department of Electrical, Control and Computer Engineering, Opole University of Technology.

ON SOME PROBLEM FOR THE SYSTEMS OF EVOLUTION EQUATIONS

Lyubanova A. Sh.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; lubanova@mail.ru

Let Ω be a domain in $\mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ is the closure of Ω, T is an arbitrary positive real number, $Q_T = (0,T) \times \Omega$ and $S_T = [0,T] \times \partial\Omega$.

The initial-boundary value problem for the systems of evolution equations

$$(I + \eta_1 M_1)u_{1t} + M_2 u_1 = g_1(x)U_1 + AU_2 + f_1(t,x), \tag{1}$$

$$(I + \eta_2 L_1)u_{2t} + L_2 u_2 = Bu_1 + \sigma(x,u_1) + f_2(t,x) \tag{2}$$

is studied in the cylinder Q_T in the case that the conditions with respect to the time variable are given only for one of the unknown functions. Here L_i and M_i, $i = 1, 2$, are linear elliptic differential operators of the second order, I is the identical operator, B is a linear differential operator of the second order; $\eta_j \geq 0$, $j = 1, 2$, are constants, $U_i(x) \equiv \int\limits_0^T u_i dt$, $i = 1, 2$; $\sigma(x,p)$ is a function of variables x and p; $g_1(x)$ and f_i, $i = 1, 2$, are given functions. It is supposed that either A is linear elliptic differential operator of the second order or $A = g_2(x)I$ where $g_2(x)$ is a known function.

The problem is to find the pair of functions $\{u_1, u_2\}$ satisfying (1), (2) when along with the initial data for the function u_1

$$u_1|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

the same function is given at the final moment of time

$$u_1|_{t=T} = u_T(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

and the boundary conditions are taken of the Dirichlet type

$$u_k|_{S_T} = \beta_k(t,x), \qquad k = 1, 2. \tag{5}$$

The sufficient conditions of the existence and uniqueness of a weak solution to this problem are established in the following cases: 1) $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ (parabolic system); 2) $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ (pseudoparabolic system); 3) $\eta_1 > 0$, $\eta_2 = 0$ (mixed system).

The existence and uniqueness of the solution to the problem is proved in two steps. At the first step we establish the existence and uniqueness of the solution to the problem (1), (3)–(5) for the first function u_1 as an inverse problem of recovering an unknown integral U_2 of the second function u_2 as a source function. The second step consists of finding the function u_2 as the solution of an appropriate problem for the equation (2) with the boundary data (5) provided that the function u_1 and the integral U_2 are known. For parabolic and mixed systems (1), (2) the proofs of the theorems lean upon the results of [1].

REFERENCES

1. *Shelukhin V. V.,* "A problem with time-averaged data for nonlinear parabolic equations," Sib. Math. J., **32**, No. 2, 309–320 (1991).

USE OF THE TEST-METHOD FOR INVESTIGATION OF STABILITY OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Malygina V. V.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; mavera@list.ru

We consider linear functional differential equations

$$\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

where T is a linear bounded regular Volterra operator acting from the space of locally absolutely continuous functions (D_{loc}) to the space of locally integrable functions (L_{loc}). Initial conditions being given, equation (1) is unique solvable in D_{loc} for all $f \in D_{loc}$.

A method for investigation of the stability of solutions of equation (1) is presented. The essence of the method is in the following.

Let us impose on the operator T some additional restrictions defined by a finite set of parameters. Equations, of the form (1), that satisfy the restrictions constitute a *family* of equations. Suppose we can select a *test equation* from the family so that the stability of the test equation guarantee the stability of each equation of the family. If the problem of stability investigation for the test equation is effectively solvable, then we obtain sufficient conditions of the stability of all family (1). Moreover, if we manage to obtain a criterion of stability for the test equation, then the obtained condition of the stability of all the family is sharp.

Let us present examples of equation families for which test equations have been constructed and investigated.

Example 1. Equations with constant coefficients and variable delays

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)) + f(t), \quad t \geq 0,$$

where $0 \leq r_k(t) \leq \omega_k$, $a_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$, compose the equation family characterized by the set of parameters $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ and $\{\omega_k\}_{k=1}^{n}$.

In the two following examples integrals are understood in the sense of Riemann–Stieltjes, and $r(t, \cdot)$ is a monotonically decreasing function with variation $\rho(t) = \bigvee_0^t r(t, \cdot)$.

Example 2. Equations with constant variation

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \int_0^t x(s) d_s r(t, s) + f(t), \quad t \geq 0,$$

where $r(t, s) = 0$ for $t > s + \omega$, and $\rho(t) \equiv b$, constitute the equation family with parameters a, ω, b.

Example 3. Equations with distributed delay

$$\dot{x}(t) = \int_0^t x(s) d_s r(t, s) + f(t), \quad t \geq 0,$$

where $\int\limits_{h(t)}^{t} \rho(s) ds \leq \omega$, $h(t) = \sup\{s \in [0, t] : r(\tau, \zeta) = 0 \ \forall \tau \geq t \ \forall \zeta \leq s\}$, constitute the equation family characterized by the only parameter ω.

COMPLETE GROUP CLASSIFICATION OF SYSTEMS OF TWO LINEAR SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Meleshko S. V.[1], **Moyo S.**[2]

[1] *Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand;* sergey@math.sut.ac.th

[2] *Durban University of Technology, Durban, South Africa;* moyos@dut.ac.za

We give a complete group classification of the general case of linear systems of two second-order ordinary differential equations excluding the case of systems which are studied in the literature. This paper gives the initial step in the study of nonlinear systems of two second-order ordinary differential equations. It can also be extended to systems of equations with more than two equations. Furthermore the complete group classification of a system of two linear second-order ordinary differential equations is done. Four cases of linear systems of equations are obtained.

STABILITY OF LINEAR DELAY DIFFERENTIAL SYSTEMS

Mulyukov M. V.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
mulykoff@gmail.com

Consider a system of two linear autonomous differential equations with delay

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-\tau) = f(t), & t > 0, \\ x(\xi) = \psi(\xi), & \xi \le 0, \end{cases} \tag{1}$$

where A, B are real 2×2 matrices, $\tau = \text{const} > 0$, and ψ, f are locally integrable vector functions.

Our purpose is to obtain an effective sharp criterion of the Lyapunov stability and the asymptotic one for system (1). Asymptotic properties of its solution are determined by the location of roots of the following characteristic quasipolynomial with five real parameters

$$F(z) = \alpha + \beta e^{-z} + \gamma e^{-2z} + \mu z + \nu z e^{-z} + z^2,$$

where $\alpha = \det A$, $\beta = \det(A+B) - \det A - \det B = \operatorname{Sp} A \operatorname{Sp} B - \operatorname{Sp} AB$, $\gamma = \det B$, $\mu = \operatorname{Sp} A$, $\nu = \operatorname{Sp} B$.

The following conditions are equivalent [1]:
1) $F(z) = (\lambda_1^A + \lambda_1^B e^{-z} + z)(\lambda_2^A + \lambda_2^B e^{-z} + z)$, where $\lambda_i^{A,B}$ are eigenvalues of matrices;
2) $(2\beta - \mu\nu)^2 = (\mu^2 - 4\alpha)(\nu^2 - 4\gamma)$;
3) $\det(AB - BA) = 0$;
4) the matrices A, B are simultaneously triangularizable by basis transformation.

Thus, if $\det(AB - BA) = 0$ then the stated problem is solved completely. Otherwise the quasipolynomial F can not be essentially simplified. In the paper [2] there were obtained sharp stability criteria for the systems such that three coefficients of F are equal to zero. For example, a system

$$\dot{x}(t) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) x(t) + \left(\begin{smallmatrix} -b & 0 \\ -c & b \end{smallmatrix}\right) x(t-1) = 0$$

is asymptotically stable if and only if $-b^2 < c < 2b^2 \cos b$. Thus, for system (1) to be stable it is not necessary to have at least one stable matrix.

Besides, we obtained several sharp stability criteria for the following three-parametric systems:
1) $\beta = \gamma = 0$, here F is the characteristic function of so-called *delayed oscillator*;
2) $\mu = \nu = 0$, this result can be used for stabilization of inverted pendulum;
3) $\mu = \beta = 0$, this system is a linear approximation of Lotka–Volterra population dynamics model with time delay.

REFERENCES

1. *Mulyukov M. V.,* "On factorization of the characteristic quasipolynomial of a system of linear differential equations with delay" [in Russian], Izv. VUZ, No. 9, 38–44 (2013).
2. *Mulyukov M. V.,* "On asymptotic stability of two-parameter systems of differential equations with delay" [in Russian], Izv. VUZ (to appear).

INTERPLAY BETWEEN FLOCKING PARTICLES AND A NON-NEWTONIAN VISCOUS FLUID

Peszek J. P.

University of Warsaw, Warsaw, Poland; j.peszek@mimuw.edu.pl

We will present an interplay between flocking particles and an incompressible viscous non-Newtonian fluid. The flocking is described by the Cucker–Smale's flocking model, which in our case is associated with the following Vlasov type equation:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f + \operatorname{div}_v[F(f)f] = 0,$$

where $f(x, v, t)$ is the density of particles that at the time t have position x and velocity v. The fluid is described by a classic hydrodynamics' equation

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla\pi - \operatorname{div} \mathbb{S}(Du) = 0,$$

$$\operatorname{div} u = 0,$$

where $u(x, t)$ and $\pi(x, t)$ are respectively the velocity and the pressure of the fluid at the position x and time t. The stress tensor $\mathbb{S}$ is given by

$$\mathbb{S}(Du) = |Du|^{p-2}Du$$

or more generally, it satisfies appropriate growth and coercivity conditions. We will compare our results to the coupled Navier–Stokes–Vlasov system (see [1]) and Navier–Stokes–Cucker–Smale system (see [2]).

REFERENCES

1. *Boudin L., Desvillettes L., Grandmont C., Moussa A.,* "Global existence of solution for the coupled Vlasov and Navier–Stokes equations," Differ. Integral Equ., **22**, No. 11–12, 1247–1271 (2009).
2. *Bae H.-O., Choi Y.-P., Ha S.-Y., Kang M.-J.,* "Time-asymptotic interaction of flocking particles and an incompressible viscous fluid," Nonlinearity, **25**, No. 4, 1155–1177 (2012).

ON GARDING-TYPE INEQUALITIES FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS WITH DEGENERATION

Popov V. A.

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia; volodimir.a@gmail.com

Differential-difference equations with degeneration in the case where the operator is a composition of a strongly elliptic differential operator and a degenerate differential operator were studied by Skubachevskii. He proved that such problems can be reduced to nonlocal boundary value problems which have applications to the theory of plasma [1, 3].

We consider the following differential-difference equations

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij} u = f(x) \qquad (x \in Q)$$

with boundary condition

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q),$$

where $Q \subset \mathbb{R}^n$ is bounded domain with boundary $\partial Q \subset C^\infty$, $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ are difference operators defined by

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x + h),$$

where the set $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}$ is finite, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$.

Unlike strongly elliptic functional differential equations, smoothness of generalized solutions to elliptic functional differential equations with degeneration can be violated [1, 3–6]. Moreover, generally speaking, generalized solution of such equation does not belong even to the Sobolev spaces of first order.

In this work we obtained Garding-type inequalities for differential-difference equations with degeneration.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-01-00524, no. 12-01-31454).

REFERENCES

1. *Skubachevskii A. L.,* Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Birkhäuser, Berlin (1997).
2. *Keldysh M. V.,* "On some cases of degeneration of elliptic type on the boundary of a domain" [in Russian], Doklady Akad. Nauk SSSR, **77**, No. 2, 181–183 (1951).
3. *Skubachevskii A. L.,* "Elliptic differential-difference equations with degeneration" [in Russian], Trudy Moskov. Matem. Obshtsh.; English transl. in Trans. Mosc. Math. Soc., **59**, 240–285 (1997).
4. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.,* "Sectorial differential-difference operators with degeneration," Dokl. Math., **80**, No. 2, 716–719 (2009).
5. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.,* "A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration," J. Math. Sci. (New York), **171**, No. 1, 130–148 (2010).
6. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.,* "Smoothness of generalized solutions of elliptic difference-differential equations with degeneration near boundaries of subdomains," Russ. Math. Surv., **66**, 1204–1206 (2011).

ON EXPONENTIAL STABILITY OF A LINEAR AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH DISTRIBUTED DELAY

Sabatulina T. L.

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
tsabatulina@gmail.com

We consider a linear autonomous differential equation with distributed delay

$$\dot{x}(t) + ax(t) + k \int\limits_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)\, ds = f(t), \tag{1}$$

where a, $k \in \mathbb{C}$, τ, $h \in \mathbb{R}_+$, and f is a locally integrable function.

For the first time, conditions of stability for solutions of functional differential equations were obtained for equations with concentrated delay. Later on, the most of investigations have been devoted specifically to this type of equations. Up to now equations with distributed delay have been essentially less studied, results for them being usually corollaries of theorems for equations of the common form. Hence known conditions of stability are generally far from sharpness. Results of works, where equations with distributed delay were specifically investigated, discover essential distinctions between the domains of stability for equations with distributed delay and with concentrated one. Moreover, while studying mathematical models, it is not always reasonable to assume that delay is concentrated, since, in fact, some diffusion of delay occurs near its mean value.

By applying the Laplace transform, the investigation of equation (1) is reduced [1] to the analysis of the distribution of zeros of the characteristic function

$$g(p) = p + a + \frac{k}{p} e^{-p\tau}(1 - e^{-ph}) \tag{2}$$

with respect to the imaginary axis. Function (2) is more complicated than the characteristic polynomial of the analogous equation with concentrated delay.

We manage to obtain necessary and sufficient conditions of the exponential stability of (1) in terms of parameters of the equation. In the case that $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{C}$, and $\tau/h = 0$ the boundary of the domain of stability is an unbounded curvilinear cone. Changing the parameter τ/h from 0 to $+\infty$ we see that the top of the cone is moving along a straight line from the point $\{-2, 2, 0\}$ to the point $\{0, 0, 0\}$, while the cone itself, being deformed continuously, asymptotically approaches to a right circular cone. One may consider this one-parameter family of cones as the domain of stability in the four-dimensional space $\{\mathrm{Im}(kh^2), \mathrm{Re}(kh^2), ah, \tau/h\}$. While ah is increasing from 0 to $+\infty$, the domain of stability rises infinitely, its volume rising too; while ah is decreasing from 0 to -2, the domain decreases and turns into a bounded one; for $ah = -2$ the domain shrinks into a single point. In addition, we manage to represent the boundary of the domain of stability as a set of three-dimensional sections with two fixed parameters, $|kh^2|$ and τ/h.

REFERENCES

1. *Bellman R., Cooke K. L.,* Differential-Difference Equations, Academic Press, New York; London (1963).

STATE VARIATION IN AN OPTIMIZATION CONTROL PROBLEM FOR A NONLINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH STATES CONSTRAINTS

Serovajsky S. Ya.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan; serovajskys@mail.ru

There are two methods of the justification of the optimality conditions. The control is the primary notion for the first method. The state function is the solution of the state equation here. Then conditions of optimality can be obtained by means of the variation of the control. The state equation is interpreted as the constraint for the second method. The control and the state are equal right here. This method is preferable for the optimization problems with state constraints because it is not clear how we can variate the control to guarantee the validity of the state constraints.

We propose to use the state variation here. The single-valued solvability of the state equation guarantees the isomorphism between controls set and states set. So the state equation can be interpreted as the means of finding the control. Therefore we can obtain necessary conditions of optimality in the case of the general form of the state constraints.

We consider the nonlinear elliptic equation

$$-\Delta y + a(x, y) = v$$

with homogeneous boundary conditions (Dirichlet problem), where v is a control, and y is the corresponding state. The function a satisfies the standard assumptions of the monotonicity, coercivity and degree of the increasing condition here. The boundary value problem has the unique solution in this case. Determine a convex closed subset Y of the space $H_0^1(\Omega)$ and the functional

$$I = \frac{1}{2}\|y - z\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\chi}{2}\|v\|^2_{H^{-1}(\Omega)},$$

where $z \in H_0^1(\Omega)$ is a given function, $\chi > 0$, and the functions y and v satisfy the state equation. We have the problem of the minimization of the given functional on the set of the pairs "control-state" with additional condition $y \in Y$. The solvability of this problem is proved.

Using the single-valued solvability of the state equation we propose the state as the independent parameter, and the control as dependent value characterized by the state equation. Then we get necessary conditions of optimality in the form of the variational inequality by using of the state variation on the set Y.

TWO PROBLEMS ON STABILIZATION OF STATICALLY UNSTABLE SYSTEMS BY VIBRATION

Seyranian A. P.

Lomonosov Moscow State University,
Moscow University of Finance and Law, Moscow, Russia;
seyran@imec.msu.ru

A problem of stabilization of a vertical (inverted) position of a pendulum by high frequency vibration of the suspension point is considered. Small viscous damping is taken into account, and periodic excitation function describing vibration of the suspension point is assumed to be arbitrary. A formula for stability region of Hill's equation with damping near zero frequency is obtained. For several examples it is shown that analytical and numerical results are in good agreement with each other. An asymptotic formula for stabilization region of the inverted pendulum is derived. It is shown that the effect of small viscous damping is of the third order, and taking it into account leads to increasing critical stabilization frequency. The method of stability analysis is based on calculation of derivatives of the monodromy (Floquet) matrix with respect to parameters.

In 1956 V. N. Chelomei showed that elastic systems can be made more stable by imposing vibration. In particular he came to the conclusion that the elastic column compressed by an axial force exceeding critical (Euler) value can be stabilized by high frequency excitation force applied to the end of the column. In this paper formulas for higher and lower critical frequencies of the column stabilization are obtained. It is shown that unlike high frequency stabilization of an inverted pendulum with vibrating suspension point the column is stabilized by excitation frequency of the order of the main eigenfrequency of transverse vibrations belonging to some interval.

SOME RECENT RESULTS IN FIXED POINT THEORY IN INTUITIONISTIC FUZZY QUASI-METRIC SPACES AND ITS APPLICATIONS

Sharma S.

Government Madhav Science College, Vikram University, Ujjain, India;
sksharma2005@yahoo.com

The theory of fuzzy sets has evolved in many directions after investigation of notion of fuzzy sets by L. A. Zadeh [1] and is finding applications in wide variety of fields in which the phenomenon under study is too complex or too ill defined to be analyzed by the conventional techniques. In applications of fuzzy set theory the field of engineering has undoubtedly been a leader. All engineering disciplines such as civil engineering, electrical engineering, mechanical engineering, robotics, industrial engineering, computer engineering, nuclear engineering etc. have already been affected to various degrees by the new methodological possibilities opened by fuzzy sets. Researchers are using applications of fuzzy set in soft computing. There is large number of authors who studied applications of fuzzy set theory in different engineering branches. Medicine, economics, interpersonal communication, psychology, physics, chemistry, biology, ecology, political science, geology, soft computing etc. are fields in which the applicability of fuzzy set theory was recognized. We will discuss fixed point theory (and its applications in differential equations) in fuzzy quasi-metric spaces / intuitionistic fuzzy quasi-metric spaces. Applications of fuzzy sets will be discussed.

REFERENCES

1. *Zadeh L. A.*, "Fuzzy sets," Inf. Control, **8**, No. 3, 338–353 (1965).

THE CAUCHY PROBLEM FOR A B-HYPERBOLIC EQUATION

Shishkina E. L.

Voronezh State University, Voronezh, Russia; ilina_dico@mail.ru

Let $\mathbb{R}^+_n$ denote an Euclidean space of points $x=(x_1,\dots,x_n)$, $x_1>0,\dots,x_n>0$ and the multiindex $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ runs through fixed positive numbers, $|\gamma|=\gamma_1+...+\gamma_n$. The space $S_{ev}(\mathbb{R}^+_n)=S_{ev}$ is the subspace of the Schwartz function space that consists of functions $\varphi(x)$ even in each variable $x_1,\dots,x_n$.

The weighted spherical mean is denoted by formula (compare with formulas in [1, 2])

$$M^\gamma_r f(x)=\frac{1}{|S^+_1(n)|_\gamma}\int\limits_{S^+_1(n)} T^{ry}_x f(x)\prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}dS,$$

where $S^+_1(n)=\{x\in\mathbb{R}^+_n : |x|=1\}$,

$$T^y_x f(x)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^\pi\dots\int\limits_0^\pi\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\beta_i$$

$$\times f\Big(\sqrt{x_1^2-2x_1y_1\cos\beta_1+y_1^2},\dots,\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\beta_i+y_n^2}\Big)d\beta.$$

The constant $|S^+_1(n)|_\gamma$ was calculated in [3, p. 20, formula (1.2.5)], where $N=n$ should be taken.

Following [4] we introduce the operator $\Delta_\gamma=\sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}$, where B_{γ_i} is Bessel operator: $B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$.

The solution of the Cauchy problem

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{t}\frac{\partial u}{\partial t}=\triangle_\gamma u(x,t),\quad \alpha>0,\quad x\in\mathbb{R}^+_n,\quad t\geq 0,$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x),\quad \varphi(x)\in S_{ev},$$

for $0<n+|\gamma|-\alpha<3$ is given by formula

$$u(x,t)=C_n(\alpha,\gamma)\int\limits_0^{+\infty}{}_2F_1\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2},\frac{n+|\gamma|-1}{2},\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{r^2}{t^2}\right)M^\gamma_r\varphi(x)r^{n+|\gamma|-1}dr,$$

where

$$C_n(\alpha,\gamma)=2^{2|\gamma|-2-\alpha}|S^+_1(n)|_\gamma\prod_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-n-|\gamma|}{2}\right)}.$$

REFERENCES

1. *John F.,* Plane Waves and Spherical Means. Applied to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg; New York (1981).
2. *Kipriyanov I. A., Zasorin Y. V.,* "A fundamental solution of the wave-equation with several variables, and the Huygens principle," Differ. Equ., **28**, No. 3, 383–393 (1992).
3. *Lyakhov L. N.,* B-Hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of Kipriyanov Function Classes and to Integral Equations with B-Potential Kernels [in Russian], Lipetsk. Gos. Pedagog. Univ., Lipetsk (2007).
4. *Kipriyanov I. A.,* Singular Elliptic Boundary Value Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1996).

SOME NONLINEAR AND QUASILINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE

Solonukha O. V.

Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia;
solonukha@yandex.ru

We consider the Dirichlet problem

$$AR_Qu(x) = f_0(x) \qquad (x \in Q), \qquad u(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q).$$

Here $Q \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary ∂Q, $p \in [2, \infty)$, $1/p+1/q=1$, $f_0 \in L_q(Q)$, A is given by the formula

$$Au(x) = -\sum_{1 \le i \le n} \partial_i A_i \left(x, y, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u\right).$$

A bounded operator $R_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ is given by the formula $R_Q = P_Q R I_Q$, where

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h),$$

$a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ is finite set of vectors, I_Q is the extension operator of functions from $L_p(Q)$ by zero in $\mathbb{R}^n \setminus Q$, P_Q is the restriction operator of functions from $L_p(\mathbb{R}^n)$ to Q.

We obtain sufficient conditions when AR_Q is a bounded, coercive and pseudomonotone operator. Then the considered problem has a nonempty weakly compact set of solutions. We construct an example when A satisfies the ellipticity condition and R is positive (or accretive), but AR_Q does not satisfy the ellipticity condition. Moreover, in quasilinear case, if A satisfies the condition of strong ellipticity and R is accretive, then AR_Q is strongly elliptic too.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00524).

REFERENCES

1. *Skubachevskii A. L.,* Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Birkhäuser, Basel; Boston; Berlin (1997).
2. *Dubinskii Yu. A.*, "Nonlinear elliptic and parabolic equations" [in Russian], Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat., Vol. 9, VINITI, Moscow, 1976, pp. 5–130; English transl. in J. Sov. Math., **12**, No. 5, 475–554 (1979).

SOME PROBLEMS OF SPECTRAL GEOMETRY FOR S-NUMBERS

Suragan D.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
suragan@list.ru

In this talk we consider some problems of spectral geometry for s-numbers of compact operators. In particular, we give a proof of famous Rayleigh–Krahn–Faber inequality [1] for the first s-number of the mixed Cauchy–Dirichlet problem for the heat equation and discuss similar results for the mixed Cauchy–Robin problem for the heat equation.

REFERENCES

1. *Henrot A.*, Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators, Birkhäuser, Basel (2006).

CONVERGENCE OF MINIMIZERS IN REGULAR VARIATIONAL PROBLEMS

Sychev M. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
masychev@math.nsc.ru

We show that in regular variational problems weakly convergent sequences of minimizers in fact converge in C^1-norm in compact subsets of an open set of full measure.

Секция

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Тезисы 30-минутных докладов

Section

FUNCTION SPACES AND APPROXIMATION THEORY

Abstracts of Invited Lectures

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

ABNORMAL PROBLEMS IN NONLINEAR ANALYSIS

Арутюнов А. В.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; arutun@orc.ru

Излагается общий подход к исследованию тесно связанных между собой необходимых условий экстремума в задачах с ограничениями и теорем об обратной и неявной функциях в вырожденных (анормальных) точках.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений, имеющую в векторной записи вид $F(x) = y$, где F — гладкое отображение банахова пространства X в другое банахово пространство (для простоты эти пространства можно считать конечномерными). Если точка x_0 вырождена, т. е. линейный оператор $F(x_0)$ не является сюръективным (например, $F(x_0) = 0$), то в точке x_0 классическая теорема об обратной функции неприменима. В докладе обсуждается это явление вырождения и предлагаются теоремы об обратной и неявной функциях, которые применимы и в вырожденных точках. Обсуждаются обобщения этих результатов на случай ограничений, определяемых выпуклым конусом, теоремы об обратной функции по направлениям и т. д.

Рассмотрим классическую экстремальную задачу с ограничениями

$$\varphi(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad x \in X.$$

Здесь гладкие функции f_i задают ограничения, а φ — минимизируемый функционал. Пусть x_0 — локальный минимум. Известно, что если точка x_0 вырождена (анормальна), т. е. градиенты ограничений $f_i(x_0)$ линейно зависимы, то классический принцип Лагранжа вырождается (не несет содержательной информации), а классические необходимые условия второго порядка не выполняются. Обсуждается это явление вырождения и излагается теория необходимых условий первого и второго порядков, одинаково содержательная как для вырожденных, так и для невырожденных задач. Эти результаты являются развитием принципа Лагранжа.

Классический пример подобной анормальной задачи: является ли заданная квадратичная форма неотрицательной (или обращается ли она в нуль) на пересечении квадрик? Излагаемая теория позволяет дать ответы на эти вопросы. Все излагаемые в докладе результаты являются содержательными и в конечномерном случае (даже, если X — трехмерное пространство).

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ НУЛЕВОЙ ГЛАДКОСТИ
THE SPACES OF FUNCTIONS OF SMOOTHNESS ZERO

Бесов О. В.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
besov@mi.ras.ru

Будут определены пространства функций нулевой гладкости и установлены теоремы вложения пространств функций положительной гладкости в такие пространства. В частности, будет получено уточнение теоремы вложения Соболева для предельного показателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В.* О пространствах функций нулевой гладкости // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 8. С. 3–16. (Англ. перевод: Besov O. V. On spaces of functions of smoothness zero // Sb. Math. 2012. V. 203, N 8. P. 1077–1090.)

ПОГРЕШНОСТЬ, ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ И ГАРАНТИРОВАННАЯ ТОЧНОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

ERRORS, CONDITION NUMBERS, AND GUARANTEED ACCURACY OF MULTIDIMENSIONAL SPHERICAL CUBATURE FORMULAS

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vask@math.nsc.ru

Дается оценка практической погрешности многомерной сферической кубатурной формулы при ее действии на произвольный элемент из единичного шара нормированного пространства подынтегральных функций [1]. Полученные оценки применяются при исследовании практической погрешности сферических кубатурных формул в случае подынтегральных функций из пространств соболевского типа на многомерной единичной сфере. Норма функционала погрешности в сопряженном соболевскому классу пространстве представляется в виде положительно определенной квадратичной формы от весов кубатурной формулы. Матрица этой квадратичной формы находится в явном виде.

Проводится оценка практической погрешности для специальной последовательности кубатурных формул по единичной сфере n-мерного пространства. Произвольная формула из рассматриваемой последовательности конструируется как прямое произведение весовой квадратурной формулы гауссова типа по меридиану $(n-1)$-мерной сферы и кубатурной формулы по $(n-2)$-мерной сфере в экваториальной плоскости. При $n=3$ в качестве квадратурной формулы по экватору сферы выбирается формула прямоугольников с $2m$ узлами. Дальнейшие построения производятся индукцией по размерности n. Итоговая сферическая кубатурная формула имеет $2m^{n-1}$ узлов, положительные веса и точна на всех сферических гармониках до порядка $2m-1$ включительно [2]. В процессе оценки практической погрешности находится также представление нормы функционала погрешности в соответствующем соболевском классе. На том же классе находится в явном виде мажоранта числа обусловленности кубатурной формулы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00061, № 11-01-00147).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васкевич В. Л.* Погрешность, обусловленность и гарантированная точность многомерных сферических кубатур // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1245–1262.
2. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ
SOBOLEV SPACES AND QUASICONFORMAL ANALYSIS

Водопьянов С. К.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vodopis@math.nsc.ru

Окончательное решение обобщенной проблемы Соболева [1] о допустимых заменах переменных для пространств Соболева с первыми производными было получено сравнительно недавно. Решение этой задачи привело, в свою очередь, к новым постановкам и неожиданным связям с другими разделами анализа, в первую очередь, с квазиконформным анализом. Среди новых задач я выделяю задачу об описании отображений, индуцирующих ограниченный оператор пространств Соболева, и задачу об описании свойств отображений, обратных к соболевским. Решение последней задачи в [2] мотивирует следующее определение.

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *отображением с ограниченным коискажением*, если f принадлежит классу Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, и функция локального коискажения

$$\Omega \ni x \mapsto \mathcal{K}_n(x, f) = \inf\big\{k(x) : |\operatorname{adj} Df(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq k(x)J(x, f)\big\} \tag{1}$$

принадлежит классу $L_\infty(\Omega)$. (Здесь для $n \times n$-матрицы A символом $\operatorname{adj} A$ обозначают присоединенную матрицу.)

Отметим, что приведенное определение очень похоже на определение отображения с ограниченным искажением, когда $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и функция локального искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K_n(x, f) = \inf\big\{k(x) : |Df(x)|^n \leq k(x)J(x, f)\big\} \tag{2}$$

принадлежит классу $L_\infty(\Omega)$. Отметим, что основы теории отображений с ограниченным искажением были заложены Ю. Г. Решетняком в 60-е годы XX века.

В [2] было доказано, что гомеоморфизм $f \in W^1_n$, удовлетворяющий условию (1), квазиконформен. Возникает естественный вопрос об эквивалентности условий (1) и (2) в произвольном случае. В докладе будет показано, как был получен *утвердительный* ответ на этот вопрос.

Полученные результаты позволяют рассматривать в вариационных задачах теории упругости [3, 4] более широкий класс допустимых деформаций.

Работа выполнена при частичной поддержке интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и ДВО РАН (проект № 56), и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект № НШ-921.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // ДАН. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.
2. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 1383–1410.
3. *Ball J. M.* Convexity condition and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1976. V. 63, N 4. P. 337–403.
4. *Ciarlet Ph. G.* Mathematical elasticity. Amsterdam: Elsevier, 1988.

МИНИМАЛЬНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ТОЧНЫЕ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

MINIMAL CUBATURE FORMULAS WHICH ARE EXACT FOR THE HAAR POLYNOMIALS

Кириллов К. А.[1], **Носков М. В.**[2]

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
[1]kkirillow@yandex.ru, [2]mvnoskov@yandex.ru

Доклад посвящен построению минимальных формул приближенного интегрирования, обладающих d-свойством Хаара в одномерном и двумерном случаях, т. е. формул, точно интегрирующих суммы Хаара специального вида (полиномы Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), используя наименьшее возможное число узлов, а также исследованию формул, обладающих d-свойством Хаара.

Приведено описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара, изложенное в [1]. В двумерном случае получены оценки числа узлов кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара, устанавливающие нижнюю границу, достижимую для числа узлов минимальных формул при $d = 2$, $d = 3$ и $d \geqslant 5$ [2]; разработан алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара для любого фиксированного целого $d \geqslant 8$ [2].

В одномерном и двумерном случаях на пространствах S_p ($p > 1$) получены верхние и нижние оценки нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ формул приближенного интегрирования, обладающих d-свойством Хаара [3, 4], из которых следует, что для минимальных и близких к ним формул величина $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ имеет наилучший порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, равный $N^{-\frac{1}{p}}$, причем в одномерном случае эти оценки не улучшаемы, а в двумерном случае полученная верхняя оценка является асимптотически неулучшаемой. На пространствах H_α ($0 < \alpha \leqslant 1$) получена верхняя оценка нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ квадратурных и кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара [4, 5], из которой следует, что для построенных в [1, 2] минимальных формул, так же как и для исследованных И. М. Соболем формул с узлами на Π_0-сетках [6], $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O(N^{-\alpha} \ln^{n-1} N)$, $N \to \infty$, где $n = 1, 2$ — размерность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириллов К. А., Носков М. В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2002. Т. 42, № 6. С. 791–799.
2. *Noskov M. V., Kirillov K. A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. Approx. Theory. 2010. V. 162, N 3. P. 615–627.
3. *Кириллов К. А., Носков М. В.* Оценки погрешности на пространствах S_p кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2009. Т. 49, № 1. С. 3–13.
4. *Кириллов К. А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2011. Т. 12, № 2. С. 94–101.
5. *Кириллов К. А.* Оценки нормы функционала погрешности на пространствах H_α кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 3. С. 382–387.
6. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

СОБОЛЕВСКАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ. ПРОБЛЕМЫ, АЛГОРИТМЫ И ПРИМЕНЕНИЯ

SOBOLEV THEORY OF LATTICE CUBATURE FORMULAS. PROBLEMS, ALGORITHMS, AND APPLICATIONS

Рамазанов М. Д.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; ramazanovmd@yandex.ru

Теорию вычислений "сейчас так же невозможно себе представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин" — С.Л. Соболев.

Сергей Львович Соболев дал осуществление идеи симбиоза функционального анализа и современной ему вычислительной техники в своих исследованиях от начала 60-х до середины 80-х годов прошлого века — времени его работы в Академгородке. Он создал теорию кубатурных формул с узлами на решетках, приближающих точные значения интегралов функций, заданных на многомерных областях произвольных форм.

С. Л. Соболев вывел алгоритм построения формул, точность которых соответствовала гладкости m интегрируемых функций, достигая порядка $O(N^{-\frac{m}{n}})$, где N — число узлов кубатурной формулы. Константа в оценке порядка точности соболевских формул была наилучшей на классе интегрируемых функций (у С. Л. Соболева это пространства $L_2^{(m)}$), а коэффициенты кубатурной формулы надо было вычислять только в приграничной области. Это "Кубатурные формулы Соболева с регулярным пограничным слоем". Направление получило развитие в дальнейших теоретических исследованиях, подкрепленных вычислительными экспериментами и применениями к численному решению интегральных уравнений в многомерных областях произвольных форм.

Сказалось предвидение С. Л. Соболевым хорошей согласованности разработанной им теории с развитием вычислительной техники — сейчас Многопроцессорных Вычислительных Систем с мощностями до десятков тысяч одновременно работающих процессоров. Ученики и последователи распространили теорию формул Соболева на другие практически применяемые пространства Соболева $W_p^m(\Omega)$, усовершенствовали первоначальные алгоритмы, сделав их ненасыщаемыми, и реализовали в работающих программах вычисления интегралов по многомерным областям и численного решения интегральных уравнений по этим областям. Реальные параметры работы этих программ: размерность пространств — до десяти, ограниченные области с гладкими и кусочно-гладкими границами, оптимальные порядки точности вычисления решений.

Удивительно еще одно предвидение Сергея Львовича Соболева. Оказывается, для кубатурных формул типа соболевских — с ограниченным пограничным слоем, достижение только порядковой оптимальности гарантирует и асимптотическую оптимальность — появление наилучшей константы при оптимальном порядке оценки функционалов погрешностей этих формул. Список публикаций по этому направлению сейчас очень велик, и мы ссылаемся только на две монографии, содержащие ссылки на многие из этих работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
2. *Рамазанов М. Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2009.

ИНФОРМАЦИОННО-СИСТЕМНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ СЛОЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И НЕОБХОДИМОСТЬ ИЗБЫТОЧНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТАКИХ СИСТЕМ В ФОРМЕ СРЕДЫ РАДИКАЛОВ

INFORMATION SYSTEM SAFETY OF COMPLEX CRITICAL SYSTEMS AND NECESSITY OF REDUNDANT MODELING THESE SYSTEMS IN THE FORM OF RADICAL MEDIA

Соболева Т. С.[1], **Чечкин А. В.**[2]

[1] *Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, Москва, Россия;*
[2] *Военная академия ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого, Москва, Россия;* a.chechkin@mail.ru

Рассматриваются системы, предназначенные для решения особо важного класса штатных задач. К таким системам предъявляется требование информационно-системной безопасности (ИСБ), т. е. неприемлемости отказов при решении штатных задач и недопустимости несанкционированного разрушения системы в процессе решения таких задач. Такие системы являются критическими. Как правило, такие системы являются особо сложными системами. Примерами таких сложных критических систем (СКС) являются глобальные сетевые системы навигации (ГЛОНАС), коммуникационные, банковские, транспортные, энергетические, большие компьютерные системы, военная группировка, производственная фирма, фирма-разработчик и другие системы высокой значимости. Математическое моделирование таких систем требует нового подхода, названного избыточным моделированием. Избыточное моделирование — это основа интеллектуализации СКС и призвано обеспечить ИСБ такой системы. Обсуждается тезис о том, что *избыточное моделирование* необходимо для обеспечения ИСБ СКС и является основой интеллектуализации СКС в форме нейрокомпьютерной надстройки СКС.

Избыточная модель СКС требует механизма временного отключения ненужных в данный момент элементов модели, чтобы каждый раз использовать только необходимую и достаточную информацию для данной задачи, а не всю имеющуюся в модели. Для этой цели используются особого рода системы, ***радикалы***. Радикалы должны иметь два состояния, пассивное и активное, тем самым они являются ***нейроподобными*** системами. Избыточная модель СКС строится в форме среды радикалов-символов. В каждый момент активные радикалы образуют частную рабочую сеть, которую называют ***системоквантом*** среды радикалов.

Особенности среды радикалов наиболее эффективно реализовываются на базе архитектуры ***нейрокомпьютера***. ИСБ СКС предлагается обеспечивать нейрокомпьютерной надстройкой СКС, основанной на избыточной модели СКС в форме среды радикалов. Такая надстройка представляет собой “мозг” СКС, т. е. ***интеллектуальную информационную систему*** для обеспечения ИСБ СКС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чечкин А. В.* Нейрокомпьютерная парадигма информатики // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2011. № 7. С. 3–9.

ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ КРИВИЗНЫ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

ERROR OF APPROXIMATION OF CURVATURE FOR CLASSES OF SMOOTH FLAT CURVES

Субботин Ю. Н.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия;
yunsub@imm.uran.ru

В докладе речь пойдет об аппроксимации кривизны плоских гладких кривых в среднеквадратической метрике подпространствами тригонометрических полиномов и сплайнов с равномерными узлами и различными краевыми условиями.

Справедлив, например, следующий результат.

Теорема. *Пусть $y = y(x)$ — 2π-периодическая функция, $(r-1)$-я производная которой абсолютно непрерывна, r-я производная удовлетворяет неравенству*

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[y^{(r)}(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le 1, \quad r \ge 3,$$

а $S_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье функции $y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$, т. е. $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$, тогда

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[K(y,x) - K(S_n,x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n^{r-2}} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{2}\frac{1}{n^{r-1}}.$$

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта, выполняемого совместно УрО РАН и СО РАН (проект № 12-С-1-1018).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габушин В. Н.* Оценка кривизны различных классов кривых // Проблемы физико-математического образования в педагогических ВУЗах на современном этапе: Тез. докл. Магнитогорск, 1996. С. 90.
2. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 145. С. 152–168.
3. *Сазанов А. А.* Верхние грани уклонений интерполяционных сплайнов на некоторых классах функций // Вычислительные системы. Вып. 81. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1979. С. 31–41.
4. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
5. *Субботин Ю. Н.* Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.

SINGULAR NUMBERS OF CORRECT RESTRICTIONS OF NON-SELFADJOINT ELLIPTIC OPERATORS

Burenkov V. I.[1], **Otelbaev M.**[2]

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan;
[1]burenkov@cf.ac.uk, [2]otelbaevm@mail.ru

Let $\mathcal{L}$ be an elliptic differential expression of the following form: for $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{L}u)(x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $A_{\alpha\beta} \in C^l(\mathbb{R}^n)$ are real-valued functions for all multi-indices α, β satisfying $|\alpha|, |\beta| \le l$. Moreover, let, for a domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $L_\Omega : D(L_\Omega) \to L_2(\Omega)$ be a linear operator closed in $L_2(\Omega)$ generated by $\mathcal{L}$ on Ω. A restriction $A : D(A) \to L_2(\Omega)$ of L_Ω is *correct* if the equation $Au = f$ has a unique solution $u \in D(A)$ for any $f \in L_2(\Omega)$ and the corresponding inverse operator $A^{-1} : L_2(\Omega) \to D(A)$ is bounded.

Let A and B be compact linear operators in a Hilbert space H. If there exist $0 < \alpha < \beta$ and $c_1, c_2 > 0$ such that for singular numbers $s_k(A)$ and $s_k(B)$ the conditions $c_1 k^{-\alpha} \le s_k(A)$, $s_k(B) \le c_2 k^{-\beta}$ hold, we say that in the representation $C = A + B$ the operator A is a *leading* operator and the operator B is a *non-leading* operator.

Theorem 1. *Let l, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $2l\left(1 - \frac{1}{n}\right) < s \le 2l$, and Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with the boundary $\partial\Omega$ of class C^{2l}. Moreover, let A and B be correct restrictions of the operator L_Ω such that $D(A) \subseteq W_2^{2l}(\Omega)$, $D(B) \subseteq W_2^s(\Omega)$ and the operators $A^{-1} : L_2(\Omega) \to W_2^{2l}(\Omega)$, $B^{-1} : L_2(\Omega) \to W_2^s(\Omega)$ are bounded. Then in the representation $B^{-1} = A^{-1} + K$ the operator A^{-1} is a leading operator and the operator $K = B^{-1} - A^{-1}$ is a non-leading operator.*

Theorem 2. *Let $l, n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $2l(1 - \frac{1}{n}) < s \le 2l$ and Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with the boundary $\partial\Omega$ of class C^{2l}. Then there exists $b > 0$ such that the singular numbers $s_k(B)$ of all correct restrictions B of the operator L_Ω satisfying the condition $D(B) \subseteq W_2^s(\Omega)$ with the bounded inverse $B^{-1} : L_2(\Omega) \to W_2^{2l}(\Omega)$*

$$\lim_{k\to\infty} s_k(B) k^{-\frac{2l}{n}} = b.$$

Also other related results formulated in [1] will be presented in the talk.

REFERENCES

1. *Burenkov V. I., Otelbaev M.*, "On the singular numbers of correct restriction of elliptic differential operators," Eurasian Math. J., **2**, No. 1, 145–148 (2011).

REDUCTION THEOREMS FOR OPERATORS ON THE CONES OF MONOTONE FUNCTIONS

Gogatishvili A.[1], **Stepanov V. D.**[2]

[1]*Institute of Mathematics, Prague, Czech Republic;* gogatish@math.cas.cz
[2]*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia;* stepanov@mi.ras.ru

For monotone operators on the semiaxis reduction theorems are proved on the cones of monotone functions in $L^p - L^q$ setting for $0 < q < \infty$, $1 \le p < \infty$. The case $0 < p < 1$ is also studied for operators with additional properties. In particular, we obtain criteria for three-weight inequalities for the Hardy-type operators with Oinarov' kernel on monotone functions in the case $0 < q < p \le 1$.

The research of A. Gogatishvili was partially supported by the grant 201/08/0383 and 13-14743S of the Grant Agency of the Czech Republic and RVO: 67985840.

The research of V. D. Stepanov was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 12-01-00524 and 12-01-00554) and by the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (projects 12-I-OMN-01 and 12-II-CO-01M-002).

REFERENCES

1. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.,* "Operators on cones of monotone functions," Dokl. Math., **86**, No. 1, 562–565 (2012).
2. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.,* "Integral operators on cones of monotone functions," Dokl. Math., **86**, No. 2, 650–653 (2012).
3. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.,* "Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions," J. Math. Anal. Appl., **405**, No. 1, 156–172 (2013).

NONSTANDARD TRENDS IN FUNCTIONAL ANALYSIS

Kusraev A. G.[1], **Kutateladze S. S.**[2]

[1]*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia;* kusraev@smath.ru
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
sskut@math.nsc.ru

This is an overview of some techniques of treating the principal objects of functional analysis such as reals, Banach spaces and operators within nonstandard models of set theory.

1. Boolean Valued Prerequisites
2. Reals and Boolean Valued Positive Functionals
3. Extension and Decomposition of Positive Operators
4. Differences and Sums of Lattice Homomorphisms
5. Simultaneous Inequalities
6. Interaction with Infinitesimals

REFERENCES

1. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.,* Introduction to Boolean Valued Analysis, Nauka Publishers, Moscow (2005).
2. *Gordon E. I., Kusraev A. G., Kutateladze S. S.,* Infinitesimal Analysis: Selected Topics, Nauka Publishers, Moscow (2011).

Секция

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Тезисы 20-минутных
и стендовых докладов

Section

FUNCTION SPACES AND APPROXIMATION THEORY

Abstracts of Short Communications
and Posters

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НОРМ В СУПЕРРЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА СОБОЛЕВА

GEOMETRIC PROPERTIES OF NORMS IN SUPER-REFLEXIVE SOBOLEV TYPE SPACES

Агаджанов А. Н.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;
ashot_ran@mail.ru

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum\limits_{s=1}^{n} \alpha_s$, $a_\alpha > 0$, $1 < p_\alpha < \infty$, $1 \le r_\alpha \le R < +\infty$, $q = \max\limits_{|\alpha| \le m} p_\alpha$. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\|\cdot\|_m$ норму, которая является функционалом Минковского для абсолютно выпуклого и поглощающего множества

$$U_m = \Big\{u : \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \|D^\alpha u\|^{r_\alpha}_{L_{p_\alpha}(G)} < 1,\ D^\beta u\big|_\Gamma = 0,\ |\beta| = 0, 1, \ldots, m-1\Big\},$$

где $D^\alpha u$ — обобщенные производные функции u порядка $|\alpha|$.

Определение 1. Банахово пространство $\overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$, полученное замыканием пространства $C_0^\infty(G)$ по норме $\|\cdot\|_m$, назовем *пространством типа Соболева* порядка m.

Определение 2. Банахово пространство X *финитно представимо* в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого конечномерного подпространства $Y_n \subset \overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$ размерности n $(n = 1, 2, \ldots)$ найдется конечномерное подпространство $X_n \subset X$ такое, что $d(X_n, Y_n) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|\} \le 1 + \varepsilon$, где точная нижняя грань берется по всем изоморфизмам T между X_n и Y_n [1, 2].

Теорема 1. *Пространство $\overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$ является суперрефлексивным банаховым пространством, т. е. в $\overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$ финитно представимыми могут быть только рефлексивные банаховы пространства.*

Теорема 2. *Банахово пространство $\overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$ вкладывается изометрически в пространство l^q.*

Следствие. *В банаховом пространстве $\overset{\circ}{W}{}^m\{a_\alpha, p_\alpha, r_\alpha\}$ выполняются неравенства Кларксона*

$$\|u+v\|_m^{q'} + \|u-v\|_m^{q'} \le 2(\|u\|_m^q + \|v\|_m^q)^{q'-1}, \quad \text{если } 1 < q \le 2,$$

$$\|u+v\|_m^{q} + \|u-v\|_m^{q} \le 2(\|u\|_m^{q'} + \|v\|_m^{q'})^{q-1}, \quad \text{если } 2 \le q < \infty, \text{ где } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Таким образом, нормы $\|\cdot\|_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ являются равномерно выпуклыми и равномерно гладкими [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *James R. C.* Super-reflexive Banach spaces // Canad. J. Math. 1972. V. 24, N 5. P. 896–904.
2. *Агаджанов А. Н.* Геометрия норм и неравенства в суперрефлексивных банаховых пространствах // ДАН. 2008. Т. 421, № 3. С. 295–298.
3. *Агаджанов А. Н.* О равномерной гладкости пространств Соболева бесконечного порядка // ДАН. 2007. Т. 413, № 5. С. 583–586.

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

ESTIMATES OF THE LINEAR WIDTHS OF CLASSES IN THE LORENTZ SPACE

Акишев Г.

Карагандинский государственный университет, Караганда, Казахстан;
akishev@ksu.kz

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, имеющих период 2π по каждой переменной, и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\dots\left[\int_0^{2\pi} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m))^{\theta_1}\,dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\dots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

Пусть $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по системе функций $\{e^{i\langle \bar{n},\bar{x}\rangle}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}$. Положим $\langle \bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$, $\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) = \sum\limits_{\bar{n}\in\rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f)e^{i\langle \bar{n},\bar{x}\rangle}$, $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1,\dots,m\}$. В пространстве $\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ рассматривается аналог класса Никольского – Бесова – Аманова [2]:

$$\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B = \Big\{f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m) : \ \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}B} = \Big\|\big\{2^{\langle \bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}}\big\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\bar{\tau}}} \le 1\Big\},$$

где $\bar{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_m)$, $1 < p_j < \infty$, $1 \le \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1,\dots,m$.

Определенный В. М. Тихомировым [3] линейный поперечник множества W в банаховом пространстве X обозначается через $\lambda_M(W,X)$.

В многомерном случае оценки линейных поперечников для классов Соболева W^r_p, Никольского H^r_p, Бесова $B^r_{p,\theta}$ получили Э. М. Галеев, В. Н. Темляков, А. Д. Изаак, А. С. Романюк, О. В. Федуник, Д. Б. Базарханов. Справедлива

Теорема. *Пусть* $1 < p_j \le 2 < q_j < +\infty$, $1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < \infty$, $1 \le \tau_j \le \infty$, $j = 1,\dots,m$, *и* $\max\limits_j q_j < \min\limits_j \frac{p_j}{p_j-1}$, $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \le \dots \le r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$. *Тогда для натурального числа* $M > 1$

$$\lambda_M\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\big) \le CM^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blozinski A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Am. Math. Soc. 1981. V. 263, N 1. P. 146–167.
2. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.
3. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 3. С. 81–120.

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

ON SOME COMPACTNESS CRITERIA FOR A FAMILY OF VECTOR FUNCTIONS

Аносов В. П.

Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирск, Россия; averi@ngs.ru

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для гладкой функции $v(t)$ $(0 \le t \le 1)$ со значениями в E определим (см. [1–3]) нормы

$$\|v\|_{L_p}^p = \int\limits_0^1 \|v(t)\|^p \, dt,$$

$$\|v\|_{W_p^\alpha}^p = \int\limits_0^1 \|v(t)\|^p \, dt + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\|v(t) - v(s)\|^p}{|t-s|^{1+\alpha p}} \, dt \, ds,$$

где $0 < \alpha < 1$, $p \ge 1$. Замыкания гладких функций v в этих нормах образуют, соответственно, банаховы пространства

$$L_p([0,1], E) = L_p, \quad W_p^\alpha([0,1], E) = W_p^\alpha.$$

В докладе доказываются необходимые и достаточные условия компактности семейства векторных функций из пространства $L_p([0,1], E)$ и достаточные условия компактности семейства векторных функций из $W_p^\alpha([0,1], E)$, а также излагаются аналогичные результаты, касающиеся семейства векторных функций многих переменных. Там же будут аргументированы области применения некоторых полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аносов В. П., Соболевский П. Е.* О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 4. С. 409–419.
2. *Аносов В. П.* О коэрцитивной разрешимости абстрактных параболических уравнений // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1990. С. 123–126.
3. *Аносов В. П.* О следах функций из абстрактных пространств Л. Н. Слободецкого // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 49, № 1. С. 974–989.

О СУПЕРПОЗИЦИИ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ – РИССА В ПРОСТРАНСТВЕ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

ON SUPERPOSITION OF FOURIER–RIESZ OPERATORS IN THE SPACE OF RIESZ POTENTIALS

Арбузов Э. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
arbuzov@math.nsc.ru

Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, вектора $a \in \mathbb{R}^n$ и вещественного числа τ рассматривается произведение интегральных операторов Рисса с осциллирующим ядром

$$Su(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{e^{i\tau a\cdot y}}{|x-y|^{n-\alpha}} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{i\tau a\cdot z}}{|y-z|^{n-\alpha}} u(z)\,dz\,dy, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

где $a \cdot y = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$.

Показано, что оператор S является сжимающим в пространствах риссовых потенциалов $L^{\alpha}_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ [1], и получена оценка его нормы относительно степени параметра осцилляции τ.

При получении оценок используются свойства дробного интегродифференцирования по Риссу [1], а также свойства осциллирующих интегралов в лебеговских пространствах [2].

Операторы данного вида возникают при получении формул типа Карлемана для решений задач Коши для эллиптических уравнений и систем второго порядка [3] и при решении обратных задач восстановления потенциала [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00147).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г.* О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40, № 5. С. 1143–1172.
2. *Stein E.* Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
3. *Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л.* Формула Карлемана для уравнений Гельмгольца на плоскости // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 518–526.
4. *Bukhgeim A. L.* Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. V. 16, N 1. P. 19–33.

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2^{(3)}(0,1)$

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH DERIVATIVES FOR SINGULAR INTEGRALS IN THE SPACE $L_2^{(3)}(0,1)$

Ахмедов Д. М.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; axmedovdilshod@mail.ru

В настоящей работе методом С. Л. Соболева [1] построена оптимальная квадратурная формула вида

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x-t}\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N}\big(C_0[\beta]\varphi[\beta] + C_1[\beta]\varphi'[\beta] + C_2[\beta]\varphi''[\beta]\big), \tag{1}$$

где $0 < t < 1$, $\varphi(x)$ — подынтегральная функция, $\varphi(x) \in L_2^{(3)}(0,1)$, $C_0[\beta]$, $C_1[\beta]$ и $C_2[\beta]$ — коэффициенты, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$ $(N = 2,3,4,\ldots)$.

Коэффициенты $C_0[\beta]$ и $C_1[\beta]$ соответственно приведены в [2] и [3]. Здесь абсолютное значение разности между интегралом и квадратурной суммой минимизируется по коэффициентам $C_2[\beta]$.

Справедлива следующая

Теорема. *В пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ оптимальные коэффициенты $C_2[\beta]$ квадратурных формул вида* (1) *определяются формулами*

$$\overset{\circ}{C}_2[0] = \frac{h^{-1}}{12}\Big[-\frac{h^3}{6} + 2ht(h-t) - t(h-t)(2t-h)\ln\frac{|h-t|}{t}\Big],$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C}_2[\beta] = \frac{h^{-1}}{6}\Big[&2h^2(t-h\beta) + (2(t-h\beta)^3 + h^2(t-h\beta))\ln|t-h\beta| \\ &+ \Big(-(t-h(\beta+1))^3 - \frac{h^2}{2}(t-h(\beta+1)) - \frac{3h}{2}(t-h(\beta+1))^2\Big)\ln|h(\beta+1)-t| \\ &+ \Big(-(t-h(\beta-1))^3 - \frac{h^2}{2}(t-h(\beta-1)) + \frac{3h}{2}(t-h(\beta-1))^2\Big)\ln|h(\beta-1)-t|\Big],\end{aligned}$$
$$\beta = \overline{1, N-1},$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C}_2[N] = \frac{h^{-1}}{12}\Big[&\frac{h^3}{6} + 2h^2(t-1) + 2h(t-1)^2 \\ &+ (t-1)(t-1+h)(2(t-1)+h)\ln\frac{1-t}{|1-h-t|}\Big].\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Шадиметов Х. М.* Оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов типа Коши // Докл. АН УзССР. 1987. № 6. С. 9–11.
3. *Ахмедов Д. М.* Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита для сингулярных интегралов в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ // Узб. мат. журн. 2012. № 2. С. 20–29.

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТИ

A NONLINEAR APPROXIMATION OF FUNCTION CLASSES WITH MIXED SMOOTHNESS

Балгимбаева Ш. А.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; sc_s@mail.ru, balsholpan@yandex.ru

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций, суммируемых в степени p на $\mathbb{T}^d$, со стандартной нормой $\|f \mid L_p\|$; здесь $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор; $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}^1$. Рассмотрим одномерную ортонормированную систему полиномов (см. [1]): $U^{(1)} \equiv \{U_I(x) \mid I \in D\}$, $x \in \mathbb{T}$, где $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (D_n^+ \cup D_n^-) \bigcup D_0$, $D_0 := \{[0,1)\}$,

$$D_n^+ := \big\{I = I_{n,k}^+ = \big[\big(k+\tfrac12\big)2^{-n}, (k+1)2^{-n}\big),\ k = 0,1,\dots,2^n-1\big\},$$
$$D_n^- := \big\{I = I_{n,k}^- = \big[k2^{-n}, \big(k+\tfrac12\big)2^{-n}\big),\ k = 0,1,\dots,2^n-1\big\},\quad n \in \mathbb{N},$$

$U_{[0,1)} \equiv 1$, $U_{I_{n,k}^\pm}(x) = 2^{-n/2} e^{\pm i 2^n x} U_n(\pm(x - \varepsilon 2\pi k 2^{-n}))$, $U_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} e^{ikx}$. d-Мерная система $U^{(d)}$ ($x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^d$) определяется как тензорное произведение одномерных систем $U^{(1)}$ (по $x_1 \in \mathbb{T}$), …, $U^{(1)}$ (по $x_d \in \mathbb{T}$).

Пусть ℓ_θ — пространство числовых последовательностей $\{a_s^\varepsilon\}_{s\in\mathbb{N}_0^d,\ \varepsilon\in\{+,-\}^d}$ с (конечной) стандартной нормой $\|\{a_s^\varepsilon\}\|_{\ell_\theta}$; $\ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ ($L_p(\mathbb{T}^d;\ell_\theta)$) — пространство функциональных последовательностей $\{f_s^\varepsilon(x)\}_{s\in\mathbb{N}_0^d,\varepsilon\in\{+,-\}^d}$, $x \in \mathbb{T}^d$, с конечной нормой $\|\{f_s^\varepsilon\} \mid \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))\| = \|\{\|f_s^\varepsilon\|_p\}\|_{\ell_\theta}$ ($\|\{f_s^\varepsilon\} \mid L_p(\mathbb{T}^d;\ell_\theta)\| = \|\|\{f_s^\varepsilon\}\|_{\ell_\theta}\|_p$).

Пусть $s = (s_1,\dots,s_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d) \in \{+,-\}^d$ (причем если $s_j = 0$, то $\varepsilon_j = +$ и $D_0^+ \equiv D_0$); для $f \in L_1$ положим

$$\delta_s^\varepsilon(f) = \sum_{I\in D_s^\varepsilon} f_I U_I,\quad f_I = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(x)\overline{U}_I(x)\,dx,$$

где $D_s^\varepsilon := \{I = I_1 \times \ldots \times I_d \mid I_j \in D_{s_j}^{\varepsilon_j},\ j = 1,\dots,d\}$.

Определение. Пусть $r \in \mathbb{R}_+^d$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

I. Пространством $SB_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ Никольского – Бесова смешанной гладкости называется совокупность всех функций $f \in L_p$ с конечной нормой

$$\big\|f \mid SB_{p\theta}^r\big\| = \big\|\big\{2^{(r,s)}\delta_s^\varepsilon(f)\big\} \mid \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))\big\|.$$

II. Пространством $SF_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ Лизоркина – Трибеля смешанной гладкости называется совокупность всех функций $f \in L_p$ с конечной нормой

$$\|f \mid SF_{p\theta}^r\| = \big\|\big\{2^{(r,s)}\delta_s^\varepsilon(f)\big\} \mid L_p(\mathbb{T}^d;\ell_\theta)\big\|.$$

В докладе рассматриваются аппроксимативные свойства "жадных" (greedy) алгоритмов нелинейного приближения по системе $U^{(d)}$ на единичных шарах пространств $SB_{p\theta}^r$ и $SF_{p\theta}^r$ в метрике L_q, $1 < q < \infty$, в духе работы [1]. О современном состоянии теории "жадных" алгоритмов см. [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. Approx. 2000. V. 16, N 3. P. 399–426.
2. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation // Acta Numerica. 2008. V. 17. P. 235–409.

ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКОЙ ε-ЭНТРОПИИ КОМПАКТОВ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ (К ПРОБЛЕМЕ К. И. БАБЕНКО)

ESTIMATION OF KOLMOGOROV'S ε-ENTROPY FOR SOME CLASSES OF INFINITELY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS (THE BABENKO PROBLEM)

Белых В. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
belykh@math.nsc.ru

Процедура финитизации метрического компакта X — этап вынужденный и необходимый. И без потери информации не обходится. Соблазн оценить эти потери снизу восходит к А. Н. Колмогорову [1] и находит достойную прикладную мотивацию у К. И. Бабенко [2]. Важная роль при этом отводится выяснению характера роста при $\varepsilon \to 0$ функции $H_\varepsilon(X)$ — колмогоровской ε-энтропии. Чем быстрее величина $H_\varepsilon(X)$ стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, тем сложнее устроен компакт X. Для компактов X конечной гладкости функция $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0$ растёт как $(1/\varepsilon)^\beta$, где $\beta > 0$. Причём этот рост тем медленнее, чем выше запас гладкости X [2]. Напротив, для компактов X из аналитических функций рост $H_\varepsilon(X)$ характеризуется всего лишь некоторой фиксированной степенью $\log(1/\varepsilon)$, причём известны и точные результаты [3–4]. Что касается компактов X гладкости, промежуточной между конечной и аналитической, то здесь до сих пор не было никаких результатов, даже для функций одной переменной.

Интерес к наилучшему финитному описанию классов X *неаналитических* C^∞-гладких функций обозначен в книге [2, с. 270]. Там же и высказана проблема отыскания главного члена в асимптотической формуле для $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0$.

В докладе указаны асимптотические оценки колмогоровской ε-энтропии компакта бесконечно дифференцируемых функций, вложенного непрерывно в пространство C непрерывных на конечном отрезке функций [5–7].

Результат основан на новой характеризации классов C^∞-гладких функций, апеллирующей к их конструктивному чебышёвскому описанию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00147 а, № 12-01-00061 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А. Н.* О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // ДАН. 1956. Т. 108, № 3. С. 385–388.
2. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
3. *Бабенко К. И.* Об энтропии одного класса аналитических функций // Научные доклады высшей школы. 1958. № 2. С. 9–16.
4. *Ерохин В. Д.* Об асимптотике ε-энтропии аналитических функций // ДАН. 1958. Т. 12, № 5. С. 949–952.
5. *Белых В. Н.* Об асимптотике колмогоровской ε-энтропии некоторых классов бесконечно дифференцируемых периодических функций (к проблеме К. И. Бабенко) // ДАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 731–735.
6. *Белых В. Н.* Об абсолютной ε-энтропии одного компакта бесконечно дифференцируемых периодических функций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 3. С. 485–501.
7. *Белых В. Н.* Оценки колмогоровской ε-энтропии компактов бесконечно дифференцируемых непериодических функций (к проблеме К. И. Бабенко) // ДАН. 2013 (в печати).

О СВЕРТКАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ТИПА БЕСОВА ПО БАЗИСАМ ИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СИСТЕМ

ON CONVOLUTION OF FUNCTIONS OF BESOV TYPE SPACES IN THE BASES OF MULTIPLICATIVE SYSTEMS

Бокаев Н. А.[1], **Сыздыкова А. Т.**[2]

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
[1]bokayev2011@yandex.ru, [2]aizhan-syzdykova@yandex.ru

В данной работе рассматриваются свертки функций из пространств Бесова с базисом Прайса. Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — мультипликативная система Прайса на группе $G := \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ x_k - \text{целые},\ 0 \le x_k < p_k\}$ с образующей последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$; $m_0 = 1$, $m_j = \prod\limits_{s=1}^{j} p_s$ (см. [1]), $\oplus$ — операция покоординатного сложения по модулю p_k, $E_s(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f \in L_p[0,1)$ $(1 < p < \infty)$ полиномами по системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Определение. Пусть $1 \le p \le \infty$ и $1 \le \theta \le \infty$. Будем говорить, что $f \in B^r_{\theta,p}(G)$, если $f \in L_p[0,1)$ и конечна величина

$$\|f\|_{B^r_{\theta,p}(G)} = \|f\|_p + \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} m_{\nu+1}^{r\theta} E^{\theta}_{m_\nu}(f)_p\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^r_{\infty,p}(G)} = \|f\|_p + \sup_{\nu} m_{\nu+1}^{r} E_{m_\nu}(f)_p,$$

которая является нормой. Пространство $B^r_{\theta,p}(G)$ называется пространством Бесова с базисом по системе Прайса [2].

Под сверткой двух функций $f, g \in L_p(G)$ будем понимать выражение

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(y) g(x \ominus y)\, dy.$$

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha, \beta < \infty$, $1 \le \theta_1, \theta_2 < \infty$ и $1 \le p, q, r \le \infty$ такие, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0$. Тогда $B^{\alpha}_{p,\theta_1}(G) * B^{\beta}_{q,\theta_2}(G) \subseteq B^{\alpha+\beta}_{r,\theta_1\theta_2/(\theta_1+\theta_2)}(G)$.*

Теорема 2. *Пусть $0 < \beta < \infty$. Тогда существует функция g_β такая, что*
1) *$g_\beta \in B^{\beta}_{p,\theta}(G)$ для любого числа p такого, что $1 \le p < \infty$ и $\beta > \frac{1}{p'}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;*
2) *$B^{\alpha}_{p,\theta}(G) \subseteq g_\beta * B^{\beta}_{p,\theta}(G)$ для $\alpha > \beta$ и $1 \le p < \infty$.*

Аналоги теорем 1 и 2 для класса $\mathrm{Lip}(\alpha, p, G)$ ранее были рассмотрены в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. М.: Наука, 1987.
2. *Смаилов Е. С., Сулейменова З. Р.* Теоремы вложения для пространства Бесова по мультипликативным базисам Прайса // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2003. Т. 243. С. 313–319.
3. *Quek T. S., Jap L. Y.* Absolute convergence of Vilenkin – Fourier series // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 74. P. 1–14.

ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА С ВЕСАМИ, ЯВЛЯЮЩИМИСЯ ФУНКЦИЯМИ РАССТОЯНИЯ ДО h-МНОЖЕСТВ

WIDTHS OF WEIGHTED SOBOLEV CLASSES WHOSE WEIGHTS ARE THE DISTANCE FUNCTIONS TO h-SETS

Васильева А. А.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 < p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию Джона с параметром $a > 0$ (см. [1, 2]), $g, v : \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримые функции. Положим $\|f\|_{q,v} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}$, $L_{q,v}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{q,v} < \infty\}$,

$$W^r_{p,g}(\Omega) = \big\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists \varphi : \ \|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \le 1, \ \nabla^r f = g\varphi\big\}$$

(соответствующую векторнозначную функцию φ будем обозначать $\nabla^r f/g$).

Пусть $0 < \theta < d$, $h(t) = t^\theta$, $t \in (0, 1)$, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество (т. е. существует конечная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ и для $x \in \Gamma$, $t \in (0, 1]$ выполнено $\mu(B_t(x)) \asymp h(t)$; см. [3]); $g(x) = (\operatorname{dist}(x, \Gamma))^{-\beta_g}$, $v(x) = (\operatorname{dist}(x, \Gamma))^{-\beta_v}$. Пусть также $-\beta_v q + d - \theta > 0$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, $\beta := \beta_g + \beta_v < \delta - \theta\big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\big)_+$.

Теорема. *Пусть $p \ge q$ или $q \le 2$. Предположим, что $\frac{\delta}{d} \ne \frac{\delta-\beta}{\theta}$. Тогда*

$$d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \asymp n^{-\min\left\{\frac{\delta}{d}, \frac{\delta-\beta}{\theta}\right\} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+}.$$

Пусть $p > q$ и $q > 2$. Обозначим $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\big\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big\}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \frac{\delta-\beta}{\theta} + \min\big\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big\}$, $\theta_4 = \frac{q(\delta-\beta)}{2\theta}$. Предположим, что существует $j_* \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ такое, что $\theta_{j_*} < \min\limits_{j \ne j_*} \theta_j$. Тогда

$$d_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00554, № 13-01-00022).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, №. 6. С. 108–116.
2. *Васильева А. А.* Поперечники весовых классов Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2013. Т. 280. С. 97–125.
3. *Bricchi M.* Tailored Besov spaces and h-sets // Math. Nachr. 2004. V. 263/264. P. 36–52.

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА СОБОЛЕВА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ С ВНЕШНИМ ПИКОМ

BOUNDARY BEHAVIOR OF THE SOBOLEV CLASS FUNCTIONS AT THE BOUNDARY WITH AN OUTER CUSP

Васильчик М. Ю.[1], **Пупышев И. М.**[2]

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;
[1]mikl47@mail.ru, [2]iluxa1@ngs.ru

В области $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n,\ 0 < x_1 < 1,\ |x'| < \varphi(x_1)\}$ рассматривается пространство Соболева V_p^l. Предполагается, что $l \geq 1$, $1 < p < \infty$, $\varphi \in C_0^l([0,1])$, $\lim\limits_{\tau\to 0} \varphi(\tau) = \lim\limits_{\tau\to 0} \varphi'(\tau) = 0$. Устанавливается, что следы функций из V_p^l образуют на границе $\partial G_0 = \{x :\ 0 < x_1 < 1,\ |x'| = \varphi(x_1)\}$ весовое пространство Бесова $B_{p,\kappa}^{l-\frac{1}{p}}(\partial G_0)$, $\kappa = \chi_{[0,1]}\big(\frac{|x_1-y_1|}{\min\{\varphi(x_1),\varphi(y_1)\}}\big)$, $x_1, y_1 \in (0,1)$. Доказана

Теорема. 1) *Если $F \in V_p^l(G)$, то существуют следы производных функции F по единичной внутренней нормали ν $(\frac{\partial^k F}{\partial \nu^k}\big|_{\partial G_0} = f_k)$, и справедливы неравенства*

$$\|f_k\|_{B_{p,\kappa}^{l-\frac{1}{p}}(\partial G_0)} \leq C\|F\|_{V_p^l}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1,$$

где постоянная C не зависит от функции F.

2) *Если на ∂G_0 определены функции $f_k \in B_{p,\kappa}^{l-\frac{1}{p}}(\partial G_0)$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, то существует функция $F \in V_p^l(G)$ такая, что $\frac{\partial^k F}{\partial \nu^k}\big|_{\partial G_0} = f_k$ и*

$$\|F\|_{V_p^l(G)} \leq C \sum_{k=0}^{k-1} \|f_k\|_{B_{p,\kappa}^{l-\frac{1}{p}}(\partial G_0)},$$

где постоянная C от функций f_k не зависит.

ИЗОМОРФИЗМЫ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ НА ГРУППАХ КАРНО И КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ISOMORPHISMS OF SOBOLEV SPACES ON CARNOT GROUPS AND QUASI-ISOMETRIC MAPPINGS

Водопьянов С. К.[1], **Евсеев Н. А.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
vodopis@math.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
nikita2.evseev@gmail.com

Пусть D, D' — открытые связные множества (области) на произвольной группе Карно $\mathbb{G}$ (градуированной нильпотентной группе Ли специального вида; группа Гейзенберга — простейший пример некоммутативной группы Карно). Группа Карно рассматривается как субриманово многообразие с метрикой Карно – Каратеодори. Символ ν обозначает хаусдорфову размерность группы $\mathbb{G}$.

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_n$ образуют базис Ли алгебры Ли группы $\mathbb{G}$. Локально суммируемая функция $f : D \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Соболева $L^1_p(D)$, если она имеет обобщенные производные $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_n f$ в смысле Соболева и конечную полунорму $\|f|L^1_p(D)\|=\|\nabla_{\mathcal{L}} f|L_p(D)\|$, где $\nabla_{\mathcal{L}} f=(X_1 f, X_2 f, \ldots, X_n f)$ — обобщенный субградиент функции f.

Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D \to D'$, определенное п. в. в области D. Если функция $f \in L^1_p(D')$ непрерывна, то композиция $f \circ \varphi$ определена п. в. на D. Предположим, что $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ и $\|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leqslant K\|f \mid L^1_p(D')\|$ для всех $f \in L^1_p(D') \cap C(D')$. Тогда отображение

$$L^1_p(D') \cap C(D') \ni f \mapsto \varphi^* f = f \circ \varphi \in L^1_p(D) \tag{1}$$

называется *оператором композиции*.

Предложение. *Оператор композиции* (1) *можно продолжить до ограниченного оператора на все пространство* $L^1_p(D')$.

Определение. Будем говорить, что отображение $\varphi : D \to D'$ индуцирует *изоморфизм пространств Соболева* $L^1_p(D')$ и $L^1_p(D)$, если продолжение оператора (1) по непрерывности на $L^1_p(D')$ является изоморфизмом пространств $L^1_p(D')$ и $L^1_p(D)$.

Определение. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{G}$, из неголономного класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиизометрией*, если $|D\Phi(x)| \leqslant L$ и $0 < \alpha \leqslant |\det D\Phi(x)|$ для п. в. $x \in D$, где постоянные L и α не зависят от x.

Теорема. *Пусть* $p \geq 1$, $p \neq \nu$, *и* D, D' — *области на группе Карно* $\mathbb{G}$. *Измеримое отображение* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует изоморфизм пространств Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *тогда и только тогда, когда* φ *совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией* $\Phi : D \to \Phi(D)$, *для которой пространства Соболева* $L^1_p(\Phi(D))$ *и* $L^1_p(D')$ *неразличимы.*

При $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$ и $p > n$ теорема доказана в [1], а при $1 \leq p < n$ — в [2]. Доказательство нашей теоремы содержит существенно новые детали.

Работа выполнена при частичной поддержке ФЦПК (соглашение № 8212).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 17, № 4. С. 768–773.
2. *Vodopyanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex analysis and dynamical systems II. Providence: AMS, 2005. P. 327–342. (Contemp. Math.; V. 382).

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛОЖНО ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРИМЕРЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОЦЕНОК МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

STUDYING PECULIARITIES OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF HIGH COMPUTATIONAL COMPLEXITY USING THE EXAMPLE OF FUNCTIONAL ESTIMATES OF THE MONTE CARLO METHOD

Войтишек А. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; vav@osmf.sscc.ru

При решении достаточно широкого класса актуальных прикладных проблем возникают задачи численного приближения неявно заданных функций, причем получение отдельных (сеточных) значений этих функций является трудоемким (такие функции мы будем называть *сложно вычислимыми*). В таких задачах особую роль играют свойства *устойчивости* используемых численных аппроксимаций приближаемых функций.

В качестве примера рассмотрим *функциональные оценки метода Монте-Карло* [1], связанные с приближением решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = \int k(x', x)\varphi(x')\,dx' + f(x)$$

с заданным ядром $k(x', x)$ и свободным членом $f(x)$ на некотором компактном множестве X. Алгоритм аппроксимации функции $\varphi(x)$ связан с введением сетки $\{x_i\}$ в X, приближением значений $\{\varphi(x_i)\}$ (здесь, в зависимости от свойств гладкости функций $k(x', x)$ и $f(x)$, используются разного рода оценки метода Монте-Карло — локальные оценки, оценки метода сопряженных блужданий, метод полигона частот, векторные оценки и др. [1]) с последующим восполнением, основанном на использовании соответствующего "устойчивого" аппроксимационного функционального базиса.

В "классической" теории функциональных алгоритмов метода Монте-Карло одной из основных является проблема оптимального сочетания числа узлов сетки $\{x_i\}$ и числа испытаний (траекторий обрывающихся цепей Маркова) в каждом узле; соответствующие асимптотические результаты для равномерных сеток $\{x_i\}$ получены в [1]. Однако на практике число узлов сетки $\{x_i\}$ не может быть слишком большим, и возникает естественная идея использования *адаптивных сеток*, а конкретнее, сеток, полученных с помощью *рандомизированных алгоритмов самообучения Т. Кохонена* [2]. В данной работе представлены особенности реализации и исследования функциональных алгоритмов для случаев равномерных и адаптивных сеток; при этом использованы новые аналитические подходы к описанию адаптивных сеток из работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтишек А. В.* Функциональные оценки метода Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2007.
2. *Kohonen T.* Self-organizing maps. Springer, 2001.
3. *Войтишек А. В., Хмель Д. С.* Аналитический подход к изучению граничного эффекта в одномерном рандомизированном численном алгоритме построения адаптивных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 2. С. 195–208.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ
POSITIVE SPLINE INTERPOLATION

Волков Ю. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
volkov@math.nsc.ru

В настоящее время сплайны стали основным инструментом для решения большинства задач, связанных с приближением функций. Сюда, конечно, относятся и задачи интерполяции. Наиболее универсальными являются сплайны невысоких степеней минимального дефекта по причине прекрасных аппроксимативных свойств и простоты использования. Однако, вообще говоря, квадратические и кубические интерполяционные сплайны не наследуют такие геометрические характеристики как сохранение знака исходной функции и производных. Хорошо известно, что даже приближение произвольно гладкой функции может сопровождаться нежелательными осцилляциями, если исходные данные взяты недостаточно "густо".

В докладе приводятся достаточные условия положительности классических сплайнов второй и третьей степеней, а также изучается возможность положительной интерполяции положительных данных обобщёнными сплайнами, в частности, взвешенными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-00447) и интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и УрО РАН (проект № 32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков Ю. С., Богданов В. В., Мирошниченко В. Л., Шевалдин В. Т.* Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 6. С. 836–844.
2. *Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.* Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
3. *Мирошниченко В. Л.* Изогеометрические свойства и погрешность аппроксимации взвешенных кубических сплайнов // Вычислительные системы. Вып. 154: Сплайны и их приложения. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. С. 127–154.

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА В СРЕДНЕМ ПОЛИНОМОВ НА КОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

METRIC PROPERTIES IN THE MEAN OF POLYNOMIALS ON COMPACT HOMOGENEOUS SPACES

Гичев В. М.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; gichev@ofim.oscsbras.ru

Полиномом на однородном пространстве M компактной группы Ли G будем называть функцию, порождающую конечномерное G-инвариантное подпространство $L^2(M)$. Если на M задана G-инвариантная риманова метрика, то полиномы можно определить как линейные комбинации собственных функций оператора Лапласа – Бельтрами. Рассматриваются метрические величины такие, как меры Хаусдорфа множеств уровня, их пересечений, L^p-нормы, число критических точек и другие. Они зависят от полинома, случайно выбранного в единичной сфере S из конечномерного инвариантного подпространства E в $L^2(M)$ при равномерном распределении в S (т. е. для вероятностной инвариантной меры в S). Такой подход принят в математической физике, обычно по отношению к общим многообразиям или к конкретным классическим, как сфера или тор, и для гауссовского распределения в E (а не равномерного в сфере, хотя оно тоже рассматривалось). Информацию о результатах можно найти в обзорах [1, 2].

Если M изотропно неприводимо, то на нем имеется лишь одна, с точностью до умножения на константу, инвариантная риманова метрика. Поэтому любое эквивариантное отображение M в риманово G-многообразие является локальным метрическим подобием, локальным диффеоморфизмом и конечно накрывает свой образ. Применяя это к стандартному вложению M в S и используя методы интегральной геометрии на сферах, можно вычислить математические ожидания многих случайных величин описанного выше типа. Такой подход использовался в работе [3] в случае сфер $\mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$ и для общих изотропно неприводимых однородных пространств в [4]. Стоит отметить, что этот класс довольно широк и включает в себя, например, вещественные грассмановы многообразия и простые компактные группы Ли.

Вычисление вторых моментов — задача более трудная. Для случайных величин $\xi_a(u) = \int\limits_M |u(p)|^a\,dp$ и $\eta_a(u) = \int\limits_M (u_+(p)^a - u_-(p)^a)\,dp$, где $a \geqslant 0$, $u \in S$, $u_+ = \max\{u, 0\}$, $u_- = -\min\{u, 0\}$, удается вывести формулы, позволяющие в некоторых случаях найти асимптотику или оценки. Вторая из них измеряет отклонение от симметричности пространства E (под симметричностью понимается равнораспределенность u_+ и u_-).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zelditch S.* Local and global analysis of eigenfunctions on Riemannian manifolds // Handbook of geometric analysis No. 1. (L. Ji et al., eds.) Somerville, MA: Internat. Press; Beijing: Higher Education Press, 2008. P. 545–658. (Adv. Lect. in Math.; V. 7.)
2. *Надирашвили Н. С., Тот Д., Якобсон Д.* Геометрические свойства собственных функций // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, вып. 6. С. 67-88.
3. *Гичев В. М.* Несколько замечаний о сферических гармониках // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 64-86.
4. *Gichev V. M.* Metric properties in the mean of polynomials on compact isotropy irreducible homogeneous spaces // Anal. Math. Phys. DOI:10.1007/s13324-012-0051-4.

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕЙТРАЛЬНЫМ ПО СВЁРТКЕ ВЕКТОРОМ, ОПРЕДЕЛЁННЫМ НА ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

AN OPTIMAL INTERPOLATION METHOD WITH CONVOLUTION-NEUTRAL VECTOR DEFINED ON A HILBERT SPACE

Грицутенко С. С.[1], **Королёва К. А.**[2]

Омский государственный университет путей сообщения, Омск, Россия;
[1]st256@mail.ru, [2]jokie-ksu@mail.ru

В представленной работе рассматривается оптимальная интерполяция в смысле равномерного распределения ошибки в спектральной области.

Определение 1. Свёрткой двух произвольных векторов пространства Гильберта является третий вектор этого же пространства, получаемый из следующего соотношения:

$$z(t) = x(t) * y(t) = (x(\tau), y(t-\tau)).$$

Определение 2. Нейтральным вектором пространства Гильберта, на котором определена свёртка, называется такой вектор, в отношении которого выполняется условие:

$$x(t) = x(t) * \delta(t),$$

где $x(t)$ — любой вектор пространства H.

На базе введённых определений доказываются свойства нейтрального вектора, леммы и теоремы [1]. В том числе получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Если в пространстве Гильберта, в котором определён ортогональный базис $n_i(t)$ и свёртка, существует нейтральный вектор, то этот вектор единствен и может быть вычислен по следующей формуле*:

$$\delta(t) = \Sigma n_i(t) n_i(0).$$

Теорема 2. *Если в функциональном пространстве Гильберта H существует нейтральный вектор $\delta(t)$, то в этом пространстве существует полная ортогональная система функций вида $\delta\big(t - \frac{2\pi n}{\delta(0)}\big)$.*

Теорема 3. *Если в функциональном пространстве Гильберта H существует нейтральный вектор $\delta(t)$, то любой вектор этого пространства может быть восстановлен по своими отсчётам при помощи формулы*:

$$x(t) = \frac{1}{\delta(0)} \sum x\Big(\frac{2\pi n}{\delta(0)}\Big)\delta\Big(t - \frac{2\pi n}{\delta(0)}\Big).$$

Предложен метод оптимальной интерполяции в смысле равномерного распределения среднеквадратичной ошибки интерполяции по спектру нейтральным по свёртке вектором:

$$x(n + \Delta t) + \eta(n) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} x(n-k)\frac{\sin \pi(k + \Delta t)}{\pi * (k + \Delta t)} w_{\text{cheb}}(n)$$

где $x(n)$ — исходные отсчеты функции в узловых точках; $x(n - \Delta t)$ — интерполированные отсчеты функции, смещенные относительно исходных на величину Δt.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грицутенко С. С.* Векторы с фильтрующим свойством в свёрточных алгебрах // Вестн. ИжГТУ. 2010. № 2. С. 146–149.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЛИФТИНГ В ИЗМЕРИМОМ РАССЛОЕНИИ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

POSITIVE LIFTING IN A MEASURABLE BUNDLE OF BANACH LATTICES

Гутман А. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
gutman@math.nsc.ru

Определение лифтинга $(\cdot)_\sim\colon L^\infty(\Omega,\mathcal{X}) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ классов измеримых сечений измеримого расслоения $\mathcal{X}$ банаховых решеток на пространстве с мерой Ω сопровождается требованием решеточности лифтинга: $(\mathbf{u}\vee\mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \vee \mathbf{v}_\sim$ на Ω для всех $\mathbf{u},\mathbf{v}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ (см. [1, определение 2.2]). Мы покажем, что это требование является избыточным и может быть заменено условием положительности: $\mathbf{u}_\sim \geqslant 0$ на Ω для положительных $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$.

Лемма. *Пусть X — векторная решетка, Y — нормированная решетка, и пусть $T\colon X\to Y$ — такой сюръективный положительный линейный оператор, что для любых $x_1,x_2\in X$ из $|x_1|\leqslant|x_2|$ следует $\|Tx_1\|\leqslant\|Tx_2\|$. Тогда T является решеточным гомоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку $\ker T$ – порядковый идеал X, согласно [2, 18.9] фактор-пространство $\widetilde{X} := X/\ker T$ представляет собой векторную решетку относительно естественного порядка, а каноническое отображение $\varphi\colon X\to\widetilde{X}$ является решеточным гомоморфизмом. Кроме того, $\|\cdot\|_Y\circ T$ — решеточная полунорма на X, а значит, в силу [2, 62.3] пространство $\widetilde{X}$ является нормированной решеткой относительно фактор-нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$, причем $\|\cdot\|_{\widetilde{X}} = \|\cdot\|_Y\circ\widetilde{T}$, где $\widetilde{T} := T\circ\varphi^{-1}\colon \widetilde{X}\to Y$ — линейная биекция. Таким образом, оператор $\widetilde{T}$ служит положительной изометрией между нормированными решетками $\widetilde{X}$ и Y и поэтому является решеточным гомоморфизмом (см. [3, теорема 1]). Следовательно, оператор $T=\widetilde{T}\circ\varphi$ также является решеточным гомоморфизмом.

Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ — измеримое расслоение банаховых решеток над пространством с мерой Ω и $(\cdot)_\sim\colon L^\infty(\Omega,\mathcal{X})\to\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ — такой лифтинг в измеримом банаховом расслоении $\mathcal{X}$, что $\mathbf{u}_\sim\geqslant 0$ на Ω для положительных $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$. Тогда $(\mathbf{u}\vee\mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim\vee\mathbf{v}_\sim$ и $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim\wedge\mathbf{v}_\sim$ на Ω для всех $\mathbf{u},\mathbf{v}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$.*

Доказательство. Достаточно фиксировать произвольную точку $\omega\in\Omega$ и применить доказанную выше лемму к векторной решетке $X := L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$, нормированной решетке $Y := \mathcal{X}(\omega)$ и оператору $T\colon \mathbf{u}\in X\mapsto \mathbf{u}_\sim(\omega)\in Y$, сюръективность которого следует из [4, 4.4.1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2005. С. 9–49.
2. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. Vol. I. Amsterdam; London: North-Holland Publishing Co., 1971.
3. *Абрамович Ю. А.* Об изометриях нормированных решеток // Оптимизация. 1988. Вып. 43 (60). С. 74–80.
4. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. С. 63–211.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В РЕФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

APPROXIMATE INVERSION OF THE RAY TRANSFORM OPERATORS IN REFRACTIVE TOMOGRAPHY

Деревцов Е. Ю.[1], **Мальцева С. В.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]dert@math.nsc.ru; [2]svetlana.v.maltseva@gmail.com

В последние годы интерес исследователей в области томографии смещается от классической задачи восстановления функции по ее известному преобразованию Радона (скалярная томография) к задачам векторной и тензорной томографии, рассматриваемым к тому же в среде с рефракцией [1]. Типичные задачи векторной томографии — это ультразвуковое зондирование потоков жидкости или газа, доплеровская томография, шлирен-томография. Тензорная томография нацелена на определение анизотропных свойств сред, микро-объектов, пород в Земле. Термин же "рефракционная томография" относится к средам с рефракцией и подразумевает, что в томографических моделях учитывается эффект искривления луча, с необходимостью возникающий в неоднородных средах, но которым обоснованно пренебрегают в постановках "классической" томографии.

Следует отметить, что, например, в задаче двумерной векторной томографии в качестве данных могут выступать уже два различных типа лучевых преобразований, каждое из которых обладает нетривиальным ядром. Это обстоятельство кардинально отличает задачи векторной и тензорной томографии от задачи скалярной, и требует развития специально разработанных методов [2]. Так, наличие или отсутствие одного из лучевых преобразований, используемых в качестве данных, напрямую связано с возможностью однозначного восстановления исходного векторного поля либо лишь его определенной части.

Одним из широко известных способов решения задачи определения функции по ее известному преобразованию Радона является использование формул обращения [3], которые в различных сочетаниях и последовательностях включают в себя такие операторы, как обратная проекция, потенциал Рисса, преобразования Фурье и Гильберта.

В настоящее время не существует строго обоснованных формул обращения, которые в результате давали бы скалярное, векторное или тензорное поле в рефрагирующих средах. Возникает вопрос, можно ли для восстановления искомых полей воспользоваться известными формулами обращения, заменив в них используемые операторы другими, построенными с учетом искривления лучей? Мы предлагаем, основываясь на эмпирическом подходе, модификации известных формул обращения и их всестороннее численное исследование, которое неожиданно показало хорошие результаты по точности восстановления на тестовом материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
2. *Деревцов Е. Ю.* Некоторые задачи нескалярной томографии // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 81–111.
3. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир. 1990.

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

CONSTRUCTION OF A DIFFERENCE SCHEME WITH HIGH ORDER APPROXIMATION FOR THE CONVECTION-DIFFUSION EQUATION BY THE METHOD OF UNDETERMINED COEFFICIENTS

Дроздов Г. М.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
drozdoff-grig@ngs.ru

Рассматривается краевая задача в единичном квадрате с границей Γ и с условиями Дирихле для уравнения типа конвекции-диффузии:

$$\begin{cases} \beta(u_{xx} + u_{yy}) + (x-a)u_x + (y-b)u_y = 0, \\ u|_\Gamma = v(x,y). \end{cases}$$

Покроем область решения задачи $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ равномерной сеткой с узлами (x_i, y_j), где $x_i = ih$, $i = 0,1,\ldots,N$, $y_j = jh$, $i = 0,1,\ldots,N$, $h = \dfrac{1}{N}$. Построим разностную схему с точностью $O(h^6)$ на тринадцатиточечном шаблоне. Формулу схемы ищем в виде линейной комбинации значений решения в узлах шаблона:

$$\begin{aligned}(\beta(u_{xx} + u_{yy}) + (x-a)u_x + (y-b)u_y)_{i,j} = c_0 u_{i,j} + c_1 u_{i,j+1} + c_2 u_{i+1,j} + c_3 u_{i,j-1} \\ + c_4 u_{i-1,j} + c_5 u_{i+1,j+1} + c_6 u_{i+1,j-1} + c_7 u_{i-1,j-1} + c_8 u_{i-1,j+1} + c_9 u_{i,j+2} \\ + c_{10} u_{i+2,j} + c_{11} u_{i,j-2} + c_{12} u_{i-2,j} + R(h),\end{aligned}$$

где c_k $(k = 0,1,\ldots,12)$ — неопределенные коэффициенты. Предположим непрерывность всех производных решения по переменным x и y до шестого порядка включительно. Невязку $R(h)$ в правой части раскладываем в ряд Тейлора относительно центрального узла шаблона. Согласно идеологии построения компактных разностных схем, используя дифференциальные следствия уравнения на достаточно гладком решении, выражаем младшие производные через старшие и исключаем из разложения. Приравниваем к нулю коэффициенты перед оставшимися производными в разложении. Отсюда получим систему из тринадцати линейно независимых алгебраических уравнений относительно тринадцати неизвестных коэффициентов c_i. Решая ее, получим единственную схему шестого порядка аппроксимации. Проведены численные эксперименты по решению задачи ($\beta \sim 10^{-2}$) с краевыми условиями, взятыми из точного решения на последовательности сеток при мельчении шага. Показано, что на гладких решениях порядок сходимости схемы совпадает с порядком аппроксимации. Показано, что схема шестого порядка имеет существенные преимущества перед схемами второго и четвертого порядков аппроксимации, и при относительно умеренной величине шага сетки дает решение задачи с высокой точностью. Аналогично построена разностная схема десятого порядка аппроксимации для уравнения Пуассона.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00575 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шапеев А. В., Шапеев В. П.* Решение эллиптических задач с особенностями по схемам высокого порядка аппроксимации // Вычисл. технол. 2006. Т. 11, № 2. С. 84–91.

ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

ELLIPTICITY FOR PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS WITH SMALL PARAMETER

Дьяченко Е. О.[1], **Тарханов Н. Н.**[2]

Университет Потсдама, Потсдам, Германия;
[1]dyachenk@uni-potsdam.de, [2]tarkhanov@math.uni-potsdam.de

Один из самых распространенных подходов к зависящим от малого параметра эллиптическим псевдодифференциальным уравнениям использует асимптотическое приближение Пуанкаре. При этом символ $a(x,\xi,\varepsilon)$ понимается как непрерывная по малому параметру $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ функция, которая при каждом фиксированном ε определяет некий ПДО $A_\varepsilon : H_1 \to H_2$. В этом подходе вырожденный символ определяется как $a_0(x,\xi) = a(x,\xi,\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$. Далее рассматриваются вопросы сходимости возмущенных решений к вырожденному по норме H_1.

Другой подход основан на алгебраическом представлении символа $a(x,\xi,\varepsilon)$ через возмущенную и невозмущенную части и развит в работах Л. Франка и Г. Грубб. При этом с помощью алгебры ПДО с малым параметром обобщаются некоторые известные результаты для дифференциальных уравнений с малым или большим параметром.

Оба способа позволяют получить асимптотические решения для значительного круга эллиптических задач физики и техники с малым параметром при старших производных. Однако в некоторых задачах в областях с каспидальной границей (см., например, [1]) классические подходы к асимптотическим разложениям применимы не всегда. В этих случаях можно рассматривать малый параметр как новую независимую переменную, а символ оператора $a(x,\xi,\varepsilon)$ как операторнозначную функцию от (x,ξ), область значения которой есть операторы над функциями от ε. В этой работе предлагается способ построения алгебр с таким символом и рассматриваются возможные применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dyachenko E., Tarkhanov N.* Degeneration of boundary layer at singular points. Potsdam, 2012. (Preprint / Institute für Mathematik der Universität Potsdam; N 11).

W_p^l-РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНАМИ

W_p^l-REGULARITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES WITH NULL LAGRANGIANS

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
yegorov@math.nsc.ru

Результаты о W_p^1-регулярности отображений с ограниченным искажением и решений эллиптических систем уравнений первого порядка играют важную роль в геометрическом анализе, в частности, в теории устойчивости классов отображений и в их приложениях (см., например, монографии [1–3]). Теоремы, дающие в определенном отношении окончательное решение проблемы регулярности с точки зрения теории пространств Соболева решений системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка в случае, когда эта система локально близка к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами, получены А. П. Копыловым [4].

В данной работе исследуется W_p^l-регулярность решений $v \in W^l_{q,\mathrm{loc}}(U; R^m)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $1 < q < p$, дифференциальных неравенств с частными производными порядка l следующего вида

$$F(v^{(l)}(x)) \le KG(v^{(l)}(x)) \quad \text{для п. в. } x \in U, \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}_s^{mn^l} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $F(\zeta) \ge c_F|\zeta|^k$ с некоторой константой $c_F > 0$, $G : \mathbb{R}_s^{mn^l} \to \mathbb{R}$ — k-однородный нуль-лагранжиан, $K \ge 1$. Здесь $k, n, m, l \in \mathbb{N}$, $2 \le k \le \min\{n, m\}$, $\mathbb{R}_s^{mn^l}$ — пространство симметричных l-линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ с нормой $|\zeta| = \sup\{|\zeta(X^1, \dots, X^l)| : \ X^j \in \mathbb{R}^n, \ |X^j| < 1, \ j = 1, \dots, l\}$, $v^{(l)}(x)$ — дифференциал порядка l в точке $x \in U$ отображения v, рассматриваемый как элемент пространства $\mathbb{R}_s^{mn^l}$. Установлено, что существуют числа $1 < \underline{q} = \underline{q}(K, F, G) < k < \overline{p} = \overline{p}(K, F, G) < \infty$ такие, что если $q > \underline{q}$, то каждое решение $v \in W^l_{q,\mathrm{loc}}(U; \mathbb{R}^m)$ неравенства (1) принадлежит классу Соболева $W^l_{p,\mathrm{loc}}(U; \mathbb{R}^m)$ с любым показателем $p < \overline{p}$. Для случая $l = 1$ этот результат получен в [5].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и ДВО РАН (проект № 56), и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-921.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд., перераб. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
2. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
3. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001. (Oxford Math. Monographs.)
4. *Копылов А. П.* О W_q^l-регулярности решений систем дифференциальных уравнений в случае, когда уравнения строятся на основе разрывных функций // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 749–771.
5. *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: regularity and removability of singularities // arXiv:1005.3459.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЕСОВОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $W_2^m(\mathbb{R})$

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF AN OPTIMAL WEIGHTED QUADRATURE FORMULA IN THE SOBOLEV SPACE $W_2^m(\mathbb{R})$

Жалолов Икр. И.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан;
o_jalolov@mail.ru

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании и единственности оптимальной квадратурной формулы с равноотстоящими узлами для интегрирования функции из пространства $W_2^m(\mathbb{R})$ при целых m [1].

Определение. Пространство $W_2^m(\mathbb{R})$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в $\mathbb{R}$ и убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, в норме

$$\big\|f(x) \mid W_2^m(\mathbb{R})\big\| = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|F^{-1}\big[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} F[f(x)](y)\big](x)\big|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь F и F^{-1} — прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i y x}\, dx \qquad \text{и} \qquad F^{-1}[f(x)](y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x}\, dx.$$

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int\limits_0^1 p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta)$$

с функционалом погрешности $\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)p(x) - \sum\limits_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta)$.

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ — индикатор отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака и $p(x)$ — весовая функция.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма. *Система $\{\nu_{\frac{m}{2}}(x - \beta h)\}_{\beta=0}^{N}$ является линейно независимой системой в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.*

Теорема. *Оптимальная квадратурная формула, коэффициенты который являются решением системы линейных уравненный*

$$\sum C_\beta \nu_m(h\alpha - h\beta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(y)\nu_m(h\alpha - y)\, dy, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, N,$$

над пространством $W_2^m(\mathbb{R})$ существует и является единственной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЛОЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА – ОРЛИЧА

ON OPTIMAL EMBEDDING OF SOBOLEV–ORLICZ SPACES

Жамсранжав Д.

Монгольский государственный университет, Институт математики, Улан-Батор, Монголия; davaa@mail.ru

Для пространств Соболева – Орлича установлены точные условия вложения в L_∞ и получено конкретное описание оболочки локального роста.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное замкнутое множество и $T = \mu_n(\Omega)$. Предположим, что функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда вложение*

$$\dot{W}^m_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\Omega)$$

эквивалентно требованию

$$\frac{1}{V(t)}\big(T^{\frac{m}{n}} - t^{\frac{m}{n}}\big) \in L_{\Psi,\nu}(0,T),$$

где Ψ — дополнительная функция Юнга к функции Φ.

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ и*

$$\frac{1}{V(t)}\big(T^{\frac{m}{n}} - t^{\frac{m}{n}}\big) \notin L_{\Psi,\nu}(0,T).$$

Тогда для функции оболочки локального роста имеет место следующая двухсторонняя оценка

$$E_W(t) \sim \Big\| \frac{1}{V(\tau)} F_m(t,\tau) \Big\|_{\Psi,\nu},$$

где

$$F_m(t,\tau) = \begin{cases} T^{\frac{m}{n}} - \tau^{\frac{m}{n}}, & t \in [0,\tau), \\ T^{\frac{m}{n}} - \tau t^{\frac{m}{n}-1}, & t \in [\tau,T]. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. New York: Acad. Press, 1988. (Pure Appl. Math.; V. 129.)
2. *Jamsranjav D.* Local growth envelopes of Sobolev–Orlicz spaces // Mong. Math. J. 2011. V. 15. P. 30–39.
3. *Гольдман М. Л., Керман Р.* Об оптимальном вложении пространств Кальдерона и обобщенных пространств Бесова // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2003. Т. 243. С. 161–193.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

SYSTEMS OF EQUATIONS IN THE THEORY OF MAPPINGS WITH BOUNDED DISTORTION

Журавлев И. В.

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия;
igor.zhuravlev@volsu.ru

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, звездная относительно шара B, $\overline{B} \subset D$. Пусть K — отображение, определенное в D, со значениями в пространстве $\mathbb{M}_n$ вещественных $n \times n$-матриц. Предположим, что элементы матрицы K измеримы и $\det K(x) > 0$ почти всюду в D.

В работе рассмотрена задача о восстановлении дифференцируемого почти всюду в области D отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$ через коэффициенты K, $\theta(x, f'(x))$ правой части системы

$$f'(x) = K(x)\theta(x, f'(x)). \tag{1}$$

Здесь $f'(x)$ — матрица Якоби отображения f в точке x, а $\theta(x, f'(x))$ — значения в точке $(x, f'(x))$ функционала θ, определенного на $D \times \mathbb{M}_n$ и обладающего следующим свойством: если непрерывное отображение f принадлежит классу $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и почти всюду в области D выполняется неравенство $\det f'(x) > 0$, то $\theta(x, f'(x)) > 0$ почти всюду в области D и $\theta(x, f'(x)) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$.

В силу этого определения, если непрерывное отображение f принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, $\det f'(x) > 0$ почти всюду в области D и норма матрицы $K/\det^{1/n} K$ равномерно в D ограничена сверху некоторой постоянной почти всюду в области D, то каждое решение f системы (1) является отображением с ограниченным искажением [1].

Система (1) переопределена [2, 3]. В работе установлены необходимые и достаточные условия существования ее решений, описано множество ее решений и даны интегральные представления решений через K, θ с использованием соболевских интегральных операторов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Егоров В. В.* Восстановление отображения по матрице Якоби, нормированной однородной функцией // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 14–20.
3. *Журавлев И. В.* О восстановлении отображения по нормированной матрице Якоби // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 53–61.
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

QUADRATURE FORMULAS FOR FUNCTIONS WITH A BOUNDARY-LAYER COMPONENT

Задорин А. И.[1], **Задорин Н. А.**[2]

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;
[1]zadorin@ofim.oscsbras.ru, [2]nik-zadorin@yandex.ru

Исследуется вопрос построения квадратурных формул для функций с пограничным слоем. Предполагается, что интегрируемая функция может быть представлена в виде $u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x)$, где регулярная составляющая $p(x)$ имеет ограниченные производные до некоторого порядка, пограничная составляющая $\Phi(x)$ известна, имеет области больших градиентов, постоянная γ не задана. Такое представление имеет решение сингулярно возмущенной краевой задачи, когда функция $\Phi(x)$ соответствует экспоненциальному или степенному пограничному слою. В работе функция $\Phi(x)$ рассматривается как функция общего вида. Погрешность составных квадратурных формул, основанных на формулах Ньютона – Котеса с 3, 4, 5 равноотстоящими узлами, при наличии быстро меняющейся пограничной составляющей становится величиной порядка $O(h)$, где h — шаг сетки.

Ставится задача построения квадратурных формул, погрешность которых не зависит от резких изменений интегрируемой функции в пограничном слое. Построена интерполяционная формула с произвольным числом узлов интерполяции, точная на пограничной составляющей $\Phi(x)$ [1]. Предлагается строить квадратурные формулы на основе приближения подынтегральной функции построенным интерполянтом. Таким образом построены и обоснованы квадратурные формулы с двумя, тремя [2], четырьмя и пятью равноотстоящими узлами. Доказано, что погрешность составных квадратурных формул — величина порядка $O(h^{n-1})$, где n — число узлов построенной квадратурной формулы, на основе которой строится составная формула на сетке с шагом h. Эта погрешность не зависит от пограничной составляющей и ее производных. Проведены численные эксперименты, подтвердившие полученные оценки точности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00875) и Отделения математических наук РАН (проект № 1.3.2, 2012).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zadorin A. I., Zadorin N. A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // SEMR. 2012. V. 9. P. 445–455.
2. *Задорин А. И., Задорин Н. А.* Квадратурные формулы для функций с пограничной составляющей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 11. С. 1952–1962.

МЕТОД С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ

A REGULARIZATION METHOD FOR SOLVING THE SIGNORINI PROBLEM

Золотухин А. Я.

Тульский государственный университет, Тула, Россия; zolot_aj@mail.ru

Рассматривается краевая задача [1]

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(u - \psi) = 0 \quad \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ, n — единичный вектор внешней нормали к Γ, $f \in L_2(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Gamma)$ — заданные функции.

Вариационная постановка задачи (1) имеет вид [1]

$$\begin{cases} J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, d\Omega - \int\limits_\Omega f u \, d\Omega \to \min, \\ u \in G. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $G = \{u \in W_2^1(\Omega) : \gamma u \geq \psi \text{ п. в. на } \Gamma\}$, $\gamma u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $u \in W_2^1(\Omega)$. Ядро билинейной формы $a(u, v) = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v) \, d\Omega$ состоит из постоянных функций и является одномерным множеством. В [1] установлено, что при условии $\int\limits_\Omega f \, d\Omega < 0$ задача (2) имеет единственное решение.

Численное решение задачи (2) проводилось для прямоугольной области Ω методом итеративной проксимальной регуляризации в сочетании с методом конечных элементов. Приведём алгоритм этого метода.

1) Зададим последовательность положительных чисел ε_k такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, и $z^0 \in G$.

2) Считая z^k известным, находим z^{k+1} из условий

$$J(z^{k+1}) + \alpha \|z^k - Qz^{k+1}\|^2_{L_2(\Omega)} = \inf_{v \in G} (J(v) + \alpha \|z^k - Qv\|^2_{L_2(\Omega)}),$$

$\|z^{k+1} - z^k\|_{W_2^1(\Omega)} < \varepsilon_{k+1}$, где $\alpha > 0$ — параметр, Q — оператор ортогонального проектирования $W_2^1(\Omega)$ на ядро R.

В [2] установлена сходимость алгоритма, когда пункт 2) имеет вид

$$J(z^{k+1}) + \alpha \|z^k - z^{k+1}\|^2_{L_2(\Omega)} = \inf_{v \in G} (J(v) + \alpha \|z^k - v\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$\|z^{k+1} - z^k\|_{W_2^1(\Omega)} < \varepsilon_{k+1}$.

Обоснование метода решения задачи Синьорини без регуляризации приведено в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. *Золотухин А. Я., Намм Р. В., Пачина А. В.* О линейной скорости сходимости методов с итеративной проксимальной регуляризацией // Изв. вузов. Матем. 2006. № 12. С. 44–54.
3. *Namm R. V., Zolotukhin A. Ya.* The finite element method for solving Signorini's problem // Computational Fluid Dynamics Journal. 1996. V. 4, N 4. P. 509–515.

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ НА ОДНОЙ ТРЕХСТУПЕНЧАТОЙ ГРУППЕ КАРНО ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ ГЛАДКОСТИ

A LIOUVILLE THEOREM ON SOME THREE-STEP CARNOT GROUP UNDER MINIMAL SMOOTHNESS ASSUMPTIONS

Исангулова Д. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
dasha@math.nsc.ru

Мы рассматриваем группу Энгеля $\mathbb{G}$ как модельный пример трехступенчатой группы Карно, называемую еще 4-мерной группой Карно K-типа или колмогоровского типа. Также группа Энгеля изоморфна группе джетов $J^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [1]. Элементы группы $\mathbb{G}$ можно рассматривать как (x,y,z,w), где $x,y,z,w\in\mathbb{R}$. Левоинвариантные векторные поля $X=\partial_x$, $Y=\partial_y+x\partial_z+\frac{x^2}{2}\partial_w$ образуют горизонтальное подрасслоение H касательного расслоения, которое своими коммутаторами порождает все касательное расслоение: $[X,Y]=\partial_z$, $[X,\partial_z]=\partial_w$.

Метрика Карно – Каратеодори d определяется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая γ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t)\in H(\gamma(t))$). Размерность по Хаусдорфу относительно метрики d обозначается символом ν и равна 7.

На группе Энгеля группа гладких 1-квазиконформных отображений M, сохраняющих ориентацию, образована следующими отображениями [1]:

1) левый сдвиг $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{G}$;

2) растяжение $\delta_s\mathbf{x}=(sx,sy,s^2z,s^3w)$, $s>0$;

3) отражение $\iota(x,y,z,w)=(-x,y,-z,w)$.

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{G}$. Мы называем $F\colon U\to\mathbb{G}$ *отображением с ограниченным искажением* [2], если

(a) F непрерывно открыто и дискретно,

(b) $F\in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{G})$,

(c) существует постоянная $K\geqslant 1$ такая, что неравенство $|D_hF(\mathbf{x})|^\nu\leqslant KJ(\mathbf{x},F)$ выполняется почти всюду в U. Наименьшая постоянная K в этом неравенстве называется (*внешним*) *коэффициентом искажения* отображения F и обозначается символом $K_O(F)$.

Теорема (аналог теоремы Лиувилля). *Если F — отображение с ограниченным искажением связной области $U\subset\mathbb{G}$ и $K_O(F)=1$, то F равно сужению на U действия элемента группы M.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31205) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-921.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Warhusrt B.* Jet spaces and nonrigid Carnot groups: Ph. D. Thesis. Sydney: University of New South Wales, 2005.
2. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Мат. труды. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2^{(2)}(0,1)$
COEFFICIENTS OF A WEIGHTED QUADRATURE FORMULA IN THE SPACE $L_2^{(2)}(0,1)$

Исмоилов С. И.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; sardor_ismoilov@mail.ru

В настоящей работе рассматривается задача построение оптимальной квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(h\beta) \tag{1}$$

в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ [1]. Здесь $\varphi(x)$ — подынтегральная функция, $C[\beta]$ — коэффициенты, $h=\frac{1}{N}$, $N=2,3,4,\ldots$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\alpha\geq 0$.

Справедлива следующая

Теорема. *Оптимальные коэффициенты квадратурной формулы* (1) *в пространстве* $L_2^{(2)}(0,1)$ *имеют вид*

$$C[0]=\frac{12F}{h^3}[(1+6T(N,q^{-1}))h^{\alpha+4}+W],$$

$$C[\beta]=\frac{12F}{h^3}[6(q+2)(q^\beta T(\beta,q^{-1})-q^{-\beta}T(\beta,q))h^{\alpha+4}+((\beta-1)^{\alpha+4}+(\beta+1)^{\alpha+4}$$
$$-8\beta^{\alpha+4})h^{\alpha+4}-(q+2)(q^\beta-q^{-\beta})(W+6T(N,q^{-1})h^{\alpha+4})],\quad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$C[N]=\frac{1}{\alpha+1}+\frac{12F}{h^3}\Big[(1-h)^{\alpha+4}-Wq^N-(q-1)\Big(1-(\alpha+4)(\alpha+3)\frac{h^2}{6}\Big)-1\Big],$$

где

$$W=\frac{6}{q^{2N}-1}\Big[h^{\alpha+4}(T(N,q^{-1})-T(N,q))-\frac{\sqrt{3}}{3}q^N\Big(1-(\alpha+3)(\alpha+4)\frac{h^2}{6}\Big)\Big],$$
$$T(x,q)=\sum_{i=0}^{\alpha+4}\frac{q^i}{(1-q)^{i+1}}\Delta^i 0^{\alpha+4}-\sum_{p=0}^{\alpha+4}C_{\alpha+4}^p x^{\alpha+4-p}\sum_{i=0}^{\alpha+4}\frac{q^{x+i}}{(1-q)^{i+1}}\Delta^i 0^p,$$
$$F=\frac{1}{2(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)},\qquad q=\sqrt{3}-2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

ПРИМЕНЕНИЕ δ-ФУНКЦИИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СЛОЖНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

APPLICATION OF THE δ-FUNCTION FOR OBTAINING THE DIFFERENTIATION RULE FOR A COMPOUND RANDOM PROCESS

Карачанская Е. В.

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия;
EKarachanskaya@mail.khstu.ru

Представление дельта-функции в виде предела некоторой специальной функции позволило построить правило дифференцирования — обобщенную формулу Ито – Вентцеля — для сложного случайного процесса, определяемого случайной функцией с винеровскими и пуассоновскими возмущениями, удовлетворяющей некоторому обобщенному стохастическому дифференциальному уравнению Ито (ОУИ), с учетом того, что ее пространственная координата есть также случайный процесс, который является решением другого ОУИ [1].

Дельта-функция рассматривается как предел последовательности экспонент. Поскольку экспонента — бесконечно дифференцируемая функция (нам достаточно второй производной), а соответствующая последовательность быстро сходится, такое допредельное представление позволяет применять обобщенную формулу Ито без дополнительных замечаний.

Пример формального использования δ-функции при построении стохастических аналогов задач классической механики на основе уравнений Ито был приведен в работе [2].

Лемма. *Пусть функция $f(t;x)$ ограничена с вероятностью единица для любых $t \in [0,T]$ и удовлетворяет условию Липшица по компоненте x. Тогда имеет место представление* $f(t;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t;y)\delta(y-x)\,dy = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t;y)\delta_\varepsilon(y-x)\,dy$, *где* $\delta_\varepsilon(y-x) = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\dfrac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}\Big\}$.

Свойства δ-функции и ее производных, примененных к ограниченной с вероятностью 1 функции, аналогичны свойствам, относящимся к детерминированным функциям. Поскольку применение формулы Ито к δ-функции невозможно [3], используются допредельные представления ее производных первого и второго порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубко В. А., Карачанская Е. В.* О двух подходах к построению обобщенной формулы Ито – Вентцеля. Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2012. (Препринт / ВЦ ДВО РАН; № 174).
2. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕРЫ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

SPECTRAL MEASURES AND CONVERGENCE RATES IN ERGODIC THEOREMS

Качуровский А. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
agk@math.nsc.ru

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, T — его эндоморфизм, т. е. такое отображение $T : \Omega \to \Omega$, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega).$$

Тогда индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование λ-п. в. предела $f^* = \lim\limits_{n\to\infty} A_n f$ и справедливость равенства $\int f^* \, d\lambda = \int f \, d\lambda$. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает, что для $f \in L_2(\Omega)$ этот предел существует и в $L_2(\Omega)$.

Скорость сходимости в теореме Биркгофа будем измерять скоростью убывания при $n \to \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$ величин $\mathrm{P}_n^\varepsilon = \lambda\{\sup\limits_{k\geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon\}$. Скорость сходимости в теореме фон Неймана есть скорость сходимости $\|A_n f - f^*\|_2^2$ к нулю при $n \to \infty$.

Как было доказано в [1], оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах с необходимостью являются спектральными: степенная скорость сходимости в теореме фон Неймана эквивалентна степенной же, с тем же показателем степени, особенности спектральной меры усредняемой функции f относительно рассматриваемой динамической системы. При этом оказывается возможным давать по спектральным мерам оценки скорости сходимости и в эргодической теореме Биркгофа. Однако они не всегда уже оказываются точными (даже асимптотически).

В докладе приводятся полученные докладчиком и его учениками соответствующие новые оценки скоростей сходимости в обеих эргодических теоремах (по спектральным мерам, и по их коэффициентам Фурье — так называемым корреляционным коэффициентам), часть из которых была опубликована в [2, 3]. А также обсуждаются их применения к исследованию конкретных динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 4. С. 73–124.
2. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 8. С. 21–40.
3. *Джулай Н. А., Качуровский А. Г.* Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1039–1052.

О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

ON THE INTRINSIC GEOMETRY OF SUBMANIFOLDS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

Копылов А. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kopylov@math.nsc.ru

Предположим, что (X, g) — n-мерное связное гладкое риманово многообразие без края и Y — его n-мерное компактное связное C^0-подмногообразие с непустым краем ∂Y $(n \geq 2)$. Рассмотрим метрическую функцию ρ_Y, порожденную внутренней метрикой внутренности $\operatorname{int} Y$ подмногообразия Y следующим образом:

$$\rho_Y(x, y) = \varliminf_{x' \to x,\, y' \to y;\, x', y' \in \operatorname{int} Y} \{\inf[l(\gamma_{x', y', \operatorname{int} Y})]\} < \infty,$$

где $x, y \in Y$ и $\inf[l(\gamma_{x', y', \operatorname{int} Y})]$ — инфимум длин $l(\gamma_{x', y', \operatorname{int} Y})$ гладких путей $\gamma_{x', y', \operatorname{int} Y} : [0, 1] \to \operatorname{int} Y$, соединяющих x' и y' во внутренности $\operatorname{int} Y$ подмногообразия Y. В связи с изучением этой функции возникают естественные вопросы об отыскании условий, при которых ρ_Y является метрикой, а также о существовании геодезических в этой метрике и о взаимосвязи ρ_Y с классической внутренней метрикой подмногообразия Y многообразия X.

Важнейшие результаты в указанном направлении — это утверждения о том, что если функция ρ_Y конечнозначна, то при $n = 2$ она является метрикой в Y, а в случае $n \geq 3$ (вообще говоря) нет.

В заключение отмечу, что результаты доклада получены совместно с М. В. Коробковым.

О ДВУХ НЕРАВЕНСТВАХ КОЛМОГОРОВА НА ПОЛУПРЯМОЙ

ON TWO KOLMOGOROV'S INEQUALITIES ON THE HALF-LINE

Коробов А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
korobov@math.nsc.ru

В статье [1] методом теории оптимального управления доказаны следующие неравенства на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$:

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \le C_q \|x(\cdot)\|_{\mathcal{L}_q(\mathbb{R}_+)}^{\frac{2}{2+q^{-1}}} \|\ddot{x}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)}^{\frac{q^{-1}}{2+q^{-1}}}, \tag{1}$$

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \le C'_q \|x(\cdot)\|_{\mathcal{L}_q(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1}{2+q^{-1}}} \|\ddot{x}(\cdot)\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1+q^{-1}}{2+q^{-1}}}. \tag{2}$$

В (1) и (2) $1 \le q < \infty$. Там же предложен метод для нахождения наилучших констант C_q и C'_q, а также — для нахождения функций из пространства $W^2_{q,\infty}(\mathbb{R}_+)$, для которых неравенства (1) и (2) превращаются в равенства. Здесь $W^2_{q,\infty}(\mathbb{R}_+)$ — это пространство таких функций $x(\cdot) \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}_+)$, что $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a, b] \subset [0, \infty)$ и $\ddot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)$. В докладе при $q \in \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ будет предложен эффективный (с вычислительной точки зрения) алгоритм для нахождения наилучших констант C_q и C'_q, а также — для нахождения соответствующих экстремальных функций. Этот алгоритм базируется на функции Беллмана для подходящей задачи оптимального управления, которую впервые решил А. Т. Фуллер [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О неравенствах Колмогорова на полупрямой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1976. № 5. С. 33–41.
2. *Зеликин М. И., Борисов В. Ф.* Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Оптимальное управление – 4. М.: ВИНИТИ, 2002. С. 5–189. (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Т. 90.)

НЕРАВЕНСТВО КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

THE KOLMOGOROV INEQUALITY FOR THE LAPLACE OPERATOR

Кошелев А. А.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия;
aakoshelev@gmail.com

Для дважды дифференцируемых функций f многих переменных ($m \geq 2$) оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}.$$

На классы менее гладких функций оператор Лапласа и его вторая степень распространяются по схеме Соболева (см., например, [1]).

Нас будет интересовать задача о нахождении точной (наименьшей возможной) константы $\mathcal{K}_m$ в неравенстве Колмогорова

$$\|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \leq \mathcal{K}_m \sqrt{\|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}} \tag{1}$$

В настоящее время известно большое количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной (см. обзорную статью [2]). Значительно меньше таких результатов получено для функций многих переменных. Неравенство Колмогорова вида (1) изучал О. Кунчев в [3]. Для константы $\mathcal{K}_m$ он получил оценку

$$\mathcal{K}_m \leq 2\sqrt{\frac{m}{m+2}}, \tag{2}$$

при $m \geq 2$.

Ранее автор получил аналогичную оценку сверху для наилучшей константы $\mathcal{K}_m$ из хорошо известной связи неравенства Колмогорова с задачей С. Б. Стечкина о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными на классе элементов [4]. На этом пути в работах автора 2008 и 2011 годов для случая $m = 2$, $m = 3$ оценка (2) была улучшена.

Оценку снизу для наилучшей константы $\mathcal{K}_m$ можно получить с помощью подходящей, отличной от нулевой, функции, воспользовавшись следующей формой неравенства (1)

$$\mathcal{K}_m \geq \frac{\|\Delta f\|_{C(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{\|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} \|\Delta^2 f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}}}. \tag{3}$$

В докладе рассматриваются свойства аналога идеального сплайна Эйлера (функции Фавара – Ахиезера – Крейна) для второй степени оператора Лапласа Δ^2 и применение его для оценки снизу наилучшей константы $\mathcal{K}_m$ в (3).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание № 1.1544.2011).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
2. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.
3. *Kounchev O.* Extremizers for the multivariate Landau–Kolmogorov inequality // Multivariate Approximation. (W. Haussmann et al., eds.) Akademie-Verlag, 1997. P. 123–132.
4. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ РАВНОВЕСНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

AN APPROXIMATE SOLUTION FOR AN EQUILIBRIUM ROTATING GAS CLOUD

Куликов И. М.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; kulikov@ssd.sscc.ru

Одной из актуальных, недостаточно изученных и требующих дальнейшего исследования проблем эволюции звезд является построение равновесных конфигураций гравитирующих газовых тел. Такие конфигурации важны для моделирования газодинамических процессов на этапах образования нейтронных звезд или черных дыр, а также для моделирования коллапса и вспышек сверхновых. В настоящем докладе звезда рассматривается как самогравитирующее газовое облако и решается задача построения ее равновесных конфигураций как с учетом вращения, так и без него.

В отсутствии вращения звезда имеет сферическую форму, поверхности постоянного давления — изобарические поверхности — являются концентрическими сферами, и все газодинамические параметры обладают центральной симметрией. В этом случае равновесные конфигурации можно построить аналитически и определить газодинамические параметры в явном виде. В общем случае задачу вращения самогравитирующего газового облака приходится решать численно.

Были получены приближенные решения равновесного вращающегося самогравитирующего газа. С увеличением угловой скорости ω самогравитирующий газ принимает форму эллипсоида вращения, полуоси которого можно аппроксимировать функциями:

$$R_{x,y}(\omega) = 2.35 \cdot 10^{-3} \exp(\omega/0.15736) + 1.18171,$$
$$R_z(\omega) = 2.52 \cdot 10^{-3} \exp(\omega/0.17686) + 1.03146.$$

В докладе будет приведено описание численного подхода к получению таких решений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00061, № 12-01-31352 мол_а), а также при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект № МК-4183.2013.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vshivkov V., Lazareva G., Snytnikov A., Kulikov I., Tutukov A.* Hydrodynamical code for numerical simulation of the gas components of colliding galaxies // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2011. V. 194, N 47. C. 1–12.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В МАНТИИ ЗЕМЛИ

APPROXIMATE SOLUTIONS TO THE HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEM IN THE EARTH MANTLE

Лазарева Г. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; lazareva@ssd.sscc.ru

Среди эндогенных механизмов переноса вещества в земной коре и верхней мантии определяющее место занимают движения, причинами которых являются гравитационная неустойчивость и тепловые потоки. Одним из проявлений таких движений в земной коре является интрузивный магматизм, другим — диапиризм, т. е. всплывание более легкого вещества и погружение более тяжелого. Процесс осуществляется при наличии инверсии плотности породы по глубине, т. е. когда в нижней части разреза залегают породы менее плотные, чем в верхней, а проявления его возможны в разных геологических ситуациях и в разных масштабах. Для нахождения параметров процесса плавления в нижней коре и параметров диапиризма введена нестационарная модель геодинамических течений в приближении слабосжимаемой жидкости. При небольших характерных скоростях геодинамических процессов (несколько сантиметров в год) для задач такого типа характерна высокая скорость звука и малое число Маха.

В докладе представлены приближенные решения для нахождения динамики температурного поля при всплывании гранитного вещества с учетом сжимаемости и температурной зависимости реологических свойств, позволяющая верно воспроизводить скорость среды. Разработан алгоритм нахождения гипозвуковой скорости течения на основе решения уравнений движения в интегральной форме. Программная реализация численной модели позволяет получать новые результаты по эволюции гравитационно-неустойчивых систем в недрах Земли.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 12) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00061).

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ДВОЙСТВЕННОСТИ

A NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING SOME VARIATIONAL PROBLEM IN MECHANICS BY THE DUALITY METHOD

Максимова Н. Н.

Амурский государственный университет, Благовещенск, Россия;
knnamursu@mail.ru

Исследуется полукоэрцитивная вариационная задача с недифференцируемым функционалом (модельная задача механики с трением на границе) [1]

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g|v| \, d\Gamma \to \min, \\ v \in W_2^1(\Omega), \end{cases}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ; $f \in L_2(\Omega)$; $0 < g \equiv \text{const}$ на Γ.

Численное исследование данной задачи осложнено недифференцируемостью минимизируемого функционала.

Легко видеть, что задача равносильна следующей задаче [2]

$$\begin{cases} \bar{J}(v,w) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} fv \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} g|v-w| \, d\Gamma \to \min, \\ (v,w) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma); \quad w = 0 \text{ на } \Gamma. \end{cases}$$

Для исследования последней задачи используется метод двойственности, основанный на модифицированном функционале Лагранжа. Введение модифицированного функционала Лагранжа позволяет освободиться от недифференцируемости минимизируемых функционалов во вспомогательных задачах итерационного алгоритма поиска седловой точки. Алгоритм реализуется при конечно-элементной аппроксимации функционалов. Для поиска седловой точки в соответствующих конечномерных задачах используется алгоритм Удзавы и метод, основанный на пошаговом спуске по прямой переменной и подъеме по двойственной переменной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-90807 мол-рф-нр).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
2. *Кушнирук Н. Н., Намм Р. В., Ткаченко А. С.* Об устойчивом сглаживающем алгоритме решения модельной задачи механики с трением // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2011. Т. 51, № 6. С. 1032–1042.

ОБОБЩЁННАЯ КОРРЕКТНОСТЬ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

WELL-POSEDNESS OF AN ABSTRACT CAUCHY PROBLEM IN THE SENSE OF DISTRIBUTIONS

Мельников Е. В.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;
melnikov@omsu.ru

В 1935 г. С. Л. Соболев [1] ввёл понятие корректности задачи Коши в пространстве функционалов, т. е. понятие корректности в смысле обобщённых функций, или, другими словами, её обобщённой корректности. В 1960 г. Ж. Лионс [2] положил начало исследованиям обобщённой корректности (корректности в смысле распределений) абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве. Он доказал, что обобщённая корректность задачи Коши для уравнения $(\delta' \otimes I - \delta \otimes A) * u = f$, т. е. её однозначная разрешимость и непрерывная зависимость решения от правой части, равносильна порождению оператором A так называемой полугруппы-распределения. Далее теория развивалась, в основном, по трём направлениям: обобщении вида уравнения и расширением классов распределений (см., например, [3, 4]), а также обобщении основного пространства с банахова до секвенциально полного локально выпуклого (см., например, [5, 6]). Затем естественно возникла [7] ещё более общая постановка задачи.

Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{F}$ — локально выпуклые пространства, $\beta : \mathcal{P} \times \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ — раздельно непрерывное билинейное отображение.

Будем говорить, что задача Коши для элемента $P \in \mathcal{P}$ обобщённо корректна, если выполнены условия:

1) $\forall\, f \in \mathcal{F} \quad \exists !\, u \in \mathcal{U} \,:\, \beta(P, u) = f$;

2) отображение $\mathcal{F} \ni f \mapsto u(f) \in \mathcal{U}$ непрерывно.

Все предыдущие постановки задачи оказываются частными случаями данной, если мы в качестве $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ берём соответствующие классы векторнозначных и операторнозначных распределений, а в качестве β — свёртку этих распределений.

Для нового понятия обобщённой корректности справедливы аналоги многих результатов для "классических" постановок абстрактной задачи Коши, а их область применения существенно расширилась.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Задача Коши в пространстве функционалов // ДАН. 1935. Т. 3, № 7. С. 291–294.
2. *Lions J. L.* Les semi-groupes distributions // Portugal. Math. 1960. № 7. P. 386–446.
3. *Chazarain J.* Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes // J. Funct. Anal. 1971. Т. 6, № 10. С. 6–10.
4. *Fattorini H. O.* The Cauchy problem. London: Addison-Wesley, 1983.
5. *Мельников Е. В.* Векторнозначные обобщённые функции и обобщённая корректность абстрактной задачи Коши. Омск: Омск. гос. ун-т, 1988. 79 с. (Деп. в ВИНИТИ 15.03.88, № 1994-В88.)
6. *Мельников Е. В.* Теорема о замкнутом графике и обобщённая корректность абстрактной задачи Коши // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 180–183.
7. *Мельников Е. В.* Обобщённая корректность абстрактной задачи Коши // Междунар. конф. "Колмогоров и современная математика" (Москва, 16–21 июня 2003 г.), посвященная 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова: Тез докл. М.: Изд-во МГУ, 2003. С. 312–313.

ОЦЕНКА СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ В ПОЛИКРУГЕ

A MIXED DERIVATIVE ESTIMATE FOR A HOLOMORPHIC FUNCTION IN THE POLYDISK

Меремеля И. Ю.[1], **Савчук М. В.**[2]

[1] *Институт математики НАН Украины, Киев, Украина;* irameremelya@gmail.com

[2] *Институт подготовки кадров государственной службы занятости Украины, Киев, Украина;* savchuk_m@ukr.net

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{C}^d$ — множество всех упорядоченных наборов $\mathbf{z} := (z_1, \ldots, z_d)$ комплексных чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max\limits_{1\le j\le m} |z_j| < 1\}$ — единичный поликруг и $\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \ |z_j| = 1, \ j = \overline{1,d}\}$ — остов поликруга $\mathbb{D}^d$.

Пространство Харди $H_1 := H_1(\mathbb{D}^d)$ состоит из всех голоморфных функций $f : \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|f\|_1 := \sup_{0<\varrho<1} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f_\varrho| \, d\sigma < \infty,$$

где $f_\varrho(\mathbf{w}) := f(\varrho\mathbf{w})$, $\varrho\mathbf{w} := (\varrho w_1, \ldots, \varrho w_d)$, σ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}^d$.

Оценки производных голоморфных функций составляют отдельную группу экстремальных задач современной геометрической теории функций одной переменной. В последнее время наблюдается значительный интерес к аналогичным исследованиям в случае голоморфных функций многих переменных [1–3].

В данном докладе приводится точная оценка смешанной производной голоморфной функции из пространства Харди H_1 в поликруге $\mathbb{D}^d$.

Теорема. *Пусть функция $f \in H_1(\mathbb{D}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$*

$$\Big|\frac{\partial^d}{\partial z_1 \ldots \partial z_d} f(\mathbf{z})\Big| \le \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{|z_j| + \sqrt{1+|z_j|^2}}{(1-|z_j|^2)^2}. \tag{1}$$

Равенство в (1) *достигается для функции*

$$f(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{(1-\overline{y}_j w_j)^2}{(1-\overline{z}_j w_j)^4},$$

где $y_j := z_j - e^{i\arg z_j}(1-|z_j|^2)/\sqrt{1+|z_j|^2}$.

Данный результат является распространением известной теоремы А. Макинтайра и В. Рогозинского [4] на многомерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Knese G.* A Schwarz lemma on the polydisk // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135, N 9. P. 2759–2768.
2. *Anderson J. M., Dritschel M. A., Rovnyak J.* Schwarz–Pick inequalities for the Schur–Agler class on the polydisk and unit ball // Comput. Methods Funct. Theory. 2008. V. 8, N 2. P. 339–361.
3. *Chen Zh., Liu Y.* Schwarz–Pick estimates for holomorphic mappings from the polydisk to the unit ball // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 376. P. 123–128.
4. *Macintyre A. J., Rogosinski W. W.* Some elementary inequalities in function theory // Edinb. Math. Notes. 1945. V. 35. P. 1–3.

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

ON THE ERROR BOUNDS FOR LOCAL APPROXIMATION BY CUBIC SPLINES

Мирошниченко В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Miroshn@math.nsc.ru

Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ заданы значения функции $f(x)$: $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Дополним сетку Δ узлами $x_{-3} \le x_{-2} \le x_{-1} \le x_0$ и $x_{n+3} \ge x_{n+2} \ge x_{n+1} \ge x_n$. Функция

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i B_i(x),$$

где $B_i(x) \in C^2$ — кубические нормализованные B-сплайны, а каждый из коэффициентов α_i явным образом определяется только через несколько значений f_k из окрестности узла x_i, называется кубическим локально-аппроксимационным сплайном (локальной аппроксимацией) [1].

В представленном докладе обсуждаются следующие вопросы.

- Дается обзор известных точных оценок приближения локально-аппроксимационными сплайнами при различных вариантах определения коэффициентов α_i [1–4].
- Приводятся новые результаты об оценках приближения локально-аппроксимационными сплайнами, реализующими асимптотически (при стремлении шага сетки к нулю) наилучшее приближение в равномерной метрике кубическими сплайнами класса C^2 для достаточно гладких функций.
- Изучается задача о возможности построения локальной аппроксимации, реализующей поперечник по Колмогорову в классе W_∞^4.

Изложение материала иллюстрируется численными примерами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-00447) и интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и УрО РАН (проект № 32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Овчинникова Т. Э.* Точные оценки приближения локальной аппроксимации кубическими сплайнами. Формула точная на полиномах первой степени // Вычислительные системы. Вып. 128: Аппроксимация сплайнами. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1988. С. 39–59.
3. *Жанлав Т., Мирошниченко В. Л.* Аппроксимация функций локально-интерполяционными кубическими сплайнами // Вычислительные системы. Вып. 137: Приближение сплайнами. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1990. С. 3–30.
4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.

РАСШИРЕННАЯ СОБОЛЕВСКАЯ ШКАЛА
AN EXTENDED SOBOLEV SCALE

Михайлец В. А.[1], **Мурач А. А.**[2]

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина;
[1]mikhailets@imath.kiev.ua, [2]murach@imath.kiev.ua

Хорошо известна фундаментальная роль пространств Соболева в математическом анализе и теории дифференциальных уравнений. Тем не менее, для ряда задач образованная ими шкала является недостаточно тонкой. Это приводит к необходимости использовать более тонко градуированные шкалы функциональных пространств. Среди них особый интерес представляют гильбертовы изотропные пространства Хёрмандера, которые образуют расширенную соболевскую шкалу (сокр. р. с. ш.) $\{H^\varphi : \varphi \in \mathrm{RO}\}$. Здесь функциональный параметр $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ пробегает класс всех измеримых по Борелю функций, RO-меняющихся на $+\infty$ по В. Авакумовичу. Это означает, что для некоторых чисел $a > 1$ и $c \geq 1$ верно $c^{-1} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c$ для любых $t \geq 1$ и $\lambda \in [1, a]$ (числа a и c могут зависеть от φ).

Р. с. ш. на $\mathbb{R}^n$ состоит из гильбертовых функциональных пространств

$$H^\varphi(\mathbb{R}^n) := \big\{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \ \|w\|^2_\varphi := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)|(Fw)(\xi)|^2\, d\xi < \infty\big\}$$

и определяется на евклидовых областях и гладких компактных многообразиях стандартным образом. (Как обычно, $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а Fw — преобразование Фурье медленно растущего распределения w.) В частности, если $\varphi(t) \equiv t^s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\varphi =: H^{(s)}$ — пространство Соболева порядка s.

Р. с. ш. обладает рядом важных интерполяционных свойств. Она состоит из *всех* гильбертовых пространств, интерполяционных относительно пар гильбертовых пространств Соболева $[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}]$, где $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$. При этом каждое пространство H^φ, где $\varphi \in \mathrm{RO}$, может быть получено интерполяцией с подходящим функциональным параметром некоторой пары пространств Соболева $[H^{(s_0)}, H^{(s_1)}]$. Кроме того, р. с. ш. замкнута относительно интерполяции с функциональным параметром.

Эта шкала содержит пространства $H^\varphi =: H^{s,\varphi_0}$, где $\varphi(t) \equiv t^s\varphi_0(t)$ для некоторого числа $s \in \mathbb{R}$ и функции φ_0, медленно меняющейся на $+\infty$ по Й. Карамате. Классическими примерами функции φ_0 служат логарифмическая функция, ее итерации и их произвольные вещественные степени. Эти пространства образуют уточненную с. ш., которая привязана к соболевской шкале посредством числового параметра s, поскольку $H^{(s+\varepsilon)} \subset H^{s,\varphi_0} \subset H^{(s-\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Благодаря своим интерполяционным свойствам пространства H^φ и H^{s,φ_0} имеют важные приложения в теории эллиптических операторов и эллиптических краевых задач [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хёрмандера, интерполяция и эллиптические задачи. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. [arXiv:1106.3214].
2. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. 2012. V. 6, N 2. C. 211–281.
3. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. 2013. Т. 65, № 3. С. 368–380.

О ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА НЕПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

ON DISCRETENESS OF THE SPECTRUM OF A NON-SEMIBOUNDED DIFFERENTIAL OPERATOR

Муратбеков М. Б.[1], **Мусилимов Б. М.**[2], **Мусабекова З. Е.**[3]

Таразский государственный педагогический институт, Тараз, Казахстан;
[1]musahan_m@mail.ru, [2]bilan45@mail.ru, [3]igisinovsabit@mail.ru

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Множество бесконечно гладких финитных функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в H обозначим через $C_0^\infty(H,\mathbb{R})$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv (-1)^m u^{(2m)}(y) + k(y)Au + ia(y)A^\alpha u + c(y)u,$$

где $u(y) \in C_0^\infty(H,\mathbb{R})$, A — положительно определенный самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H с вполне непрерывной резольвентой, $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right]$, m — целое положительное число, $k(y)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная функция в $\mathbb{R}$, $k(0)=0$ и $yk(y)>0$ при $y\neq 0$.

Пусть выполнено условие:

(i) $|a(x)| \geq \delta_0 > 0$, $c(x) \geq \delta > 0$ — непрерывные функции в $\mathbb{R}$.

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (i), *$c(y)$ — ограниченная функция и $\lambda = 0$ — собственное значение оператора A с конечной кратностью. Тогда непрерывный спектр оператора L не пуст.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (i). *Тогда дискретный спектр оператора L не пуст, если справедливо равенство*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_y^{y+w} c(t)\,dt = \infty.$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (i), *и пусть A — положительно определенный оператор с вполне непрерывным обратным. Тогда спектр оператора L дискретен тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_y^{y+w} c(t)\,dt = \infty \quad \textit{или} \quad \lim_{|y|\to\infty} \int_y^{y+w} |a(t)|\,dt = \infty$$

для любого $w>0$.

УРАВНЕНИЕ МОНЖА – АМПЕРА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

THE MONGE–AMPERE EQUATION ON A POSITIVE CURRENT

Никитина Т. Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия; AANick@yandex.ru

Пусть M — комплексное многообразие и T — положительный поток на M. Пусть u и f — гладкие дифференциальные формы на M. Говорят, что $(\overline{\partial}\partial u)^k = f$ на T, если $(\overline{\partial}\partial u)^k \wedge T = f \wedge T$.

Разрешимость уравнений Монжа – Ампера в случае $k = 1$ является классической (см. [1–3]).

Определение [4]. Форма f порядка k называется *примитивной* на T, если $k \le n$ и $f \wedge \omega_{n-k+1} \wedge T = 0$.

Определение. Пусть $f \in \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$. Нормой формы f на T назовем величину $|f|^2_{\omega,T}\sigma_T = c_{q+p} f \wedge \overline{\hat{f}} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T$, где $\hat{f} = f_0 \wedge \omega^p + \sum\limits_{k=1}^{p} \widehat{f_k} \wedge \omega^{p-k}$, а $f_k \in \Lambda_T^{k,q-p+k}$ — примитивные формы, $\widehat{f_k} = -\tau^k - \sum\limits_{r=1}^{k-1} (-1)^{k+r}\sigma_r^k + (-1)^k \sigma_0^k$.

Определение. Пусть $u \in L^2_{p,q,\mathrm{loc}}(T)$. Говорят, что $(\overline{\partial}\partial_w u)^k = f$ на T, если $f \in L^2_{(p+1)k,(q+1)k,\mathrm{loc}}(T)$ и $(\overline{\partial}\partial u)^{k-1} \wedge \overline{\partial}\partial(u \wedge T) = f \wedge T$ в смысле потоков.

В работе приводится основной технический результат — обобщение тождества Кодаиры – Накано – Хёрмандера.

Теорема. *Пусть $T \ge 0$ — замкнутый $(1,1)$-поток в $\mathbb{C}^{nk+1}$, и пусть $\omega = i\partial\overline{\partial}|z|^2$ — кэлерова форма евклидовой метрики в $\mathbb{C}^{nk+1}$. Пусть φ — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^{nk+1}$, удовлетворяющая $i\partial\overline{\partial}\varphi \ge \omega$. Тогда для любой $\overline{\partial}_w$-замкнутой $(nk-pk, qk)$-формы f на T с $(q-p)k \ge 1$ существует $(n-p-1, q-1)$-форма u на T такая, что $(\overline{\partial}\partial_w u)^k = f$ на T и $\int |\partial u \wedge (\overline{\partial}\partial u)^{k-1}|^2_{\omega,T}\sigma_T e^{-\varphi} \le \frac{1}{((q-p)k-1)} \int |f|^2_{\omega,T}\sigma_T e^{-\varphi}$.*

Также имеем версию теоремы для псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^{nk+1}$ и общих кэлеровых метрик. Далее дается версия последней теоремы для некоторых компактных кэлеровых многообразий. Решающую часть в доказательствах играло предложение, которое говорит, что квадратичная форма, определенная как $[\gamma, \hat{\gamma}]\sigma_T = c_{q+p}\gamma \wedge \overline{\hat{\gamma}} \wedge T \wedge \omega_{n-q-p}$, является определенной на пространстве примитивных (q,p)-форм на T. Это больше неверно для (s,s)-потоков, $s \ge 2$, даже если они являются строго положительными. Пусть T — $(2,2)$-форма в $\mathbb{C}^{(p+1)k+2}$, $p \ge 1, k \ge 1$. Можно показать, что локальная разрешимость для $(\overline{\partial}\partial u)^k$ на $(k(p+1), k)$-$((k, k(p+1))$-)формах не имеет места для этого выбора T.

Работа выполнена при поддержке гранта СФУ по НМ (проект № 45, 2007).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чирка Е. М.* Потоки и некоторые их применения // Харви Р. Голоморфные цепи и их границы. М.: Мир, 1979. С. 122–158.
2. *Никитина Т. Н.* Устранимые особенности на границе и $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии. Новосибирск: Наука, 2008.
3. *Nikitina T. N.* The $\overline{\partial}\partial$-equation on a positive current // The 14th General Meeting of European Women in Mathematics: Book of Abstracts. Part II. University of Novi Sad (Serbia), 2009. P. 15–16.
4. *Berndtsson B., Sibony N.* The $\overline{\partial}$-equation on a positive current // Invent. Math. 2002. V. 147. P. 371–428.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

APPROXIMATION OF PERIODICAL FUNCTIONS BY REPEATED DE LA VALLÉE POUSSIN SUMS

Новиков О. А.[1], **Ровенская О. Г.**[2]

[1]*Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина;* sgpi@slav.dn.ua

[2]*Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск, Украина;* o.rovenskaya@mail.ru

Пусть $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L$. Тогда суммы Валле Пуссена функции f задаются соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x).$$

Пусть $p_1,\ p_2 \in \mathbb{N},\ p_1 + p_2 < n$. Функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов

$$V_{n,p_1,p_2}(f;x) = V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x),$$

которые будем называть повторными суммами Валле Пуссена [1].

Классификация периодических функций на основании преобразования их рядов Фурье с помощью мультипликаторов была предложена А. И. Степанцом в конце прошлого столетия [2]. Она позволяет единым образом классифицировать широкий спектр функций, в том числе функции малой, ограниченной гладкости и бесконечно дифференцируемые. Исследованы вопросы приближения повторными суммами Валле Пуссена функций из классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$, которые задаются мультипликаторами $\overline{\psi}(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ при условии, что последовательности $\psi_i(k)$, $i = 1, 2$, которые определяют указанные классы, стремятся к нулю со скоростью, не превышающей скорости убывания к нулю степенной функции. Получена асимптотическая формула, обеспечивающая решение известной задачи Колмогорова – Никольского для повторных сумм Валле Пуссена и классов $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ (см. обозначения, например, в [3]).

Теорема. *Пусть* $f \in C^{\overline{\psi}}_{\infty}$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{M}'$, $i = 1, 2$, $p_1 \le p_2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_2}{n} = 0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\psi}}_{\infty}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^{\overline{\psi}}_{\infty}} \left\|f(x) - V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)\right\| = \frac{2}{\pi}\int_n^{\infty}\frac{\psi_2(x)}{x}\,dx + \frac{4\overline{\psi}(n)}{\pi^2}\ln\frac{n}{p_1+p_2} + O(1)\overline{\psi}(n),$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* n, p_1, p_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ровенская О. Г., Новиков О. А.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелинейные колебания. 2010. Т. 13, № 1. С. 96–99.
2. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49, № 8. С. 1069–1113.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. 1. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002.

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЯМИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

OPTIMAL INTERPOLATION BY FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Новиков С. И.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ — ограниченная выпуклая область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ — ее замыкание, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ — оператор Лапласа, $U = \{u \in C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega}) : \ \Delta u \in L_\infty(\Omega)\}$, где производные второго порядка понимаются в смысле Соболева.

Для конечного набора вещественных чисел $z = \{z_j\}_{j=1}^N$ полагаем $\|z\|_{l_\infty^N} = \max\{|z_j| : \ j = 1, 2, \ldots, N\}$. Пусть

$$\mathfrak{M}_\infty^N = \left\{z : \ z = \{z_j\}_{j=1}^N, \ \|z\|_{l_\infty^N} \leq 1\right\}$$

— класс интерполируемых данных, $\{x^{(s)}\}_{s=1}^N \subset \Omega$ — набор точек интерполяции,

$$F_N(z) = \left\{u \in U : \ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ u(x^{(s)}) = z_s, \ s = 1, 2, \ldots, N\right\}$$

— класс функций, каждая из которых интерполирует фиксированный элемент $z \in \mathfrak{M}_\infty^N$.

Задача состоит в исследовании величины

$$a_\infty^N(\Omega) = \sup_{z \in \mathfrak{M}_\infty^N} \inf_{u \in F_N(z)} \|\Delta u\|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{1}$$

которая тесно связана с интерполяционной проблемой Фавара и задачами экстремальной функциональной интерполяции.

Опираясь на результаты, содержащиеся в [1], установлено, что точная верхняя грань в (1) достигается в одной или нескольких крайних точках множества $\mathfrak{M}_\infty^N$.

В качестве Ω автором были выбраны следующие множества:

1) $K_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$ — шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат;

2) $Q^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < x_1 < 1, \ \ldots, \ 0 < x_n < 1\}$ — единичный n-мерный куб.

Для шара величина (1) и некоторые близкие к ней величины изучались в работах автора [2, 3].

В докладе будет идти речь об оценках величины (1) в случае $\Omega = Q^2$ (т. е. для единичного квадрата на плоскости), когда в качестве множества точек интерполяции берется сетка равноотстоящих узлов, расположенных горизонтально на центральной оси квадрата. Также будут представлены результаты, относящиеся к аналогу величины (1) для всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00347 а) и интеграционного проекта, выполняемого совместно УрО РАН и СО РАН (проект № 12-С-1-1018).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Holmes R.* Geometric functional analysis and its applications. New York; etc.: Springer-Verlag, 1975.
2. *Новиков С. И.* Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 248–262.
3. *Новиков С. И.* Интерполяция в шаре с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 258–265.

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ШИАРЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

FAST SHEARLET TRANSFORM ALGORITHMS FOR OBSERVATION DATA PROCESSING

Носков М. В.[1], **Симонов К. В.**[2], **Кириллова С. В.**[1], **Кадена Л.**[1]

[1] *Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;*
[2] *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;*
mvnoskov@yandex.ru, simonovkv@icm.krasn.ru, svkirillova2009@yandex.ru, ecuadorx@gmail.com

В рамках решения задач анализа пространственных данных рассмотрены принципы построения быстрого алгоритма дискретного шиарлет-преобразования данных наблюдений, в основе реализации которого лежат быстрые алгоритмы Фурье-преобразования. Следуя работам [1, 2], описано непрерывное шиарлет-преобразование, а затем, посредством дискретизации параметров, дискретное шиарлет-преобразование. Рассмотрены шиарлеты на конусе, такой подход позволяет получить хорошее разделение горизонтального и вертикального направлений шиарлетов в частотной области.

Отметим, что проблеме разделения изображения на морфологически различные составляющие в последнее время уделяют много внимания в связи с ее значимостью для важных приложений. Успешные вычислительные методики для эффективного и точного решения этой задачи могут быть применены к широкому кругу областей, в том числе к задачам визуализации пространственных данных для целей диагностики сложных явлений. Сравнительно недавно появившаяся система представления пространственных сигналов (изображений), названная шиарлет-системой, явилась эффективным инструментом для анализа внутренних геометрических черт сигнала. Шиарлет-системы — это системы, порожденные параболическим масштабированием, сдвигом и оператором параллельного переноса к исходным пространственным данным наблюдений. Это те же вейвлет-системы, имеющие двоичное масштабирование и параллельный перенос функции, однако также включающие характеристику направленности, имея дополнительную "сдвиговую" операцию (анизотропное масштабирование). Эта операция, фактически, дает более удобный подход для анализа направлений.

Алгоритм дискретного шиарлет-преобразования эффективно реализуется с помощью быстрых алгоритмов Фурье-преобразования. В среде Матлаб, на основе рассмотренного алгоритма, показаны возможности шиарлет-преобразования для анализа, в частности, медицинских изображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hauser S.* Fast finite shearlet transform: a tutorial. 2011. (Preprint / University of Kaiserslautern).
2. *Kutyniok G., Guo K., Labate D.* Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators // Wavelets and Splines (Athens, GA, 2005). Nashville, TN: Nashboro Press, 2006. P. 189–201.

ОБ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ С ПРОИЗВОДНЫМИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

ON AN OPTIMAL QUADRATURE FORMULA WITH ODD-ORDER DERIVATIVES

Нуралиев Ф. А.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; nuralievf@mail.ru

Настоящая работа посвящена изучению оптимальной квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta] + A(\varphi'(0) - \varphi'(1)) + B(\varphi'''(0) - \varphi'''(1)) \qquad (1)$$

в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Здесь $L_2^{(m)}(0,1)$ — пространство функций, обобщенные производные порядка m которых интегрируемы с квадратом [1]. В формуле (1) $N \geq m$, $h = 1/N$, A, B, $C[\beta]$ — коэффициенты, $[\beta] = h\beta$, $i_{[0,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\varphi(x)$ — элемент пространства $L_2^{(m)}(0,1)$.

Нами доказано существование и единственность оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ и показано, что оптимальные коэффициенты рассматриваемой формулы выражаются через корни многочлена Эйлера $E_{2m-4}(x)$ степени $2m-4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРЕХМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

NUMERICAL SOLUTION OF A 3-D VECTOR TOMOGRAPHY PROBLEM BY THE SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

Полякова А. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
anna.polyakova@ngs.ru

В данной работе рассматривается задача восстановления потенциальной части трехмерного векторного поля, заданного в единичном шаре, по его известному нормальному преобразованию Радона. Нормальное преобразование Радона векторного поля $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ определяется формулой:

$$\left[\mathcal{R}^{\perp}\mathbf{w}\right](\xi, s) = \iint\limits_{P_{\xi,s}} \left(w_1\xi^1 + w_2\xi^2 + w_3\xi^3\right)\, du\, dv,$$

здесь $P_{\xi,s}$ — плоскость, перпендикулярная направлению ξ и отстоящая на расстояние $|s|$ от начала координат, u, v — координаты локальной системы координат, заданной на плоскости $P_{\xi,s}$. Поскольку соленоидальная часть векторного поля лежит в ядре нормального преобразования Радона, мы можем восстановить лишь его потенциальную часть.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод сингулярного разложения, основная идея которого заключается в следующем: образ оператора представляется в виде ряда по базисным элементам с сингулярными числами в качестве коэффициентов. Тогда образ обратного оператора будет представлять собой ряд со схожей структурой, в котором задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа.

В работе построено сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона, получена формула обращения и аппроксимации для обратного оператора. В исходном пространстве интегрируемых с квадратом векторных полей, заданных в единичном шаре, ортонормированные базисы строятся с помощью полиномов Якоби и сферических гармоник. Используя результат [1], удалось показать, что соответствующие ортонормированные базисы в пространстве образов строятся на основе полиномов Гегенбауэра и сферических гармоник.

Полученное сингулярное разложение легло в основу алгоритма численного решения задачи по восстановлению потенциальной части трехмерного векторного поля по его известному нормальному преобразованию Радона.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Отделения математических наук РАН (проект № 1.3.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-07-00447, № 12-01-31178 мол_а), интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и УрО РАН (проект № 32).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Louis A. K.* Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15, N 3. P. 621–633.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ТЕТРАЭДРА С ИНВЕРСИЕЙ

CUBATURE FORMULAS ON THE SPHERE WHICH ARE INVARIANT UNDER THE GROUP OF TETRAHEDRAL ROTATIONS WITH INVERSION

Попов А. С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; popov@labchem.sscc.ru

Основы теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно конечных групп вращений, были заложены С. Л. Соболевым [1]. К настоящему времени наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников. В частности, в [2] был предложен некий алгоритм построения кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений тетраэдра с инверсией T_h, а в [3] этот алгоритм был использован для поиска всех наилучших (в некотором смысле) кубатур группы T_h до 41-го порядка точности n.

В данной работе будет предложен унифицированный по сравнению с работами [2, 3] алгоритм поиска наилучших кубатур группы T_h для сферы. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии для $n \le 41$. При этом для $n \le 11$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n — приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа.

Для $n = 3$ и $n = 7$ наилучшие кубатуры группы T_h совпадают с наилучшими кубатурами группы октаэдра с инверсией O_h, а для $n = 5$ и $n = 9$ — с наилучшими кубатурами группы икосаэдра с инверсией Y_h. Для всех остальных n наилучшие кубатуры группы T_h содержат меньшее число узлов по сравнению с наилучшими кубатурами групп O_h и Y_h. Однако для больших n всё же предпочтительнее пользоваться кубатурами групп O_h и Y_h, поскольку асимптотически при одинаковой точности они требуют соответственно в два и пять раз меньше информации для хранения в памяти ЭВМ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00427 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 769–796.
2. *Попов А. С.* Кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы тетраэдра // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 3. С. 459–466.
3. *Попов А. С.* Наилучшие кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы вращений тетраэдра с инверсией // Междунар. конф. по вычисл. математике. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 128–131.

ОБ АЛГОРИТМАХ ПОСТРОЕНИЯ СПЛАЙНОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

ON ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING QUINTIC SPLINES

Примаков С. С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
nprist89@mail.ru

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах равномерной сетки Δ: $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,N}$; $x_0 = a$, $h = (b-a)/N$, заданы значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,N}$. Через $S(x)$ обозначим сплайн пятой степени класса C^4, удовлетворяющий условиям интерполяции $S(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,N}$, и одному из типов краевых условий: "классические" и двухточечные условия, аппроксимация производных сплайна в предыдущих условиях с помощью разделенных разностей требуемого порядка точности, условия "not-a-knot".

Предполагается, что функция $f(x)$ достаточно гладкая и имеет все необходимые производные для расчетов. Системы линейных уравнений относительно m_i приводятся к системам с диагональным преобладанием. Это позволяет получить оценку для различных типов краевых условий:

$$S(x) = f(x) + \frac{h^6}{6!}\varphi_{i,N}(t)f^{(6)}(x) + O(h^7), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = \overline{0,N-1},$$

где функции $\varphi_{i,N}(t)$ зависят от номера интервала и от количества узлов сетки, а также от типа краевых условий. Причем для оптимальных краевых условий

$$\varphi_{i,N}(t) \equiv \varphi(t) = \frac{1}{2}t^2(1-t)^2(1+2t-2t^2).$$

В случае неравномерной сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ используется алгоритм построения сплайна пятой степени, основанный на разложении его второй производной по B-сплайнам. В качестве краевых условий рассматриваются "классические" условия — задание первой и второй производных сплайна на концах отрезка $[a,b]$, оптимальные условия из случая равномерной сетки, условия "not-a-knot".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Мирошниченко В. Л.* О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами // Вычислительные системы. Вып. 108. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1985. С. 3–30.
3. *Киндалев Б. С.* Асимптотические формулы для сплайна пятой степени и их применение // Вычислительные системы. Вып. 87. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1981. С. 18–24.
4. *Мирошниченко В. Л.* Об интерполяции и аппроксимации сплайнами // Вычислительные системы. Вып. 100. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1983. С. 83–100.
5. *Примаков С. С.* Асимптотический анализ краевых условий для сплайнов пятой степени // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 2. С. 173–188.
6. *Волков Ю. С.* Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34.

ПОСТРОЕНИЕ НАИЛУЧШИХ ПО ПОРЯДКУ НЕНАСЫЩАЕМЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

CONSTRUCTION OF THE BEST ORDER UNSATURATED CUBATURE FORMULAS

Рахматуллин Д. Я.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; rahmdy@gmail.com

Работа посвящена построению наилучших по порядку ненасыщаемых решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем [1, 2].

Для имеющейся последовательности наилучших решеток можно построить последовательность кубатурных формул, оптимальных по порядку для каждой из таких решеток.

Ненасыщаемость алгоритма рассматривается в смысле определения К. И. Бабенко о ненасыщаемости как о сохранении оптимальных порядков сходимостей для всех функциональных пространств, являющихся параметрами задачи.

Исследование является развитием статей [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31260 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
2. *Рамазанов М. Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2009.
3. *Рамазанов М. Д.* Новый алгоритм асимптотически оптимальных решетчатых кубатурных формул // Уфимск. мат. журн. 2010. Т. 2, № 3. С. 61–80.
4. *Рамазанов М. Д.* Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемсти // Мат. сб. 2013 (в печати).

ФУНКЦИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

SOBOLEV TYPE FUNCTIONS WITH VARIABLE CHARACTERISTICS ON METRIC SPACES

Романов А. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
asrom@math.nsc.ru

Рассмотрим метрическое пространство (X, d), борелевскую меру μ с носителем в X и измеримую функцию $p : X \to [1, \infty)$. Символом $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ обозначим пространство Лебега с переменным показателем суммируемости [1].

Функцию $g : X \to [0, \infty)$ называют допустимой для μ-измеримой функции $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le d(x, y)(g(x) + g(y))$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Для функции u обозначим через $D(u)$ множество всех допустимых функций и по аналогии с работой [2] пространство соболевского типа с переменным показателем суммируемости $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ определим условием

$$M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu) = \{u \in L_{p(\cdot)}(X, \mu) \mid D(u) \cap L_{p(\cdot)}(X, \mu) \neq \emptyset\},$$

а норму равенством $\big\|u \mid M^1_{p(\cdot)}\big\| = \|u \mid L_{p(\cdot)}\| + \inf\limits_{g \in D(u)} \|g \mid L_{p(\cdot)}\|$.

Пространство $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ является банаховым. На евклидовом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ при достаточно регулярном показателе суммируемости $p(x)$ пространство $M^1_{p(\cdot)}(B, |*|, m_n)$, где $|*|$ — евклидова метрика, m_n — мера Лебега, совпадает с пространством Соболева $W^1_{p(\cdot)}(B)$.

Структура пространств $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ существенным образом зависит от поведения показателя $p(x)$. В случае, когда функция $p(x)$ является непрерывной, а мера μ удовлетворяет "условию удвоения", для пространств $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ выполняются аналоги теорем вложения, полученных в работе [1]. В случае липшицевости показателя суммируемости удается доказать аналог теоремы вложения, выполняющейся в евклидовом случае для пространств Соболева $W^1_{p(\cdot)}(G)$ [3].

Теорема. *Пусть (X, d) — метрическое пространство с s-регулярной мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения, а показатель $p(x)$ является липшицевым и $1 < p_- \le p(x) \le p^+ < s$. Тогда существует такая постоянная $C < \infty$, что для всякой функции $u \in M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ имеем неравенство $\|u \mid L_{q(\cdot)}\| \le C\big\|u \mid M^1_{p(\cdot)}\big\|$, где $q(x) = \dfrac{sp(x)}{s - p(x)}$.*

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и ДВО РАН (проект № 56).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czech. Math. J. 1991. V. 41, N 4. P. 592–618.
2. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
3. *Edmunds D., Rakosnik J.* Sobolev embeddings with variable exponent // Stud. Math. 2000. V. 143, N 3. P. 267–293.

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СОБОЛЕВСКИХ КЛАССОВ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

A NEW APPROACH TO THE DESCRIPTION OF SOBOLEV CLASSES OF FUNCTIONS ON METRIC SPACES AND ITS APPLICATIONS

Романовский Н. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
nnrom@math.nsc.ru

Пусть $p > 1$, область $U \subset \mathbb{R}^n$ ограничена и принадлежит классу C, а функция g, которая зависит от $n-1$ переменных и определяет локально область U в подходящей ортонормированной системе координат неравенством

$$\tilde{x}_{n+1} < g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}),$$

удовлетворяет соотношениям

$$\Big[\frac{g(x + he_i) - 2g(x) + g(x - he_i)}{h}\Big]_+ \le C, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Тогда пространство Соболева $W_p^1(U)$ совпадает с множеством функций из $L_p(U)$, для которых конечна величина

$$[f]_{S_p^1} := \sup_{\sigma \in \Sigma} \left(\sum_i \inf_{a_i \in \mathbb{R}} \int\limits_{E_i} \left(\frac{|f - a_i|}{\operatorname{diam}(\mathrm{E_i})} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{H}$$

где Σ — множество конечных разбиений U на непересекающиеся измеримые множества E_i. Причем нормы $\|\cdot\|_{W_p^1}$ и $\|\cdot\|_{S_p^1} := \|\cdot\|_{L_p} + [\cdot]_{S_p^1}$ эквивалентны.

Приведенное описание пространств Соболева оказывается удобным в ряде случаев. Например, оно позволяет доказывать теоремы вложения, не используя свойств интегральных операторов (см. [1]). Таким способом можно изучать свойства операторов вложения для областей с особенностью (например, в виде пика или гребня с нулевым углом). Заменой $\operatorname{diam}(E_i)$ на $\operatorname{diam}(E_i)^r$, $0 < r \le 1$, в (H) определение может быть обобщено на случай нецелой гладкости.

Определение также подходит для случая функций, заданных на произвольном метрическом пространстве с борелевской мерой. Теоремы вложения могут быть доказаны даже для случая, когда метрическое пространство не удовлетворяет условию удвоения [1]. Доказывается корректность задачи минимизации функционала энергии $u \mapsto [u]_{S_p^r}$ при дополнительном условии $Pu = f$, где P — ограниченный оператор из S_p^r в некоторое функциональное пространство F (например оператор следа). Наконец, определение может быть обобщено заменой $\operatorname{diam}(E_i)^r$ на произвольную субаддитивную функцию множеств, что позволяет рассмотреть функции переменной гладкости и, предполагая зависимость субаддитивной функции множеств от a_i, на нелинейные функциональные классы, полезные при изучении нелинейных уравнений.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта, выполняемого совместно СО РАН и ДВО РАН (проект № 56).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романовский Н. Н.* Классы Соболева на произвольном метрическом пространстве с мерой. Компактность операторов вложения // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 450–467.

ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ ДО ИНТЕГРАЛА
EXTENSION OF A MEASURE TO AN INTEGRAL

Савельев Л. Я.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
savelev@math.nsc.ru

Рассматриваются векторные меры, являющиеся линейными отображениями спектральных множеств в векторные пространства. Спектральными множествами являются, в частности, полукольца индикаторов множеств. Затрагиваются обобщения на абстрактные алгебры и спектральные множества их идемпотентов. Формулируются условия существования линейного продолжения меры на линейную оболочку ее области определения. Обсуждаются сложности, возникающие в случае неассоциативных алгебр. Центральной является задача непрерывного продолжения полученной для данных функции и меры интегральной суммы на замыкание линейной оболочки в данной топологии, согласованной с алгебраическими операциями. Исследуются условия существования непрерывного продолжения интегральной суммы на замыкание ее области определения и свойства полученного непрерывного линейного оператора — интеграла данной функции по данной мере. Обсуждаются некоторые другие способы продолжения меры до интеграла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00275).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2010.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ В УЗЛАХ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЗНАЧЕНИЯ ЕЕ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

CUBATURE FORMULAS CONTAINING THE VALUES OF THE FUNCTION AND THE VALUES OF ITS FIRST DERIVATIVE AT THE NODES

Санеева Л. И.[1], **Данзанова В. С.**

Восточно-Сибирский государственный технологический университет технологии и управления, Улан-Удэ, Россия;
[1]ili04@mail.ru

Данная работа посвящена построению эрмитовых кубатурных формул для гладких областей, содержащих значения функции и ее производных по направлению одной из координатных осей с коэффициентами, зависящими от уравнения гладкой границы.

Пусть выпуклая область Ω имеет гладкую границу $\Gamma = \Gamma(\Omega) \in C^{(m+1)}$ в n-мерном пространстве, любая прямая пересекает границу области не более чем в двух точках, все пространство E_n делится на k частей ω_j, $j = 1, \dots, k$, гиперплоскостями параллельными координатным плоскостям, $\omega_{j,h} = \{x \in \omega_j,\ \rho(x, \Gamma(\omega_j)) \le Lh\}$, $j = 1, \dots, k$, $\Phi_j(x)$ — срезывающие финитные функции, соответствующие областям ω_j, $\sum\limits_{j=1}^{k} \Phi_j(x) \equiv 1$ — разложение единицы в n-мерном пространстве (из работ М. Д. Рамазанова), $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$, $\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$, граница $\Gamma(\omega_j)$ области ω_j выражается уравнением $x_n = \lambda_j(x')$. Замена $y' = x'$, $y_n = x_n - \lambda_j(x')$ преобразует область ω_j в область ω'_j, $\Phi_j(x)$ в $\widehat{\Phi}_j(y)$, границу $\Gamma(\omega_j)$ области ω_j в кусок гиперплоскости $y_n = 0$ и криволинейный параллелограмм $\Delta'_{h\beta}$ в куб $\Delta_{h\beta}$. В общем виде функционал погрешности $\rho_1(x)$ для области ω_1 имеет вид $\Phi_1(x)\rho_1(x) = \Phi(x)\Big[1 - \sum\limits_{\beta'=-\infty}^{\infty} h^n \delta(x' - h\beta') \sum\limits_{\beta_n=0}^{\infty} \sum\limits_{\sigma=0}^{m} B^{\sigma}_{\beta_n,1}(\beta') h^{\sigma} \delta^{(\sigma)}\big(x_n - h\beta_n - \big[\frac{\lambda_1(\beta')}{h}\big]h\big)\Big]$, где $B^{\sigma}_{\beta_n,1}(\beta') = (-1)^{\sigma} \sum\limits_{s=0}^{\min(m,\beta)} K^{\sigma}_{s} \sum\limits_{\gamma_n=0}^{\min(m,\beta-s)} C_{\gamma_n}$. Коэффициенты вычисляются из следующих систем уравнений

$$\sum_{\gamma_j=0}^{m} C_{\gamma_j} \gamma_j^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, k,$$

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{\sigma=0}^{m} K^{\sigma}_{s,1}(\beta_1) [Z^{\alpha}]^{(\sigma)} = \eta^{\alpha}(\beta'), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, (m+1) - 1,$$

где $[Z^{\alpha}]^{(\sigma)}$ означает, что взята производная порядка σ от степени y^{α} и вычислена при $y = Z$. Аналогичные функционалы погрешностей строятся для остальных областей ω_j, $j = 2, \dots, k$. Установлено, что $\int\limits_{\Omega} \varphi(x)\, dx \approx \sum\limits_{j=1}^{k} \Phi_j(x)\rho_j(x)$. Тем самым, построена кубатурная формула, содержащая в узлах значения функции и значения ее первой производной для областей с гладкими границами.

ПРОСТРАНСТВА (q,ρ)-ФОРМ
THE SPACES OF (q,ρ)-FORMS

Сергеева О. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
Okoin@yandex.ru

Пусть открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ конформно эквивалентно единичному кругу; G — конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований D на себя такая, что $D/G = F$ — компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$; $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ — группа характеров ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с операцией умножения.

Определение. Измеримой мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ ((q,ρ)-формой) на D называется класс эквивалентности измеримых функций $\phi(z)$ с условием $\phi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\phi(z)$, $A \in G$, $z \in D$. При этом (q,ρ)-форма и $(q, \frac{1}{\rho})$-форма считаются ρ-двойственными, а (q_1,ρ)-форма и (q_2,ρ)-форма — q-двойственными формами для $q = q_1 + q_2$.

Для целого числа $q \geq 2$, $1 \leq p \in \mathbb{R}$ и $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ (q,ρ)-формы ϕ на D, для которых $\|\phi\|^p = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left|\frac{\phi(z)}{f_1(z)}\right|^p |\,dz \wedge d\overline{z}| < \infty$, образуют банахово пространство $L^p_{q,\rho}(D,G)$ [2]. Здесь f_1 — мультипликативная единица для несущественной составляющей ρ_1 характера ρ в разложении Фаркаша – Кра [1].

Теорема 1. *Оператор* $(\beta_{q,\rho}\varphi)(z) = \iint\limits_D \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}}{|f_1(\zeta)|^2} K_{q,\rho_1}(z,\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$, *где* $K_{q,\rho_1}(z,\zeta) = \frac{(2q-1)\pi^{q-1}\,i}{2}\, k_D(z,\zeta)^q f_1(z)\overline{f_1(\zeta)}$, $k_D(z,\zeta)$ — *кернфункция Бергмана, является ограниченным линейным отображением пространства* $\mathcal{L}^p_q(D,G,\rho)$ *в подпространство голоморфных форм* $A^p_q(D,G,\rho)$, $1 \leq p \leq \infty$, *с нормой* $\leq c_q = \frac{2q-1}{q-1}$. *Если* $\rho = \rho_1$ — *несущественный характер, то для* $\varphi \in A^p_q(D,G,\rho_1)$ *верно* $\beta_q\varphi = \varphi$.

Для форм $\phi_1 \in L^p_{q,\rho}(D,G)$ и $\phi_2 \in L^{p'}_{q,\rho}(D,G)$ с условием $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ определено билинейное спаривание [3–5]: $(\phi_1,\phi_2)_{q,\rho,D,G} = \frac{i}{2} \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2}\, dz \wedge d\overline{z}$.

Теорема 2. *Пусть* $\rho = \rho_1$ — *несущественный характер,* $1 \leq p < \infty$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Тогда билинейное спаривание задаёт антилинейный изоморфизм между* $A^{p'}_q(D,G,\rho_1)$ *и пространством, сопряжённым к* $A^p_q(D,G,\rho_1)$. *Кроме того, если* $\psi \in A^{p'}_q(D,G,\rho_1)$ *и линейный функционал* l *на* $A^p_q(D,G,\rho_1)$ *соответствуют друг другу при этом изоморфизме, то* $c_q^{-1}\|\psi\|_{q,p',G,\rho_1} \leq \|l\| \leq \|\psi\|_{q,p',G,\rho_1}$, *где* $c_q = \frac{2q-1}{q-1}$.

Для (q,ρ)-двойственных форм на D вводится другое билинейное спаривание [3]: $\langle\varphi,\psi\rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2} \iint\limits_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z)\,dz \wedge d\overline{z}$, где μ_q — фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q = q_1 + q_2$, $2 \leq q \in \mathbb{N}$. Сопряженность операторов двойственности $\mathcal{B}^{\mathrm{hom}}_C$ и $\mathcal{B}^{\mathrm{ord}}_C$ [3] друг с другом в q-двойственных пространствах голоморфных (q,ρ)-форм устанавливает связь между билинейными спариваниями в этих пространствах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31256 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. Springer-Verlag, 1992. (Grad. Texts Math.; V. 71).
2. *Сергеева О. А.* Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 4. С. 45–63.
3. *Сергеева О. А.* Билинейные спаривания для голоморфных (q,ρ)-форм // Журн. СФУ. 2011. Т. 4, № 1. С. 128–139.

ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ СГЛАЖИВАЮЩИЕ СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

SEMILOCAL SMOOTHING SPLINES AND THEIR APPLICATION FOR COMPUTING TWO- AND THREE-DIMENSIONAL INTEGRALS

Силаев Д. А.[1], **Коротаев Д. О.**[2]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* dasilaev@mail.ru

[2] *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия;* dok-home@mail.ru

Построение полулокальных сглаживающих сплайнов (или S-сплайнов) класса C^0 позволило получить квадратурные и кубатурные формулы высокого порядка аппроксимации [1]. S-Сплайн класса C^p состоит из полиномов степени n, у которых $p+1$ первых коэффициентов определяются условиями гладкой склейки (до производной степени p), а остальные $n-p$ коэффициентов определяются методом наименьших квадратов по $M > m$ точкам, где m — число точек сетки внутри каждого полинома. На основе этих сплайнов были построены квадратурные и кубатурные формулы для численного интегрирования функций класса C^n в односвязных областях, имеющих кусочно-гладкую границу. В этом случае достигается порядок аппроксимации $n+1$. В частности, были построены формулы 10 и 11 порядка аппроксимации при использовании сплайнов степени $n = 9$ и $n = 10$.

Для многомерных областей Н. С. Бахваловым [2] показано, что в некотором смысле оптимальными являются методы вычисления интегралов, основанные на методе Монте-Карло (закон больших чисел), причем точность этих методов в общем случае без дополнительных ограничений определяется величиной $O(N^{-\frac{1}{2}})$, где N — общее число точек, случайно брошенных внутрь области. Стоит заметить, что реализация качественного генератора случайных чисел, равно как издержки на отбор точек, попавших внутрь области (особенно в случае сложной области) существенно увеличивает количество затрачиваемых операций в методе МК. Для гладких задач, при размерностях 2 и 3 точность полученных нами на основе S-сплайнов 9-й степени формул определяется величинами $O(N^{-5})$ и $O(N^{-\frac{10}{3}})$ соответственно, что существенно лучше методов МК.

Нами были проведены исследования влияния особенностей подынтегральной функции и границы на точность вычислений и сравнение эффективности методов численного интегрирования с помощью S-сплайнов с методами типа Монте-Карло для ряда случаев, в том числе для функций класса C^0, а также для областей, имеющих негладкую границу. В частности, в некоторых задачах наибольшую эффективность демонстрируют гибридные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Силаев Д. А., Коротаев Д. О.* О кубатурных формулах высокого порядка аппроксимации для широкого класса областей // Математика. Компьютер. Образование: Сб. тр. XVI Междунар. конф. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. Т. 6. С. 20–38.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 5–63.

ОБОБЩЕННЫЕ КВАДРАТУРЫ ГАУССА – ЯКОБИ
GENERALIZED GAUSS–JACOBI QUADRATURES

Скороходов С. Л.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия;
sskorokhodov@gmail.com

Рассматривается задача о построении квадратурных формул для функции $\Psi(t)$ с интегрируемыми степенными особенностями на границах отрезка $[0,1]$ и неинтегрируемой особенностью в точке $b \in (0,1)$:

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(t-b)^{-\gamma-1}\Psi(t) \approx \sum_p^N d_p \Psi(\xi_p), \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$, а интеграл в (1) понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ суммы трех интегралов J_0, J_ε и J_1; первый из них берется по отрезку $[0, b-\varepsilon]$ вещественной оси, второй — по дуге верхней полуокружности $t = b + \varepsilon e^{i(\pi-\varphi)}$, $\varphi \in [0,\pi]$, где t — комплексное переменное, а третий — по отрезку $[b+\varepsilon, 1]$. Интегралы, подобные (1), возникают, в частности, при построении с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца конформного отображения полуплоскости на многоугольную область G, когда между двумя ее конечными вершинами с растворами внутренних углов $\pi\alpha$ и $\pi\beta$ имеется одна бесконечно удаленная вершина с отрицательным углом $-\pi\gamma$. Предполагая далее разложимость функции $\Psi(t)$ в ряд по степеням $(t-b)^k$, задача о построении квадратуры сводится к необходимости вычисления интегралов в (1) для $k = 0, \ldots, 2N+1$. С помощью интегрального представления для гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$ интегралы J_0 и J_1 в (1) явно выражаются через $F(a,b;c;z)$ с аргументом $z = 1-\varepsilon/b$ и $z = 1-\varepsilon/(1-b)$, соответственно, а интеграл J_ε — в виде ряда по степеням ε. Используя аналитическое продолжение функций $F(a,b;c;z)$ в окрестность особой точки $z = 1$ и развитый в [1] метод регуляризации для явного исключения неограниченно растущих слагаемых при вычислении суммы $J_0 + J_\varepsilon + J_1$, интеграл (1) был вычислен явно в виде быстросходящегося разложения по бета-функциям Эйлера и функциям Гаусса. Имея значения интегралов (1) для функций $\Psi(t) = (t-b)^k$, искомые узлы ξ_p квадратуры далее находились как нули ортогональных на отрезке $[0,1]$ полиномов с весом $\rho(t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(t-b)^{-\gamma-1}$. Обширные вычисления показали, что все узлы ξ_p исследуемых квадратур являются комплексными и лежат в полуполосе $\{\operatorname{Im}\xi_p > 0,\ \operatorname{Re}\xi_p \in (0,1)\}$, а при увеличении степени N они стремятся к отрезку $[0,1]$. Вычислив значения узлов ξ_p, веса d_p находились затем из решения линейной системы. Их значения являются также комплексными, причем при возрастании степени N квадратуры значения d_p весов движутся по спиралевидным траекториям.

Многочисленные вычисления показали, что погрешность построенных квадратур падает экспоненциальным образом с ростом степени N квадратуры. Это позволяет легко получать в расчетах до 30-ти верных значащих цифр в десятичном представлении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00923) и Отделения математических наук РАН (программа № 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1990.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА С ВЕСОМ ЭРМИТА

DIRECT AND INVERSE APPROXIMATION THEOREMS IN THE LORENTZ SPACES WITH HERMITE WEIGHT

Смаилов Е. С.

Институт прикладной математики, Караганда, Казахстан;
esmailov@mail.ru

Пусть $L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)$, $1 \le p \le +\infty$, $0 < \theta \le +\infty$, — пространство Лоренца на $\mathbb{R}$ с весом Эрмита $\rho(x) = \exp\{-x^2/2\}$, $x \in \mathbb{R}$. (Мы используем определение пространства Лоренца $L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)$ из [1].) Для $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)$ определим оператор обобщенного сдвига [2, 3]:

$$T_h(f;x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\big(x + y\sqrt{e^{2h}-1}\big) e^{-y^2}\, dy, \quad h > 0.$$

Величину

$$\overline{\omega}_l(f;\delta)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)} = \sup_{0\le h\le\delta} \big\|(T_h - I)^l f\big\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)}$$

назовем модулем непрерывности порядка l. Здесь I — тождественный оператор. Наилучшим приближением функции f посредством алгебраических функций в метрике $L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)$ назовем величину

$$E_\nu(f)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)} = \inf\{\|f - \varphi_\nu\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)}\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным алгебраическим многочленам φ_ν степени не больше ν.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)$, $1 \le p \le +\infty$, $0 < \theta \le +\infty$. Тогда для всех $l \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$E_m(f)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)} \le C_{p,\theta,l}\overline{\omega}_l\Big(f;\frac{1}{m}\Big)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)} \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Здесь константа $C_{p,\theta,l} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

Теорема 2. *Пусть $1 \le p \le +\infty$, $0 < \theta \le +\infty$ и $l \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. Тогда существует положительное число $C_{p,\theta,l}$ такое, что для $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\overline{\omega}_l\Big(f;\frac{1}{m}\Big)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)} \le \frac{C_{p,\theta,l}}{m^l} \sum_{s=0}^{m} (s+1)^{l-1} E_s(f)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)}.$$

Здесь константа $C_{p,\theta,l} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
2. *Федоров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1983.
3. *Алексеев Д. В.* Приближение функций одной и нескольких действительных переменных с весом Чебышёва – Эрмита: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2006.

О ВЗАИМОСВЯЗИ СПЛАЙНОВ И ВСПЛЕСКОВ
ON THE RELATIONSHIP BETWEEN SPLINES AND WAVELETS

Стрелков Н. А.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия; strelkov@uniyar.ac.ru

Исследованы возможности кратномасштабного анализа базисов из функций-всплесков для произвольной масштабирующей функции (в частности, для B-сплайнов). Основные результаты:

1) общая теорема, описывающая необходимые и достаточные условия для осуществления кратномасштабного анализа в случае произвольной масштабирующей функции;

2) переформулировка этой теоремы для пространств Соболева в случае, когда масштабирующая функция является B-сплайном;

3) полное описание семейства базисов из функций-всплесков, порождаемых этой масштабирующей функцией;

4) конструктивное построение безусловных базисов из функций-всплесков с минимальной мерой носителей.

О ВЛОЖЕНИЯХ $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$

ON THE EMBEDDINGS $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$

Сулейменов К. М.

Университет Туран – Астана, Астана, Казахстан; kenessary@mail.ru

В работе изучается задача о нахождении условий для вложения анизотропных пространств Никольского – Бесова со смешанной нормой.

Теорема. *Пусть даны* $1 \le p_j < q_j \le \infty$ $(L^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv C(\mathbb{R}^n))$, $0 < \theta \le \infty$, $0 < \beta_j < k_j$ $(j = 1, \dots, n)$, *строго возрастающие модули гладкости* $\omega_j(\delta)$ *порядка* k_j *такие, что* $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(t)t^{-\beta_j}$ *почти убывают на* $(0, 1]$. *Пусть* $\Omega(\delta)$ *есть средний модуль гладкости системы* $\omega_1, \dots, \omega_n$. *Положим* $q^* = \min\{q_1, \dots, q_n\} < \infty$, $q^* = 1$ *при всех* $q_j = \infty$, *и* $\rho = \infty$ *при* $0 < \theta \le q^*$, $\rho = \frac{\theta q^*}{\theta - q^*}$ *при* $\theta > q^*$. *Тогда*

$$B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n) \;\Leftrightarrow\; \left\{\int\limits_0^1 \left[\Omega(t)\prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))}\right]^{\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)}\right]^\rho \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\rho}} < \infty.$$

При $p = p_1 = \dots = p_n$, $q = q_1 = \dots = q_n$ теорема совпадает с теоремой 1 из [1].

Следствие. *Пусть даны* $1 \le p_j < q_j \le \infty$, $j = 1, \dots, n$, $r_j > 0$, $\lambda_j \in (-\infty, +\infty)$ *и* $\omega_j(t) = t^{r_j}\ln^{\lambda_j}(1/t)$. *Положим* $\tau \equiv \frac{\lambda_1 r_1^{-1} + \dots + \lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1} + \dots + r_n^{-1}}\left[1 - \sum\limits_{j=1}^n \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)\right]\frac{\theta q^*}{\theta - q^*}$. *Тогда*

1) $B^{r_1,\dots,r_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n) \;\Leftrightarrow$
$\left(\min\limits_{j=1,\dots,n} q_j = q^* < +\infty\right)$

$$\begin{cases} 1 > \sum\limits_{j=1}^n \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right), \; -\infty < \tau < +\infty, \; 0 < \theta \le +\infty, \\ 1 = \sum\limits_{j=1}^n \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right), \; -\infty < \tau < 1, \; 0 < \theta \le +\infty \text{ и } \tau \le 0, \; 0 < \theta \le q^*. \end{cases}$$

2) $B^{r_1,\dots,r_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{p_1,\dots,p_\nu,p_{\nu+1},\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_\nu,+\infty,\dots,+\infty}(\mathbb{R}^n) \;\Leftrightarrow$
$\left(1 < q^* = \min\limits_{j=1,\dots,n} q_j < +\infty\right)$

$$\begin{cases} 1 > \sum\limits_{j=1}^\nu \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) - \sum\limits_{j=\nu+1}^n \frac{1}{r_j p_j}, \; -\infty < \tau < +\infty, \; 0 < \theta \le +\infty, \\ 1 = \sum\limits_{j=1}^\nu \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) - \sum\limits_{j=\nu+1}^n \frac{1}{r_j p_j}, \; -\infty < \tau < 1, \; 0 < \theta \le +\infty \text{ и } \tau \le 0, \; 0 < \theta \le q^*. \end{cases}$$

Если $1 = \sum\limits_{j=1}^n \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)$, $\tau > 0$; $1 = \sum\limits_{j=1}^\nu \frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right) - \sum\limits_{j=\nu+1}^n \frac{1}{r_j p_j}$, $\tau > 0$, *то вложения невозможны.*

Замечание. При $\lambda_j = 0$ следствие совпадает с результатами из § 17 книги [2]. При $\lambda_j \ne 0$ результаты следствия являются новыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдман М. Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 86–104.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

"КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК" В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

THE "COMPUTER (COMPUTATIONAL) WIDTH" IN NUMERICAL ANALYSIS

Темиргалиев Н.

Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
ntmath10@mail.ru

Вводится понятие *компьютерного* (*вычислительного*) *поперечника* (К(В)П), в котором оптимизация проводится по вычислительным агрегатам, построенным по информации, полученной от функционалов с заданной ошибкой, с одновременным установлением предельной погрешности, сохраняющей порядок восстановления по точной информации. Определение К(В)П иллюстрируется соответствующими теоремами для разных математических моделей — функций, производных и решений уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е.* Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона по коэффициентам Фурье // Совр. пробл. матем. Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. М.: МИАН, 2013. С. 179–207.
2. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Жубанышева А. Ж., Таугынбаева Г. Е.* Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. вузов. Матем. 2013. № 8. С. 86–93.

О КОНФИГУРАЦИЯХ УЗЛОВ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ТЕОРИИ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

ON CONFIGURATIONS OF NODES IN CUBATURE FORMULAS IN THE THEORY OF ANTENNA ARRAYS

Тутатчиков В. С.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
vtutatchikov@mail.ru

Рассмотрим вопрос о нахождении диаграммы направленности плоской антенной решетки в рамках теории кубатурных формул. Множитель направленности непрерывной плоской антенны с площадью S имеет вид:

$$f(\theta,\varphi)=\iint\limits_S \dot{I}(x,y)e^{[ik\sin\theta(x\cos\varphi+y\sin\varphi)]}\,dx\,dy.$$

Здесь $\dot{I}(x,y)=I(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ — амплитудно-фазовое распределение возбуждения, θ — угол между центром раскрыва и направлением на точку приема, φ — азимутальный угол в плоскости антенны.

Множитель направленности плоской дискретной решетки с N одинаковыми изотропными излучателями с координатами (x_n,y_n) записывается как

$$f_\Sigma(\theta,\varphi)=\frac{S}{N}\sum_{n=1}^{N}\dot{I}_n e^{[ik\sin\theta(x_n\cos\varphi+y_n\sin\varphi)]}.$$

Сумма $f_\Sigma(\theta,\varphi)$ — приближенное значение двумерного интеграла $f(\theta,\varphi)$, т. е. $f(\theta,\varphi)\approx f_\Sigma(\theta,\varphi)$. Эта сумма является кубатурной формулой с равными весами на области интегрирования $S=2\pi\times 2\pi$. Выбор узлов (x_n,y_n) определяет те или иные свойства кубатурных формул. В частности, равные веса характерны для кубатурных формул, точных на тригонометрических полиномах. При квадратной решетке с $N=N_1\times N_1$ узлами кубатурная формула точно интегрирует все тригонометрические мономы вида $e^{2\pi ipx}e^{2\pi ily}$, где $0\le p,l\le N_1$. В настоящее время хорошо развита теория кубатурных формул, точно интегрирующих тригонометрические мономы, степень которых ограничена в совокупности: $p+l\le d$, где d — некоторое заданное число. Особый интерес для таких формул представляют решетки узлов вида $(x_k,y_k)=\left(\left\{\frac{k}{N}\right\};\left\{\frac{(2m+1)k}{N}\right\}\right)$, где d и N связаны соотношением $N=\begin{cases}2k^2+2k+1, & d=2k\\ 2(k+1)^2, & d=2k+1\end{cases}$.

Описанные выше узлы расположены вдоль прямых на “наклонной решетке” и образуют периодические последовательности. Эти узлы можно расположить вдоль одной прямой, проходящей через начало координат. В этом случае для приближенного вычисления двумерного интеграла $f(\theta,\varphi)$ используется одномерный ряд, суммирование ведется по одной переменной $0\le j\le N$, что ускоряет и упрощает расчеты. Амплитудно-фазовое распределение задается как функция переменной j; $\dot{I}=\dot{I}(j)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков Г. Т., Сазонов Д. М.* Антенны. М.: Энергия, 1975.
2. *Носков М. В., Schmid H. J.* Кубатурные формулы высокой тригонометрической точности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 5. С. 786–795.

ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ С ОБЩИМИ A_p ВЕСАМИ

DESCRIPTION OF THE TRACES OF SOBOLEV SPACES WITH GENERAL A_p WEIGHTS

Тюленев А. И.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия; tyulenev-math@yandex.ru

Пусть $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $l, n, d \in \mathbb{N}$, $1 \le d \le n$, $\delta I^d := (-\delta, \delta)^d$. Точку пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ запишем как пару $(x, y) = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d})$. Положим $T^{n-d} := \{y \in \mathbb{R}^{n-d} : \ y_i > 0, \ i = 1, \dots, n-d\}$, $\widetilde{T}^{n-d} := T^{n-d} \setminus B^{n-d}$, $\Pi_d^n := \mathbb{R}^d \times T^{n-d}$. Символом $W_p^l(\Pi_d^n, \gamma)$ обозначим функциональное пространство Соболева на Π_d^n с весом $\gamma \in A_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (определение класса A_p^{loc} см. в [2]) и нормой

$$\big\|f|W_p^l(\Pi_d^n, \gamma)\big\| = \big\|f|L_p(\widetilde{T}_d^n, \gamma)\big\| + \sum_{|\alpha|=l} \big\|D_x^\alpha f|L_p(\Omega, \gamma)\big\| + \sum_{|\beta|=l} \big\|D_y^\beta f|L_p(\Omega, \gamma)\big\|. \quad (1)$$

Для $m \in \mathbb{Z}^d$, $k \in \mathbb{N}_0$ пусть $Q_{k,m}^d := \prod_{i=1}^d \big(\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}\big)$ — двоичный куб, $\Sigma_{k,m}^n := Q_{k,m}^d \times (2^{-k}B \setminus 2^{-k-1}B)$ — цилиндрический слой. Символом δB обозначен шар радиуса δ с центром в начале координат.

Положим $\gamma_{k,m} := 2^{(l+2d)pk} \iint\limits_{\Sigma_{k,m}^n} \gamma(x, y)\, dx\, dy$. Определим пространство обобщенно-переменной гладкости $B_p^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_{k,m}\})$ типа Бесова как множество всех функций $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ с конечной нормой

$$\big\|\varphi|B_p^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_{k,m}\})\big\|^p := \sum_{k=1}^\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{k,m} \Bigg[\int\limits_{Q_{k,m}^d} \int\limits_{\frac{1}{2^k} I^d} |\Delta^l(h)\varphi(x)|\, dh\, dx \Bigg]^p + \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{0,m} \|\varphi|L_1(Q_{0,m}^d)\|^p.$$

Здесь через $\Delta^l(h)\varphi(x) := \sum\limits_{i=0}^l \varphi(x + ih)$ обозначена разность l-го порядка.

Теорема. *Пусть $\gamma \in A_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $l \ge n - d$. Тогда*

$$\mathrm{Tr}\,|_{y=0}\, W_p^l(\Pi_d^n, \gamma) = B_p^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_{k,m}\}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тюленев А. И.* Характеризация следов весовых пространств Соболева // Тр. МФТИ. 2011. Т. 3, № 1. С. 141–145.
2. *Rychkov V. S.* Littlewood–Paley theory and function spaces with A_p^{loc}-weights // Math. Nachr. 2001. V. 224. P. 145–180.
3. *Haroske D. Schmeisser H.-J.* On trace spaces of function spaces with a radial weight: the atomic approach // Complex Var. Elliptic Equ. 2010. V. 55, N 8–10, P. 875–896.

МНОГОМЕРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ
MULTIDIMENSIONAL HARDY INEQUALITIES

Ушакова Е. П.

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия; elenau@inbox.ru

Пусть заданы $p, q \in (1, \infty)$ и две измеримые неотрицательные весовые функции $v(s,t)$ и $w(x,y)$ на $(0,\infty)\times(0,\infty)$. Рассмотрим неравенство Харди вида

$$\Big(\iint\limits_{0\,0}^{\infty\,\infty} \Big[\iint\limits_{0\,0}^{x\,y} f(s,t)\,ds\,dt \Big]^q w(x,y)\,dx\,dy \Big)^{\frac{1}{q}} \le C \Big(\iint\limits_{0\,0}^{\infty\,\infty} f^p(s,t) v(s,t)\,ds\,dt \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

где константа $C \ge 0$ наименьшая из возможных и не зависит от произвольной неотрицательной функции f. Известны приложения (1) к весовым неравенствам для преобразования Фурье, Гильберта и максимальной функции (см. [1]).

В случае $1 < p \le q < \infty$ неравенство (1) было полностью охарактеризовано Э. Сойером в [1]. В нашей работе найдено достаточное условие для выполнения (1) в случае $1 < q < p < \infty$.

Теорема. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено, если* $B_v < \infty$ *или* $B_w < \infty$, *где*

$$B_v = \Big(\iint\limits_{0\,0}^{\infty\,\infty} [v(u,z)]^{\frac{1}{1-p}} \Big[\iint\limits_{u\;z}^{\infty\,\infty} \Big\{ \iint\limits_{0\,0}^{x\,y} [v(s,t)]^{\frac{1}{1-p}}\,ds\,dt \Big\}^{q-1} w(x,y)\,dx\,dy \Big]^{\frac{p}{p-q}} du\,dz \Big)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$B_w = \Big(\iint\limits_{0\,0}^{\infty\,\infty} w(u,z) \Big[\iint\limits_{0\;0}^{u\;z} \Big\{ \iint\limits_{s\,t}^{\infty\,\infty} w(x,y)\,x\,dy \Big\}^{\frac{1}{p-1}} [v(s,t)]^{\frac{1}{1-p}}\,ds\,dt \Big)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} du\,dz \Big)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Более того, $C \le c_1 B_v$ *и* $C \le c_2 B_w$, *где константы* c_1, c_2 *зависят только от* p *и* q.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sawyer E.* Weighted inequalities for two-dimensional Hardy operator // Studia Math. 1985. V. 82, N 1. C. 1–16.

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛЯХ МАТРИЧНОГО СИНТЕЗА

AN EFFICIENT METHOD FOR THE NUMERICAL STUDY OF AUTONOMOUS SYSTEMS IN MODELS OF MATRIX SYNTHESIS

Фадеев С. И.[1], **Лихошвай В. А.**[2], **Королев В. К.**[1], **Штокало Д. Н.**[3]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3] *Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск, Россия;*
fadeev@math.nsc.ru, likho@bionet.nsc.ru, korolev@math.nsc.ru, shtokalod@gmail.com

Представляемый доклад посвящен численному методу интегрирования автономных систем уравнений, представляющих математические модели матричного синтеза. Эти модели на протяжении многих лет были предметом исследований в Институте цитологии и генетики СО РАН и Институте математики СО РАН, начиная с работ [1, 2], где сформулированы гипотезы о предельном переходе от решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений к решениям соответствующих уравнений с запаздывающими аргументами. Для важного частного случая в [2] было дано строгое обоснование предельного перехода, принадлежащее Г. В. Демиденко. Наряду с этим нами были разработаны эффективные методы численного исследования моделей матричного синтеза в достаточно общей постановке, позволяющие описывать зависимость решения от параметров, включая предельные свойства модели [3–5].

Эффективность предложенного метода интегрирования связана с максимальным учётом вида правых частей рассматриваемых автономных систем, что существенно при построении параметрических характеристик моделей с большим числом уравнений. Это позволило нам проводить численное исследование, имея в распоряжении компьютер среднего класса. Реальная аппроксимация, высокая устойчивость и сходимость используемой неявной схемы подтверждена многочисленными примерами. Невысокий порядок аппроксимации компенсируется высокой экономичностью метода, позволяющего интегрировать систему с достаточно малым шагом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Задачи теории функционирования генных сетей // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 2. С. 64–80.
2. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
3. *Фадеев С. И., Лихошвай В. А., Штокало Д. Н.* Исследование модели синтеза линейных биомолекул с учётом обратимости процессов // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 3. С. 149–162.
4. *Штокало Д. Н.* О предельном переходе к уравнению с запаздывающим аргументом в модели синтеза вещества с учетом обратимости и стоков // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 143–156.
5. *Фадеев С. И., Лихошвай В. А., Штокало Д. Н., Королев В. К.* Об исследовании математических моделей матричного синтеза нерегулярных полимеров ДНК, РНК и белков // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 467–475.

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ СУММ ФУРЬЕ

THE CONVERGENCE RATE OF THE LINEAR MEANS OF FOURIER SUMS

Фалалеев Л. П., Василина Г. К.[1]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
[1]v_gulmira@mail.ru

Исследованы аппроксимативные свойства операторов, составленных на базе суммирования Пуассона $(A,1)$ подпоследовательностей сумм Фурье степенного и экспоненциального типов.

Пусть $u_r(f,x)$ — оператор, построенный на базе метода суммирования $(A,1)$ подпоследовательностей сумм Фурье, имеющих степенной порядок роста

$$S_{[1^\gamma]},\, S_{[2^\gamma]},\ldots,S_{[N^\gamma]},\ldots,$$

где $[y]$ — целая часть y.

Пусть $f\in H_p^\alpha$ и $w_p(t)\le ct^\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $c>0$, $c=\mathrm{const}$, $w_p(t)$ — модуль непрерывности в L_p, $p>1$.

Теорема 1. *При $r\to 1-0$ справедливы оценки ($\gamma\ge 1$, $0<\alpha\le 1$)*

$$\|f(x)-u_r(f,x)\|_{L_p}=\begin{cases}O((1-r)^\alpha), & 0<\alpha\le\frac{1}{2\gamma},\\ O\Big(\sqrt{(1-r)\ln\frac{1}{1-r}}\Big), & \alpha=\frac{1}{2\gamma},\\ O(\sqrt{1-r}), & \frac{1}{2\gamma}<\alpha\le 1,\end{cases}$$

причем первая и третья оценки точны по порядку, а при $\gamma=1$ все оценки точны по порядку.

Для равномерной метрики и класса Зигмунда Z_α, $0<\alpha\le 2$, третья оценка справедлива для $\alpha\in\big(\frac{1}{2\gamma},2\big]$, а первые две сохраняются.

Пусть $V_r(f,x)$ — оператор, построенный на базе метода $(A,1)$ для подпоследовательностей сумм Фурье с экспоненциальным порядком роста

$$S_{[2^{1^\varepsilon}]},\, S_{[2^{2^\varepsilon}]},\,\ldots,S_{[2^{N^\varepsilon}]},\,\ldots,\quad 0<\varepsilon\le\frac{1}{2}.$$

Теорема 2.

$$\sup_{f\in\mathrm{Lip}\,\alpha}\|f(x)-V_r(f,x)\|_{C_{2\pi}}=O\big((1-r)^{\frac{\varepsilon}{2}}\big),\quad \frac{\varepsilon}{2}<\alpha\le 1,\ r\to 1-0.$$

РЕШЕНИЕ МНОГОРАЗМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS

Халитов А. Х.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; airat.halitov@gmail.com

Мы рассматриваем уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)\,dy = f(x),$$

записанные для функций n переменных в ограниченной области произвольной формы, $\overline{\Omega} \Subset \mathbb{R}^n$. Граница области $\Gamma = \partial\Omega$, функции $K(x,y)$, $f(x)$ и решение предполагаются гладкими, M раз непрерывно-дифференцируемыми по своим аргументам. Норма интегрального оператора в пространстве $C(\overline{\Omega})$ считается малой, чтобы можно было применить метод последовательных приближений, $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \int\limits_{\Omega} |K(x,y)|\,dy = \theta < 1$. Тогда существует единственное решение: непрерывная функция $u \in C(\overline{\Omega})$ такая, что

$$u(x) = \lim_{s\to\infty} u_s(x), \quad u_s(x) = f(x) + \int\limits_{\Omega} K(x,y)u_{s-1}(y)\,dy, \quad u_0 = f(x).$$

Алгоритм предусматривает приближение интегрального оператора с помощью соболевских решетчатых асимптотически оптимальных кубатурных формул [1].

Мы решаем эти уравнения с помощью условно ненасыщаемого алгоритма [2]. Для решения данной задачи была написана, отлажена и зарегистрирована параллельная программа с использованием библиотеки MPI [3].

Написана программа решения интегральных уравнений другим, ненасыщаемым алгоритмом. Вычислительными экспериментами было проведено сравнение двух алгоритмов. Исследовано проявление в вычислительном алгоритме явления Гиббса, которое было теоретически обоснованно в ненасыщаемом алгоритме [4]. Проведены вычислительные эксперименты по численному решению интегральных уравнений больших размерностей ($n \geqslant 4$) на областях произвольных форм и получены оценки точности, эффективности распараллеливания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
2. *Рамазанов М. Д.* Лекции по теории кубатурных формул. Уфа: Изд-во БашГУ, 1973.
3. *Халитов А. Х.* Решение интегральных уравнений по многомерным ограниченным областям произвольных форм на многопроцессорных вычислительных системах. Свидетельство № 2013612995 от 25.01.2013.
4. *Рамазанов М. Д.* Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемости // Мат. сб. 2013 (в печати).

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА В СМЫСЛЕ САРДА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

A QUADRATURE FORMULA OPTIMAL IN THE SENSE OF SARD FOR CALCULATING THE FOURIER COEFFICIENTS

Шадиметов Х. М.[1], **Болтаев Н.**

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[1]kholmatshadimetov@mail.ru

Целью настоящей работы является построение оптимальной квадратурной формулы вида

$$\int_0^1 e^{2\pi ipx}\varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta), \tag{1}$$

где C_β — коэффициенты, $h = 1/N$, $N \geq m-1$. Функции φ принадлежат пространству $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Пространство $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ состоит из функций φ, для которых производная $\varphi^{(m-1)}$ порядка $m-1$ абсолютно непрерывна, $\varphi^{(m)} \in L_2(0,1)$ и $\int\limits_0^1 (\varphi^{(m)} + \varphi^{(m-1)})^2\,dx < \infty$.

Интегралы вида $\int\limits_0^1 e^{2\pi ipx}\varphi(x)\,dx$ играют важную роль в практике. Поэтому приближенное вычисление таких интегралов с помощью оптимальных квадратурных формул вида (1) является важной задачей вычислительной математики [1, 2].

В настоящей работе, пользуясь результатами работы [3], получена следующая система для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы вида (1)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G(h\beta - h\gamma) + P_{m-2}(h\beta) + de^{-h\beta} = \int_0^1 e^{2\pi ipx} G(x - h\beta)\,dx, \quad \beta = \overline{0,N},\\
&\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma (h\gamma)^\alpha = \int_0^1 e^{2\pi ipx} x^\alpha\,dx, \quad \alpha = 0,1,\dots,m-2,\\
&\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{-h\gamma} = \int_0^1 e^{2\pi ipx} e^{-x}\,dx,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $G(x) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)$.

Нами исследованы существование и единственность решения этой системы и в случаях $m = 1,\ 2,\ 3$, используя метод Соболева [1, 2], получены явные формулы для коэффициентов C_γ оптимальных квадратурных формул вида (1), которые являются решением системы (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
3. *Шадиметов Х. М., Хаётов А. Р.* Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ // Узб. мат. журн. 2004. № 3. С. 67–82.

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА В СМЫСЛЕ САРДА В ПРОСТРАНСТВЕ $K_2(P_3)$

A QUADRATURE FORMULA OPTIMAL IN THE SENSE OF SARD IN THE SPACE $K_2(P_3)$

Шадиметов Х. М.[1], **Хаётов А. Р.**[2]

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[1]kholmatshadimetov@mail.ru, [2]hayotov@mail.ru

В настоящей работе, используя метод С. Л. Соболева [1, 2], построена оптимальная квадратурная формула вида

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta), \tag{1}$$

где C_β — коэффициенты, $h = 1/N$ $(N = 2, 3, \ldots)$. Функции φ принадлежат пространству $K_2(P_3)$. Пространство $K_2(P_3)$ состоит из функций φ, для которых вторая производная φ'' абсолютно непрерывна, $\varphi''' \in L_2(0,1)$ и $\int_0^1 (\varphi''' + \varphi')^2\,dx < \infty$.

Получены явные выражения для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы вида (1) и доказана следующая

Теорема. *Коэффициенты оптимальной в смысле Сарда квадратурной формулы вида* (1) *в пространстве* $K_2(P_3)$ *имеют вид*

$$C_\beta = \begin{cases} \dfrac{2(1-\cos 1)(1-\cos h) - h(\sin(1-h) + \sin h - \sin 1)}{2(1-\cos h)\sin 1} \\ \qquad - \sum\limits_{k=1}^{2} m_k \dfrac{\left(\lambda_k + \lambda_k^{N+1}\right)\left(\sin(1-h) + \sin h\right) - \left(\lambda_k^N + \lambda_k^2\right)\sin 1}{\left(\lambda_k^2 + 1 - 2\lambda_k \cos h\right)\sin 1}, \ \beta = 0, N, \\ h + \sum\limits_{k=1}^{2} m_k\left(\lambda_k^\beta + \lambda_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

где $m_1 = \frac{A_{22}B_1 - A_{12}B_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}$, $m_2 = \frac{A_{11}B_2 - A_{21}B_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}$. *Здесь*

$$\begin{aligned} A_{11} &= \tfrac{\lambda_1 + \lambda_1^{N+1}}{\lambda_1^2 + 1 - 2\lambda_1\cos h}, \qquad A_{12} = \tfrac{\lambda_2 + \lambda_2^{N+1}}{\lambda_2^2 + 1 - 2\lambda_2\cos h}, \\ A_{21} &= \tfrac{\left(\lambda_1 + \lambda_1^{N+1}\right)(\sin(1-h) + \sin h) - \left(\lambda_1^2 + \lambda_1^N\right)\sin 1}{\lambda_1^2 + 1 - 2\lambda_1\cos h} - \tfrac{\left(\lambda_1 - \lambda_1^N\right)\sin 1}{1 - \lambda_1}, \\ A_{22} &= \tfrac{\left(\lambda_2 + \lambda_2^{N+1}\right)(\sin(1-h) + \sin h) - \left(\lambda_2^2 + \lambda_2^N\right)\sin 1}{\lambda_2^2 + 1 - 2\lambda_2\cos h} - \tfrac{\left(\lambda_2 - \lambda_2^N\right)\sin 1}{1 - \lambda_2}, \\ B_1 &= \tfrac{2(1-\cos h) - h\sin h}{2(1-\cos h)\sin h}, \qquad B_2 = \tfrac{(1-\cos 1)(2(1-\cos h) - h\sin h)}{2(1-\cos h)}, \end{aligned}$$

λ_k *известны и* $|\lambda_k| < 1$.

Кроме того, доказано, что оптимальная квадратурная формула вида (1) является асимптотически оптимальной в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$. Следует отметить, что полученная оптимальная квадратурная формула точна для тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$ и для постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА УЗЛОВ ЛАГРАНЖЕВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ПОВЕДЕНИЕ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА

ON THE INFLUENCE OF THE CHOICE OF LAGRANGE INTERPOLATION NODES ON THE BEHAVIOR OF THE LEBESGUE CONSTANTS

Шакиров И. А.

Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов, Набережные Челны, Россия; iskander@tatngpi.ru

В работах [1, 2] для двух классических интерполяционных полиномов Лагранжа n-й степени получены следующие представления соответствующих им функций Лебега:

$$\lambda_n(t)=\frac{\sin(n+0{,}5)t}{2n+1}\Big[\operatorname{cosec}\frac{t_n+t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\operatorname{cosec}\frac{t_{k-1}+t}{2}+\operatorname{cosec}\frac{t_k-t}{2}\Big)\Big]\ \Big(t_k=\frac{2\pi k}{2n+1}\Big), \quad (1)$$

$$\lambda_n^*(t)=\frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}[\operatorname{cosec}(t_{k-1}+t)+\operatorname{cosec}(t_{k-1}-t)] \quad \Big(t_k=\frac{\pi}{n}k,\ n\in\mathbb{N}\Big). \quad (2)$$

Узлы интерполяции разбиты на классы $T_1=\{t_k \mid t_k=2\pi k/(2n+1),\ k=\overline{1,2n+1},\ n\in\mathbb{N}\}$, $T_2=\{t_k \mid t_k=\pi k/n,\ k=\overline{1,2n},\ n=2m,\ m\in\mathbb{N}\}$, $T_2^{'}=\{t_k \mid t_k=\pi k/n,\ k=\overline{1,2n},\ n=2m+1,\ m\in\mathbb{N}\}$.

В классе T_1 содержится нечетное число узлов, в T_2 их число кратно четырем, а в $T_2^{'}$ узлов четное число, но не кратно четырем. Эти классы и функции Лебега (1), (2) позволяют определить нижеследующие новые (точные и приближенные) формулы для вычисления констант Лебега λ_n, λ_n^* и изучить существующие между ними связи.

Теорема. *В случае класса узлов T_1 для точного и приближенного вычисления соответствующих* (1) *констант Лебега справедливы формулы*

$$\lambda_n=\frac{1}{2n+1}\Big[1+2\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}\Big(\frac{(2k-1)\pi}{4n+2}\Big)\Big], \quad \lambda_n\cong 1,5+(2/\pi)\ln n\ (n\in\mathbb{N}),$$

если узлы принадлежат классу T_2, то для соответствующих (2) *констант верны формулы*

$$\lambda_n^*=\lambda_{2m}^*=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cosec}\Big(\frac{(2k-1)\pi}{4m}\Big)\ (m\in\mathbb{N}), \quad \lambda_n^*\cong 1+(2/\pi)\ln n,$$

если же узлы выбраны из класса $T_2^{'}$, то формулы имеют вид

$$\lambda_n^*=\lambda_{2m+1}^*=\frac{1}{2m+1}\Big[1+2\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cosec}\Big(\frac{(2k-1)\pi}{4m+2}\Big)\Big], \quad \lambda_1^*=1, \quad \lambda_n^*\cong 1+(2/\pi)\ln n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам // Изв. вузов. Матем. 2011. № 10. С. 80–88.
2. *Шакиров И. А.* Новые формулы для фундаментальных характеристик лагранжевой интерполяции // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения: Тез. докл. междунар. науч. конф., посвященной памяти Н. К. Карапетянца. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2012. С. 44–46.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ В КИНЕТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

SIMULATION OF PLASMA DYNAMICS IN THE KINETIC APPROXIMATION

Шваб И. В.[1], **Медведев С. Б.**[1], **Якункин Н. И.**[2]

[1] *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
Schwab_Irina@mail.ru, serbormed@gmail.com, yakunkin@list.ru

Работа мотивирована исследованиями по нагреву и удержанию плазмы в открытой магнитной ловушке с электронным пучком ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН). Основные потери плазмы и энергии в таких ловушках происходят при разлете плазмы через торцевые магнитные пробки. При этом происходят процессы, аналогичные возникающим в сопле плазменных двигателей. Для исследования способности плазменного сопла повышать аксиальный импульс потока плазмы предложена физико-математическая модель физики магнитного сопла, основанная на кинетическом описании бесстолкновительной плазмы. Главной задачей моделирования являлось воспроизведение эффекта отделения плазменной струи от магнитных силовых линий. Предложен численный алгоритм, позволяющие эффективно и точно проводить учёт осевой симметрии при расчете плотности тока на смещенных координатных сетках. Данный подход может быть легко обобщен на общий случай криволинейных координат и CIC-ядер для метода частиц. Проведены тесты для сферически симметричных задач с известным аналитическим решением, показывающие изотропность численной схемы. Проведены исследования зависимости течения плазмы от начальных параметров. Определены параметры сценария ускорения плазмы до супер-Альфвеновской скорости при прохождении магнитного сопла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00234, № 12-01-00061), Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 105), ФЦП (соглашение от 26.09.2012 № 8504).

ТЕОРИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

THEORY OF HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Эминов С. И.[1], **Эминова В. С.**

Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия;
[1]eminovsi@mail.ru

Многие задачи теории дифракции и теории упругости описываются уравнением вида

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(a(\tau)a(t)\ln\frac{1}{|t-\tau|}\Big)\Big)u(t)\,dt+\int\limits_{-1}^{1}K(\tau,t)u(t)\,dt=f(\tau), \qquad (1)$$

где $a(\tau)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $0<a_0\le a(\tau)\le b_0$ при всех τ, $u(t)$ — неизвестная функция, ядро $K(\tau,t)$ является непрерывной функцией или имеет логарифмическую особенность. В работе [1] был исследован частный случай уравнения (1), когда функция $a(\tau)$ постоянна. Исследование уравнения (1) сводится к изучению гиперсингулярного интегродифференциального оператора

$$(Au)(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1}u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt,\quad -1\le\tau\le 1.$$

Оператор A является симметричным положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ и имеет плотную область определения $D(A)$ [1]. Положительно определенный оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}. В следующей теореме этот результат усиливается.

Теорема 1. *Оператор, обратный к положительно определенному оператору A, задается формулой*

$$(A^{-1}f)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}f(t)\ln\Big|\frac{\tau-t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\Big|\,dt.$$

и является вполне непрерывным в пространстве $L_2[-1,1]$.

Из этой формулы следует, что оператор A^{-1} является интегральным оператором с логарифмическим ядром. Теорема 1 позволяет доказать следующий результат.

Теорема 2. *Уравнение* (1) *эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода в энергетическом пространстве H_A оператора A.*

Для приближенного решения уравнения (1) предложен метод Галёркина на основе полиномов Чебышёва второго рода и доказана теорема.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное решение в энергетическом пространстве H_A. Тогда приближенное решение, построенное методом Галеркина, сходится к точному решению в пространстве H_A.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эминов С. И.* Теория интегрального уравнения тонкого вибратора // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, вып. 12. С. 2160–2168.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В НЕИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

CALCULATING THE OPTIMAL COEFFICIENTS OF A CUBATURE FORMULA IN AN ANISOTROPIC SPACE

Юмова Ц. Ж.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия; syum@mail.ru

В работе вычисляются коэффициенты кубатурной формулы в неизотропном пространстве $W_p^{\overline{m}}(E_n)$, где $1 < p < \infty$, $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — неотрицательный целочисленный вектор. Пусть $h_k > 0$ — шаги решетки, $N_k = [1/h_k]$ — количество узлов решетки вдоль выбранных координатных направлений, $\Delta^\sigma = \{x \in E_n, 0 \le x_k < 1 - \sigma_k h_k\}$ — фундаментальный параллелепипед с длинами ребер $1 - \sigma_k h_k$, $\sigma_k = \{1/h_k\}$ — дробная часть числа $1/h_k$, $m^* = n \Big/ \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k^{-1} \Big)$, $\overline{h} = \mathrm{diag}(h_1 h_2 \ldots h_n)$ — матрица периодов.

Узлы кубатурной формулы берем на решетке ньютоновской системы $B_0 = \{\gamma \mid \gamma \in E_n,\ 0 \le \gamma_k < N_k,\ k = 1, \ldots, n\}$, лежащими внутри или же на границе области Ω, при фиксированных шагах вдоль выбранных координатных направлений, определяемых из системы соотношений $h_1^{m_1} = h_2^{m_2} = \ldots = h_n^{m_n} = h^{m^*}$.

Оптимальные коэффициенты формулы для функции $\varphi(x)$ и ее производных в s_k узлах решетки определяются из равенства $\sum\limits_{\gamma_k=0}^{s_k} C_{\gamma_k}^{\alpha_k} \gamma_k^{\alpha_k} = \frac{1-\sigma_k h_k}{\alpha_k+1}$, $\alpha_k = \overline{0, m_k}$, при любом значении порядка ρ_k старшей производной, зависящей от гладкости m_k вдоль выбранной координатной оси OX_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Беря декартово произведение коэффициентов при значениях функции, ее производных, получим формулу на плоскости:

$$\int\limits_0^{1-\sigma_1 h_1} \int\limits_0^{1-\sigma_2 h_2} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \prod_{k=1}^{2} \sum_{\gamma_k=0}^{s_k} \sum_{\alpha_k=0}^{\rho_k} C_{\gamma_k}^{\alpha_k} \varphi_{\gamma_k}^{\alpha_k}.$$

Наилучшей считается кубатурная формула, имеющая наименьшую норму функционала погрешности. Используя построенные функционалы относительно простого вида, учитывающие свойства неизотропного пространства, с узлами, лежащими внутри или же на границе области, строим функционалы с регулярным пограничным слоем суммированием элементарных функционалов погрешностей, как в обычном анализе формулы прямоугольников получаются путем суммирования элементарных формул прямоугольников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Юмова Ц. Ж.* Построение кубатурных формул с регулярным пограничным слоем на плоскости // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: Материалы IV Междунар. науч.-техн. конф. Пенза: Изд-во ПДЗ, 2009. С. 69–73.

ON THE STABILITY OF HIGH ORDER OF ACCURACY DIFFERENCE SCHEMES FOR NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH SELFADJOINT OPERATOR

Ashyralyev A.[1], **Yildirim O.**[2]

[1] *Fatih University, Istanbul, Turkey;* aashyr@fatih.edu.tr
[2] *Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey;* ozgury@yildiz.edu.tr

In this study, third and fourth order of accuracy absolutely stable difference schemes are considered for the nonlocal boundary value hyperbolic problem for the differential equations in a Hilbert space H with selfadjoint positive definite operator A. The stability estimates for the solution of these difference schemes are established. In practice, one dimensional hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions are considered. A numerical method is proposed and results of numerical experiments are presented in order to verify theoretical statements.

REFERENCES

1. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.,* New Difference Schemes for Partial Differential Equations (Operator Theory: Advances and Applications, 148), Birkhäuser, Basel; Boston; Berlin (2004).
2. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.,* "Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations," Discrete Dyn. Nat. Soc., **2**, No. 1, 183–213 (2005).
3. *Ashyralyev A., Yildirim O.,* "On the numerical solution of hyperbolic IBVP with high order stable difference schemes," Bound. Value Probl., **2013**, No. 29, 34 pages (2013).

A FOURTH ORDER OF ACCURACY DIFFERENCE SCHEME FOR AN OVERDETERMINED INVERSE ELLIPTIC PROBLEM

Ashyralyyev Ch.

Gumushane University, Gumushane, Turkey; charyyar@gumushane.edu.tr

We consider the inverse problem of finding a function u and an element p for the elliptic equation

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = f(t) + p, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \\ u(T) = \psi, \\ u(\lambda) = \xi, \end{cases}$$

in an arbitrary Hilbert space H with selfadjoint strongly positive definite operator A. A fourth order of accuracy stable difference scheme for the solution of this inverse problem is presented. Stability estimates for the solution of the fourth order of approximation are obtained. The theoretical statements are supported by the numerical example.

REFERENCES

1. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.,* New Difference Schemes for Partial Differential Equations (Operator Theory: Advances and Applications, 148), Birkhäuser, Basel; Boston; Berlin (2004).
2. *Samarskii A. A., Vabishchevich P. N.,* Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics (Inverse and Ill-Posed Problems Series), Walter de Gruyter&Co, Berlin (2007).
3. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G.,Vasin I. A.,* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York (2000).
4. *Orlovsky D., Piskarev S.,* "On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems," J. Inverse Ill-Posed Probl., **17**, No. 8, 765–782 (2009).
5. *Ashyralyev A.,* "On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic equations," Numer. Funct. Anal. Optim., **24**, No. 1–2, 1–5 (2009).

CANONICAL DOMAINS FOR ALMOST ORTHOGONAL QUASI-ISOMETRIC GRIDS

Chumakov G. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
chumakov@math.nsc.ru

A special class of quasi-isometric mappings is discussed for the generation of quasi-isometric regular coordinate systems. The base computational strategy of our approach is that the physical field is decomposed into five nonoverlapping sub-regions which are automatically generated by solving a variational problem. Four of these blocks containing four corners on the boundary of the physical region.

To ensure that the angles of the physical and canonical domains coincide and the conformal modules are the same, the four corner blocks are taken to be geodesic quadrangles on surfaces of constant curvature, namely, spherical, planar or Lobachevsky plane, depending on the angles of the physical domain. Within each of these blocks a quasi-isometric grid is generated. Orthogonality of coordinate lines holds in the fifth block which is a conformal image of a non-convex polygon composed of several rectangles on the plane.

We present a robust algorithm of automated construction of the one-parameter family canonical domains and prove that, for any physical domain, there exists a unique parameter such that the mapping from canonical domain onto physical region is conformal and has bounded derivative. Application of such a mapping results in a grid inside the physical region that is orthogonal far from the corners.

REFERENCES

1. *Chumakov G. A., Chumakov S. G.,* "Almost orthogonal quasi-isometric grids," in: IMACS Series in Computational and Applied Mathematics, Vol. 16, Roma, Italy, 2011, pp. 31–40.

ON ONE EXTENSION THEOREM DEALING WITH WEIGHTED ORLICZ–SLOBODETSKII SPACE ON THE BOUNDARY OF A DOMAIN

Dhara R. N.[1], **Kałamajska A.**[2]

University of Warsaw, Warsaw, Poland;
[1]rndhara@gmail.com, [2]kalamajs@mimuw.edu.pl

Let Ω be a given domain with the sufficiently regular boundary. We prove that every function belonging to a certain weighted Orlicz–Slobodetskii space defined on the boundary of Ω can be extended to a function belonging to a relevant weighted Orlicz–Sobolev space defined on the whole Ω. Analysis of the admitted weights is provided and no restrictions on generating Orlicz function is required.

REFERENCES

1. *Lacroix M.-Th.,* "Espaces de traces des espaces de Sobolev–Orlicz" [in French], J. Math. Pures Appl., **53**, No. 9, 439–458 (1974).
2. *Kałamajska A., Krbec M.,* "Traces of Orlicz–Sobolev functions under general growth restrictions," Math. Nachr., **286**, No. 7, 730–742 (2013).
3. *Gagliardo E.,* "Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili" [in Italian], Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **27**, 284–305 (1957).
4. *Gossez J.-P.,* Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients," Trans. Amer. Math. Soc., **190**, 163–205 (1974).

ON UNIFORM DOMAINS ON CARNOT GROUPS

Greshnov A. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
greshnov@math.nsc.ru

Let us consider the 3-step canonical Carnot group-algebra G with left-invariant basis vector fields X, Y, T, Z such that $[X,Y] = -\frac{1}{4}T$, $[X,T] = \alpha T$, α is some constant, and all other possible commutators of X, Y, T, Z are 0. Define the Carnot–Caratheodory metric $d_c(x,y)$ on G as the infimum of the lengths of all absolutely continuous curves $\gamma(s)$, $s \in [0,s_0]$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(s_0) = y$, such that $\dot{\gamma}(s) = a(s)X(\gamma(s)) + b(s)Y(\gamma(s))$ a.e., where $a(s)$, $b(s)$ are bounded measurable functions, see [1]. The main goal of our talk is to describe a method of construction of bounded uniform domains on the Carnot–Caratheodory space (G, d_c), see [2], and to generalize this method to a more general 3-step canonical Carnot group-algebra.

The author was supported by the integration project SB RAS – FEB RAS (project no. 56).

REFERENCES

1. *Gromov M.,* "Carnot-Caratheodory spaces seen from within," in: Sub-Riemannian geometry, Birghäuser, Basel, 1996, pp. 79–323.
2. *Capogna L., Tang P.,* "Uniform domains and quasiconformal mappings on Heisenberg group," Manuscr. Math., **86**, No. 3, 267–281 (1995).

DESIGN AND IMPLEMENTATION OF THE LINPACK BENCHMARK FOR SINGLE AND MULTI-NODE SYSTEMS BASED ON INTEL® Xeon Phi™ COPROCESSOR

Heinecke A.[1], Vaidyanathan K.[2], Smelyanskiy M.[3], Kobotov A.[4], Dubtsov R.[5], Henry G.[6], Chrysos G.[6], Dubey P.[3]

[1] *Technical University of Munich, Munich, Germany;*
[2] *Intel Corporation, Banglore, India;*
[3] *Intel Corporation, Santa Clara, USA;*
[4] *Intel Corporation, Novosibirsk, Russia;* alexander.v.kobotov@intel.com
[5] *Intel Corporation, Novosibirsk, Russia;* roman.s.dubtsov@intel.com
[6] *Intel Corporation, Hillsboro, USA*

The race to build the first Exascale system is upon us. The biggest challenge is to deliver high compute and energy efficiency under United States DOE imposed power budget of 20 MWatts. To meet this challenge, the current trend is to couple commodity processors with computational coprocessors. Such hybrid systems offer dramatic increases in both compute density, as well as energy efficiency.

In this paper we describe how several flavors of Linpack benchmark are accelerated on Intel's Intel® Xeon Phi™ coprocessor (codename Knights Corner) in both native and hybrid configurations. Our native DGEMM implementation takes full advantage of Knights Corner's salient architectural features and successfully utilizes close to 90% of its peak compute capability. Our native Linpack implementation running entirely on Knights Corner employs novel dynamic scheduling and achieves nearly 79% efficiency — the highest published coprocessor efficiency. Our single-node hybrid implementation of Linpack achieves 77% efficiency. Using dynamic scheduling and enhanced look-ahead scheme, this implementation scales to an 140-node cluster, on which it achieves 71% efficiency delivering the total performance of 128.7 TFLOPS.

REFERENCES

1. *Deisher M., Smelyanskiy M., Nickerson B., Lee W. V., Chuvelev M., Dubey P.,* "Designing and dynamically load balancing hybrid LU for multi/many-core," Comput. Sci., **26**, No. 3–4, 211–220 (2011).
2. *Endo T., Nukada A., Matsuoka S., Maruyama N.,* "Linpack evaluation on a supercomputer with heterogeneous accelerators," in: Parallel & Distributed Processing (IPDPS), 2010 IEEE International Symposium, IEEE, New York, 2010, pp. 1–8.
3. *Fatica M.,* "Accelerating linpack with CUDA on heterogenous clusters," in: Proc. of 2nd Workshop on General Purpose Processing, ACM, New York, 2009, pp. 46–51.
4. *Volkov V., Demmel J. W.,* "Benchmarking GPUs to tune dense linear algebra," in: Proc. ACM/IEEE Conf. Supercomputing, ACM, New York, 2008, pp. 1–11.
5. *Bach M., Kretz M., Lindenstruth V., Rohr D.,* "Optimized HPL for AMD GPU and multi-core CPU usage," Comput. Sci., **26**, No. 3–4, 153–164 (2011).

INTEL®DIRECT SPARSE SOLVER FOR CLUSTERS, A RESEARCH PROJECT FOR SOLVING LARGE SPARSE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS ON CLUSTERS

Kalinkin A., Anders A., Anders R.

Intel Corporation, Novosibirsk, Russia; alexander.a.kalinkin@intel.com

This paper describes a direct method based on Cholesky decomposition for solving the equation $Ax = b$ with a sparse symmetric matrix A. A positive-definite matrix A can be represented as LL^T decomposition. To achieve an efficient work balance on a large number of processes hereinafter referred to as "multifrontal" approach to Cholesky decomposition is proposed for the original matrix.

The multifrontal approach was proposed in the papers [1–4]. The decomposition algorithm implementation consists of several stages. The initial matrix is first subject to a reordering procedure [5–7] in order to represent it in the form of a dependency tree. Then the symbolic factorization takes place where the total number of nonzero elements is computed in LL^T. Then a factorization of the permuted matrix in the LL^T form is performed [2–3].

This work concerns the Intel®Direct Sparse Solver for Clusters package which uses parallelization approach based on dependency tree and uses MPI for communications between cluster nodes and using OpenMP directives to use shared memory parallelism available within a node. Approaches to MPI-parallelization of Cholesky decomposition can be found in [1–4]. However, further investigation shows that such algorithms face scaling issues both with respect to the computational time and with respect to the amount of memory used by each process as the total number of processes increases. To solve this problem we propose an algorithm in which "tree" nodes are distributed among several cluster nodes and data transfers are overlapped with computations.

REFERENCES

1. *Amestoy P. R., Duff I. S., Vomel C.,* "Task scheduling in an asynchronous distributed memory multifrontal solver," SIAM J. Matrix Anal. Appl., **26**, No. 2, 544–565 (2005).
2. *Amestoy P., Duff I. S., Pralet S., Voemel C.,* "Adapting a parallel sparse direct solver to architectures with clusters of SMPs," Parallel Comput., **29**, No. 11–12, 1645–1668 (2003).
3. *Amestoy P. R., Guermouche A., L'Excellent J.-Y., Pralet S.,* "Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems," Parallel Comput., **32**, No. 2, 136–156 (2006).
4. *Amestoy P. R., Duff I. S.,* "Memory management issues in sparse multifrontal methods on multiprocessors," Int. J. Supercomput. Appl., **7**, 64–82 (1993).
5. *Karypis G., Kumar V.,* "A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering," in: 10th Intern. Parallel Processing Symposium, 1996, pp. 314–319.
6. *Karypis G., Kumar V.,* "A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering," J. Parallel Distrib. Comput., **48**, No. 1, 71–95 (1998).
7. *Schloegel K., Karypis G., Kumar V.,* "Parallel multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning," in: Euro-Par 2000 Parallel Processing (Lecture Notes in Computer Science, 1900), 2000, pp. 296–310.

INTEL®CLUSTER POISSON SOLVER LIBRARY, A RESEARCH PROJECT FOR HETEROGENEOUS CLUSTERS SUITABLE FOR ATMOSPHERE AND OCEAN RESEARCH

Kalinkin A., Krjukov I.

Intel Corporation, Novosibirsk, Russia; alexander.a.kalinkin@intel.com

A number of papers are devoted to the implementation of the Helmholtz solver for a computer with distributed memory. Among them we want to mention [1] as one of the first papers. An algorithm presented in this paper is based on 1D decomposition of the initial domain and an implementation of a distributed version of LU solver for 3diagonal matrices. The size of the data transfers between computational nodes in this algorithm is significantly lower than in the transposition-based methods. At the same time, the computational cost is quite significant as one needs to solve three 3diagonal systems on each process and one 3diagonal system on a master process as compared with one 3diagonal system in the method with memory transpositions. In the paper [2] a Helmholtz solver implementation is based on a similar data distribution involving data transformation between forward / backward discrete FFT transforms along y and x axis. This approach is similar to [3]. In such approach all processes transfer all the data between themselves 2 times. Our experiments show that it is inefficient on the number of processes more than 1024 because the global data transfers become bottlenecks for the whole algorithm. 2D decomposition significantly improves overall quality of the algorithm because on each data transfer all processes are bundled in $\sqrt{nproc}$ groups with $\sqrt{nproc}$ processes each ($nproc$ — number of processes involved in the computations). The implementation of this algorithm presented in this paper.

This work continues a series of works that devoted to high performance implementation of a Helmholtz solver on shared and distributed memory machines. In the paper [3] we compare the performance of a Poisson solver from Intel®Math Kernel Library (Intel®MKL) [4] with NETLIB Fishpack solver and presented an implementation of Intel®Cluster Poisson Solver Library [5]. In the paper [6] we demonstrated the performance of Intel®MKL Poisson Solvers with the support of periodic boundary conditions. This paper studies the implementation of a Helmholtz solver on computers with distributed memory based on 2D memory decomposition.

REFERENCES

1. *Schumann U., Strietzel M.,* "Parallel solution of tridiagonal systems for the Poisson equation," J. Sci. Comput., **10**, No. 2, 181–190 (1995).
2. *Pham M. V., Plourde F., Kim S. D.,* "Strip decomposition parallelization of fast direct Poisson solver on a 3D Cartesian staggered grid," International Journal of Computer Science and Engineering, **1**, 31–40 (2007).
3. *Kalinkin A. A., Laevsky Y. M., Gololobov S. V.,* "2D fast Poisson solver for high-performance computing," in: Parallel Computing Technologies (Lecture Notes in Computer Science, 5698), 2009, pp. 112–120.
4. *Intel®Math Kernel Library,* http://software.intel.com/en-us/intel-mkl
5. *Intel®Cluster Poisson Solver Library,* http://software.intel.com/en-us/articles/intel-cluster-poisson-solver-library
6. *Kalinkin A., Kuzmin A.,* "Intel®MKL Poisson Library for scalable and efficient solution of elliptic problems with separable variables," in: Collection of Works Intern. Scientific Conf. Parallel Computing Technologies, 2012, pp. 336–341.

ON THE CONTINUITY OF FOURIER MULTIPLIERS ON THE HOMOGENEOUS SOBOLEV SPACES $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$

Kazaniecki K.[1], **Wojciechowski M.**[2]

[1] *University of Warsaw, Warsaw, Poland;* Krystian.Kazaniecki@mimuw.edu.pl
[2] *Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland;* M.Wojciechowski@impan.pl

We consider Fourier multipliers on homogeneous Sobolev space $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$. Measurable function $m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is a Fourier multiplier if operator given by formula $T_m f = F^{-1}(m \cdot F(f))$ is bounded. The homogeneous Sobolev space $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$ consists of those functions on $\mathbb{R}^d$ whose distributional derivatives of order one are integrable. The pseudonorm, given by $\|\nabla f\|_1$, is a norm on the quotient by a constant functions. Examples of multipliers are the Fourier transforms of bounded measures. However D. Ornstein's result [1] states that the class of Fourier multipliers is wider than the space of Fourier transforms of measures. Later A. Bonami and S. Poornima proved that every Fourier multiplier on $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$, which is a homogenous function of degree zero, has to be a constant function [2]. While homogeneous multipliers (e.g. Riesz transforms), are the most important, the question of continuity of general multipliers remained open. The aim is to fill this gap. We will show that every Fourier multiplier on $\dot{W}_1^1(\mathbb{R}^d)$ is a continuous function. In the proof we will use three main ingredients: result from [2], classical DeLeeuw transference theorem and Riesz products.

REFERENCES

1. *Ornstein D.,* "A non-equality for differential operators in the L_1 norm," Arch. Rational Mech. Anal., **11**, 40–49 (1962).
2. *Bonami A., Poornima S.,* "Nonmultipliers of the Sobolev spaces $W^{k,1}(\mathbb{R}^n)$," J. Funct. Anal., **71**, No. 1, 175–181 (1987).

ON THE MORSE–SARD THEOREM, THE N-PROPERTY, AND LEVEL SETS FOR THE SHARP CASE OF SOBOLEV–LORENTZ MAPPINGS

Korobkov M. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; korob@math.nsc.ru

In the talk we extend the results of joint papers [1, 2] to the case of vector-valued mappings. Denote by $W^k_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$ the space of mappings $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$ such that all its distributional derivatives up to order k belong to $L_p(\mathbb{R}^n)$, moreover, the derivatives of order k belong to the Lorentz space $L_{p,1}(\mathbb{R}^n)$. For a given $m\in\{1,\dots,n\}$ denote $k_\circ=n-m+1$, $p_\circ=\frac{n}{k}$.

Theorem 1 (N-property). *Let $m\in\{1,\dots,n\}$ and $v\in W^{k_\circ}_{p_\circ,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$. Then for each $\varepsilon>0$ there exists $\delta>0$ such that for any set $E\subset\mathbb{R}^n$ if $\mathcal{H}^m_\infty(E)<\delta$, then $\mathcal{H}^m_\infty(v(E))<\varepsilon$. In particular, $\mathcal{H}^m(v(E))=0$ whenever $\mathcal{H}^m(E)=0$.*

Here $\mathcal{H}^m$, $\mathcal{H}^m_\infty$ denote the m-dimensional Hausdorff measure, Hausdorff content, respectively: for any $F\subset\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^m(F)=\lim\limits_{\alpha\searrow0}\mathcal{H}^m_\alpha(F)=\sup\limits_{\alpha>0}\mathcal{H}^m_\alpha(F)$, where for each $0<\alpha\le\infty$,

$$\mathcal{H}^m_\alpha(F)=\inf\{\sum_{i=1}^\infty(\operatorname{diam}F_i)^m:\ \operatorname{diam}F_i\le\alpha,\ F\subset\bigcup_{i=1}^\infty F_i\}.$$

Recall, that if $f\in W^k_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $k\le n$, then $\nabla f(x)$ is well-defined for $\mathcal{H}^{n-k+1}$-almost all $x\in\mathbb{R}^n$, i.e., there exists a set A_f such that $\mathcal{H}^{n-k+1}(A_f)=0$ and

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int\limits_{B(x,r)}|\nabla f(z)-\nabla f(x)|\,\mathrm{d}z=0.$$

Let $m\in\{1,\dots,n\}$. Then, in virtue of $n-k_\circ+1=m$, for $v\in W^{k_\circ}_{p_\circ}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$ there exists a set A_v such that $\mathcal{H}^m(A_v)=0$ and the gradient $\nabla v(x)$ is well-defined at all points $x\in\mathbb{R}^n\setminus A_v$. Denote $Z_{v,m}=\{x\in\mathbb{R}^n\setminus A_v:\ \operatorname{rank}\nabla v(x)<m\}$.

Theorem 2 (Morse–Sard property). *If $m\in\{1,\dots,n\}$ and $v\in W^{k_\circ}_{p_\circ}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$, then $\mathcal{H}^m(v(Z_{v,m}))=0$.*

Corollary (level sets structure). *Let $v\in W^{k_\circ}_{p_\circ,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Then for almost all $y\in v(\mathbb{R}^n)$ the preimage $v^{-1}(y)$ is a finite disjoint family of $(n-m)$-dimensional C^1-smooth compact manifolds (without boundary) S_j, $j=1,\dots,N(y)$.*

In particular cases, for $m=n$ the results were proved in [3], and for $m=1$ they were established in [1, 2]. These results have application in fluid mechanics (see, e.g., [4]).

The author was supported by a Grant of the President of Russia for support of young doctors of sciences (project no. MD-5146.2013.1).

REFERENCES

1. *Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J.,* "On the Morse–Sard property and level sets of Sobolev and BV functions," Rev. Mat. Iberoam. **29**, No. 1, 1–23 (2013).
2. *Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J.,* "On the Morse–Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$," J. Reine Angew. Math., (Online first), DOI:10.1515/crelle-2013-0002, March 2013.
3. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.,* "On functions with derivatives in a Lorentz space," Manuscr. Math., **100**, No. 1, 87–101 (1999).
4. *Korobkov M. V., Pileckas K., Russo R.,* "On the flux problem in the theory of steady Navier–Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions," Arch. Ration. Mech. Anal., **207**, 185–213 (2013).

A SPACE OF ALMOST PERIODIC SOBOLEV–BESICOVITCH FUNCTIONS AND APPLICATIONS

Lassoued D.

University of Paris I Pantheon-Sorbonne, Paris, France;
Dhaou.Lassoued@univ-paris1.fr

In this talk we introduce a Hilbert space (like a Sobolev space) of almost periodic Besicovitch functions and a notion of a weak almost periodic solution. Some applications for this space in the framework of differential equations are given.

REFERENCES

1. *Blot J., Lassoued D.,* "Bumps of potentials and almost periodic oscillations," Afr. Diaspora J. Math., Special Volume in Honor of Profs. C. Corduneanu, A. Fink, and S. Zaidman, **12**, No. 2, 122–133 (2011).
2. *Blot J.,* "Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler–Lagrange" [in French], Bull. Soc. Math. Fr., **122**, 285–304 (1994).
3. *Blot J.,* "Almost periodically forced pendulum," Funkc. Ekvacioj, Ser. Int., **36**, No. 2, 235–250 (1993).
4. *Besicovitch A. S.,* Almost Periodic Functions, Cambridge University Press, Cambridge (1932).

MKL EXTENDED EIGENSOLVER FOR SOLVING SYMMETRIC EIGENVALUE PROBLEMS

Lukinov V. L.[1], **Kuznetsov S. V.**[2]

Intel Corporation, Novosibirsk, Russia;
[1]vitaly.lukinov@intel.com, [2]sergey.v.kuznetsov@intel.com

Starting Intel®Math Kernel Library (Intel®MKL) 11.0 Update 2, you can benefit from an Extended Eigensolver that provides a robust way to compute eigenvalues and eigenvectors for (generalized) symmetric eigenvalue problems. The Extended Eigensolver functionality is a set of high-performance numerical routines yielding all the eigenvalues (λ) and eigenvectors (x) within a given search interval $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. It is based on the FEAST algorithm, an innovative fast and stable numerical algorithm presented in [1], which deviates fundamentally from the traditional Krylov subspace iteration based techniques (Arnoldi and Lanczos algorithms [2]) or other Davidson–Jacobi techniques [3]. The FEAST algorithm is inspired by the density-matrix representation and contour integration technique in quantum mechanics.

The Intel®MKL Extended Eigensolver numerical algorithm is intended for computing eigenpair solutions using conventional (dense) matrix storage and numerically efficient contour integration technique. The main computational tasks in the algorithm consist of solving of a few independent linear systems along the contour and solving a reduced eigenvalue problem. Let us consider a circle centered in the middle of the search interval $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$. The numerical integration over the circle is performed using Gauss–Legendre quadrature.

Shared memory parallelism has not been explicitly implemented in Extended Eigensolver routines within a node, that is, the inner linear systems are currently solved one after another. Using the Extended Eigensolver RCI interfaces, it is possible to benefit from parallel execution by providing a threaded inner system solver and a matrix-matrix multiplication routine. Using the predefined Extended Eigensolver interfaces, parallel execution can be seamlessly obtained with the shared memory version of BLAS and LAPACK from Intel®MKL and Intel®MKL PARDISO [4].

This talk presents new efficient sparse eigensolver from Intel®MKL. We provide performance comparison of the dense and sparse eigensolvers from Intel®MKL. In particular, we focus on the comparison of the LAPACK eigensolver with sparse Extended Eigensolver from Intel®MKL.

REFERENCES

1. *Polizzi E.,* "Density-matrix-based algorithms for solving eigenvalue problems," Phys. Rev. B, **79**, No. 11, 115112 (2009).
2. *Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A., Van der Vorst H. (eds.),* Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide, SIAM, Philadelphia (2000).
3. *Sleijpen G. L. G., Van der Vorst H. A.,* "A Jacobi–Davidson iteration method for linear eigenvalue problems," SIAM J. Matrix Anal. Appl., **17**, No. 2, 401–425 (1996).
4. *Intel®Math Kernel Library,* http://www.intel.com/software/products/mkl

GENERIC SINGULARITIES OF HARMONIC AND BIHARMONIC MAPS

Mazowiecka K. E.

University of Warsaw, Warsaw, Poland; K.Mazowiecka@mimuw.edu.pl

We will review the known results of Hardt–Lin and Almgren–Lieb on singularities of harmonic maps from the ball to the sphere, i.e. critical points of the Dirichlet integral $E(u) = \int\limits_{\mathbb{B}^3} |\nabla u|^2 \, dx$.

In the second part of the poster we will discuss the conjectures and work in progress on generalization of this problems to biharmonic maps, namely minimizers of functional $\int\limits_{\mathbb{B}^5} |\Delta u|^2 \, dx$ with nonlinear pointwise constraints $u(x) \in \mathbb{S}^4$.

REFERENCES

1. *Almgren F. J., Lieb E. H.,* "Singularities of energy minimizing maps from the ball to the sphere: examples, counterexamples, and bounds," Ann. Math. (2), **128**, No. 3, 483–530 (1988).
2. *Hardt R., Lin F.-H.,* "A remark on H^1 mappings," Manuscr. Math., **56**, No. 1, 1–10 (1986).

FUNCTIONS OF SOBOLEV CLASSES ON ANISOTROPIC SPACES

Miklyukov V. M.

Independent Scientific Laboratory "Uchimsya LLC", Yonkers, NY, USA;
miklyuk@hotmail.com

Let $\mathcal{X}$ be a nonempty set and let $r : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ be a function with the following properties:
$\alpha)$ $r(x, x) = 0$ and $r(x, y) \geq 0$ for all $x, y \in \mathcal{X}$;
$\beta)$ $r(x, y) \leq r(x, z) + r(z, y)$ for all $x, y, z \in \mathcal{X}$.
The pair $(\mathcal{X}, r)$ is called an *anisotropic space*.

Note that we do not assume here the symmetry of the anisotropic metric r, i.e. in general $r(x, y) \neq r(y, x)$. Sometimes we assume that

$$r(x, y) \to 0 \iff r(y, x) \to 0.$$

We describe analogues of the Sobolev function classes W_p^l (see, for example, [1]) on domains in anisotropic spaces [2–4]. Investigations are based on the technology of modulus of curvilinear arcs families, developed in the theory of quasiconformal mappings (see, for example, [5]). It is the most principal difference from the approaches based on integral representations techniques [6], capacity techniques [7], or closed to it [8].

Main questions: concepts of Sobolev classes $\mathrm{Sob}_p^l(\mathcal{X})$, embedding theorems (conditions of function boundedness, conditions of membership in $L^q(\mathcal{X})$, estimates of continuity modulus), differentiability at a point (including boundary points), the Carathéodory–Suvorov theory on kernel convergence for sequences of Sob_p^l-homeomorphisms. For some close results in the case of functions on abstract surfaces see Ch. 3–5 in [9].

The principal aim of this investigation is the development of description methods for anisotropic mediums and processes therein. For applications see [10].

REFERENCES

1. *Sobolev S. L.,* Some Applications of Function Analysis in Mathematical Physics [in Russian], Izd-vo LGU, Leningrad (1950).
2. *Miklyukov V. M.,* "On local approximation of functions in anisotropic spaces," Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, **LXII**, No. 2, 67–80 (2012).
3. *Miklyukov V. M.,* "Functions on anisotropic spaces: points of local extremum," Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr., Kiev, August 2013, 13 pages (in prep.).
4. *Miklyukov V. M.,* Functions with Generalized Derivatives on Anisotropic Spaces, 11 pp., www.uchimsya.co (2012).
5. *Ahlfors L. V.,* Conformal Invariants, McGraw-Hill, New York (1973).
6. *Besov O. V., Il'in V. P, Nikol'skii S. M.,* Integral Representations of Functions and Embedding Theorems [in Russian], Nauka, Moscow (1975).
7. *Maz'ya V. G., Poborchii S. V.,* Embedding Theorems on Non-Lipschitz Domains [in Russian], Izd-vo S.-Peterb. un-ta, St. Petersburg (2006).
8. *Heinonen J.,* Lectures on Analysis on Metric Spaces (Universitext), Springer-Verlag, New York; Berlin; Heidelberg; etc. (2001).
9. *Miklyukov V. M.,* Functions of Weight Sobolev Classes, Anisotropic Metrics, and Degenerate Quasiconformal Mappings [in Russian], Izd-vo VolGU, Volgograd (2010).
10. *Miklyukov V. M.,* "Analysis on anisotropic spaces. Problems and perspectives" [in Russian], in: Materiály VIII Mezinárodni vědecko-praktická konference "Předni v ědecké novinky-2012," Dil 10, Matematika, Fyzika, Moderni informaĉni technologie, Publishing House "Education and Science", s.r.o., Praha, 2012, pp. 13–17.

DYNAMICALLY SCHEDULED PARALLELIZATION OF LINEAR ALGEBRA ALGORITHMS FOR HETEROGENEOUS SYSTEMS

Mozartova N. S.[1], **Kashevarova T. P.**[2], **Shustrov N. A.**[3]

Intel Corporation, Novosibirsk, Russia; [1]Nadezhda.Mozartova@intel.com, [2]Tamara.P.Kashevarova@intel.com, [3]Nikita.A.Shustrov@intel.com

In this work we present a new parallelization method for linear algebra algorithms that efficiently utilizes all computational resources of a heterogeneous system consisting of a multicore CPU with coprocessors. We will show how this method can be applied for parallelization of the key linear algebra factorization algorithms (QR, LU and Cholesky) on systems with Intel® Xeon Phi™ coprocessors.

The provided matrix factorization method is based on panel factorization approach. The panel factorization approach shows advantages over communication avoiding and tail methods or theirs combination:

- no additional computational cost;
- no additional memory consumption.

The panel factorization approach has the same computational cost and memory usage with classical LAPACK algorithms. These facts make this approach preferable for systems with coprocessors. The implementation preserves the LAPACK standard interfaces and the algorithm can be applied for any matrices.

The implementation of our method is DAG-based and uses panel factorization kernels that were redesigned and rewritten for new Intel® Xeon Phi™ architectures.

The proposed novel method provides a high degree of parallelism while minimizing synchronizations and communications. The algorithm enables adaptable workload distribution between CPUs and coprocessors with the best load balancing. This guarantees efficient utilization of all available computational units in heterogeneous systems. The main features of the algorithm are:

- Adaptable data/task distribution on-the-fly between CPUs and coprocessors.
- Support of heterogeneous systems with an unlimited number of coprocessors.
- Scalability. A system with CPUs and 1 coprocessor shows 2x performance improvement and a system with CPUs and 2 coprocessors shows 3x speed-up.
- No limitations on matrix sizes.

Our algorithm is implemented in the frame of Intel® MKL LU, QR and Cholesky factorization routines. The implemented routines detect the presence of Intel® Xeon Phi™ coprocessors and automatically offload the computations that benefit from additional computational resources. This usage model hides the complexity of heterogeneous systems from the user, allowing ease of use and providing the same API as usual Intel® MKL routines.

REFERENCES

1. *Kuznetsov S. V.,* "An approach of the QR factorization for tall-and-skinny matrices on multicore platforms," in: Proc. 11th Intern. Conf. PARA 2012, Helsinki, Finland (Lecture Notes in Computer Science, 7782), Springer-Verlag, 2013, pp. 235–249.
2. *Kobotov A., Kuznetsov S. V.,* "Efficient dynamic parallelization for the QR factorization," in: Proc. of PARA 2008: 9th Intern. Workshop on State-of-the-Art in Scientific and Parallel Computing, 2008.
3. *Kurzak J., Dongarra J.,* "Implementing linear algebra routines on multi-core processors with pipelining and a look ahead," UT-CS-06-581, LAPACK Working note #178, September (2006).

KERNEL GLOBAL SMOOTHING BY UNITARY REDUCTIONS

Novitskii I. M.

Khabarovsk Division of the Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk, Russia; novim@iam.khv.ru

The characterization theorems for integral operators on L^2-spaces (see [2]) say that these operators are models for most linear operators in Hilbert spaces; and, therefore, there is a series of important problems in operator theory which can be equivalently reformulated to the class of integral operators. On the other hand, in order to be analytically usable, an integral model of an operator should have a kernel being tractable by means of analytical techniques, and our emphasis in this talk is on bi-Carleman integral operators on $L^2(\mathbb{R})$, whose kernels $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ and two Carleman functions $\boldsymbol{t}(s) = \overline{\boldsymbol{T}(s,\cdot)}$, $\boldsymbol{t'}(s) = \boldsymbol{T}(\cdot,s) : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R})$ are infinitely smooth and vanish at infinity together with all partial and all strong derivatives, respectively; such kernels are called K^∞*-kernels*. A K^∞-kernel is of *Mercer type* (see [4]) if its property of being infinitely smooth is stable under passage to certain left and right multiples of its associated integral operator. The main purposes of the talk are:

(1) To give (see [4]) an expansion theorem in absolutely and uniformly convergent bilinear series concerning the K^∞-kernels; the result will extend to a general non-Hermitian setting both Mercer's and Kadota's Expansion Theorems (see [1]).

(2) To give (see [4]) a description of families incorporating those bounded operators on a separable Hilbert space that can be simultaneously transformed by the same unitary equivalence transformation into integral operators on $L^2(\mathbb{R})$, whose kernels are K^∞-kernels of Mercer type; the singleton version of this result will imply in particular that any bi-integral operator on $L^2(Y,\mu)$ is unitarily equivalent to an integral operator on $L^2(\mathbb{R})$ with such a kernel, and the implementing unitary operator will be found by direct construction.

(3) To reduce (see [5]) the general linear integral equation of the third kind in $L^2(Y,\mu)$, with largely arbitrary kernel and coefficient, to an equivalent integral equation either of the second kind or of the first kind in $L^2(\mathbb{R})$, with the kernel being the linear pencil of K^∞-kernels of Mercer type; the reduction will be done by mimicking Korotkov's reduction method (see [3]) but using the unitary equivalence transformation of item (2).

REFERENCES

1. *Kadota T. T.,* "Term-by-term differentiability of Mercer's expansion," Proc. Amer. Math. Soc., **18**, 69–72 (1967).
2. *Korotkov V. B.,* Integral Operators [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1983).
3. *Korotkov V. B.,* Questions of the Theory of Integral Operators [in Russian], Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk (1988).
4. *Novitskii I. M.,* "Integral operators with infinitely smooth bi-Carleman kernels of Mercer type," Int. Electron. J. Pure Appl. Math., **2**, No. 1, 43–73 (2010).
5. *Novitskii I. M.,* "Kernels of integral equations can be boundedly infinitely differentiable on $\mathbb{R}^2$," in: Proc. 2011 World Congr. on Engineering and Technology (CET 2011, Shanghai, China, October 28–November 2, 2011), Vol. 2, IEEE Press, Beijing, 2011, pp. 789–792.

AN APPROXIMATION OF A BITZADZE–SAMARSKII TYPE INVERSE PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATIONS

Piskarev S. I.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; piskarev@gmail.com

This talk is devoted to the numerical analysis of a Bitzadze–Samarskii type inverse problem for abstract elliptic differential equations with Dirichlet and Neumann conditions. The presentation uses a general approximation scheme and is based on the C_0-semigroup theory and a functional analysis approach.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-90401 Ukr_a).

REFERENCES

1. *Orlovsky D., Piskarev S.*, "On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems," J. Inverse Ill-Posed Probl., **17**, No. 8, 765–782 (2009).

ON THE CONVERGENCE RATE IN THE BIRKHOFF ERGODIC THEOREM FOR THE PERIODIC LORENTZ GAS

Podvigin I. V.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; ivan_podvigin@ngs.ru

In this talk we deal with the properties of the periodic Lorentz gas that is a well-known dispersing billiard. Recently this system has attracted some attention again. For instance, the exponential decay of correlations was obtained in [1], the large deviations principle was proved in [2] and the number of visits to balls was studied in [3].

Let $\mathbb{T}$ be the unit 2-torus and $D = \mathbb{T} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ where $B_k \subset \mathbb{T}$ denotes a disjoint convex domain with C^3-smooth boundary whose curvature nowhere vanishes. We consider the billiard map T which defined by usual way on the collision space $\Omega = \partial D \times [-\pi/2, \pi/2]$. The map T is ergodic under the smooth measure $d\mu = c \cos\varphi \, d\varphi \, dr$, where (r, φ) are standard coordinates on Ω (i. e. r is the arc length parameter on ∂D and $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ is the angle between the directions of the billiard particle motion and the inward normal) and $c > 0$ is the normalizing constant.

For $f \in L_1(\Omega)$ the Birkhoff ergodic theorem states that ergodic averages

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega), \quad n \in \mathbb{N}, \ \omega \in \Omega,$$

converge μ-almost everywhere to the mean value $\mu(f) = \int\limits_{\Omega} f \, d\mu$. Our main result based on the technics arising from [4] and the large deviations principle [2] is the estimate of the convergence rate in this ergodic theorem for the periodic Lorentz gas.

Theorem. *Let f be a Hölder continuous functions on Ω. For any sufficiently small $\varepsilon > 0$ there exists $\gamma(\varepsilon) > 0$ such that*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mu\{\sup_{k \geq n} |A_k f(\omega) - \mu(f)| \geq \varepsilon\} = -\gamma(\varepsilon).$$

In addition, for the characteristic function χ_E with $E \subset \Omega$, $\mu(\partial E) = 0$ and any sufficiently small $\varepsilon > 0$ there exist $c(\varepsilon), \gamma(\varepsilon) > 0$ such that the following estimate is valid

$$\mu\{\sup_{k \geq n} |A_k \chi_E(\omega) - \mu(E)| \geq \varepsilon\} \leq c(\varepsilon) e^{-\gamma(\varepsilon) n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

The author was partially supported by the Program of Leading Scientific Schools of Russian Federation (project no. NSh-5998.2012.1).

REFERENCES

1. *Chernov N.* "Advanced statistical properties of dispersing billiards," J. Stat. Phys., **122**, No. 6, 1061–1094 (2006).
2. *Rey-Bellet L., Young L.-S.* "Large deviations in non-uniformly hyperbolic dynamical systems," Ergodic Theory Dyn. Syst., **28**, 587–612 (2008).
3. *Chazottes J.-R., Collet P.* "Poisson approximation for the number of visits to balls in non-uniformly hyperbolic dynamical systems," Ergodic Theory Dyn. Syst., **33**, 49–80 (2013).
4. *Kachurovskii A. G.* "The rate of convergence in ergodic theorems," Russian Math. Surveys, **51**, No. 4, 653–703 (1996).

MKL SPARSE BLAS: PERFORMANCE OPTIMIZATIONS ON MODERN ARCHITECTURES

Pudov S. G.

Intel Corporation, Novosibirsk, Russia; sergey.g.pudov@intel.com

Sparse BLAS was integrated into Intel® MKL 8.0 and it was continuously optimized for upcoming architectures. MKL Sparse BLAS supports many sparse formats and is comprised of Fortran-style interfaces. The interfaces are very universal; they support a lot of interesting features like usage sparse sub-matrices, etc. Also computational kernels make almost no assumptions about sparse data storage except for several cases (e.g. solving routines). Current MKL key functionality demonstrates substantial performance results. But this all-mode approach resulted in limited numbers of supported optimization algorithms. It is well known that effective optimization of sparse computations requires preliminary information about input matrices: the more information is available, the better algorithm can be chosen. This information is usually time-consuming and cannot be found for every function call. Traditionally computations are divided into two steps — analysis and execution — so matrix is analyzed only once and this information is used in further function calls. For iterative methods and for algorithms with the same matrix sparsity structure this approach can provide a lot of benefits.

Hereby current MKL Sparse BLAS universal interfaces come into conflict with optimizations on modern parallel many-core architectures because they are unable to take into account sparse matrix specifics. To resolve this issue a research project has been initiated in MKL for developing new Sparse BLAS interfaces that should support two-steps execution mode for providing auto-tuning functionality. We mainly investigate SpMV routines as they are most actively used. Several experiments on modern many-core architectures have been performed. Performance results are very promising but there are several options for final interface implementation to be chosen based on customer usage analysis.

COMPUTABILITY OF THE SOLUTION OPERATORS OF SYMMETRIC HYPERBOLIC SYSTEMS

Selivanova S. V.[1], **Selivanov V. L.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
s_seliv@math.nsc.ru
[2]*A. P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
vseliv@iis.nsk.su

We prove computability of the solution operators of symmetric hyperbolic systems [1] in the exact sense of computable analysis [2].

Theorem. *Let $M_A, M_\varphi > 0$, $p \geq 2$ be integers, $Q = [0,1]^m$ be the unitary cube in $\mathbb{R}^m$. Then the operator $(A, B_1, \ldots, B_m, \varphi) \mapsto \mathbf{u}$ sending any sequence $A, B_1, \ldots, B_m$ of symmetric real matrices with $A > 0$ such that $\|A\|, \|A^{-1}\|, \|B_i\| \leq M_A$, $\lambda^{(i)}_{\min} < 0 < \lambda^{(i)}_{\max}$, and $\varphi \in C^{p+1}(Q)$ such that $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_s \leq M_\varphi$, $\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_s \leq M_\varphi$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, to the unique solution $\mathbf{u} \in C^p(H, \mathbb{R}^n)$ of the Cauchy problem*

$$\begin{cases} A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \ t \geq 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_m), \end{cases}$$

is a computable partial function from the space $(S_+ \times S^m) \times C_s(Q, \mathbb{R}^n)$ to $C_{sL_2}(H, \mathbb{R}^n)$.

Here $\lambda^{(i)}_{\min}$, $\lambda^{(i)}_{\max}$ are respectively the minimal and maximal eigenvalues of the matrix pencil $A - \lambda B_i$; $S \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ is the space of symmetric $n \times n$ matrices equipped with the Euclidean norm, S_+ is the space of symmetric positively definite matrices; H is the domain of existence and uniqueness of the considered Cauchy problem; $\|\cdot\|_s$ is the sup-norm, $\|\cdot\|_{sL_2}$ is the sup-norm on t and L_2-norm on Q.

The proof is based on well-known facts of numeric analysis and of the theory of PDEs [1, 3, 4], and on the strong constructivizability of the field of algebraic real numbers [5]. A preliminary weaker version of the theorem above appeared earlier in [6]. Our proofs can be adapted to prove computability of dissipative boundary value problems for symmetric hyperbolic systems and for the wave equation, which answers an open question of computable analysis [7].

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-01-31183 and no. 13-01-00015).

REFERENCES

1. *Friedrichs K. O.* "Symmetric hyperbolic linear differential equations," Commun. Pure Appl. Math., **7**, 345–392 (1954).
2. *Weihrauch K.* Computable Analysis, Springer, Berlin (2000).
3. *Godunov S. K., ed.,* Numerical Solution of Higher-Dimensional Problems of Gas Dynamics [in Russian], Nauka, Moscow (1976).
4. *Godunov S. K.* Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1971).
5. *Ershov Yu. L.* "Numbered fields," in: Proc. 3rd Intern. Congr. for Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1967, Amsterdam, 1968, pp. 31–35.
6. *Selivanova S. V., Selivanov V. L.* "Computing solution operators of symmetric hyperbolic systems of PDEs," J. UCS, **15**, No. 6, 1337–1364 (2009).
7. *Weihrauch K., Zhong N.* "Is wave propagation computable or can wave computers beat the Turing machine?," Proc. Lond. Math. Soc., **85**, No. 2, 312–332 (2002).

CONSTRUCTION AND APPLICATION OF THE COLLOCATION AND LEAST RESIDUAL METHOD FOR SOLVING THE THREE-DIMENSIONAL NAVIER–STOKES EQUATIONS

Shapeev V. P.[1,2], **Vorozhtsov E. V.**[1]

[1] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
vshapeev@ngs.ru, vorozh@itam.nsc.ru

The method of collocations and least residuals (CLR) was previously developed for solving the two-dimensional stationary Navier–Stokes equations governing the laminar flows of viscous, incompressible fluids, see the work [1] and the bibliography therein. In the present work, we extend the CLR method for solving the incompressible Navier–Stokes equations involving three spatial variables. In this method, the 3D Navier–Stokes equations are at first linearized after Newton. Then the solution in each cell of a uniform spatial rectangular grid is represented as an expansion in a solenoidal basis. Owing to the use of such a basis the continuity equation is satisfied identically so that it remains to solve only the momentum equations. The substitution of the solenoidal expansion of the approximate solution in the linearized system of the Navier–Stokes equations gives rise to a system of linear algebraic equations (SLAE), which must be satisfied inside each cell at the user-specified collocation points. This system is augmented by linear algebraic equations following from the matching conditions on the faces of each grid cell. These conditions ensure the solution continuity. The collocation equations and matching conditions form an overdetermined SLAE. This system is solved by the QR expansion method. The advantage of this expansion over the method of least squares lies in the fact that the QR expansion method does not increase the SLAE condition number. To accelerate the convergence of the iterations used for the approximate solution construction we propose a new version of the well-known method, which is based on Krylov's subspaces. In this version, the correction to the last iteration is sought in the form of a linear combination of the k foregoing solution residuals, $1 \le k \le 20$. The coefficients of this system were found with the aid of the QR expansion method. It is not difficult to show that the pseudo-solutions of the same system obtained by the method of least squares and by the QR decomposition coincide in the absence of rounding errors at their computation.

The verification of the developed CLR method was done on the analytic solution of a three-dimensional test problem. The use of the algorithm based on the Krylov's subspaces has enabled us to accelerate the convergence to the stationary solution by the factors from 11 to 17 depending on the number of employed solution residuals. We further applied our CLR method for the numerical solution of the problem of lid-driven cubic cavity flow. These computations were done for the Reynolds numbers $\mathrm{Re} = 100$ and $\mathrm{Re} = 1000$. In the case of $\mathrm{Re} = 1000$, the computations were carried out on the grids of $40 \times 40 \times 40$, $80 \times 80 \times 80$, and $160 \times 160 \times 160$ cells. The results obtained by the CLR method coincide with the most accurate available solutions.

The authors were partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00277).

REFERENCE

1. *Isaev V. I., Shapeev V. P.,* "High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations," Comput. Math. Math. Phys., **50**, No. 10, 1670–1681 (2010).

ON COMPLETENESS OF THE ROOT FUNCTIONS OF STURM–LIOUVILLE PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY OPERATORS

Shlapunov A. A.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; ashlapunov@sfu-kras.ru

We consider a Sturm–Liouville boundary value problem in a bounded Lipschitz domain D of $\mathbb{R}^n$. By this is meant that the differential equation is given by a second order elliptic operator A of divergent form in D with the coefficients of the class $L^\infty(D)$ and the boundary conditions are of Robin type on ∂D:

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } D, \\ Bu = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

The first order term of the boundary operator B is the oblique derivative whose coefficients bear discontinuities of the first kind along a smooth hypersurface on the boundary of D. Applying the method of weak perturbation of compact selfadjoint operators (cf. [1]) and the method of rays of minimal growth (cf. [2], the survey also contains a large number of references on the topic), we prove the completeness of root functions related to the boundary value problem in Lebesgue and Sobolev spaces of various types generated by Hermitian forms. Also, for the defined spaces, a sharp embedding to the Sobolev–Slobodetskii spaces is proved.

Precisely, our contribution consists in considering non-coercive forms. Indeed, a Hermitian form associated with a second order elliptic formally selfadjoint operator A is usually constructed through a factorization $A = C^*C$ with an overdetermined elliptic first order operator C and its formal adjoint C^*. According to the famous Theory of Microfunctions by Sato, microlocally any first order operator C with complex-valued coefficients can be presented via the Lewy operator or the gradient operator or the multidimensional Cauchy–Riemann operator. The Lewy-type operators go beyond elliptic theory, the holonomic operators like the gradient lead to coercive mixed problems related to A, and the Cauchy–Riemann type operators generate non-coercive boundary conditions. Thus, it is not fortuitous that non-coercive boundary value problems for elliptic differential operators attract attention of mathematicians since the middle of the 20th century (see for instance [3]) that resulted in the discovery of the subellipticity phenomenon which greatly influenced the development of the theory of partial differential equations. The use of non-coercive forms enlarges essentially the class of those boundary conditions for which the root functions of the corresponding mixed problems are dense in the Lebesgue space $L^2(D)$. The enlargement allows one to perturb the boundary conditions by diverse tangential vector fields. In general, we lose on regularity of solutions, however, this gap is well motivated by the nature of problems (see [4] for further details).

REFERENCES

1. *Keldysh M. V.,* "On the completeness of eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators," Russian Math. Surveys, **26**, No. 4, 15–44 (1971).
2. *Agranovich M. S.,* "Spectral problems in Lipschitz domains" [in Russian], Sovrem. Mat., Fundam. Napravl., **39**, 11–35 (2011); English transl. in J. Math. Sci. (New York), **190**, No. 1, 8–33 (2013).
3. *Kohn J. J., Nirenberg L.,* "Non-coercive boundary value problems," Commun. Pure Appl. Math., **18**, 443–492 (1965).
4. *Shlapunov A., Tarkhanov N.,* On completeness of root functions of Sturm–Liouville problems with discontinuous boundary operators [Preprint, No. 3], Institutes für Mathematik der Universität Potsdam, Potsdam (2012).

MEASUREMENT ERROR AND DECONVOLUTION IN SPACES OF GENERALIZED FUNCTIONS

Zinde-Walsh V.

McGill University, Montreal, Canada;
Centre interuniversitaire de recherche en économie quantitative, Montreal, Canada;
victoria.zinde-walsh@mcgill.ca

This paper considers convolution equations that arise from classes of models in statistics and econometrics that involve classical measurement error and nonparametric regression with errors in variables among others (see e.g., [1, 4]). These models lead to convolution equations that here are presented in spaces of generalized functions to account for possible singularities in the distribution function and in the regression function or its Fourier transform. The algebraic and differential equations that arise for Fourier transforms are studied. A typical system of equations involves two unknown functions, g and f and provides (with the function $h_k(x) = x_k g(x)$),

$$\begin{aligned} g * f &= w_1; \\ (h_k) * f &= w_{2k}, \quad k = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

The paper establishes conditions for existence, uniqueness and continuity of the solutions in the space of tempered distributions [2]. In the statistical applications this makes it possible to consider densities for arbitrary and not only absolutely continuous distributions, and to operate with Fourier transforms for sparse support or polynomially growing regression functions.

Conditions are also given for stochastic convergence of solutions when the known functions, w_1 and w_{2k}, $k = 1, \ldots, d$, are random functions.

REFERENCES

1. *Meister A.* Deconvolution Problems in Nonparametric Statistics (Lecture Notes in Statistics, 193), Springer-Verlag (2009).
2. *Schwartz L.* Théorie des Distributions [in French], Hermann, Paris (1966).
3. *Sobolev S. L.* Cubature Formulas and Modern Analysis, Gordon and Breach Science Publishers (1992).
3. *Zinde-Walsh V.* "Identification and well-posedness in nonparametric models with independence conditions," in: Handbook of Applied Nonparametric and Semiparametric Econometrics and Statistics, Oxford University Press (2013, to appear); arXiv:1209.1588 [stat.ME].

ON OPTIMIZATION OF DENSE LINEAR ALGEBRA ALGORITHMS FOR INTEL® Xeon Phi™ COPROCESSOR ARCHITECTURE

Zotkevich A. A.

Intel Corporation, Novosibirsk, Russia; Aleksandr.Zotkevich@Intel.com

Today computational coprocessor systems (ex-GPUs) with shared memory provide more and more processing power. In order to utilize the additional processing power, extra efforts is often required, including learning new programming languages, tools and applying complex tuning of algorithms. However modern coprocessor architectures like Intel® Xeon Phi™ enables us to use familiar and standard programming models to preserve investments in existing code. Particularly, for dense linear algebra Intel® Math Kernel Library provides a library of deeply optimized routines for Xeon Phi™ like Cholesky, LU factorization and many others, which enables us to easily utilize computational capabilities of the coprocessor.

Ease of use of Intel® software for optimization of algorithms for Xeon Phi™ makes it possible to achieve a good performance result using simple approaches. In this work some of these approaches are considered. Because the main characteristic feature of coprocessors is greater number of threads while each thread of coprocessor is less powerful than that of a standard CPU, modified techniques often should be implemented. Certain techniques and differences than those used for CPU are shown in the work.

For example, the correct utilization of BLAS and LAPACK optimized routines is very important for optimizing the user's algorithms. In this work the proper recommendations and examples for the correct utilization is provided, including simple examples which show how to speed up an algorithm up to ten times.

AUTHOR INDEX

Abdrakhmanov A. M. . . . 74
Abdrakhmanova A. A. . . . 208
Abdrakhmanova R. P. . . . 74
Abdymanapov S. A. . . . 87
Abiev N. A. . . . 309
Abylkairov U. U. . . . 310
Agadzhanov A. N. . . . 362
Aizenberg A. M. . . . 231
Akhmedov D. M. . . . 366
Akhmed-Zaki D. K. . . . 87
Akhtaeva N. S. . . . 96
Akinshin A. A. . . . 311
Akishev G. . . . 363
Akysh A. Sh. . . . 76
Al-Delfi J. K. . . . 247
Aleksandrov V. M. . . . 77
Alekseev G. V. . . . 67
Aliev N. A. . . . 85
Amangaliyeva M. M. . . . 78
Anders A. . . . 440
Anders R. . . . 440
Andreev V. K. . . . 79, 80
Andriyanova E. R. . . . 81
Anikonov D. S. . . . 82
Anikonov Yu. E. . . . 83
Annin B. D. . . . 312
Anosov V. P. . . . 364
Antontsev S. . . . 68, 313
Apakov Yu. P. . . . 84
Arbuzov E. V. . . . 365
Arutyunov A. V. . . . 350
Arvanitoyeorgos A. . . . 309
Asadova O. G. . . . 85
Asanov A. . . . 86
Asanova A. T. . . . 314
Ashyralyev A. . . . 434
Ashyralyyev Ch. . . . 435
Averina T. A. . . . 75
Ayupova N. B. . . . 88
Babich V. M. . . . 40
Badoyan A. D. . . . 239
Bakytbek M. B. . . . 174
Balakina E. Yu. . . . 91
Balandin A. S. . . . 315
Balgimbayeva Sh. A. . . . 367
Barlukova A. M. . . . 92
Baydin A. V. . . . 89
Baydulov V. G. . . . 90
Begehr H. . . . 48
Belmetcev N. F. . . . 312
Belonosov V. S. . . . 58
Belov Yu. Ya. . . . 94, 95
Belushchenko A. V. . . . 292
Belyayev Yu. N. . . . 316
Belykh V. N. . . . 368
Berdyshev A. S. . . . 96
Besov O. V. . . . 351
Bezrodnykh S. I. . . . 93
Bibikov P. V. . . . 97
Blokhin A. M. . . . 59
Bogatyreva E. A. . . . 190
Bogovskii M. E. . . . 98
Bojarski B. . . . 49
Bokayev N. A. . . . 369
Boltaev N. . . . 428
Bondar L. N. . . . 100
Bondarenko A. N. . . . 99
Borel L. V. . . . 101
Brizitskii R. V. . . . 102
Bugueva T. V. . . . 103
Burenkov V. I. . . . 358
Buterin S. A. . . . 317
Bychkov E. V. . . . 104
Cadena L. . . . 405
Chebotarev A. Yu. . . . 287
Chechkin A. V. . . . 356
Chechkin G. A. . . . 69
Chechkina A. G. . . . 289
Chechkina T. P. . . . 69
Chemetov N. V. . . . 318
Chepyzhov V. V. . . . 319
Cherevko A. A. . . . 142, 196
Chesnokov A. A. . . . 288
Chirkunov Yu. A. . . . 128, 234, 312
Chrysos G. . . . 439
Chudinov K. M. . . . 320
Chuesheva N. A. . . . 291
Chuev N. P. . . . 290
Chuiko S. M. . . . 292
Chumakov G. A. . . . 181, 436
Chumakova N. A. . . . 181
Chupakhin A. P. . . . 92, 142, 196
Danaev N. T. . . . 310
Danzanova V. S. . . . 414
Darovskaya K. A. . . . 321
Dastai-ool A. A. . . . 125
Dauitbek D. . . . 63
Davydov A. A. . . . 123
Davydov P. N. . . . 124
Dedok V. A. . . . 99

Demidenko G. V. 61
Demidov G. V. 126
Denisov V. N. 322
Denisova T. E. 127
Derevtsov E. Yu. 378
Dhara R. N. 437
Dobrokhotov S. Yu. 128, 129
Drozdov G. M. 379
Dubey P. 439
Dubinskii Ju. A. 42
Dubtsov R. 439
Dumanyan V. Zh. 130
Durdiev D. K. 323
Dyachenko E. O. 380
Ebel A. A. 305
Efimova A. A. 134
Efimova P. N. 135
Egorov A. A. 381
Egorov I. E. 131, 132
Egorshin A. O. 133
Eminov S. I. 432
Eminova V. S. 432
Ershov I. V. 121
Evseev N. A. 372
Fadeev S. I. 182, 218, 425
Falaleev L. P. 426
Falaleev M. V. 275
Farmonov Sh. R. 324
Fedorov V. E. 124, 277
Fedorova Yu. Yu. 277
Fedoruk M. P. 276
Feireisl E. 50
Finogenko I. A. 278
Fokin M. V. 279
Frewer M. 327
Frolenkov I. V. 95, 176, 280
Gadoev M. G. 147
Gaidomak S. V. 113
Galakhov E. I. 114
Garifullin R. N. 325
Garipov R. M. 60, 115
Gichev V. M. 375
Gladkov A. L. 116
Glyzin S. D. 326
Godunov S. K. 41
Gogatishvili A. 359
Golovin S. V. 117
Golubyatnikov V. P. 311
Gordevskyy V. D. 118
Gordienko V. M. 120
Gordievskikh D. M. 119
Grebenev V. N. 327
Greshnov A. V. 438
Grigoryev E. E. 153
Grigoryev Yu. N. 121
Gritsutenko S. S. 376
Gubarev Yu. G. 122
Gubkin A. A. 122
Gukalov A. A. 118
Gutman A. E. 377
Győri I. 51
Hayotov A. R. 429
Heinecke A. 439
Henry G. 439
Hudyakov Yu. V. 285
Ilkiv V. S. 111, 144
Iooss G. 52
Irgashev B. Yu. 145
Isaev V. I. 117
Isangulova D. V. 387
Iskakova U. A. 146, 154
Iskhokov S. A. 147
Ismoilov A. I. 274
Ismoilov S. I. 388
Ivanov A. A. 141
Ivanova A. V. 79, 142
Ivanova E. V. 214
Ivanova N. D. 143
Jalolov Ikr. I. 382
Jamsranjav D. 383
Jenaliyev M. T. 78
Kabanikhin S. I. 62, 148
Kachurovskii A. G. 390
Kałamajska A. 437
Kalenyuk P. I. 328
Kaliev I. A. 152
Kalinin A. V. 153, 271
Kalinin S. A. 117
Kalinkin A. 440, 441
Kalmenov T. Sh. 63, 154
Kamynin V. L. 155
Kanguzhin B. E. 156
Kaptsov O. V. 157
Karabut E. A. 158, 159
Karachanskaya E. V. 389
Karachik V. V. 160
Karchevsky A. L. 161
Kashevarova T. P. 448
Kazakov A. L. 149, 150
Kazaniecki K. 442
Kazantsev S. G. 151
Keller A. V. 162
Khalitov A. Kh. 427
Khankhasaev V. N. 281

Kholikov D. K. 282
Kholodovskii S. E. 283
Khompysh Kh. 310
Khriptun M. D. 284
Khurshudyan As. Zh. 329
Kirillov K. A. 354
Kirillova S. V. 405
Kitapbaeva B. T. 174
Klevtsova Yu. Yu. 330
Kmit I. 331
Kobotov A. 439
Kohut I. V. 328
Kolpakova E. A. 168
Koltunowski O. A. 169
Kononenko L. I. 171
Konovalova D. S. 170
Kopylov A. P. 391
Kopylova V. G. 94
Korobkov M. V. 443
Korobov A. A. 392
Korolev V. K. 425
Koroleva K. A. 376
Korotaev D. O. 416
Korotkova E. M. 172
Korshun K. V. 173
Koshanov B. D. 174
Koshelev A. A. 393
Kosheleva Yu. A. 175
Kosmakova M. T. 78
Kostin A. B. 155
Kostrigina O. S. 136
Kostrub I. D. 214
Kostsov E. G. 218
Kotelnikova M. S. 115
Kovrizhkin V. V. 163
Kovyrkina O. A. 164
Kozhanov A. I. 165
Kozhevnikova L. M. 166
Kozlov R. I. 167
Kozlov V. V. 44
Kozlova O. R. 167
Kriger E. N. 176
Krivorotko O. I. 148
Krivoshapkin A. L. 196
Krjukov I. 441
Kucher N. A. 178
Kufner A. 53
Kulikov A. Y. 332
Kulikov I. M. 394
Kurako M. A. 129
Kurkina M. V. 177
Kusraev A. G. 360
Kutateladze S. S. 360
Kuzhuget A. A. 159
Kuznetsov D. S. 117
Kuznetsov P. A. 149
Kuznetsov S. V. 445
Larkina O. S. 257
Lashina E. A. 181
Łasica M. 333
Lassoued D. 444
Latawiec K. J. 334
Latfullin T. G. 180
Lazarev N. P. 179
Lazareva G. G. 395
Lempert A. A. 150
Leontiev A. A. 166
Likhoshvai V. A. 182, 425
Lobanov A. V. 183
Lomov A. A. 125
Lozhnikov D. A. 129
Łukaniszyn M. 334
Lukina G. A. 184
Lukinov V. L. 445
Lyubanova A. Sh. 335
Lyulko N. A. 185
Makarenko N. I. 186
Maksimova N. N. 396
Maltseva S. V. 378
Malygina V. V. 336
Mamadaliyev N. 187
Mamontov A. E. 188
Mamontov E. V. 189
Manakova N. A. 190
Marinin I. V. 148
Martynov V. N. 126
Maslov V. P. 45
Matevossian H. A. 192
Matveeva I. I. 191
Mazko A. G. 64
Mazowiecka K. E. 446
Medvedev S. B. 128, 194, 431
Megrabov A. G. 193
Meleshko S. V. 337
Melnikov E. V. 397
Meredov M. 195
Meredova M. M. 195
Meremelia I. Yu. 398
Mesenev P. R. 89
Mestnikova N. N. 281
Mikhailets V. A. 400
Mikhailov A. V. 325
Mikhailova A. V. 196
Mikhailova E. I. 276

Mikhailenko B. G. 126
Miklyukov V. M. 447
Minenkov D. S. 128
Miroshnichenko V. L. 399
Molodkina V. E. 271
Moyo S. 337
Mozartova N. S. 448
Mukminov F. Kh. 81
Mulyukov M. V. 338
Murach A. A. 400
Muratbekov M. B. 401
Musabekova Z. E. 401
Musilimov B. M. 401
Mussabekov K. S. 197
Nadyrbekova A. Sh. 251
Nalimov V. I. 198
Nalzhupbayeva G. M. 199
Namm R. V. 107
Namsaraeva G. V. 200
Nazarenko S. V. 128
Nazaruk E. M. 235
Nečasová Š. 318
Neshchadim M. V. 202
Nesterov P. N. 201
Nikitina T. N. 402
Nikonorov Yu. G. 309
Noskov M. V. 354, 405
Novikov D. P. 203
Novikov O. A. 403
Novikov S. I. 404
Novitskii I. M. 449
Nuraliev F. A. 406
Nytrebych Z. M. 328
Oberlack M. 327
Oleynik E. A. 236
Omelchenko E. A. 204
Orazov I. O. 205
Orazova R. S. 295
Orlov K. Yu. 196
Oshorov B. B. 207
Oshorov Bato B. 207
Ospanov K. N. 206
Ostapenko V. V. 142, 164
Otelbaev M. 358
Panarin V. A. 196
Panov A. V. 209
Panov E. Yu. 70
Parfenov A. I. 210
Pastukhova S. E. 211
Pavlov M. V. 203
Pavlov V. P. 208
Penenko A. V. 212
Penenko V. V. 212, 213
Perov A. I. 214
Pertsev N. V. 215
Peszek J. P. 339
Petrenko P. S. 216
Petrova M. N. 147
Pichugin B. Yu. 221
Pichugina A. N. 221
Pikulin S. V. 217
Pimanov D. O. 218
Pinigina N. R. 219
Piskarev S. I. 450
Pismennyy N. A. 220
Plaksina I. M. 223
Plaksina V. P. 222
Plekhanova M. V. 224
Plotnikov P. I. 54
Podgaev A. G. 225
Podvigin I. V. 451
Polyakova A. P. 407
Polyntseva S. V. 226
Ponomarev D. V. 278
Popov A. S. 408
Popov N. S. 227
Popov S. V. 228
Popov V. A. 340
Potapova S. V. 229
Primakov S. S. 409
Prokudin D. A. 188
Pudov S. G. 452
Pupyshev I. M. 371
Pyatkov S. G. 230
Rakhmatullin D. Ya. 410
Rakshaeva E. Zh. 231
Ramazanov M. D. 355
Ramazanov M. I. 78
Reshetnyak Yu. G. 46
Reznikova I. A. 232
Rodionov E. D. 177
Roitenberg E. Ya. 233
Romanenko G. V. 280
Romanov A. S. 411
Romanov V. G. 65, 234
Romanovskii N. N. 412
Romanovskii R. K. 235
Rovenska O. G. 403
Ruzakova O. A. 236
Ruziev M. Kh. 237
Rylov A. I. 238
Sabatulina T. L. 341
Sadybekov M. A. 240
Safarov J. Sh. 244

Safiullova R. R. 245
Sagadeyeva M. A. 239
Saks R. S. 242
Salieva O. A. 114
Saneeva L. I. 414
Sattarov M. A. 243
Savchuk M. V. 398
Savelev L. Ya. 413
Sazhenkov S. A. 241
Sedipkov A. A. 249
Selivanov V. L. 453
Selivanova S. V. 453
Semenko E. V. 250
Sergeeva O. A. 415
Serikbayev A. U. 251
Serovajsky S. Ya. 342
Seyranian A. P. 343
Sgibnev M. S. 248
Shadimetov Kh. M. 428, 429
Shadrina A. I. 293
Shadrina N. N. 294
Shafarevich A. I. 45
Shakirov I. A. 430
Shaldanbaev A. Sh. 205, 295
Shamolin M. V. 296
Shapeev V. P. 454
Sharafutdinov V. A. 297
Sharma S. 344
Shcherbakov V. V. 304
Shepelov M. A. 299
Shevchenko G. V. 298
Shipina T. N. 300
Shishkina E. L. 345
Shishlenin M. A. 302
Shlapunov A. A. 455
Shmarev S. 68, 313
Shtokalo D. N. 425
Shubin V. V. 303
Shukhardin A. A. 152
Shurina E. P. 276
Shustrov N. A. 448
Shvab I. V. 431
Shyshkanova G. A. 301
Siasos P. 309
Silaev D. A. 416
Simonov K. V. 129, 405
Sinyavsky A. G. 252
Skazka V. V. 253
Skorokhodov S. L. 417
Skubachevskii A. L. 71
Skvortsova M. A. 254
Slavskii V. V. 177
Smailov Ye. S. 418
Smelyanskiy M. 439
Soboleva O. V. 255
Soboleva T. S. 356
Sokolova A. G. 291
Soldatova E. A. 138
Solonnikov V. A. 47
Solonukha O. V. 346
Sorokin A. S. 256
Sosnov V. V. 89
Sporyshev M. S. 257
Stakheeva O. A. 259
Stanisławski R. 334
Starov V. G. 258
Stepanov V. D. 359
Stepanova I. V. 80
Strap N. I. 144
Strelkov N. A. 419
Subbotin Yu. N. 357
Subbotina N. N. 260
Suleimenov K. M. 420
Sultanov O. A. 261
Suragan D. 347
Svetov I. E. 246
Sviridyuk G. A. 247
Sychev M. A. 348
Syzdykova A. T. 369
Tabarintseva E. V. 262
Talyshev A. A. 263
Tarasova G. I. 264
Tarkhanov N. N. 380
Tasevich A. L. 265
Telesheva L. A. 266
Temirgaliyev N. 421
Tengaeva A. A. 295
Tereshko D. A. 267
Tersenov Ar. S. 268
Tikhonova I. M. 132
Tkachev D. L. 59
Tokmagambetov N. E. 156
Tokmantsev T. B. 260
Toland J. F. 55
Tolstonogov A. A. 66
Trakhinin Yu. L. 269
Treskov S. A. 171
Tsaritsanskiy A. N. 286
Tsyplenkova O. N. 139
Tukhtasinov M. 270
Turmetov B. Kh. 240
Tutatchikov V. S. 422
Tyukhtina A. A. 271
Tyulenev A. I. 423

Ulyanov S. A. 167
Urev M. V. 273
Urinov A. K. 274
Ushakova E. P. 424
Uvarova I. A. 191, 272
Vaidyanathan K. 439
Vasil'chik M. Yu. 371
Vasil'eva A. A. 370
Vasilieva E. V. 106
Vasilina G. K. 426
Vasilyev V. B. 105
Vaskevich V. L. 352
Vikhtenko E. M. 107
Vlasov V. I. 93
Vodopyanov E. S. 108
Vodopyanov S. K. 353, 372
Volchkov Yu. M. 110
Volkov Yu. S. 374
Volokitin E. P. 109
Volyans'ka I. I. 111
Voronin A. F. 112
Vorozhtsov E. V. 454
Voytishek A. V. 373
Weigant W. 54
Wojciechowski M. 442
Yakunkin N. I. 431
Yakushev I. A. 308
Yamilov R. I. 325
Yashima H. F. 307
Yildirim O. 434
Yuldasheva A. V. 306
Yumova Ts. Zh. 433
Zadorin A. I. 385
Zadorin N. A. 385
Zagrebina S. A. 138
Zakharova T. I. 131
Zamyshlyaeva A. A. 139
Zelik S. V. 319
Zhiber A. V. 136
Zhidkov A. A. 271
Zhikov V. V. 43
Zhumatov S. S. 137
Zhuravlev I. V. 384
Zhuravleva E. N. 158
Zikirov O. S. 140
Zinde-Walsh V. 456
Zolotukhin A. Ya. 386
Zotkevich A. A. 457

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Международная конференция,
посвященная 105-летию со дня рождения
Сергея Львовича Соболева

Новосибирск, Россия, 18–24 августа 2013 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Издание подготовлено с использованием пакета $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Подписано в печать 11.07.2013 Формат 70×108 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 40,6. Уч.-изд. л. 29,1. Тираж 410 экз. Заказ № 46.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО “Омега Принт”
пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.