СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция, посвященная 110-летию со дня рождения
Сергея Львовича Соболева

Новосибирск, Россия, 10-16 декабря 2018

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

W_p^l

SOBOLEV READINGS

International School-Conference dedicated to the 110th anniversary of the birthday of
Sergei L'vovich Sobolev

Novosibirsk, Russia, December 10-16, 2018

ABSTRACTS

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция,
посвященная 110-летию
со дня рождения С. Л. Соболева

Новосибирск, Россия, 10–16 декабря 2018 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

НОВОСИБИРСК
2018

УДК 517
ББК В16
С545

С545 Соболевские чтения. Международная школа-конференция, посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 10–16 декабря 2018 г.): Тез. докладов / Под ред. Г. В. Демиденко. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2018. — 248 с.

ISBN 978-5-86134-222-3

В сборнике представлены тезисы докладов на Международной школе-конференции “Соболевские чтения”, посвященной 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Тематики докладов охватывают следующие направления: уравнения с частными производными, уравнения математической физики, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с запаздывающим аргументом, теория операторов, спектральная теория, функциональные пространства, теоремы вложения, теория приближений, кубатурные формулы.

УДК 517
ББК В16

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Ответственный редактор: Г. В. Демиденко

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Novosibirsk State University

Editor-in-Chief: G. V. Demidenko

С $\dfrac{1602070100-02}{\text{Я}82(03)-2018}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-222-3

Программный комитет

Г. В. Демиденко — *председатель*, И. И. Матвеева — *секретарь*,
В. С. Белоносов, О. В. Бесов, А. М. Блохин, В. Л. Васкевич, С. К. Водопьянов,
С. К. Годунов, П. И. Плотников, Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов, В. Д. Степанов,
А. А. Толстоногов, H. Begehr, E. Feireisl, L. Hatvani, A. Laptev, R. McOwen

Организационный комитет

Г. В. Демиденко — *сопредседатель*, М. П. Федорук — *сопредседатель*,
Л. Н. Бондарь — *секретарь*, Е. Ю. Балакина, А. В. Карпенко, И. И. Матвеева,
М. А. Скворцова, И. А. Уварова, Ю. А. Хазова, Т. К. Ыскак, В. Э. Эйснер

Program Committee

G. V. Demidenko (*Chairman*), I. I. Matveeva (*Secretary*),
H. Begehr, V. S. Belonosov, O. V. Besov, A. M. Blokhin, E. Feireisl, S. K. Godunov,
L. Hatvani, A. Laptev, R. McOwen, P. I. Plotnikov, Yu. G. Reshetnyak, V. G. Romanov,
V. D. Stepanov, A. A. Tolstonogov, V. L. Vaskevich, S. K. Vodopyanov

Organizing Committee

G. V. Demidenko (*Co-Chairman*), M. P. Fedoruk (*Co-Chairman*),
L. N. Bondar (*Secretary*), E. Yu. Balakina, V. E. Eisner, A. V. Karpenko,
Yu. A. Khazova, I. I. Matveeva, M. A. Skvortsova, I. A. Uvarova, T. K. Yskak

Конференцию поддержали:

Российский фонд фундаментальных исследований
(проект № 18-01-20103)

Сибирское отделение Российской академии наук

Региональный математический центр
Новосибирского государственного университета

Международный математический союз

Международный центр
теоретической физики
им. А. Салама

The Conference is supported by:

Russian Foundation for Basic Research
(project no. 18-01-20103)

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Regional Mathematical Center,
Novosibirsk State University

International Mathematical Union

СОДЕРЖАНИЕ

ЦИКЛЫ ЛЕКЦИЙ
LECTURE COURSES

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
PLENARY LECTURES

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ
SHORT COMMUNICATIONS

ЦИКЛЫ ЛЕКЦИЙ
Тезисы

LECTURE COURSES
Abstracts

EVOLUTION PDEs WITH NONSTANDARD GROWTH CONDITIONS

Antontsev S. N.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
University of Lisbon, Lisbon, Portugal; antontsevsn@mail.ru

- The Function Spaces
  - Lebesgue Spaces with Variable Exponents
  - Definition and Basic Properties. Dense Sets in $L^{p(\cdot)}(\Omega)$
  - Anisotropic Spaces of Functions Depending on x and t
  - Approximation by Smooth Functions
  - Formulas of Integration by Parts
  - Embedding Theorems in Anisotropic Spaces
- Elliptic Equations
  - The Classical and Generalized Minimization Problems
  - Lavrentyev's Phenomenon. Log-Condition
  - Definitions of Weak Solutions
  - Existence and Uniqueness Theorems
  - Localized Stationary Solutions
- Evolution Equations
  - Parabolic Equation with $p(x,t)$-Laplacian
  - Generalized Equations
  - Equations with Doubly Nonlinearity
  - Space and Time Localization of Solutions
  - Blow up of Solutions
  - Wave Equation with $p(x,t)$-Laplacian

REFERENCES

1. *Antontsev S., Shmarev S.,* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up; Series: Atlantis Studies in Differential Equations, Vol. 4, Atlantis Press, Paris (2015).
2. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.,* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Series: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2017, 1st edition, Springer, Berlin (2011).

DELAUNAY TRIANGULATION, VORONOI DIAGRAMS AND APPLICATIONS

Guessab A.

Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, France;
allal.guessab@univ-pau.fr

On these talks, we first present the concepts of a Voronoi diagram and of a Delaunay triangulation. These two geometrical structures are important tools in many areas like Astronomy, Physics, Chemistry, Biology, Ecology, Economics, Mathematics and Computer Science. Here, we present a set of results showing some of the advantages of their optimality criteria in computing integral approximations, which are based upon a geometric point of view exploiting Delaunay triangulations and Voronoi tessellations.

We begin by introducing a new class of cubature formulas for numerical integration (or multidimensional quadrature), that approximate from above (or respectively from below) the exact value of the integrals of every function having a certain type of convexity. Under suitable regularity assumptions, we show that all these integral approximations enjoy certain desirable properties. In particular, they can be totally characterized in terms of the approximation error generated by a multidimensional quadratic function. We show that the Delaunay triangulation, the Voronoi tessellation and their generalizations give access to efficient algorithms for computing these cubature formulas.

We will combine theoretical results from polytope domain meshing, these (extended) new multidimensional integration formulas, generalized barycentric coordinates, and finite element exterior calculus to construct scalar- and vector-valued basis functions for conforming and nonconforming polytope finite element methods on generic convex polytope meshes in any dimension. Finally, our last objective is to check the effectiveness of our approach to construct new enriched nonconforming polytope finite elements, and to show, for a specific problem, how the enlargement of the range of choice of the enrichment functions can help to improve some convergence properties, even if we choose to enrich with non-polynomials functions.

We also briefly discuss some ongoing related research, and summarizes the major parts of my current research related to this topic.

These talks are based on the papers [1–5].

REFERENCES

1. *Guessab A., Schmeisser G.,* “Negative definite cubature formulae, extremality and Delaunay triangulation,” Constr. Approx., **31**, No. 1, 95–113 (2010).
2. *Guessab A., Schmeisser G.,* “Construction of positive definite cubature formulae and approximation of functions via Voronoi tessellations,” Adv. Comput. Math., **32**, No. 1, 25–41 (2010).
3. *Guessab A., Nouisser O., Schmeisser G.,* “A definiteness theory for cubature formulae of order two,” Constr. Approx., **24**, No. 3, 263–288 (2006).
4. *Guessab A., Schmeisser G.,* “Sharp error estimates for interpolatory approximation on convex polytopes,” SIAM J. Numer. Anal., **43**, No. 3, 909–923 (2005).
5. *Guessab A., Schmeisser G.,* “Convexity results and sharp error estimates in approximate multivariate integration,” Math. Comput., **73**, No. 247, 1365–1384 (2004).

О РАБОТЕ С. Л. СОБОЛЕВА "ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ"

Бондарь Л. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия; b_lina@ngs.ru

В лекциях будет изложена работа Сергея Львовича Соболева "Волновое уравнение для неоднородной среды" [1], опубликованная в Трудах Сейсмологического института. В ней рассматривается задача Коши для волнового уравнения с переменным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2(x,y,z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

и начальными условиями при $t = 0$.

В работе [1] предлагается метод решения этой задачи, основанный на сведении ее к интегральному уравнению следующего вида

$$u(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{P_t} u(M, t - \tau(M; M_0)) \triangle\sigma(M; M_0)\, dv + F(M_0, t), \tag{2}$$

где $M = (x, y, z)$; $F(M_0, t)$ — интеграл по *квазисфере* $S_t = \{\tau(M; M_0) = t\}$ с центром $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и радиусом t, а подынтегральные функции определяются начальными данными задачи Коши; $\tau(M; M_0)$ — решение уравнения эйконала

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = \frac{1}{c^2(x,y,z)};$$

P_t — область трехмерного пространства, ограниченная поверхностью S_t; $\sigma(M; M_0)$ — специально построенная гладкая функция.

Разрешимость уравнения (2) устанавливается методом последовательных приближений. Отсюда получается формула решения задачи Коши для волнового уравнения (1), которая в литературе называется формулой Кирхгофа – Соболева.

В частном случае $c(x, y, z) \equiv c_0$ имеем

$$\tau(M; M_0) = \frac{|M - M_0|}{c_0}, \quad \sigma(M; M_0) = \frac{1}{|M - M_0|}.$$

Тогда $\triangle\sigma(M; M_0) = 0$ при $M \neq M_0$, и (2) преобразуется в формулу Кирхгофа

$$u(M_0, t) = F(M_0, t).$$

Замечание. В работе [2] предложенный подход С. Л. Соболев применил к построению решения задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями, заданными на *пространственно ориентированной* поверхности $t = T(M)$.

Работы [1, 2] см. также в книге [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Волновое уравнение для неоднородной среды // Тр. Сейсм. ин-та. Л.: Изд-во АН СССР, 1930. № 6. 57 с.
2. *Соболев С. Л.* К вопросу об интегрировании волнового уравнения в неоднородной среде // Тр. Сейсм. ин-та. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. № 42. 26 с.
3. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. II. Функциональный анализ. Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; Академическое изд-во "Гео", 2006.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
Тезисы

PLENARY LECTURES
Abstracts

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СО СВОЙСТВОМ НЕУБЫВАНИЯ ЭНТРОПИИ

Годунов С. К.[1], Ключинский Д. В.[2], Фортова С. В.[3]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
godunov@math.nsc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
dmitriy_klyuchinskiy@mail.ru
[3]*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия;*
sfortova@mail.ru

Сделано обобщение (вариант) классической схемы Годунова [1], которая состояла из описания взаимодействия соседних сеточных ячеек при помощи нелинейных итерационных процедур, предложенных Кочиным в 1926 году и описанных в работе [2]. Эта схема и её обобщение получили широкое распространение и видоизменение.

Новая схема не использует нелинейных распадов. Предложенный вариант состоит из упрощенного алгоритма. Он соблюдает нелинейные законы сохранения, однако основан на линейной интерполяции определяющих параметров из соседних ячеек разностной сетки на границу, разделяющую эти ячейки. Стоит отметить, что текущая линеаризация отличается от ранее предложенных линеаризаций схемы Годунова.

Предложенная конструкция обеспечивает нетривиальное поведение энтропии в виде ее неубывания в ячейках сетки, моделирующих ударные волны. Можно считать, что получаемые по данному варианту схемы численные решения уравнений газовой динамики являются сеточной аппроксимацией “обобщенных” решений соответствующих уравнений.

Работа выполнена при поддержке РНФ (соглашение № 17-11-01293) и РФФИ (проект № 17-01-00812).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47 (89), № 3. С. 271–306.
2. *Кочин Н. Е.* К теории разрывов жидкости // Собр. соч. Т. 2. М.–Л., 1948. С. 5–42.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ КАСКАДОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Гринес В. З.

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия; vgrines@yandex.ru

Доклад посвящен обзору результатов по топологической классификации структурно устойчивых дискретных динамических систем (каскадов) на многообразиях. Первый классификационный результат такого рода принадлежит нижегородскому математику А. Г. Майеру, получившему в 1939 году топологическую классификации грубых диффеоморфизмов окружности. Благодаря классическим работам Д. В. Аносова и С. Смейла начала 60-х годов прошлого века стало понятным, что структурно устойчивые каскады, заданные на многообразиях размерности большей единицы, могут обладать счетным множеством седловых периодических орбит. Одновременно С. Смейлом был введен класс структурно устойчивых каскадов на многообразиях, неблуждающее множество которых является конечным. Такие каскады получили название каскадов Морса – Смейла. Они обладают регулярной динамикой в противовес каскадам со счетным множеством периодических орбит, обладающих хаотической динамикой. В дальнейшем классификация каскадов с конечным и счетным множеством периодических орбит происходит параллельно, сближаясь, когда удается классифицировать содержательные классы структурно устойчивых каскадов, обладающих хаотической динамикой на базисных множествах и обладающих регулярной динамикой вне их объединения. Наиболее законченные результаты были получены по классификации каскадов Аносова в предположении, что размерность сжимающегося или расширяющегося подрасслоения касательного пространства равна 1. Так в работах конца 60-х и начала 70-х годов прошлого века Я. Г. Синая, Дж. Френкса, Ш. Ньюхауса и Э. Мэнинга установлено, что в этом случае несущее многообразие гомеоморфно тору, а любой диффеоморфизм Аносова топологически сопряжен с соответствующим гиперболическим автоморфизмом тора. Позднее аналогичный результат получен В. З. Гринесом и Е. В. Жужомой в случае, когда неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма содержит ориентируемый аттрактор или репеллер коразмерности один. При этом в качестве модельного диффеоморфизма выступает диффеоморфизм тора, полученный из алгебраического автоморфизма тора посредством хирургической операции С. Смейла.

В работах В. З. Гринеса, Ю. А. Левченко, В. С. Медведева и О. В. Починки (2012–2015) получена топологическая классификация структурно устойчивых каскадов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых состоит из двумерных базисных множеств.

В работах Х. Бонатти и Н. Гельман (2010) приведены примеры трехмерных многообразий, допускающих структурно устойчивые каскады, неблуждающее множество которых состоит в точности из одного одномерного аттрактора и в точности одного одномерного репеллера. Однако вопрос о классификации таких каскадов остается открытым.

В докладе будет также отражен значительный прогресс, достигнутый к настоящему времени в топологической классификации каскадов Морса – Смейла на многообразиях размерности большей единице.

Доклад подготовлен при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041).

ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Кальменов Т. Ш.[1], **Арепова Г. Д.**[2]

Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Республика Казахстан;
[1]kalmenov.t@mail.ru, [2]arepovag@mail.ru

Изучение корректных краевых задач и их спектральных вопросов для классических дифференциальных уравнений представляет большой теоретический и прикладной интерес. Особенно такое направление достаточно хорошо развито для эллиптических уравнений, которые являются непосредственным аналогом уравнения Штурма – Лиувилля, для которого развиты многочисленные методы исследований. В то же время, эффективное описание общих регулярных краевых задач и полнота корневых векторов этих задач для эллиптических уравнений остаются малоисследованными.

Описанию регулярных краевых задач для эллиптических уравнений посвящены основополагающие работы М. И. Вишика [1] и М. Отелбаева [2]. В работе М. И. Вишика для общих эллиптических уравнений построено описание всех корректных краевых задач методом корректных расширений минимальных эллиптических операторов, а в работе М. Отелбаева дано описание всех корректных расширений и сужений линейных операторов. Важный класс корректных, но не краевых задач для уравнений эллиптического типа впервые начали изучать А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [3], задачи такого типа в настоящее время называют задачами типа Бицадзе – Самарского.

Наиболее общий подход для изучения полноты корневых векторов общих линейных операторов разработан М. В. Келдышем [4], который носит название метод оценки резольвенты линейных операторов.

В настоящей работе, пользуясь граничными условиями Ньютонова потенциала из работы Т. Ш. Кальменова и Д. Сурагана [5] и методом регулярных расширений линейных операторов, получено представление решения коэрцитивных регулярных краевых задач для уравнения Лапласа в виде обобщенной свертки. Далее, используя собственные вектора Ньютонова потенциала, методом оценки резольвенты доказана полнота корневых векторов рассматриваемых задач.

Работа выполнена при поддержке проектов (AP05133239, AP05134615, BR05236656) Комитета Науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 3. С. 513–568.
2. *Отелбаев М., Кокебаев Б. К., Шыныбеков А. Н.* К вопросам расширения и сужения операторов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 80, № 6. С. 1307–1311.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
4. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 4 (160). С. 15–41.
5. *Kal'menov T. Sh., Suragan D.* On spectral problems for the volume potential // Dokl. Math. 2009. V. 80, No. 2. P. 646–649.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Малыгина В. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; mavera@list.ru

Рассмотрим следующий класс уравнений

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Семейством (1) будем называть множество всех уравнений вида (1) с фиксированным набором параметров $a_0, a_1, \ldots, a_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и всевозможными измеримыми функциями r_k, удовлетворяющими условиям $0 \leq r_k(t) \leq \omega_k$. Семейство называется *устойчивым* (соответственно, *асимптотически устойчивым*), если устойчивы (асимптотически устойчивы) все входящие в него уравнения.

Пусть в уравнении (1) фиксирован набор коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и границ запаздываний $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Поставим в соответствие уравнению (1) следующее уравнение (*test-уравнение*)

$$\dot{y}(t) = a_0 y(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(t - \omega_k), \quad t > 0, \tag{2}$$

доопределенное начальными условиями $y(\xi) = 1$ при $\xi \leq 0$.

Обозначим $l = \inf\{t \geq 0 : \dot{y} > 0\}$ — первую точку минимума решения уравнения (2). Случай $l = \infty$ не исключается: он соответствует ситуации, когда y монотонно убывает на $[0, \infty)$.

В работе [1] получены эффективные условия, позволяющие разделить случаи $l = \infty$ и $l < \infty$. Отметим, что ситуация $l = \infty$ гарантирует не просто устойчивость, но положительность и монотонность фундаментального решения любого уравнения семейства (2). Для ситуации $l < \infty$ задача устойчивости сводится к построению решения test-уравнения *на конечном отрезке* и сравнению числа $y(l)$ с (-1). Эта задача легко решается численными методами, а для простых классов test-уравнений удается дать ее аналитическое решение: в работе [2] это сделано для уравнения $\dot{y}(t) = a_0 y(t) - a_1 y(t - \omega_1)$, в работе [3] — для уравнения $\dot{y}(t) = -a_1 y(t - \omega_1) - a_2 y(t - \omega_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Матем. 2013. № 7. С. 3–15.
2. *Малыгина В. В.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Матем. 1993. № 5. С. 72–85.
3. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. III // Изв. вузов. Матем. 2013. № 8. С. 44–56.

HIERARCHY OF COMPLEX MODEL OPERATORS — A UNIFIED APPROACH TO A THEORY OF COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Begehr H.

Free University of Berlin, Berlin, Germany; begehrh@zedat.fu-berlin.de

The basic complex PDE is the Cauchy–Riemann equation $\partial_{\overline{z}} w = f$, which for the homogeneous case characterizes the analytic functions. The Bitsadze equation $\partial_{\overline{z}}^2 w = f$ is related to bianalytic, as $\partial_{\overline{z}}^n w = f$ is to polyanalytic functions. One reason for the importance of complex analysis is the factorization of the Laplace operator $4\partial_z \partial_{\overline{z}} = \partial_x^2 + \partial_y^2$. As the Poisson equation $\partial_z \partial_{\overline{z}} w = f$ is related to the harmonic functions, the n-Poisson equation $(\partial_z \partial_{\overline{z}})^n w = f$ is to polyharmonic functions.

The general model equation $\partial_z^m \partial_{\overline{z}}^n w = f$ [10] can be decomposed into the system $\partial_{\overline{z}}^{n-m} w = \omega$, $(\partial_z \partial_{\overline{z}})^m \omega = f$ $(m < n)$. Potential to a model operator serves to transform general PDEs with the model operator as leading term into a singular integral equation. This then can be treated via the Fredholm alternative [3].

Certain potentials adjusted to particular boundary conditions are essential for solving boundary value problems. For the polyanalytic operator $\partial_{\overline{z}}^n$ a well-posed boundary condition is the Schwarz condition. The polyanalytic Schwarz kernel is explicitly known for the unit disc [11] and for any plane domain with a harmonic Green function [2]. For the n-Laplacian $(\partial_z \partial_{\overline{z}})^n$ a variety of proper boundary conditions and related kernels exist. Besides the well-known Dirichlet, Neumann, Riquier (Navier), Robin boundary conditions with the related polyharmonic Green, Neumann, Green–Almansi, Robin kernel functions [1, 14] there are hybrid polyharmonic Green function [9, 13] corresponding to related boundary conditions, which arise as certain convolutions of lower order polyharmonic kernels of the listed types. Hence, the variety of such polyharmonic kernels is large, the bigger the degree of polyharmonicity the larger is this variety.

The existence of Green functions is assured for quite general domains [4, 8]. They are in principal known by their conformal invariance. For practical problems other methods are required. For certain domains the boundaries of which are composed from parts of circles and lines the parqueting-reflection principle [12] is available.

Polyharmonic Green functions are also appropriate for orthogonal decompositions of Sobolev spaces [5–7].

REFERENCES

1. *Almansi E.,* “Sull’integrazione dell’equazione differenziale $\triangle^{2n} u = 0$,” Ann. Math. (3), **2**, 1–59 (1899).
2. *Aksoy Ü., Begehr H., Çelebi A. O.,* “A. V. Bitsadze’s observation on bianalytic functions and the Schwarz problem,” Complex Var. Elliptic Equ. (to appear), DOI 10.1080/17476933.2018.1504039.
3. *Aksoy Ü., Çelebi A. O.,* “A survey on boundary value problems for complex partial differential equations,” Adv. Dyn. Syst. Appl., **5**, 133–158 (2010).
4. *Begehr H.,* Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations, An Introductory Text, World Sci., Singapore (1994).
5. *Begehr H.,* “Orthogonal decompositions of the function space $L_2(\overline{D}; \mathbb{C})$,” J. Reine Angew. Math., **549**, 191–219 (2002).
6. *Begehr H., Dubinskii Ju.,* “Some orthogonal decompositions of Sobolev spaces and applications,” Colloq. Math., **89**, 199–212 (2001).
7. *Begehr H., Dubinskii Ju.,* “Orthogonal decompositions of Sobolev spaces in Clifford analysis,” Ann. Mat. Pura Appl., **181**, 55–71 (2002).

8. *Begehr H.*, “Boundary value problems in complex analysis” (Lecture Notes from a mini-course at the Simón Bolivar Univ., Caracas, May 2004), Bol. Asoc. Mat. Venez., **XII**, Part I, 65–85; Part II, 217–250 (2005).
9. *Begehr H.*, “Hybrid Green functions and related boundary value problems,” in: Extended Abstracts of AIMC 37, 37th. Annual Iranian Math. Conf., Sept. 2006 (Eds. S. Rezapour et al.), pp. 275–278.
10. *Begehr H., Hile G. N.*, “A hierarchy of integral operators,” Rocky Mt. J. Math., **27**, 669–706 (1997).
11. *Begehr H., Schmersau D.*, “The Schwarz problem for polyanalytic functions,” Z. Anal. Anwend., **24**, 341–351 (2005).
12. *Begehr H., Vaitekhovich T.*, “The parqueting-reflection principle for constructing Green function,” in: Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2012 (Eds. S. V. Rogosin, M. V. Dubatovskaya), Cambridge Sci. Publ., Cottenham, 2013, pp. 11–20.
13. *Begehr H., Vu T. N. H., Zhang Z.-X.*, “Polyharmonic Dirichlet problems,” Proc. Steklov Inst. Math., **255**, 13–34 (2006).
14. *Riquier Ch.*, “Sur quelques problèmes relatifs à l’équation aux derivées patielle $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})^n u = 0$,” J. Math. (9), **5**, 297–393 (1926).

EMBEDDING THEOREMS FOR MULTIANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

Karapetyan G. A.

Russian-Armenian University, Yerevan, Republic of Armenia;
garnik_karapetyan@yahoo.com

The integral representation of functions and embedding theorems for generalized homogeneous spaces (see [1]) are generalized in the paper for multi-homogeneous spaces (see [2–3]).

For any parameter $\nu > 0$ and a natural number k denote

$$P(\nu,\xi) = \left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \dots + \left(\nu\xi^{\alpha^n}\right)^{2k} + \left(\nu\xi^{\alpha^{n+1}}\right)^{2k}, \quad G_0(\nu,\xi) = e^{-P(\nu,\xi)},$$

$$G_{1,j}(\nu,\xi) = 2k\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, \quad j = 1,\dots,n+1.$$

For any function f consider the regularization with the kernel $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

The following integral representation holds.

Theorem 1. *Let the function f have the Sobolev weak derivatives $D^{\alpha^i} f$, $i = 1,\dots,n+1$, where α^i are the vertices of the completely regular polyhedron $\mathfrak{N}$ and $D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, $i = 1,\dots,n+1$. Then for almost all $x \in \mathbb{R}^n$ it has the representation*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_\varepsilon^h d\nu \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha^i} f(t)\hat{G}_{1,i}(t-x,\nu)dt.$$

Let $\mathfrak{N}$ be a completely regular polyhedron, then $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ i = 1,\dots,M\}$. The main result of this paper is the following boundary embedding theorem for functions from a multianisotropic space $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$.

Theorem 2. *Let the numbers p and q satisfy the relations $1 < p \le q < \infty$ and a multi-index $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ is such that*

$$\chi = \max_{i=1,\dots,I_{n-1}} \left(\left(\beta,\mu^i\right) + \left|\mu^i\right| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \right) \le 1.$$

Then $D^\beta W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, i.e., any function $f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ has weak derivatives $D^\beta f$, belonging to the class $L_q(\mathbb{R}^n)$, and for some constants $C_1, C_2 > 0$ inequality holds

$$\left\|D^\beta f\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \sum_{i=1}^{M} \left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

REFERENCES

1. *Besov O. V., Il'in V. P., Nikloskii S. M.,* Integral Representations of Functions and Embedding Theorems [in Russian], Nauka, Moscow (1975).
2. *Karapetyan G. A.,* “Integral representations of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on the plane with one anisotropy vertex,” J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci., **51**, No. 10, 269–281 (2016).
3. *Karapetyan G. A., Arakelian M. K.,* “Embedding theorems for general multianisotropic spaces,” Math. Notes (in press).

PARAMETER IDENTIFICATION FOR THIN INCLUSIONS LOCATED INSIDE ELASTIC BODIES

Khludnev A. M.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
khlud@hydro.nsc.ru

The talk is concerned with an identification of a rigidity parameter for thin inclusions located inside elastic bodies. It is assumed that inclusions cross an external boundary of the elastic body. In addition to this, a delamination of the inclusions is assumed thus providing a crack between inclusions and the elastic body. To exclude a mutual penetration between crack faces, inequality type boundary conditions are imposed. We consider elastic inclusions as well as rigid and rigid-elastic inclusions. To find a solution of the problem formulated, we solve an optimal control problem. A cost functional characterizes a displacement of the external part of the inclusion, and a rigidity parameter serves as a control function. We prove a solution existence of the problems formulated [1].

REFERENCES

1. *Khludnev A. M.*, "Rigidity parameter identification for thin inclusions located inside elastic bodies," J. Optim. Theory Appl., **172**, No. 1, 281–297 (2017).

STABLE PERIODIC ORBITS FOR THE MACKEY–GLASS EQUATION

Krisztin T.

University of Szeged, Szeged, Hungary; krisztin@math.u-szeged.hu

We study the classical Mackey–Glass delay differential equation

$$x'(t) = -ax(t) + bf_n(x(t-1)),$$

where a, b, n are positive reals, and $f_n(u) = \frac{u}{1+u^n}$ for $u > 0$. As a limiting $(n \to \infty)$ case we also consider the discontinuous equation

$$x'(t) = -ax(t) + bf(x(t-1)),$$

where $f(u) = u$ for $u \in (0,1)$, $f(1) = 1/2$, and $f(u) = 0$ for $u > 1$. First, for certain parameter values a, b an orbitally asymptotically stable periodic orbit is constructed for the discontinuous equation. Then it is shown that for large values of n and with the same parameters a, b the Mackey–Glass equation also has an orbitally asymptotically stable periodic orbit near the periodic orbit of the discontinuous equation.

It is usual to project a given solution x of the Mackey–Glass equation by $t \mapsto (x(t),(x(t-1)))$ into the plane. The complex structure of the obtained plane curves are used to conclude complicated (chaotic) dynamics.

The structure of the obtained stable periodic solutions and their projections into the plane can also be complex. However, as these periodic solutions are orbitally asymptotically stable, the dynamics can be simple.

This is the joint work with G. Kiss and A. Vigh (Szeged).

WEYL TYPE ASYMPTOTICS AND BOUNDS FOR THE EIGENVALUES OF FUNCTIONAL-DIFFERENCE OPERATORS FOR MIRROR CURVES

Laptev A.

Imperial College London, London, United Kingdom; a.laptev@imperial.ac.uk

We investigate Weyl type asymptotics of functional-difference operators associated to mirror curves of special del Pezzo Calabi–Yau threefolds. These operators are $H(\zeta) = U + U^{-1} + V + \zeta V^{-1}$ and $H_{m,n} = U + V + q^{-mn}U^{-m}V^{-n}$, where U and V are self-adjoint Weyl operators satisfying $UV = q^2 VU$ with $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b^2}$, $b > 0$ and $\zeta > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. We prove that $H(\zeta)$ and $H_{m,n}$ are self-adjoint operators with purely discrete spectrum on $L^2(\mathbb{R})$. Using the coherent state transform we find the asymptotical behaviour for the Riesz mean $\sum_{j\geq 1}(\lambda - \lambda_j)_+$ as $\lambda \to \infty$ and prove the Weyl law for the eigenvalue counting function $N(\lambda)$ for these operators, which imply that their inverses are of trace class.

We also show some other spectral inequalities related to such operators.

MATHEMATICAL MODELS FOR NUTRIENT TRANSPORT AND BIOLOGICAL TISSUE GROWTH

Meirmanov A. M.[1], **Galtsev O. V.**[2]

Belgorod National Research University, Belgorod, Russia;
[1]anvarbek@list.ru, [2]oleg_galtsev@mail.ru

Free boundary problems (problems with unknown boundaries) for differential equations are some of the hardest problems in the theory of partial differential equations. In these problems, along with the solution of differential equations, it is necessary to determine the domain, where the solution is looked for. As a rule, this domain (boundary) is determined from the additional boundary condition on the free boundary. There are well known free boundary problems like the Stefan problem and the Hele–Show problem [1], [2], respectively, for the heat equation and the Laplace equation. These problems are simply formulated, but so far the existence of a classical solution has been proved only locally in time (except for some simple cases). As for systems of differential equations we must mention results of V. A. Solonnikov and his colleagues on the free boundaries problems for the Navier–Stokes equations [3] and A. Friedman [4]. But, as in the case of scalar equations, one can prove here only the existence of a classical solution locally in time. The problem in consideration simulates the growth of biological tissue in a nutrient medium and describes a porous structure, in which a solid skeleton interacts with a fluid in the pores [5]. The corresponding mathematical model at the microscopic level is strongly nonlinear and its correctness, if it will be proved, should be only locally in time. But if we are dealing with practical applications in biology, then local results on time have no significance. Moreover, mathematical models describing these processes at the microscopic level (tens of microns) have no practical value either if the areas in consideration are some meters. So, we must find some approximations which allow us to pass from microstructure to macrostructure. But the usual homogenization methods work only for the periodic structure, which is impossible for our model because the concentration of the nutrient is not periodic. Anyway, the formal homogenization is possible and we can derive the macroscopic (homogenized) model. We suggest the procedure, that allows to construct approximate solutions depending on the small parameter $\varepsilon = \dfrac{l}{L}$, where l is the average size of the particles and L is the size of the domain in consideration. We prove that the limiting procedure as $\varepsilon \to 0$ results the same limit (macroscopic models) as for the formal homogenization.

This research is partially supported by RFBR (project no. 18-31-00042).

REFERENCES

1. *Meirmanov A. M.,* The Stefan Problem, De Gruyter, Berlin (1992).
2. *Meirmanov A. M., Galtsev O. V., Zimin R. N.,* Free Boundaries in Rock Mechanics, De Gruyter, Berlin (2017).
3. *Solonnikov V. A.,* “Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions,” in: Mathematical Aspects of Evolving Interfaces, Springer, Berlin, 2003, pp. 123–175 (Lect. Notes Math., vol. 1812).
4. *Friedman A.,* “A free boundary problem for coupled system of elliptic, hyperbolic and Stokes equations modeling tumor growth,” Interfaces Free Bound., **8**, 247–261 (2006).
5. *O'Dea R. D., Nelson M. R., El Haj A. J., Waters S. L., Byrne H. M.,* “A multiscale analysis of nutrient transport and biological tissue growth in vitro,” Math. Med. Biol., **32**, No. 3, 345–366 (2015).

SOME INEQUALITIES FOR FRACTIONAL LAPLACIANS

Nazarov A. I.

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute RAS,
St. Petersburg University, St. Petersburg, Russia; al.il.nazarov@gmail.com

Let Ω be a bounded domain with smooth boundary. We compare two natural types of fractional Laplacians $(-\Delta)^s$, namely, the "Navier" and the "Dirichlet" ones. We denote their quadratic forms by $Q^N_{s,\Omega}$ and $Q^D_{s,\Omega}$, respectively.

Theorem 1. *Let $s > -1$, $s \notin \mathbb{N}_0$. Then for $u \in \mathrm{Dom}(Q^D_{s,\Omega})$, $u \not\equiv 0$, the following relations hold:*

$$\begin{aligned} Q^N_{s,\Omega}[u] &> Q^D_{s,\Omega}[u], \quad \text{if} \quad 2k < s < 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ Q^N_{s,\Omega}[u] &< Q^D_{s,\Omega}[u], \quad \text{if} \quad 2k-1 < s < 2k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Theorem 2. *Let $0 < |s| < 1$, and let $u \in \mathrm{Dom}(Q^D_{s,\Omega})$, $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$. Then the following relations hold (all inequalities are understood in the sense of distributions):*

$$\begin{aligned} (-\Delta_\Omega)^s_N u &> (-\Delta_\Omega)^s_D u, \quad \text{if} \quad 0 < s < 1; \\ (-\Delta_\Omega)^s_N u &< (-\Delta_\Omega)^s_D u, \quad \text{if} \quad -1 < s < 0. \end{aligned}$$

Theorem 3. *For sign-changing $u \in \mathrm{Dom}(Q^D_{s,\Omega})$, the following relations hold:*

$$Q^N_{s,\Omega}[u] > Q^N_{s,\Omega}[|u|]; \qquad \begin{aligned} Q^D_{s,\Omega}[u] &> Q^D_{s,\Omega}[|u|], \quad \text{if} \quad 0 < s < 1; \\ Q^D_{s,\Omega}[u] &< Q^D_{s,\Omega}[|u|], \quad \text{if} \quad 1 < s < 3/2. \end{aligned}$$

This talk is based on joint papers with Roberta Musina, see [1–3].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00678).

REFERENCES

1. *Musina R., Nazarov A. I.,* "On fractional Laplacians," Commun. Partial Differ. Equations, **39**, No. 9, 1780–1790 (2014).
2. *Musina R., Nazarov A. I.,* "On fractional Laplacians. II," Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, **33**, No. 6, 1667–1673 (2016).
3. *Musina R., Nazarov A. I.,* "A note on truncations in fractional Sobolev spaces," Bull. Math. Sci., DOI 10.1007/s13373-017-0107-8, 8 pages (2017).

THE KATO SQUARE ROOT CONJECTURE FOR ELLIPTIC FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL OPERATORS

Skubachevskii A. L.

RUDN University, Moscow, Russia; skub@lector.ru

In 1961, T. Kato has formulated the following problem: “Is it true that the domain of square root from regular accretive operator is equal to the domain of square root from adjoint operator?” Sufficient conditions for fulfilment of the Kato conjecture were studied by T. Kato, J. Lions and others. J. Lions has proved that strongly elliptic differential operators of $2m$ order with smooth coefficients and homogeneous Dirichlet conditions on a smooth boundary satisfy the Kato conjecture. For strongly elliptic differential operators of $2m$ order with measurable bounded coefficients corresponding result was obtained by P. Auscher, S. Hofman, A. McIntosh, and P. Tchamitchian. The Kato conjecture for strongly elliptic functional-differential equations was proved in [1]. In this lecture we consider elliptic differential-difference equations with degeneration. We shall prove that these operators satisfy the Kato conjecture [2].

The publication has been prepared with the support of the “RUDN University Program 5-100” and the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00401).

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00450).

REFERENCES

1. *Skubachevskii A. L.*, “Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and applications,” Usp. Mat. Nauk, **71**, No. 5, 3–112 (2016); English transl. in Russ. Math. Surv., **71**, No. 5, 801–906 (2016).
2. *Skubachevskii A. L.*, “The Kato conjecture for elliptic differential-difference operators with degeneration in a cylinder,” Dokl. Akad. Nauk, **478**, No. 2, 145–147 (2018); English transl. in Dokl. Math., **97**, No. 1, 32–34 (2018).

CHARACTERIZATION OF ASSOCIATE FUNCTION SPACES

Stepanov V. D.

Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia; stepanov@mi.ras.ru

We analyse the problem of characterization of function spaces associated to a given function spaces or cones. The situation is rather different for an ideal, that is with lattice property, and non-ideal function spaces. Namely, the notion of associate norm bifurcates for a non-ideal space. We provide several examples of such a characterization including the weighted Sobolev space of the first order on the real line. The talk is based on the publications [1–5].

The author was supported by the Russian Scientific Fund (projects no. 14-01-00443 and no. 16-01-02004).

REFERENCES

1. *Stepanov V. D.*, "On optimal Banach spaces containing a weight cone of monotone or quasiconcave functions," Math. Notes, **98**, No. 6, 957–970 (2015).
2. *Eveson S. P., Stepanov V. D., Ushakova E. P.*, "A duality principle in weighted Sobolev spaces on the real line," Math. Nachr., **288**, No. 8–9, 877–897 (2015).
3. *Prokhorov D. V., Stepanov V. D., Ushakova E. P.*, "Hardy–Steklov integral operators," Sovrem. Probl. Mat., **22**, 3–185 (2016); English transl. in Proc. Steklov Inst. Math., **300**, Suppl. 2, 1–112 (2018).
4. *Prokhorov D. V., Stepanov V. D., Ushakova E. P.*, "On associate spaces of weighted Sobolev space on the real line," Math. Nachr., **290**, No. 5–6, 890–912 (2017).
5. *Jain P., Singh A. P., Singh M., Stepanov V. D.*, "Sawyer's duality principle for grand Lebesgue space," Math. Nachr. (to appear).

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

Тезисы

SHORT COMMUNICATIONS

Abstracts

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ

Авилович А. С.[1], **Федоров В. Е.**[2]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]`avilovich_aas@bk.ru`, [2]`kar@csu.ru`

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, линейные замкнутые операторы $L : D_L \to \mathfrak{Y}$, $M : D_M \to \mathfrak{Y}$ плотно определены в $\mathfrak{X}$, $\ker L \neq \{0\}$. Обозначим через $\rho^L(M)$ множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathfrak{Y}$ обратим, оператор $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$ непрерывен на $\mathfrak{X}$, а $L^L_\mu(M) := L(\mu L - M)^{-1}$ — на $\mathfrak{Y}$. Обозначим через L_1 (M_1) сужение оператора L (M) на замыкание образа $\operatorname{im}(\mu L - M)^{-1}L$ при $\mu \in \rho^L(M)$.

Рассмотрим уравнение

$$D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Функция $x : \mathbb{R}_+ \to D_M \cap D_L$, для которой $g_{m-\alpha} * x \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$, $g_{m-\alpha} * Lx \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Y})$, $Mx \in C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Y})$, называется решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}_t x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (2), если для нее выполняются равенства (1), (2).

По определению $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(a_0, \theta_0)$ [1], если

(i) существуют $a_0 \geq 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, такие, что для всех $\lambda \in S_{a_0,\theta_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0,\ \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $K = K(a, \theta) > 0$, что для всех $\mu \in S_{a,\theta}$

$$\max\{\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|L^L_{\mu^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\} \leq \frac{K(a,\theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $\alpha \in (0, 2)$, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(a_0, \theta_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1; \mathfrak{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1; \mathfrak{Y}^1)$, $x_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0, \ldots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{m-k-1} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t} d\mu x_k. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть банаховы пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ рефлексивны, $\alpha \in (0, 2)$, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(a_0, \theta_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$, $x_k \in D_{L_1} \cap D_{M_1}$, $k = 0, \ldots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2), *при этом оно имеет вид* (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А.* Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

О ЕСТЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Акыш (Акишев) А. Ш.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан; akysh41@mail.ru

Нерешенные проблемы теории уравнений Навье – Стокса однородной жидкости приведены в [1, 2] и др.

Начально-краевая задача для уравнений Навье – Стокса [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0, T] \times \Omega$ имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu\Delta\mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1a}$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} = 0, \tag{1b}$$

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$; $\partial\Omega$ — граница области; $t \in [0, T]$, $T < \infty$;

$$\mathbf{i)}\, \mathbf{f} \in \mathbf{L}_\infty(0, T; \mathbf{L}_p(\Omega)) \cap \mathring{\mathbf{J}}(Q); \quad \mathbf{ii)}\, \mathbf{\Phi} \in \mathbf{L}_p(\Omega) \cap \mathbf{W}^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}(\Omega),\ \forall p = 2m.$$

Из свойств решений задачи (1) установлено соотношение между давлением и квадратом модуля вектора скорости, т. е. $P = -\left|\mathbf{U}\right|^2$, на основе которого доказана теорема.

Теорема. *Если входные данные задачи* (1) *удовлетворяют требованиям* **i**), **ii**), *то для решений задачи* (1) *справедлива оценка:*

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{L}_\infty(Q)} \leq \|\mathbf{\Phi}\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + T\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_\infty(Q)},\ \forall T < \infty. \tag{2}$$

Оценка (2) позволяет найти ответы на многие проблемные вопросы, связанные с разрешимостью задачи (1). В выбранных пространствах доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи (1) в целом по времени $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$.

Кроме того, оценка (2) подтверждает справедливость принципа максимума для (1a) и полученных на его основе результатов [3–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. *Fefferman Ch. L.* Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation // http://www.claymath.org. Cambridge: Clay Mathematics Institute, 2000. P. 1–5.
3. *Akysh (Akishev) A. Sh.* Simplified maximum principle of the Navier–Stokes equation // Bulletin of the Karaganda University. 2014. V. 73, No. 1. P. 16–21.
4. *Akysh (Akishev) A. Sh.* About the new version of maximum principle of Navier–Stokes equations // Bulletin of the Karaganda University. 2015. V. 78, No. 2. P. 11–17.
5. *Akysh (Akishev) A. Sh.* The maximum principle for the Navier–Stokes equations // International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016). AIP Conf. Proc. V. 1759, Article ID 020068. P. 1–6.
6. *Акыш (Акишев) А. Ш.* Простейший принцип максимума для уравнений Навье – Стокса // Вестник Карагандинского университета. Серия "Математика". 2016. Т. 83, №. 2. С. 8–11.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО РАСХОДУ РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in D$, где u — m-мерный вектор управления, компоненты которого подчинены ограничениям $|u_j| \leqslant M_j$, $j = \overline{1, m}$. Предполагается, что система покомпонентно полностью управляема и переводима в заданное конечное состояние из ограниченной области начальных условий D.

Задача. Найти в реальном времени допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geqslant T_0$) систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = x_k$ и минимизирующее функционал $J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_k} \sum\limits_{j=1}^{m} |u_j(\tau)| d\tau$. Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Для линейных систем с ограниченным управлением предложен новый подход к реализации оптимального по расходу ресурса управления в реальном времени [1]. Он основан на разделении вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления. Предварительные вычисления не зависят от конкретного начального условия и основаны на аппроксимации областей достижимости за различные времена семейством гиперплоскостей. Дан метод построения аппроксимирующей конструкции и выделения опорной гиперплоскости. Предложен метод нахождения приближенного значения времени оптимального быстродействия и корректного задания времени перевода системы в задаче минимизации расхода ресурса. Разработан способ задания начального приближения для итерационной процедуры вычисления оптимального по расходу ресурса управления, обладающей малыми вычислительными затратами. Приведены вычислительный алгоритм, результаты моделирования и численных расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Вычисление оптимального управления в реальном времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 10. С. 1778–1800.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Алексеев Г. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
alekseev@iam.dvo.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Σ, состоящей из двух частей Σ_τ и Σ_ν, рассматривается краевая задача для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j},\ \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{g},\ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = q,\ \mathbf{H}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\nu} = \mathbf{q},\ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_{\Sigma_\tau} = \mathbf{k}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости, $\mathbf{H}$ — вектор магнитного поля, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/\rho_0$, $p = P/\rho_0$, где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле, P — давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность жидкости, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma = æ\nu_m$, ν и ν_m — постоянные коэффициенты кинематической и магнитной вязкости, σ — постоянная электропроводность, μ — постоянная магнитная проницаемость, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Σ, $\mathbf{j}$ — плотность сторонних токов, $\mathbf{f}$ — объемная плотность внешних сил, $\mathbf{g}, \mathbf{q}, q$ и $\mathbf{k}$ — функции, заданные на границе Σ либо на разных частях Σ_τ и Σ_ν границы Σ.

В частном случае, когда $q = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, граничные условия для магнитного поля в (3) отвечают ситуации, когда часть Σ_τ границы Σ является идеальным проводником, тогда как другая часть $\Sigma_\nu \subset \Sigma$ является идеальным диэлектриком. Разрешимость соответствующей однородной краевой задачи доказана в [1]. Подчеркнем, что основная трудность исследования задачи (1)–(3) связана с неоднородностью краевых условий для $\mathbf{u}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в (3). Вследствие указанной неоднородности исследованию ее разрешимости будет предшествовать построение лифтингов $\mathbf{u}_0, \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{E}_0$ из определенных функциональных классов, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям в (3).

Ключевая идея состоит в том, чтобы лифтинг $\mathbf{H}_0$ выбирать в подпространстве пространства $H^{1/2}(\Omega)^3$, состоящем из гармонических векторных полей. Основываясь на указанном выборе магнитного лифтинга $\mathbf{H}_0$, в работе доказывается глобальная разрешимость задачи (1)–(3), локальная единственность ее решения и исследуются дополнительные свойства решения. Некоторые детали доказательства можно найти в [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00365-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alekseev G., Brizitskii R.* Solvability of the boundary value problem for stationary magnetohydrodynamic equations under mixed boundary conditions for the magnetic field // Appl. Math. Lett. 2014. V. 32. P. 13–18.
2. *Алексеев Г. В.* Смешанные краевые задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 8. С. 1441–1454.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ВЕРИГИНА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Алимжанов Е. С.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан; aermek81@gmail.com

Пусть $\Omega_1 = (0,\gamma_0)$, $\Omega_2 = (\gamma_0, b)$, $0 < \gamma_0 < b$, $b > 0$, $\Omega_{jT} = \Omega_j \times (0,T)$, $j = 1,2$, $\sigma_T = (0,T)$, $\chi(\lambda)$ — гладкая срезающая функция, равная единице, когда $|\lambda| \le \delta_0$, и нулю при $|\lambda| \ge 2\delta_0$, и имеющая оценку $|\frac{d^m\chi}{dx^m}| \le C_m\delta_0^{-m}$, $\delta_0 = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим линейную задачу с неизвестными функциями $v_j(x,t)$, $j = 1,2$, и $\rho(t)$, удовлетворяющими параболическим уравнениям

$$L_j(\partial_t,\partial_x,x,t)(v_j,\rho) := \partial_t v_j - a_j(x,t)\partial_x^2 v_j - b_j(x,t)\partial_x v_j - c_j(x,t)v_j$$

$$-q_j(x,t)\chi(x-\gamma_0)\rho' = f_j(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_{jT},\ j = 1,2, \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$v_j(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega_j, \quad \rho(0) = 0, \tag{2}$$

$$v_1(x,t)\big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad v_2(x,t)\big|_{x=b} = \psi_2(t), \quad t \in \sigma_T, \tag{3}$$

и условиями сопряжения при $x = \gamma_0$, $t \in \sigma_T$:

$$v_1(x,t) - v_2(x,t) = \varphi_1(t), \tag{4}$$

$$\lambda_1(t)\partial_x v_1(x,t) - \lambda_2(t)\partial_x v_2(x,t) = \varphi_2(t), \tag{5}$$

$$\lambda_1(t)\partial_x v_1(x,t) + \varepsilon\rho'(t) = \varphi_3(t). \tag{6}$$

Данная задача является линеаризованной одномерной задачей Веригина, которая, в частности, описывает физический процесс нагнетания жидкости в пористую среду, при котором происходит вытеснение одной жидкости из пористой среды другой более вязкой жидкостью. Функции $v_j(x,t)$, $j = 1,2$, могут описывать давление нагнетаемой и вытесняемой жидкостей, а $\rho(t)$ — границу их раздела.

В работе доказаны существование и единственность решения задачи (1)–(6) $\{v_1(x,t), v_2(x,t), \rho(t)\}$ в пространствах Гёльдера $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\ t}(\bar\Omega_{jT})$, $\overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}(\bar\sigma_T)$, l — нецелое положительное число, $j = 1,2$, а также получены коэрцитивные оценки решений с постоянными, не зависящими от малого параметра ε.

Работа выполнена при поддержке Фонда науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05133898).

БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Анашкин О. В.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; oanashkin@yandex.ru

В докладе изучаются бифуркации решений периодической системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием второго порядка.

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием описывают процессы, подвергающиеся резким кратковременным возмущениям. Тогда можно допустить, что фазовые переменные мгновенно меняют свои значения. Пусть моменты импульсного воздействия τ_k зафиксированы, тогда импульсную систему можно представить в виде [1]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), \quad t \neq \tau_k, \qquad x(t+0) = Bx(t) + G(x(t)), \quad t = \tau_k, \tag{1}$$

здесь $x(t+0) = \lim_{s\to t+0} x(s)$ — правое предельное значение, $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\det B \neq 0$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \theta_k$, $R(x) = \sum_{|m|\geq 2} R_m x^m$, $m = (m_1, m_2)$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + m_2$, $x^m = x_1^{m_1} x_2^{m_2}$, $G(x)$ — вектор-функция того же типа, что и $R(x)$. Предположим для простоты изложения, что последовательность $\{\theta_k\}$ — стационарная, $\theta_k = \theta > 0$.

Бифуркации происходят в окрестности точек покоя дифференциального уравнения. Наша система (1) имеет нулевое решение. В силу периодичности характер поведения решений линейного приближения в нуле определяет матрица монодромии $M = e^{A\theta}B$. Бифуркации в окрестности нуля наблюдаются, когда собственные значения матрицы монодромии попадают на единичную окружность комплексной плоскости.

В докладе исследуются условия рождения в системе (1) периодических решений или предельных множеств более сложной природы при прохождении бифуркационного параметра через критическое значение.

Особенно интересным является случай, когда в момент бифуркации у матрицы монодромии появляются два комплексно сопряженных собственных значения на единичной окружности. В этом случае в окрестности нуля наблюдается характерная бифуркация типа бифуркации Андронова – Хопфа, когда при определенных условиях в окрестности нуля фазовой плоскости у системы (1) образуется кольцевое предельное множество, окружающее начало координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ И РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ СТРУИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Андреев В. К.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; andr@icm.krasn.ru

При образовании струй важным элементом является растяжение и закручивание слоев жидкости. В этом случае возникают нестационарные слоистые движения с цилиндрическими поверхностями раздела, которые могут быть неустойчивыми. В докладе рассматривается задача о поведении малых возмущений нестационарной круглой струи идеальной жидкости, в которой скорость и давление описываются формулами в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{u} = \Big(-\frac{k}{2\tau}\,r,\ \omega_0\tau r,\ \frac{k}{\tau}\,z\Big), \quad p = \Big(-\frac{3k^2}{4\tau^2} - \omega_0^2\tau^2\Big)[R^2(t) - r^2] + \frac{\sigma}{R(t)}\,, \qquad (1)$$

где k, ω — постоянные, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $R(t)$ — радиус струи, $R(t) = r_0/\sqrt{\tau} = r_0/\sqrt{1+kt}$. В начальный момент времени струя имеет длину h_0, радиус r_0 и вращается с угловой скоростью ω_0.

Для исследования уравнений малых возмущений движения (1) используется метод лагранжевых координат. Возникающая здесь начально-краевая задача содержит вторые производные по времени как в основном уравнении, так и в граничном условии. Основное уравнение является уравнением типа Пуанкаре – Соболева, однако эллиптический оператор существенно зависит от времени. Найдены асимптотики возмущений свободной границы, поля скоростей и давлений в зависимости от числа Вебера и завихренности. Установлено, что начальная завихренность ослабляет неустойчивость капиллярной струи, не устраняя ее полностью.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аниконов Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; anik@math.nsc.ru

В теории зондирования неоднородных сред в качестве математических моделей часто используются дифференциальные уравнения с частными производными. При этом естественно считать, что коэффициенты уравнений при старших производных являются разрывными функциями. Таким образом возникает проблема изучения соответствующих задач, теория которых находится пока в стадии становления. Имеющиеся работы по этой тематике носят разрозненный характер и используют различные подходы и ограничения. Чаще всего подбираются условия, сближающие рассматриваемые проблемы с классическими постановками. Также получил распространение метод, использующий многозначные функции. Однако в теории зондирования ограничения не могут соответствовать только удобству исследования, так как они диктуются физическими условиями. Поэтому, находясь в рамках этой теории, предлагаемые ниже результаты имеют лишь незначительное пересечение с выводами других авторов.

В качестве начального этапа исследования рассматривалась задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными. Коэффициенты уравнения считались кусочно постоянными функциями. Полученные выводы оказались довольно специфичны. В частности, область изменения переменных содержала зоны неопределенности, т. е. подмножества, где решение определяется не единственным образом.

Аналогичная задача для трех независимых переменных оказывается во многом подобна рассмотренному двумерному случаю.

Кроме того, была исследована задача Коши для уравнения колебаний неоднородной неограниченной струны. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения и проведено его качественное исследование. Полученные результаты позволили поставить и решить обратную задачу об определении точки струны, являющейся контактной для различных ее участков. Дополнительно определяются скорости распространения волны в двух различных зонах.

Начато и продолжается исследование подобной проблемы для полуограниченной неоднородной струны. По этому направлению пока получены формулы для решения задачи при отсутствии постоянно действующего источника колебаний.

РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Артюшин А. Н.

ООО "Дата Ист", Новосибирск, Россия; alexsp3@yandex.ru

Пусть $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с гладкой границей, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$. В цилиндре Q рассматриваем задачу **(L)**

$$\begin{aligned}
&k(x,t)u_{tt} + \alpha(x,t)u_t - \Delta u = f(x,t),\\
&u(x,t)\big|_S = 0,\\
&u(x,0) = 0,\\
&u_t(x,0)\big|_{\Omega_0^+} = 0,\\
&u_t(x,T)\big|_{\Omega_T^-} = 0,
\end{aligned}$$

где множества $\Omega_0^{\pm}$, $\Omega_T^{\pm}$ определяются стандартным образом, в зависимости от знака $k(x,0)$, $k(x,T)$. На знак функции $k(x,t)$ не накладывается никаких ограничений.

В таком виде задача впервые была рассмотрена в работах Г. Д. Каратопраклиева и В. Н. Врагова. Основное условие, при котором было установлено существование обобщенного решения

$$2\alpha(x,t) - k_t(x,t) \geqslant \delta > 0.$$

При некоторых дополнительных предположениях и знакоопределенности функций $k(x,0)$, $k(x,T)$ было доказано существование и единственность регулярного решения $u(x,t) \in W_2^2(Q)$. В дальнейшем эти результаты рядом авторов обобщались на случай иных краевых условий, операторные уравнения и уравнения высокого порядка. Но существование регулярных решений всегда доказывалось в предположении знакоопределенности функций $k(x,0)$, $k(x,T)$.

В данной работе при условиях

$$(\nabla k(x,0))^2 \leqslant C|k(x,0)|, \quad (\nabla k(x,T))^2 \leqslant C|k(x,T)|$$

устанавливается существование регулярных решений задачи **(L)**, для которых имеет место оценка

$$\int\limits_Q \Big((|k| + t(T-t))u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2 + (\Delta u)^2 \Big)\, dQ \leqslant C \int\limits_Q (f^2 + f_t^2)\, dQ.$$

При этих же условиях обобщенное решение задачи **(L)** единственно. Таким образом, функции $k(x,0)$, $k(x,T)$ могут менять знак, хотя и не произвольным образом. Для доказательства теорем разрешимости мы применяем простой, но весьма эффективный метод регуляризации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41009).

О ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аттаев А. Х.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; attaev.anatoly@yandex.ru

В настоящем докладе речь будет идти о граничном управлении на одном конце $x = 0$ при закрепленном втором конце $x = l$ процессом, протекающим за промежуток времени T и описываемым регулярным решением существенно нагруженного телеграфного уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} + cu = \lambda\, u_{tt}(x_0, t),$$

где c и λ — заданные константы.

Пусть состояние изучаемого процесса в начальный момент времени $t = 0$ имеет вид $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$, а в финальный момент времени $t = T$ — вид $\{u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$. В докладе будут установлены необходимые и достаточные условия существования такого минимального промежутка времени, для которого при совершенно произвольных четырех функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ существует граничное управление $u(0,t) = \mu(t)$, переводящее процесс из начального состояния в финальное, и для этого граничного управления предъявлено его явное аналитическое выражение через функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$.

В случае $\lambda = 0$ в терминах обобщенного решения эта задача была решена в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 5. С. 600–603.

ВЫРОЖДЕННОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Байбулатова Г. Д.[1], **Плеханова М. В.**[1,2], **Федоров В. Е.**[1]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;*
[2] *Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;*
baybulatova_g_d@gmail.com, mariner79@mail.ru, kar@csu.ru

Исследуется разрешимость уравнения

$$D_t^{\alpha}Ax(t) + \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} B_k x(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

в банаховых пространствах $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ с операторами $A, B_1, \ldots, B_n, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Здесь $0 < \alpha_n < \alpha_{n-1} < \ldots < \alpha_1 < \alpha < 1$, D_t^{β} — производная Капуто порядка $\beta > 0$ [1].

Решением уравнения (1) будем называть функцию $x \in C([0, T]; \mathcal{X})$ такую, что существуют производные $D_t^{\alpha}Ax$, $D_t^{\alpha_1}B_1x$, $\ldots$, $D_t^{\alpha_n}B_nx \in C([0, T]; \mathcal{X})$ и выполняется равенство (1).

Введем обозначения $\mathcal{O}_r := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\}$, $S(\mu) = \mu^{\alpha}A + \mu^{\alpha_1}B_1 + \ldots + \mu^{\alpha_n}B_n + B$, $S^1(\mu) = \mu^{\alpha-1}A + \mu^{\alpha_1-1}B_1 + \ldots + \mu^{\alpha_n-1}B_n$,

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = a^{-1/\alpha} + 1, \arg\mu \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg\mu = \pi, \mu \in (-a^{-1/\alpha} - 1, -\infty)\},$$
$$\gamma_3 = \{\mu \in \mathbb{C} : \arg\mu = -\pi, \mu \in (-\infty, -a^{-1/\alpha} - 1)\}.$$

Теорема. *Пусть* $x_0 \in \mathcal{X}$ *и выполняются условия*

$$\text{(I)} \;\; \exists a > 0 \; \forall\mu \in \mathcal{O}_a \; \exists S(\mu)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X});$$

$$\text{(II)} \;\; \exists K > 0 \; \forall\mu \in \mathcal{O}_a \;\; \left\|S(\mu)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq \frac{K}{|\mu|^{\alpha}}.$$

Тогда функция $x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} S(\mu)^{-1}S^1(\mu)e^{\mu t}x_0 d\mu$ *является решением задачи Коши* $x(0) = x_0$ *для уравнения* (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1367–1375.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Балакина Е. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
balakina@math.nsc.ru

Рассмотрим нестационарное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f(t,r,\omega,E)}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_r f(t,r,\omega,E) + \mu(t,r,E)f(t,r,\omega,E) = J(t,r,\omega,E).$$

Это уравнение описывает, в частности, процесс переноса частиц сквозь среду. Здесь t — временная переменная, $t\in[0,T]$; r — пространственная переменная, $r\in G\subset\mathbb{R}^3$, G — выпуклая ограниченная область; $\omega\in\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3 : |\omega|=1\}$; $E\in I=[E_1,E_2]$, $E_1>0$, $E_2<\infty$. Функция $f(t,r,\omega,E)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени t в точке r с энергией E, летящих в направлении ω. Функции μ и J характеризуют среду G.

К уравнению добавляются начальное условие и краевые: определяется плотность падающего потока h и усреднённая плотность выходящего потока H — при этом известной считается только функция H.

Рассматривается задача о нахождении поверхностей разрывов коэффициентов уравнения μ и J. Иными словами, ставится вопрос об определении внутренней структуры среды G. Такая постановка является продолжением цикла исследований Д. С. Аниконова [1].

Для решения поставленной проблемы сначала исследуется прямая задача о нахождении плотности потока f при заданных начальном условии и плотности падающего потока h (такая же постановка, но в случае непрерывных коэффициентов, была рассмотрена А. И. Прилепко [2]). Затем рассматривается специальная функция

$$Ind(r) = \left|\ \nabla\int\limits_d^T\int\limits_\Omega H(t, r+d(r,\omega)\omega,\omega)d\omega dt\ \right|,$$

зависящая от известных данных, функция $d(r,\omega)$ — расстояние от точки r до границы ∂G в направлении ω, d — диаметр области G. Доказывается, что функция Ind принимает неограниченное значение только на искомых поверхностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 109–119.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Баландин А. С.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; balandin-anton@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum\nolimits_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\,(t-h_j) = \int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (1)$$

где $J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $h_j, \omega \in \mathbb{R}_+$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ суммируема на каждом конечном отрезке. Интеграл понимается в смысле Римана – Стилтьеса. В данных предположениях (см. [1], с. 84, теорема 1.1) уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций.

Пусть $(E-S)y(t) = y(t) - \sum\nolimits_{j=1}^{J} a_j y\,(t-h_j)\,\chi(t-h_j)$, $\chi(t)$ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}_+$.

Для уравнения вида (1) исследование устойчивости существенно усложняется наличием запаздывания при производной. В работе [2] показано, что необходимым условием экспоненциальной устойчивости является разрешимость уравнения (1) относительно производной, которая, в свою очередь, эквивалентна ограниченной обратимости оператора $E-S$ в пространстве L_1.

Введём $g_a(p) = \sum\nolimits_{j=1}^{J} a_j e^{-ph_j}$. Обратимость оператора $E-S$ равносильна расположению нулей $1 - g_a(p)$ относительно мнимой оси.

Теорема. *Пусть h_j — линейно-независимые числа над полем $\mathbb{Z}$ (см. [3, с. 44]). Тогда для ограниченной обратимости оператора $E-S$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $\sum\nolimits_{j=1}^{J} |a_j| < 1$.*

Для $J = 2$ данный результат установлен в [4].

Следствие 1 [5]. *Пусть $h_j = jh$, $h \in \mathbb{R}_+$. Тогда для ограниченной обратимости оператора $E-S$ необходимо и достаточно, чтобы все корни многочлена $\sum\nolimits_{j=1}^{J} a_j z^j$ были расположены вне единичного круга $|z| \leqslant 1$.*

Следствие 2. *Пусть $1-g_a(p) = \prod\nolimits_{i=1}^{I} \left(1 - \sum\nolimits_{k=1}^{K_i} a_{ik} e^{-ph_{ik}}\right)$, при любом $i = \overline{1,I}$ набор чисел $\{h_{ik}\}_{k=\overline{1,K_i}}$ является линейно-независимым над полем $\mathbb{Z}$. Тогда для ограниченной обратимости оператора $E-S$ необходимо и достаточно выполнения неравенств $\sum\nolimits_{k=1}^{K_i} |a_{ik}| < 1$ при каждом $i = \overline{1,I}$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем // Изв. вузов. Матем. 1997. № 6. С. 37–49.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
4. *Чистяков А. В.* К вопросу о множестве корней квазиполинома с несоизмеримыми показателями // Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр. ППИ. Пермь, 1986. С. 32–35.
5. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа // Изв. вузов. Матем. 2007. № 7. С. 17–27.

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ОДУ ПЯТОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ ИНВАРИАНТНОЕ ПРИСОЕДИНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

Банару Г. А.

Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия;
mihail.banaru@yahoo.com

Давно известно [1], что каждому классу обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных с точностью до точеной аналитической замены координат, соответствует вполне определенное расслоенное пространство со связностью.

Теорема. *Обыкновенное дифференциальное уравнение пятого порядка*

$$y^{(5)} = \left(\frac{5\, y^{(3)}}{y'' + E} + D \right) y^{(4)} + B,$$

где $B = B\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, y^{(3)}\right)$; $D = D\left(x,\, y,\, y',\, y''\right)$; $E = E\left(x,\, y,\, y'\right)$, *допускает инвариантное присоединение к себе пространства проективной связности, имеющего линии второго порядка в качестве образующих элементов.*

Выделяются несколько специальных подклассов ОДУ пятого порядка, допускающих инвариантное присоединение к себе пространства проективной связности, в том числе подкласс, содержащий классический пример [2] дифференциального уравнения

$$y^{(5)} = \frac{5\, y^{(3)}\, y^{(4)}}{y''} - \frac{40\, \left(y^{(3)}\right)^3}{9\, \left(y''\right)^2},$$

интегральными кривыми которого являются линии второго порядка общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов Н. В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)})$ // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1977. Т. 8. С. 47–66.
2. *Банару Г. А.* О Николае Васильевиче Степанове и его геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 139. С. 3–8.

К ПРОБЛЕМЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ НЕНАСЫЩАЕМЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Белых В. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; belykh@math.nsc.ru

На отрезке $I \equiv [-1, 1]$ построены ненасыщаемые хорошо обусловленные с весовой функцией из $L_p[I]$ $(1 < p < \infty)$ квадратурные формулы. Специфическая особенность этих формул — отсутствие главного члена погрешности, и как результат — способность автоматически с ростом числа узлов n подстраиваться к любым избыточным (экстраординарным) запасам гладкости подынтегральных функций. Вычисление всех определяющих параметров квадратур — узлов, коэффициентов и числа обусловленности — осуществлено при этом в рамках единого подхода, основанного на решении ряда специальных краевых задач теории мероморфных функций в единичном круге. Для частных видов весовых функций 1 и $-\ln|x|$, имеющих важные приложения в гидродинамике, указаны эффективные численные алгоритмы отыскания этих параметров.

Числовой ответ для C^∞-гладких подынтегральных функций конструируется ненасыщаемыми квадратурами с абсолютно неулучшаемой экспоненциальной оценкой погрешности. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких функций. Эта асимптотика также имеет вид убывающей к нулю (с ростом числа узлов n) экспоненты.

Полученные результаты изложены в работах автора [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белых В. Н.* Ненасыщаемые квадратурные формулы на отрезке (к проблеме К. И. Бабенко) // Докл. АН. 2016. Т. 467, № 5. С. 509–513. (Перевод: *Belykh V. N.* Nonsaturable quadrature formulas on an interval (on Babenko's problem) // Dokl. Math. 2016. V. 93, No. 2. P. 197–201).
2. *Белых В. Н.* Особенности численной реализации ненасыщаемых квадратурных формул на конечном отрезке // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1004–1014. (Перевод: *Belykh V. N.* Peculiarities of the numerical realization of unsaturated quadrature formulas on a finite interval // Sib. Math. J. 2017. V. 58, No. 5. P. 778–785).
3. *Белых В. Н.* К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке // Мат. сб. 2018 (в печати).

О КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА – ПУАССОНА В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Беляева Ю. О.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; yilia-b@yandex.ru

Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова – Пуассона в бесконечном цилиндре. Эта задача описывает эволюцию плотностей распределения ионов и электронов в высокотемпературной плазме. Разрешимость смешанных задач для системы уравнений Власова – Пуассона изучалась в работах А. Л. Скубачевского [1–3], где впервые учитывалось влияние внешнего магнитного поля на траекторию заряженных частиц.

Будем рассматривать систему уравнений Власова – Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x,v,t)\,dv,$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c}\,[v,B], \nabla_v f^{\beta} \right) = 0$$

$$(x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T,\ \beta = \pm 1)$$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x,v,t)\big|_{t=0} = f_0^{\beta}(x,v) \qquad (x \in \bar{Q},\ v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm 1)$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t) = 0 \qquad (x \in \partial Q,\ 0 \le t < T).$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^{\infty}$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$, $f^{\beta} = f^{\beta}(x,v,t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $\varphi = \varphi(x,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v, соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Показано, что для произвольного потенциала электрического поля и достаточно большой индукции внешнего магнитного поля характеристики уравнений Власова не достигают границы цилиндра. Для достаточно малых начальных плотностей распределения заряженных частиц доказано существование и единственность классического решения с носителями плотностей распределения заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от границы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00401а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова – Пуассона в полупространстве // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 204–232.
2. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова – Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 2 (416). С. 107–148.
3. *Скубачевский А. Л., Tsuzuki Y.* Классические решения уравнений Власова – Пуассона с внешним магнитным полем в полупространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 3. С. 536–552.

О ФРЕДГОЛЬМОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

Болтачев А. В.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
boltachevandrew@gmail.com

Исследуются краевые задачи для уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

с условием периодичности по x и y

$$u(x, y, t) = u(x + 1, y, t) = u(x, y + 1, t) \tag{2}$$

и условиями

$$u\big|_{t=0} = g_1(x, y), \tag{3}$$

$$\left(Au + B\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=\tau} = g_2(x, y), \tag{4}$$

где g_1, g_2 — заданные периодические функции с периодом 1 по x, y,
A, B — ПДО первого и нулевого порядка соответственно, τ — заданное число,
$g_1 \in H^{s+1}(\mathbb{T}^2), g_2 \in H^s(\mathbb{T}^2)$,
$u \in C^0([0, \tau], H^{s+1}(\mathbb{T}^2)) \cap C^1([0, \tau], H^s(\mathbb{T}^2)) \cap C^2([0, \tau], H^{s-1}(\mathbb{T}^2))$ (ср. [1] и [2]).
В работе исследуются фредгольмова и однозначная разрешимость задачи (1)–(4).

Исходная задача сводится к уравнению на границе области. Оказалось, что полученное уравнение ассоциировано с квантованными каноническими преобразованиями (см. [3] и [4]). Применив результаты цитированных работ, мы даем условия разрешимости уравнения на границе и, следовательно, условия разрешимости задачи (1)–(4).

Работа выполнена при частичной поддержке G-RISC и DAAD (проект № M-2017b-1), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00373).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 707–709.
2. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск: Университетское, 1988. С. 195–201.
3. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю., Шроэ Э.* Эллиптические операторы, ассоциированные с группами квантованных канонических преобразований // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73, № 3 (441). С. 179–180.
4. *Savin A., Schrohe E., Sternin B.* Elliptic operators associated with groups of quantized canonical transformations // Bull. Sci. Math. 2018.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Бондарь А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
anna.alex.bondar@gmail.com

Рассматривается система линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами следующего вида

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где A — невырожденная матрица размера $m \times m$. Предполагается, что система (1) экспоненциально дихотомична (см., например, [1]). В работе исследована экспоненциальная дихотомия для возмущенной системы

$$y_{n+1} = (A + B(n))y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где матричная последовательность возмущений $\{B(n)\}$ является N-периодической, т. е. $B(n+N) = B(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Используя тот факт, что решение матричного уравнения Ляпунова

$$H - A^*HA = P^*P - (I-P)^*(I-P),$$

где $P = P^2$, $AP = PA$, $H = P^*HP + (I-P)^*H(I-P)$, представимо в виде

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k P^*PA^k + \sum_{k=1}^{\infty} (A^*)^{-k}(I-P)^*(I-P)A^{-k} = H_- + H_+, \tag{2}$$

нетрудно получить условия на возмущения$\{B(n)\}$, при которых сохраняется экспоненциальная дихотомия.

Теорема. *Пусть* $\det(A) \neq 0$ *и матрицы* H, H_- *и* H_+ *из формулы* (2). *Предположим, что матричная последовательность возмущений* $\{B(n)\}$ *удовлетворяет условию*

$$\|B(n)\| < \left(\left(\frac{\|H_-\| - 1}{\|H_-\|} + \frac{\|H_+\| + 1}{\|H_+\|} \right) \sqrt{\|H\| \|H^{-1}\|} \right)^{-1},$$

тогда для возмущенной системы имеет место экспоненциальная дихотомия.

Данные исследования являются продолжением [2–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Новосибирской области в рамках научного проекта № 17-41-543365.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Демиденко Г. В., Бондарь А. А.* Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1240–1254.
3. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.
4. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comput. Math. Optim. 2010. V. 6, No. 1. P. 1–12.
5. *Demidenko G. V.* On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2016. V. 6, No. 1. P. 63–74.

МЕТОД РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВОЛН ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С ПАМЯТЬЮ

Боровских А. В.[1], **Царицанский А. Н.**[2]

[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* bor.bor@mail.ru

[2]*ОАО “Газпром”, Санкт-Петербург, Россия;* tsaritsanskiian@gmail.com

Из трёх хорошо известных способов представления решения уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{1}$$

— в виде формулы распространяющихся волн

$$u = f(x - t) + g(x + t), \tag{2}$$

по формуле Д'Аламбера и в виде ряда Фурье — последние два имеют широчайшие обобщения. Второй — в виде теории косинусных полугрупп, а третий — в виде общей спектральной теории.

Что же касается первого, то он почему-то оказался гораздо менее поддающимся обобщению. Хотя сфера действия второго и третьего способа весьма ограничена: они пригодны только для областей “цилиндрической” формы. Для задач же, например, со свободной границей, мы даже для уравнения (1) немедленно вынуждены забыть о всех этих замечательных теориях, и обратиться к знакомой формуле (2).

Возможно ли построить аналог формулы распространяющихся волн не только для уравнения (1), но и для каких-то более широких классов уравнений? Для многомерных уравнений этот вопрос по-прежнему является открытым (хотя попытки найти решения в виде волны были, они восходят к одной из работ С. Л. Соболева и в современном исполнении известны как “функционально-инвариантные” или “относительно неискажающиеся” решения).

Что же касается одномерного случая, то оказалось, что для уравнения $k(s)u_{tt} = (k(s)u_s)_s$, описывающего неоднородную среду, точный аналог формулы (1) существует:

$$\sqrt{k(s)}u(t, s) = f(t, s) + g(t, s),$$

только слагаемые f и g в нём — решения не исходного уравнения, а специальной системы переноса волн:

$$f_t + f_s = \phi(s)g, \qquad g_t - g_s = -\phi(s)f,$$

где $\phi(s) = k'/(2k)$. Для однородной среды, когда $k = \text{const}$, они, очевидно, дают (2).

Отказ от естественного вроде бы предположения, что волны являются решением того же уравнения, оказался очень продуктивным, и позволил аналогичным образом представить и решения одномерного волнового уравнения для среды с памятью. Причём различные версии такого типа уравнений дали достаточно богатую феноменологию, представляющую возможности метода распространяющихся волн, которая позволяет рассчитывать на получение уже общих результатов, по крайней мере для уравнений с двумя независимыми переменными.

В докладе будут представлены результаты, полученные в этом направлении, и основные вопросы, которые сейчас остались пока нерешенными.

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МГД

Бризицкий Р. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
mlnwizard@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Σ рассматривается краевая задача для стационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости

$$\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_1 \mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{E} + æ\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \nu_1\mathbf{j},\ \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}\times\mathbf{n} = \mathbf{q} \text{ на } \Sigma. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ — векторы скорости и магнитного поля, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/\rho_0$, $p = p'/\rho_0$, где $\mathbf{E}'$ — электрическое поле, p' — давление, $\rho_0 = \mathrm{const}$ — плотность жидкости, $æ = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma = æ\nu_m$, ν и ν_m — постоянные коэффициенты кинематической и магнитной вязкости, σ — постоянная электропроводность, μ — постоянная магнитная проницаемость, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Σ, $\mathbf{j}$ — плотность сторонних токов, $\mathbf{f}$ — объемная плотность внешних сил. Ниже на задачу (1)–(3) при заданных функциях $\mathbf{f}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$ будем ссылаться как на задачу 1. Все величины в (1)–(3) являются размерными и записаны в системе СИ. При $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ граничное условие для магнитного поля $\mathbf{H}$ отвечает ситуации, когда граница Σ является идеальным диэлектриком.

Разрешимость задачи 1 при $\mathbf{q} \in H^s(\Sigma)^3$, где $s \in [0, 1/2]$, исследована в [1]. В настоящей работе для модели (1)–(3) доказана разрешимость задачи граничного управления в случае, когда $\mathbf{q} \in H^s(\Sigma)^3$ при $s \geq 0$. (О разрешимости близких задач граничного управления см. [2, 3]). Далее при $s > 0$ для задачи управления построена система оптимальности и на основе ее анализа выведены оценки локальной устойчивости решений экстремальной задачи относительно малых возмущений конкретных функционалов качества и заданных функций $\mathbf{f}, \mathbf{j}$ задачи 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00365-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В.* Разрешимость неоднородной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 6. С. 760–769.
2. *Алексеев Г. В.* Задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости при смешанных краевых условиях // Докл. АН. 2017. Т. 473, № 2. С. 146–150.
3. *Brizitskii R. V.* Study of control problems for the stationary MHD equations // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 894, Article ID 012015.

ГЛОБАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ТРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НАБЛЮДАТЕЛЕМ

Бурак А. Д.[1], Козлов А. А.[2]

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь;
[1]`burakad@inbox.ru`, [2]`kozlovaa@tut.by`

Рассмотрим линейную равномерно вполне управляемую [1] систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m \in \{1,2,3\}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с наблюдателем $y = C^T(t)x$, $y \in \mathbb{R}^k$, $k \in \{1,2,3\}$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему с нулевым управлением

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

обладающую свойством равномерной полной наблюдаемости [2, с. 304].

Будем полагать, что матрицы-функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ принадлежат классу локально интегрируемых и интегрально ограниченных матричных функций.

Построим по (1) и по выходу y систему асимптотической оценки состояния

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + V(t)(y(t) - C^T(t)\widehat{x}) + B(t)u, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{3}$$

где $\widehat{x}$ — оценка состояния системы (1). Выберем векторное управление u в системе (3) в виде линейной обратной связи $u = U(t)\widehat{x}$, $U(\cdot)$ — измеримое и ограниченное управление. Подставив выбранное управление в систему (1), (3), положив $\widetilde{x} := x - \widehat{x}$ и $\begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \widehat{x} \end{pmatrix}$, перейдем к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\widetilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)U(t) & -B(t)U(t) \\ 0 & A(t) - V(t)C^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \widetilde{x} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

обладающей конечным набором (спектром) характеристических показателей Ляпунова $\lambda_1(A_0) \leq \ldots \leq \lambda_n(A_0)$, где A_0 — матрица коэффициентов системы (4).

Определение [1]. Задача о построении для системы (4) обратной связи $u = U(t)x$, влекущей выполнение равенств $\lambda_i(A_0) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$, для любых наперед заданных вещественных чисел $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, называется задачей глобального управления характеристическими показателями Ляпунова линейной системы (4).

На основании метода, предложенного в [3], нами была доказана теорема.

Теорема. *Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, система* (2) *с наблюдателем и такими же, как у системы* (1), *коэффициентами равномерно вполне наблюдаема, то показатели Ляпунова системы* (4) *глобально управляемы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16М-006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тонков Е. Л.* Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Зайцев В. А.* К теории стабилизации управляемых систем. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. Ижевск, 2015.

ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА: НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Васильева А. А.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $1 < p \le q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Обозначим $\vartheta_l(M, X) = d_l(M, X)$ и $\hat{q} = q$ при оценке колмогоровских поперечников, $\vartheta_l(M, X) = \lambda_l(M, X)$ и $\hat{q} = \min\{q, p'\}$ при оценке линейных поперечников, $\vartheta_l(M, X) = d^l(M, X)$ и $\hat{q} = p'$ при оценке гельфандовских поперечников.

Положим $\lambda_{pq} = 0$, если $p = q$ или $\hat{q} \le 2$, и $\lambda_{pq} = \min\left\{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\hat{q}}}, 1\right\}$, если $p < q$ и $\hat{q} > 2$.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ удовлетворяет условию Джона, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество [1]. Рассматривается задача об оценке поперечников весового класса Соболева $W^r_{p,g}(\Omega)$ в пространстве $L_{q,v}(\Omega)$. Предполагаем, что функция h в окрестности нуля имеет вид $h(t) = |\log t|^{-\gamma} |\log|\log t||^{-\kappa}$, где $\gamma > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Пусть $g(x) = \varphi_g(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\mathrm{dist}\,(x, \Gamma))$, функции φ_g и φ_v в окрестности нуля имеют вид

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g}|\log t|^{-\alpha_g}|\log|\log t||^{-\sigma_g}, \quad \varphi_v(t) = t^{-\beta_v}|\log t|^{-\alpha_v}|\log|\log t||^{-\sigma_v}.$$

Положим $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$.

Теорема. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, $\beta_v = \frac{d}{q}$, $\beta_g = r - \frac{d}{p}$, $\alpha > \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$.

1. *Пусть* $p = q$ *или* $\hat{q} \le 2$. *Положим* $\theta_1 = \frac{\delta}{d}$, $\theta_2 = \frac{\alpha}{\gamma+1}$, $\theta_3 = \frac{\alpha - \frac{1}{p'} - \frac{1}{q}}{\gamma}$, $\varphi_1(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = |\log t|^{-\frac{\kappa\alpha}{\gamma+1} - \sigma}$, $\varphi_3(t) = |\log t|^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\alpha - \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right) - \sigma}$. *Пусть существует такое* $j_* \in \{1, 2, 3\}$, *что* $\theta_{j_*} < \min_{j \ne j_*} \theta_j$. *Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}} \varphi_{j_*}(n).$$

2. *Пусть* $p < q$, $\hat{q} > 2$. *Положим* $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \lambda_{pq}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right)$, $\theta_2 = \frac{\alpha}{\gamma+1} + \lambda_{pq}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right)$, $\theta_3 = \frac{\alpha - \frac{1}{p'} - \frac{1}{q}}{\gamma} + \lambda_{pq}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{q}}\right)$, $\theta_4 = \frac{\hat{q}\delta}{2d}$, $\theta_5 = \frac{\hat{q}\left(\alpha - \frac{1}{p'} - \frac{1}{q}\right)}{2\gamma}$, $\varphi_1(t) = \varphi_4(t) \equiv 1$, $\varphi_2(t) = |\log t|^{-\frac{\kappa\alpha}{\gamma+1} - \sigma}$, $\varphi_3(t) = |\log t|^{-\frac{\kappa}{\gamma}\left(\alpha - \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}\right) - \sigma}$, $\varphi_5(t) = \varphi_3(t^{\hat{q}/2})$. *Пусть существует такое* $j_* \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *что* $\theta_{j_*} < \min_{j \ne j_*} \theta_j$. *Тогда*

$$\vartheta_n(W^r_{p,g}(\Omega), L_{q,v}(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}} \varphi_{j_*}(n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bricchi M.* Existence and properties of h-sets // Georgian Math. J. 2002. V. 9, No. 1. P. 13–22.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ С ПРЕДНАПРЯЖЕННЫМИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Ватульян А. О.[1], **Нестеров С. А.**[2]

[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия;* vatulyan@math.rsu.ru
[2]*Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия;* 1079@list.ru

Для улучшения способности различных технических устройств функционировать в широком диапазоне температур часто используются термозащитные функционально-градиентные покрытия — композиты с переменными по глубине термомеханическими характеристиками. В процессе эксплуатации под воздействием различных факторов в таких покрытиях могут возникать предварительные напряжения и преднагрев, которые могут достигать больших значений и привести к расслоению покрытий. Поэтому задача моделирования и идентификации характеристик покрытий являются важнейшими задачами математической физики. Исследование задачи термоупругости для тел с неоднородными покрытиями приводит к исследованию краевых задач для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, а задача определения преднапряжений и преднагрева в системе покрытие-подложка относится к коэффициентным обратным задачам термоупругости.

В работе рассмотрена задача термоупругости для полого цилиндра с градиентным покрытием, находящемся в условиях плоской деформации при наличии неоднородного поля предварительных напряжений и преднагрева. Внутренняя цилиндрическая поверхность теплоизолирована и свободна от напряжений, а на внешней поверхности действует комбинированная тепловая и механическая нагрузка. На основе подхода, предложенного А. Н. Гузем для упругих тел, были получены уравнения термоупругости для предварительно-напряженного цилиндра. Термомеханические функции, характеризующие систему покрытие-подложка, описываются кусочно-непрерывными функциями. Прямая задача термоупругости после применения преобразования Лапласа решается на основе метода пристрелки и обращения трансформант на основе метода Дурбина. Проведено исследование влияния термомеханических характеристик и преднапряженного состояния на граничные физические поля.

Для решения обратной задачи получена слабая постановка прямой задачи для преднапряженного термоупругого цилиндра в трансформантах Лапласа. На основе слабой постановки и метода линеаризации получены операторные уравнения для решения обратной задачи и реализации итерационного процесса. В ходе реализации итерационного процесса поправки к восстанавливаемым характеристикам определялись из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами.

В вычислительных экспериментах восстанавливалась одна из характеристик покрытия термоупругого цилиндра при известных остальных. Сделан анализ влияния монотонности характеристик в покрытии, относительной толщины покрытия, уровня преднапряжений на результаты реконструкции неоднородных термомеханических характеристик.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00069).

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Вирц Р. А.[1], **Папин А. А.**[2]

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
[1]virts@math.asu.ru, [2]papin@math.asu.ru

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. Предполагается, что пороупругая среда обладает преимущественно вязкими свойствами и плотности фаз являются постоянными. Данный процесс может быть описан следующей системой уравнений

$$\frac{\partial \phi\rho_f}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\vec{v}_f\rho_f) = 0, \quad \frac{\partial \rho_s(1-\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot((1-\phi)\vec{v}_s\rho_s) = 0, \tag{1}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f + \rho_f\vec{g}), \quad \nabla\cdot v_s = -a_1(\phi)p_e, \tag{2}$$

$$\rho_{tot}\vec{g} + \operatorname{div}\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial\vec{x}} + \left(\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial\vec{x}}\right)^*\right)\right) - \nabla p_{tot} = 0, \tag{3}$$

решаемой в области $(\vec{x},t)\in Q_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\in\mathbb{R}^n$, при краевых и начальных условиях

$$\vec{v}_s\mid_{\partial Q_T} = \vec{v}_f\mid_{\partial Q_T} = 0, \quad \phi\mid_{t=0} = \phi^0(x).$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ — соответственно истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз, ϕ — пористость, p_f, p_s — соответственно давления жидкой и твердой фаз, $p_e = p_{tot} - p_f$ — эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s$ — общее давление, $\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ — плотность двухфазной среды, $\vec{g}$ — вектор силы тяжести, $k(\phi)$ — коэффициент фильтрации, $a_1(\phi)$ — коэффициент объемной вязкости, η — вязкость твердой среды.

В одномерном виде в массовых переменных Лагранжа система (1)–(3) сводится к уравнению для пористости [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x\partial t} - k(\phi)g(\rho_{tot}+\rho_f)\right),$$

где функция $G(\phi)$ определяется равенством

$$\frac{dG(\phi)}{d\phi} = (1+2\eta(1-\phi)a_1(\phi))(a_1(\phi)(1-\phi))^{-1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Papin A. A., Tokareva M. A.* On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. V. 10, No. 3. P. 385–395.

ГРАНИЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ ДЛЯ ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ

Водопьянов С. К.[1], **Молчанова А. О.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]vodopis@math.nsc.ru, [2]a.molchanova@math.nsc.ru

Классический результат Каратеодори 1913 года о граничном соответствии для конформных отображений широко известен как теория простых концов Каратеодори. С тех пор вопрос о том, при каких условиях отображение непрерывно (гомеоморфно) продолжается на замыкание области определения (значений), активно изучается в рамках классической теории функций и квазиконформного анализа (см. работы Г. Д. Суворова, В. А. Зорича, Р. Някки, Ю. Вяйсяля и др.).

Аналогично работе [1] рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ёмкостную метрику $d_q^\theta(x,y)$, определяемую по весовому пространству Соболева $L_q^1(\Omega;\theta)$, $q \in (n-1,n]$, для точек $x, y \in \Omega$, достаточно близких к границе $\partial\Omega$ (здесь $\theta : \Omega \to (0,\infty)$ — непрерывная весовая функция). Весовая функция искажает евклидову геометрию области Ω с учетом вырождения вблизи границы. Присоединенные при пополнении метрического пространства $(\Omega, d_q^\theta(x,y))$ к области Ω элементы назовём $L_q^1(\Omega;\theta)$-*ёмкостной границей*. Известно, что на плоскости $(n = 2)$ $L_2^1(\Omega)$-ёмкостная граница гомеоморфна границе по Каратеодори.

Мы исследуем граничное поведение гомеоморфизмов класса $\mathcal{OD}(\Omega; q, p; \theta, 1)$, $n-1 < q \le p \le n$, введенных в работе [2], т. е. гомеоморфизмов $\varphi \in W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих поточечному условию $\theta^{\frac{p}{q}}(x)|Df(x)|^p \le \big(K(x)\big)^p J(x,f)$ п. вс. для некоторой функии $K(x)$; наименьшая из таких функций $K_q^{\theta,1}(\cdot, f) \in L_\varkappa(\Omega)$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$, если $q = p$). При $q = p = n$, $\theta \equiv 1$ эти гомеоморфизмы квазиконформны и наследуют их многие геометрические свойства.

Мы доказываем, что гомеоморфизм $\psi : \Omega' \to \Omega$, обратный к гомеоморфизму $\varphi \in \mathcal{OD}(\Omega; q, p; \theta, 1)$, естественно продолжается до непрерывного отображения $L_p^1(\Omega')$-ёмкостной границы в $L_q^1(\Omega;\theta)$-ёмкостную границу.

Мы приводим пример области в $\mathbb{R}^2$, $L_q^1(\Omega;\theta)$-ёмкостная граница которой не совпадает с евклидовой, и гомеоморфизма $\varphi : \Omega \to \Omega'$, непрерывного вплоть до границы Ω, отображающего отрезок на границе $\partial\Omega$ в точку границы $\partial\Omega'$, и такого, что продолжение обратного на $L_p^1(\Omega';\theta)$-ёмкостную границу гарантируется свойствами весовой функции. Отметим, что результаты других авторов в аналогичной ситуации нельзя назвать полными, поскольку они получены без учёта поведения весовой функции вблизи границы (см., например, [3]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00801а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1 (205). С. 17–65.
2. *Водопьянов С. К.* Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1020–1056.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer, 2009.

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Войтишек А. В.

Новосибирский государственный университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
vav@osmf.sscc.ru

В данном докладе развивается идеология книги [1], касающаяся целесообразности использования дифференциальных уравнений в качестве математических моделей, описывающих практически значимые рандомизированные (марковские) итерационные процессы. Особое внимание в докладе будет уделено *численным* (реализуемым на компьютере) рандомизированным математическим моделям.

Теоретические и практические аспекты исследования той или иной численной математической модели часто находятся в определенном противоречии по следующим причинам. Получить хорошие математические результаты (теоремы, формулы и т. п.) удается, как правило, только для простейших (упрощенных) вариантов модели, не соответствующих содержательным практическим приложениям. В свою очередь, адекватные прикладные модели по причине своей сложности допускают только численные исследования.

Безусловно, переход от итерационного описания процесса к дифференциальному уравнению (или к системе дифференциальных уравнений) позволяет получить весьма полезную информацию о решении (вплоть до аналитического представления). Однако такой переход ужесточает требования к свойствам решения (в частности, к гладкости этого решения), ограничивает возможности учета практически важных нелинейных эффектов на шагах исследуемого итерационного (в частности, марковского) процесса и, кроме того, не всегда возможен. В часто случающихся ситуациях, когда у получаемого дифференциального уравнения нет аналитического решения и требуется численное приближение решения, исходный итерационный процесс является основой построения оптимального по трудоемкости вычислительного алгоритма *прямого моделирования*.

Описанные ограничения по использованию аналитических подходов особенно ярко проявляются при изучении вероятностных итерационных процессов. Формально для прикладных марковских процессов можно записать аналитические соотношения типа *уравнения Колмогорова*, однако аналитическое решение или построение численных схем приближения решения этого уравнения, существенно отличных от прямого моделирования, крайне затруднены. Кроме того, можно заметить, что на практике требуется приближать не само решение уравнения Колмогорова, а функционалы от этого решения, и здесь требуются специальные аналитические и численные подходы.

В качестве примеров описанных здесь ситуаций рассматриваются прикладные итерационные схемы, связанные с переносом частиц различной природы, процессы самоорганизации, рандомизированные ресурсные модели и др. Особо отметим, что в данном докладе список этих примеров существенно расширен по сравнению с книгой [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтишек А. В.* Рандомизированные итерационные численные модели и алгоритмы. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017.

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Волокитин Е. П.[1], **Чересиз В. М.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* volok@math.nsc.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* vladimir.cheresiz@math.nsc.ru

Системой типа Дарбу мы называем систему ОДУ вида

$$\dot{x} = x + P_n(x,y),\ \dot{y} = y + Q_n(x,y), \tag{1}$$

где $P_n(x,y), Q_n(x,y)$ — однородные многочлены степени $n \geq 2$.

Глобальный фазовый портрет плоской системы ОДУ с точностью до топологической эквивалентности определяется заданием его особых элементов: точек покоя, предельных циклов и сепаратрис седловых секторов. В случае системы (1) основной интерес представляет исследование точек покоя.

Мы показали, что точки покоя системы (1), лежащие в конечной части фазовой плоскости, являются гиперболическими или полугиперболическими узлами, сёдлами и седло-узлами.

Для исследования бесконечно удалённых особых точек мы применили компактификацию Пуанкаре, при которой бесконечно удалённые точки становятся точками экватора сферы Пуанкаре. Среди бесконечно удалённых особых точек могут появиться точки типа линейный нуль (матрица линейного приближения равна нулю). Изучение таких особых точек мы проводили, применяя аппарат разрешения особенностей (desingularization, blow-up). В некоторых случаях окрестность рассматриваемых особых точек устроена более сложным образом, чем окрестность конечных особых точек.

Полученные результаты позволяют строить глобальные фазовые портреты системы (1). В качестве примера мы предъявляем все возможные топологически различные фазовые портреты квадратичных и кубических систем типа Дарбу.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314-2016-0007), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00057).

ЗАДАЧА МАРКУШЕВИЧА И УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ

Воронин А. Ф.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; voronin@math.nsc.ru

Прежде чем перейти непосредственно к формулировкам изучаемых задачи и уравнений в свертках первого и второго рода, введем необходимые обозначения. Положим $\mathcal{F}f$ — образ Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ – расширенная вещественная прямая; W_0 — алгебра Винера непрерывных функций вида $\mathcal{F}f$; W_{0+} (W_{0-}) — подалгебра в W_0, состоящая из функций вида $\mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); $W := \{C + \mathcal{F}f : \; C = \mathrm{const}\}$.

Рассмотрим задачу Маркушевича (известную также под названием обобщенной краевой задачи Римана или задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения) о нахождении функций $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ по краевому условию на $\mathbb{R}$:

$$\varphi^{+}(x) = a(x)\varphi^{-}(x) + b(x)\overline{\varphi^{-}(x)} + c(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где

$$a, b \in W, \quad a(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in W_0. \tag{2}$$

Рассмотрим также уравнения в свертках первого и второго рода на конечном интервале $(0, \tau)$:

$$\lambda\, u(t) - \int\limits_{0}^{\tau} k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \tag{3}$$

где

$$k \in L_1(-\tau, \tau), \quad f \in L_1(0, \tau), \quad \tau > 0, \quad \lambda = 0, 1. \tag{4}$$

Считаем, что ядро k обладает следующими свойствами:

$$k(t) = k_{+}(t) + \overline{k_{+}(-t)}, \quad t \in (-\tau, \tau), \tag{5}$$

где $k_{+}(t) = \theta(t)\,k(t)$, θ – функция Хевисайда.

Решение $u(t)$ уравнений (3) при условиях (4)–(5) будем искать в $L_1(0, \tau)$.

В докладе будут найдены условия эквивалентной разрешимости задачи Маркушевича (1) и уравнений в свертках (3).

Отметим, что связь между задачей Маркушевича (1)–(2) и уравнением в свертках второго рода (3) (при $\lambda = 1$) впервые была получена в работе автора [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А. Ф.* О связи обобщенной краевой задачи Римана и усеченного уравнения Винера – Хопфа // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 412–421.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Гадоев М. Г.[1], **Исхоков Д. С.**[2]

[1] *Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия;* gadoev@rambler.ru

[2] *Институт математики им. А. Джураева, Душанбе, Республика Таджикистан;* dsiskhokov@gmail.com

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P_0[u] = \sum_{|\alpha|=|\beta|=r} D_x^\alpha \left(\rho^{2\tau_r}(x) a_{\alpha,\,\beta}(x) D_x^\beta u\right) + a_{00}(x)\rho^{2\tau_0}(x)u(x). \qquad (1)$$

В работе найдены необходимые и достаточные условия на коэффициенты оператора (1), обеспечивающие существование оператора $P = P^* > 0$ — замыкания исходного оператора P_0.

В докладе речь идет также об условиях на параметры вырождения оператора P, при выполнении которых спектр исследуемого оператора дискретен.

Применением тауберова метода, разработанного в работах [1–3], получены асимптотические формулы для $N(P, \lambda)$ — функции распределения собственных значений оператора P.

Полученные результаты о дискретности спектра и асимптотике функции $N(P, \lambda)$ обобщают соответствующие результаты работ [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойматов К. Х.* Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. I // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1981. Вып. 7. С. 50–100.
2. *Бойматов К. Х.* Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. II // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 240–263.
3. *Бойматов К. Х.* Спектральная асимптотика дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. III // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1984. Вып. 10. С. 78–106.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СЦЕНАРИЯ ЭМБОЛИЗАЦИИ АВМ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Гологуш Т. С.[1], **Черевко А. А.**[2], **Петренко И. А.**[3], **Остапенко В. В.**[2]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* tatiana_06.08@mail.ru
[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* cherevko@mail.ru, ostapenko_vv@ngs.ru
[3]*Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия;* petrenko_irina@bk.ru

Артериовенозная мальформация (АВМ) является сложным и опасным пороком развития сосудов головного мозга. Это опасное заболевание, влияющее на функционирование головного мозга, при котором велик риск внутримозгового кровоизлияния. Одним из методов лечения артериовенозной мальформации является эмболизация — внутрисосудистое заполнение клубка сосудов АВМ специальной эмболизирующей композицией. Данный метод широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается интраоперационным разрывом сосудов. Цель данной работы состоит в том, чтобы построить оптимизационный алгоритм эмболизации АВМ.

АВМ адекватно моделируется пористой средой в силу неупорядоченного расположения вырожденных сосудов малых диаметров, осуществляющих сброс крови из артерии в вену. Процесс эмболизации в одномерном приближении описывается уравнением Баклея – Леверетта, которое решается численно с помощью новой модификации схемы Кабаре.

В данной работе изучается оптимальный сценарий эмболизации с точки зрения безопасности и эффективности. На процесс эмболизации накладывается несколько требований: об ограничении удельной нагрузки на узел АВМ при эмболизации, об отсутствии эмболизирующей композиции в вене во время и после операции, а также о необходимости максимального перекрытия сечения АВМ с помощью эмболизирующей композиции. Требование ограничения удельной нагрузки следует из нейрохирургической практики. Оно формулируется в виде:

$$\Delta E / V \leq W_{\max},$$

где ΔE — энергия, рассеивающаяся в АВМ за единицу времени, V — объём АВМ, $W_{\max}$ — предельное допустимое значение удельной нагрузки. Процесс эмболизации описывается как процесс оптимального управления, где, управляя концентрацией эмболизата, нужно добиться максимальной эмболизации за конечное время при выполнении указанных ограничений.

На основе клинических данных построены модели для нескольких реальных пациентов. Для специального закона подачи эмболизата рассчитаны допустимые и оптимальные сценарии эмболизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00333 и № 17-08-01736) и Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0002).

РАВНОМЕРНЫЕ ОБЛАСТИ И cc-ШАРЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГРУПП КАРНО

Грешнов А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
greshnov@math.nsc.ru, a.greshnov@g.nsu.ru

Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — метрическое пространство с внутренней метрикой d. Область $\mathcal{D} \subset \mathbb{X}$ называется *равномерной*, если существуют положительные константы a, b такие, что всякая пара точек $u, v \in \mathcal{D}$ может быть соединена кривой $\gamma \subset \mathcal{D}$ конечной длины $l(\gamma)$, для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} l(\gamma) \leq ad(u,v), \\ \min\limits_{i=1,2}\{l(\gamma(u,x)), l(\gamma(v,x))\} \leq bd(x, \partial\mathcal{D}), \end{cases}$$

где $l(\gamma(v,x))$ — длина части кривой γ от точки v до точки x, $l(\gamma(u,x))$ — длина части кривой γ от точки u до точки x, причем константы a, b не зависят от выбора точек $x \in \gamma$, $u, v \in \mathcal{D}$.

Актуальным примером метрических пространств $(\mathbb{X}, d)$ являются группы Карно $\mathbb{G}$ с метрикой Карно – Каратеодори $d_{\mathbb{G}}$ [1]. Задача о существовании ограниченных равномерных областей в настоящее время решена только для 2-ступенчатых групп Карно [2], для общих групп Карно эта проблема открыта. Естественный "кандидат" на роль ограниченной равномерной области для произвольной группы Карно является шар в метрике Карно – Каратеодори (*cc-шар*) этой группы. Однако даже для 2-ступенчатых групп Карно в общем случае неизвестно — являются ли их *cc*-шары равномерными областями или нет. В работе [3] (см. также [4]) было доказано, что *cc*-шары групп Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ являются равномерными областями.

Рассмотрим канонические 2-ступенчатые группы Карно $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, которые определяются, см. [5, 6], в стандартном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ при помощи таблицы коммутаторов $[e_i, e_{n+i}] = \alpha_i e_{2n+1}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Если $\alpha_i = \alpha$ для всех i, то мы получаем каноническую группу Гейзенберга. Нами установлена следующая теорема.

Теорема. *cc-шары 2-ступенчатых групп Карно $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ являются равномерными областями.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00801).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
2. *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of non-negative solutions of subelliptic equations in *NTA*-domains for Carnot–Carethéodory metrics // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4, No. 12. P. 403–432.
3. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.
4. *Грешнов А. В.* Геометрия *cc*-шаров и константы в теореме Ball-Box на группалгебрах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1040–1058.
5. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2012. V. 43, No. 3–4. P. 355–388.
6. *Грешнов А. В., Трямкин М. В.* Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$-квазиметрик на канонических группах Карно // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 4. С. 635–639.

СПЕКТРЫ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Григорьев Ю. Н.[1], **Ершов И. В.**[2]

[1] *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;* grigor@ict.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный аграрный университет, Новосибирск, Россия;* i_ershov@ngs.ru

В докладе рассматривается устойчивость сверхзвукового пограничного слоя (ПС) релаксирующего газа на плоской пластине. Течение описывается системой уравнений двухтемпературной аэродинамики колебательно-возбужденного газа с учетом зависимости коэффициентов переноса от статической (поступательной) температуры. Уравнения задачи линейной устойчивости выводились из системы уравнений двухтемпературной аэродинамики линеаризацией относительно автомодельного решения ПС совершенного газа. Учитывались температурные возмущения коэффициентов переноса. Рассматривалось развитие двумерных дозвуковых возмущений в виде плоских волн. При этом принималось, что спектральным параметром служит комплексная фазовая скорость возмущения.

Асимптотическое разложение линеаризованной системы по малому параметру $1/\mathrm{Re}_\delta$ выделяет "невязкие" и "вязкие" линейно независимые решения. В нулевом приближении система уравнений для невязких возмущений сводится к линейному уравнению второго порядка для возмущения давления. Из него находятся два линейно независимых решения, остальные шесть решений находятся из полной системы уравнений. Два линейно независимых "невязких" решения строились методом Фробениуса на основе асимптотического разложения в окрестности критического слоя. Для "вязких" решений система после ряда упрощений была приведена к системе шестого порядка, аналогичной системе Дана – Линя. Входящие в нее уравнения импульсов и температур сводились к уравнениям Эйри. В результате "вязкие" решения были представлены через обобщенные функции Эйри нулевого, первого и второго порядков. Характеристическое (секулярное) уравнение было получено из алгебраической системы шестого порядка, упрощенной на основе асимптотик функций Эйри. Использование функций Эйри позволило выразить "вязкую" часть секулярного уравнения через табулированные функцию Титьенса и ее производную, которые обычно используются в асимптотических теориях устойчивости.

Для конечных чисел Рейнольдса спектральная задача решалась численно с использованием QZ-алгоритма. На основе асимптотического и прямого численного решения в плоскости переменных $(\mathrm{Re}_\delta, \alpha)$ строились кривые нейтральной устойчивости для первой и второй мод возмущения. Показано, что при максимальном уровне возбуждения критическое число Рейнольдса превышает соответствующее значение для совершенного газа примерно на 12 %. Рассчитанные на основе асимптотического подхода кривые нейтральной устойчивости хорошо согласуются с результатами прямого численного решения исходной спектральной задачи, а полученные из асимптотической теории критические числа Рейнольдса превышают соответствующие значения численных расчетов примерно на 15 %.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00209).

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА С ИСТОЧНИКОМ

Григорьев Ю. Н.[1], **Мелешко С. В.**[2], **СурияВичитсерании А.**[2]

[1] *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;* ict@ict.nsc.ru

[2] *Технический университет Суранарии, Накхон Ратчасима, Таиланд*

Классическое уравнение Больцмана является основой математического аппарата кинетической теории газов. Вместе с тем имеется ряд кинетических задач, в которых необходимо дополнить уравнение Больцмана функцией источника (стока), зависящей в общем случае от его решения (функции распределения), а также некоторых функционалов от него.

В докладе рассматривается пространственно однородное уравнение Больцмана с источником для изотропной в скоростном пространстве функции распределения и изотропной максвелловской модели рассеяния в форме его Фурье-преобразования по скоростному пространству:

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + \varphi(x,t)\varphi(0,t) = \int\limits_0^1 \varphi(xs,t)\varphi(x(1-s),t)ds + G(\varphi(x,t),\varphi(0,t),t,x). \quad (1)$$

В данном случае функция источника G зависит, в частности, от функционала плотности

$$n(t) = \varphi(0,t).$$

Для построения инвариантных решений (1) найдена группа Ли преобразований эквивалентности, одно из которых единственным образом выделяет класс функций источника, линейных по ФР, причем преобразованное уравнение имеет нулевую правую часть. Это позволяет использовать известное решение Бобылева – Крука – Ву (БКВ) для однородного уравнения в преобразованных переменных для нахождения инвариантных решений исходного уравнения (1).

Обобщенные БКВ-решения, допускающие физическую интерпретацию, найдены для следующих функций источника.

1. Источник в форме

$$G_1(x,t) = -C_r n^2(t)\varphi(x,t),$$

моделирующий процесс рекомбинации с участием третьего тела или химическую реакцию третьего порядка с выбыванием частиц.

2. Источник в форме

$$G_2(x,t) = -C_e\varphi(x,t),$$

моделирующий процесс "убегания" частиц высокой энергии из удерживающего силового поля, например, из верхней атмосферы Земли.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00209).

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Григорьева А. И.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; shadrina_ai@mail.ru

В работе изучается уравнение вида

$$u_{tt} - \alpha(x)u_{xx} - u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в случае, когда коэффициент $\alpha(x)$ может иметь разрыв первого рода в некоторой внутренней точке своей области определения.

Положим $x \in [-1,1]$, $t \in [0,T]$, $0 < T < \infty$, Q_1, Q_2 и Q есть цилиндры $(-1,0)\times(0,T)$, $(0,1)\times(0,T)$ и $(-1,1)\times(0,T)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ — функции, определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$, a и b — заданные действительные числа.

Задача сопряжения: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0,\ t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = u(x,T) = 0,\ x \in (-1,0) \cup (0,1),$$

$$u(-0,t) = au(+0,t),\ t \in (0,T),$$

$$u_x(+0,t) = bu_x(-0,t),\ t \in (0,T).$$

Методом продолжения по параметру доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Также приводятся различные примеры неединственности существования решений, зависящие от того, как себя ведет разрывная функция в заданной области.

БИНАРНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Гутман А. Е.[1], **Кононенко Л. И.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]gutman@math.nsc.ru, [2]larak@math.nsc.ru

С формальной точки зрения *задача* — это бинарное соответствие $P = (A,B,C)$, где $C \subseteq A \times B$. Множества A, B и C трактуются как *область данных*, *область искомых* и *условие задачи* P. Включение $(a, b) \in C$ записывается в виде $P(a, b)$ и означает, что искомое $b \in B$ является *решением задачи* P для данного $a \in A$. Такой подход обеспечивает простую и адекватную формализацию основных компонентов задач, их свойств и конструкций (см. [1, 2]). В частности, возникают естественные понятия *обратной задачи* $(A, B, C)^{-1} = (B, A, C^{-1})$ и *композиции задач* $(A', B', C') \circ (A, B, C) = (A, B', C' \circ C)$, где

$$C^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in C\}, \quad C' \circ C = \{(x, z) : (\exists\, y)\big((x, y) \in C,\ (y, z) \in C'\big)\}.$$

В качестве примера рассмотрим обратную задачу к сингулярно возмущенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих процесс химической кинетики и горения (см. [3, 4]). Пусть P — задача с областью данных $C(\mathbb{R}^4) \times C(\mathbb{R}^4) \times \mathbb{R}$, областью искомых $C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ и условием

$$P\big((f, g, \varepsilon), (x, y)\big) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), & t \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где $f, g \in C(\mathbb{R}^4)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$. Обратная задача P^{-1}, имеющая пары функций $(x, y) \in C^1(\mathbb{R})^2$ в качестве данных, очень проста и не соответствует практике. В роли данных более адекватны не сами функции, а конечные наборы их значений или значений их производных. Соответствующая корректировка реализуется композицией $P^{-1} \circ Q$ задачи P^{-1} и вспомогательной задачи Q с областью данных $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, областью искомых $C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ и условием

$$Q\big((\tau, \alpha, \beta), (x, y)\big) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x(\tau_1) = \alpha_1, \ \ x(\tau_2) = \alpha_2, \ \ \ldots, \ \ x(\tau_k) = \alpha_k, \\ \dot{x}(\tau_1) = \beta_1, \ \ \dot{x}(\tau_2) = \beta_2, \ \ \ldots, \ \ \dot{x}(\tau_k) = \beta_k, \end{cases}$$

где $\tau, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^k$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$. Мы приводим формулы решения скорректированной обратной задачи $P^{-1} \circ Q$ и указываем условия ее однозначной разрешимости для случая, когда $\varepsilon = 0$, а функция $f(x, y, t, \varepsilon)$ является многочленом от x и y.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проекты № 0314-2016-0005 и № 0314-2016-0007), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00057).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Формализация обратных задач и ее приложения // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2017. Т. 17, № 4. С. 49–56.
2. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Обратная задача химической кинетики как композиция бинарных соответствий // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 48–53.
3. *Кононенко Л. И.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем с одной или двумя медленными и быстрыми переменными // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 4. С. 55–62.
4. *Кононенко Л. И.* Релаксации в сингулярно возмущенных системах на плоскости // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 45–50.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ НАД ПОДАТЛИВЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Даржаин А. Э.[1,2], **Чупахин А. П.**[1,2], **Бойко А. В.**[1,2,3]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[3] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;*
darzhain@gmail.com, chupakhin@hydro.nsc.ru, boiko@itam.nsc.ru

Исследование пограничного слоя над податливыми покрытиями интенсивно развивается в последнее время. Это связано как с построением адекватных математических моделей, так и с такими практическими приложениями, как снижение сопротивления трения в авиации и судостроении. К настоящему времени существует много работ, в которых рассматриваются идеализированные модели вязкоупругих покрытий. В данной работе анализируется устойчивость пограничного слоя около плоской пластины над двухслойным податливым покрытием. Покрытие обладает конечной толщиной, что позволяет рассматривать динамику возмущений и внутри покрытия. Предполагается, что вязкоупругие свойства материала описываются моделью Кельвина – Фойгта. В этой модели должны быть заданы эмпирические зависимости модуля упругости и коэффициента потерь от частоты возмущений. Такие данные были получены лишь в последние годы для некоторых типов резин. Расчет для однослойного покрытия был получен в работе [1].

Течение жидкости и динамика возмущений внутри покрытия описываются уравнениями Навье – Стокса и уравнениями Навье, соответственно. В качестве основного потока используется пограничный слой Блазиуса, а в качестве возмущений рассматриваются бегущие волны с фиксированным волновым числом и частотой. При расчете устойчивости используется метод коллокаций, в котором в качестве узлов интерполяции выбраны корни полиномов Чебышева второго рода, которые с помощью специального преобразования отображаются на физическую область, занятую потоком и покрытием. Эмпирические зависимости были взяты для реальных покрытий.

В результате получены собственные значения для волнового числа, распределения амплитуды и фазы для ведущей моды, соответствующей неустойчивому течению, а также кривые нейтральной устойчивости в плоскости частота – число Рейнольдса для различных параметров покрытия. Проведено сравнение результатов со случаем жесткого покрытия. В большинстве случаев податливость покрытия существенно влияет на устойчивость пограничного слоя.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойко А. В., Кулик В. М., Филимонов В. А.* Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности // Вестн. НГУ. Серия: Физика. 2011. Т. 6, вып. 4. С. 103–115.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Демиденко Г. В.[1,2], Дулепова А. В.[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
demidenk@math.nsc.ru, a.dulepova@g.nsu.ru

Работа посвящена исследованию устойчивости движения перевернутого маятника, точка подвеса которого колеблется по синусоидальному закону вдоль прямой, составляющей малый угол α с вертикалью. Уравнение движения маятника в этом случае имеет вид

$$\varphi'' + \varepsilon\varphi' + \frac{g - a\omega^2 \sin(\omega t)\cos\alpha}{l}\sin\varphi - \frac{a\omega^2\sin(\omega t)\sin\alpha}{l}\cos\varphi = 0,$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия, ε — коэффициент трения, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения, ω — частота колебаний точки подвеса, a — амплитуда колебаний точки подвеса.

Хорошо известно, что при нулевом угле $\alpha = 0$ при достаточно большой частоте $\omega \gg 1$ и достаточно малой амплитуде колебаний точки подвеса $\frac{a}{l} \ll 1$ верхнее положение равновесия маятника становится устойчивым. Этот факт был впервые строго доказан Н. Н. Боголюбовым в 1942 г. (см. [1]).

С использованием принципа сжимающих отображений и критерия асимптотической устойчивости, сформулированного в терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова (см. [2, 3]), доказано, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает устойчивые периодические движения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00408).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. 1950. Т. 14. С. 9–34.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.
3. *Демиденко Г. В., Дулина К. М., Матвеева И. И.* Асимптотическая устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с параметрами // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. № 40 (299), вып. 14. С. 39–52.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Демиденко Г. В.[1,2], **Уварова И. А.**[1]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru

В работе рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \tag{1}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\alpha(n,\tau) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha(n,\tau) & -\alpha(n,\tau) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha(n,\tau) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha(n,\tau) & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta > 0,$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}, \quad F(t,x) = (g(t,x_n), 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha(n,\tau) = \frac{n-1}{\tau}.$$

Эта система возникает при моделировании многостадийного синтеза вещества без учета обратимости процесса [1]. Число стадий равно числу уравнений в системе и может быть произвольно большим.

Наша цель — получение оценок решений системы (1), характеризующих асимптотическое поведение решений при $t \to \infty$ для любой размерности $n \gg 1$. Наличие таких оценок с учетом результатов из работ [2, 3] позволяет оценивать скорость стабилизации решений уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau.$$

Теорема. *Пусть* $g \in C(\mathbb{R}_+^2)$, $g(t,0) \equiv 0$, $|g(t,z^1) - g(t,z^2)| \le L|z^1 - z^2|$. *Тогда при* $L < \theta$ *нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и имеют место следующие оценки:*

$$|x_j(t)| \le c \sum_{k=1}^{n} |x_k(0)| e^{-\delta t}, \quad t > 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \delta = \min\left\{\frac{\theta - L}{2}, \frac{1}{\tau} \ln \frac{\theta + L}{2L}\right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-41-543365 и № 18-29-10086).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
3. *Демиденко Г. В., Уварова И. А.* Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 2. С. 47–60.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СВЕРХКРИТИЧЕСКОМ ОБТЕКАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Денисенко Д. С.[1], **Макаренко Н. И.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]d.denisenko@g.nsu.ru, [2]makarenko@hydro.nsc.ru

Исследуется существование решения двумерных стационарных уравнений Эйлера для неоднородной несжимаемой жидкости с граничными условиями непротекания на неровном дне и плоской крышке и условием отсутствия возмущений вверх по потоку. В терминах функции тока исходная система эквивалентна квазилинейному эллиптическому уравнению Дюбрей-Жакотен – Лонга [1] с краевыми условиями первого рода на границах криволинейной полосы. Разрешимость данной задачи ранее была установлена [2, 3] для достаточно больших чисел Фруда (т. е. с большим запасом сверхкритичности). В настоящей работе доказана [4] теорема существования решений во всем диапазоне сверхкритических чисел Фруда. С этой целью исходная нелинейная краевая задача сведена к эквивалентной операторной формулировке в специальных функциональных пространствах типа классов Харди. С помощью техники преобразования Фурье для оператора Грина линеаризованной задачи получены оценки, на основании которых поиск решения нелинейной задачи сводится к применению принципа сжимающих отображений. При этом существенно используется малость безразмерного параметра, характеризующего высоту донного препятствия по отношению к полной глубине слоя жидкости. Отдельно методом мажорант установлена аналитичность искомого решения по указанному параметру.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00648).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yih C. S.* Stratified flows. New York: Academic Press, 1980.
2. *Krutitskii P. A.* Fast nonlinear stratified flow over an obstacle // Appl. Math. Lett. 1996. V. 9, No. 6. P. 41–46.
3. *Krutitskii P. A.* Fast nonlinear stratified flow over several obstacles // Int. J. Non-Linear Mech. 1997. V. 32, No. 3. P. 483–488.
4. *Denisenko D. S., Makarenko N. I.* Supercritical stratified flow over an uneven bottom // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 894, No. 1. Article ID 012025.

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПЕРЕМЕННЫМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ АРГУМЕНТАМ: НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Денисова Т. Е.

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия;
`tdenissova@mail.ru`, `DenisovaTE@mgppu.ru`

В докладе рассматривается первая начально-краевая задача для однородного уравнения соболевского типа

$$D_t^2\nabla(A(x)\nabla u) + \nabla(B(x)\nabla u) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x) \in M_n(C^\infty(g))$, а g — пространственная область достаточно общего вида (определяемая требованиями соответствующих теорем вложения пространства Соболева в пространство непрерывных функций). Такие уравнения возникают при изучении некоторых задач астрофизики, геофизической гидродинамики и физики высоких энергий.

Исследуются некоторые особенности поведения решений таких уравнений. Более точно, обсуждается вопрос невозможности монотонного роста или медленной монотонной стабилизации к нулю соответствующих производных по времени решения.

При доказательстве полученных результатов применяются методы операционного исчисления с использованием аналога энергетической оценки, полученной С. В. Успенским и Г. В. Демиденко [1], и её обобщений [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Успенский С. В., Демиденко Г. В.* О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешённых относительно старшей производной // Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды семинара С. Л. Соболева. Новосибирск, 1980. № 2. С. 92–115.
2. *Нафиков Ш. Г.* Об оценках решений первой краевой задачи для уравнений типа Соболева // Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды семинара С. Л. Соболева. Новосибирск, 1983. № 1. С. 90–107.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Дженалиев М. Т.[1], **Рамазанов М. И.**[2], **Искаков С. А.**[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан;* muvasharkhan@gmail.com

[2] *Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Республика Казахстан;* ramamur@mail.ru

Рассматривается следующая граничная задача

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t), \quad \{x,t\} \in G = \{x,t:\ -t<x<t,\ t>0\}, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=-t} + \frac{d\tilde{u}_1(t)}{dt} = h_1(t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=t} + \frac{d\tilde{u}_2(t)}{dt} = h_2(t), \qquad (2)$$

где $\tilde{u}_1(t) = u(-t,t),\ \tilde{u}_2(t) = u(t,t)$.

В работе [1] была установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в весовых гёльдеровских пространствах.

С помощью тепловых потенциалов задача (1)–(2) сводится к решению двух независимых особых интегральных уравнений Вольтерра:

$$\theta_\pm(t) - \int_0^t K_\pm(t,\tau)\theta_\pm(\tau)d\tau = f_\pm(t), \quad t>0, \qquad (3)$$

ядра которых обладают следующим свойством:

$$\left|\lim_{t\to 0+}\int_0^t K_\pm(t,\tau)d\tau\right| = 1.$$

Лемма. *Для любой правой части $f_\pm(t) \in L_\infty\left(\mathbb{R}_+;\ \sqrt{t}\exp\left\{t/(4a^2)\right\}\right)$ интегральное уравнение (3) имеет общее решение $\theta_\pm(t) \in L_\infty\left(\mathbb{R}_+;\ \sqrt{t}\exp\left\{t/(4a^2)\right\}\right)$:*

$$\theta_\pm(t) = f_\pm(t) + \int_0^t R_\pm(t,\tau)\exp\left\{-(t-\tau)/(4a^2)\right\} f_\pm(\tau)d\tau + C\cdot\theta_{hom\pm}(t),\ C = \text{const},$$

где $\theta_{hom\pm}(t)$ определяются в явном виде, и справедлива оценка

$$|R_\pm(t,\tau)| \le C\frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}, \quad 0<\tau<t<+\infty.$$

Теорема. *Для любой правой части $f(t) \in L_\infty\left(\mathbb{R}_+;\ \sqrt{t}\exp\left\{t/(4a^2)\right\}\right)$ и для данных функций $g(x,t) \in W^{1,0}_\infty(G;\ \sqrt{t}\exp\left\{t/(4a^2)\right\})$, $h_0(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+;\ \sqrt{t})$, $h_1(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+;\ \sqrt{t})$ граничная задача (1)–(2) имеет общее решение $u(x,t) \in L_\infty(G;\ (x+t^{1/2})^{-1})$.*

Работа выполнена при поддержке МОН РК (проект № AP05132262).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солонников В. А., Фазано А.* Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 322–338.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЁЛЬДЕРА

Джобулаева Ж. К.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан; zhanat-78@mail.ru

В работе изучается задача сопряжения для системы параболических уравнений в пространствах Гёльдера.

Линейные задачи со свободной границей с малыми параметрами при производных по времени были изучены в работах [1–7]. В настоящей статье изучается задача со свободной границей без производных по времени.

Исходная нелинейная задача со свободной границей типа Флорина описывает процесс фильтрации жидкостей и газов в пористой среде, этой задаче соответствует рассматриваемая задача, которая является ее линеаризацией.

В пространстве Гёльдера доказаны существование, единственность и коэрцитивные оценки решения.

Работа выполнена по гранту № AP05133898 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rodrigues J. F., Solonnikov V. A., Yi F.* On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems // Math. Ann. 1999. V. 315, No. 1. P. 61–95.
2. *Bizhanova G. I.* Solution of a model problem related to singularly perturbed free boundaries of Stefan type // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 362. С. 64–91.
3. *Bizhanova G. I.* On the Stefan problem with the small parameter // Parabolic and Navier–Stokes equations. Part 1. Banach Center Publ., vol. 81. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008. P. 43–63.
4. *Bizhanova G. I.* On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. I // Математический журнал (Алматы). 2012. Т. 12, № 1. С. 24–37.
5. *Bizhanova G. I.* On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. II // Математический журнал (Алматы). 2012. Т. 12, № 2. С. 70–86.
6. *Алимжанов Е. С.* Решение модельной задачи Веригина с малым параметром в пространстве Гельдера // Вестн. КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 78, № 3. С. 19–32.
7. *Джобулаева Ж. К.* Оценки решения двухфазной задачи с двумя малыми параметрами в условиях сопряжения для системы параболических уравнений // Математический журнал (Алматы). 2017. Т. 17, № 2. С. 83–109.

СВОЙСТВА КЛАССОВ СОБОЛЕВСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ, СТРОЯЩИХСЯ ПРИ ПОМОЩИ КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОВ

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
yegorov@math.nsc.ru, a.egorov@g.nsu.ru

Установлен ряд свойств для классов отображений $v : V \to \mathbb{R}^m$, V — область $\mathbb{R}^n$, принадлежащих пространствам Соболева $W^{l,k}_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{R}^m)$, $l \geq 1$, и удовлетворяющих дифференциальным соотношениям

$$F(v^{(l)}(x)) \leq K(x)G(v^{(l)}(x)) + H(x), \tag{1}$$

строящимся при помощи положительно k-однородных квазивыпуклых функций $F : \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ и нуль-лагранжианов $G : \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$, где $K : V \to \mathbb{R}$ и $H : V \to \mathbb{R}$ — некоторые измеримые функции, а неравенство (1) выполняется для п. в. $x \in V$. Здесь $k, m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq \min\{m, n\}$; $v^{(l)}(x)$ обозначает дифференциал порядка l отображения $v : V \to \mathbb{R}^m$ в точке $x \in V$; $\mathbb{R}^{mn^l}_s$ — пространство симметричных l-линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Непрерывная функция $F : \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ является *квазивыпуклой*, если $\int\limits_{(0;1)^n} F(\zeta+\varphi^{(l)}(x))\,dx \geq F(\zeta)$ для всех $\varphi \in C^\infty_0((0;1)^n; \mathbb{R}^m)$, $\zeta \in \mathbb{R}^{mn^l}_s$. Функция $G\colon \mathbb{R}^{mn^l}_s \to \mathbb{R}$ — *нуль-лагранжиан*, если функции G и $-G$ квазивыпуклы.

Одним из установленных свойств является замкнутость рассматриваемых классов относительно слабой сходимости в пространствах Соболева $W^{l,k}_{\mathrm{loc}}(V, \mathbb{R}^m)$. Разным аспектам этого свойства и вытекающим из его применения утверждениям будет уделено основное внимание.

Полученные результаты являются распространением ряда соответствующих теорем работ [1–4], в которых рассмотрен случай $l = 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00875).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А. А.* Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 796–812.
2. *Егоров А. А.* О слабом пределе последовательности отображений, удовлетворяющих дифференциальному неравенству с квазивыпуклой функцией и нуль-лагранжианом // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 21, вып. 2. С. 41–47.
3. *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: higher integrability and removability of singularities. I // Владикавказский мат. журн. 2014. Т. 16, № 3. С. 22–37.
4. *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: higher integrability and removability of singularities. II // Владикавказский мат. журн. 2014. Т. 16, № 4. С. 41–48.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Егоров И. Е.[1], **Ефимова Е. С.**[2]

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; [1]ivanegorov51@mail.ru, [2]oslame@mail.ru

Исследованию неклассических уравнений с меняющимся направлением времени посвящены многие работы, в том числе [1, 2]. В данной работе изучается разрешимость краевой задачи для уравнения

$$\sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t)D_t^i u - \Delta u + c(x)u = f(x,t)$$

(Δ — оператор Лапласа, $s \geq 1$ — целое) с интегральным граничным условием по времени при $(-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0$, $(-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0$. Доказывается теорема единственности и существования регулярного решения. Получена оценка скорости сходимости метода последовательных приближений.

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.6069.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
2. *Egorov I. E.* On one boundary value problem for an equation with varying time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1998. Т. 5, вып. 2. С. 77–84.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; egorshin@math.nsc.ru

Рассматриваются задачи идентификации обыкновенных линейных дифференциальных и разностных уравнений (ДУ и РУ). Так называются задачи оценивания их коэффициентов на основе информации (нередко неполной, искаженной) о решениях этих уравнений. При идентификации по конечным сеточным данным (отсчетам решений уравнений на равномерной решетке в конечном интервале) возникают задачи преобразований ДУ и РУ этого класса друг в друга.

Во-первых, это задачи дискретизации — задачи вычисления коэффициентов РУ, описывающих отсчеты решений ДУ на заданной сетке. Второй тип преобразований — задачи вычисления коэффициентов ДУ, отсчеты решений которых совпадают с решениями заданного РУ на определенной сетке. С помощью теоремы Гамильтона – Кэли (ТГК) показано, что в автономном классе линейных обыкновенных уравнений (ДУ и РУ) точное решение этих задач существует.

Рассмотрены три типа задач преобразований: аналитические на основе ТГК, аппроксимационные, основанные на приближениях решений многочленами Тейлора (локальные разностные и их равномерные обобщения) и вариационные. Последние не требуют для дискретизации знания коэффициентов ДУ. Коэффициенты РУ вычисляются с помощью идентификации ДУ по сеточным данным.

Постановки этих задач, выбор класса уравнений связаны с конструктивными постановками и решениями задач идентификации в системах автоматического управления (САУ) [1]. Именно для этого класса уравнений разработана наиболее плодотворная теория САУ. Создан большой арсенал средств, методов и алгоритмов практической реализации различных ее разделов. Примерами могут служить математические теории оптимального и адаптивного управления. Математической теории идентификации даже для рассматриваемого простого класса автономных линейных моделей не существует. Есть многочисленные частные постановки и методы решения конкретных задач.

Многие современные методы автоматического управления требуют решения задач идентификации в процессе управления. В частности, это системы адаптивного оптимального и самонастраивающегося управления. Актуальны эти проблемы, например, в системах управления движущимися объектами в нестационарных средах. Не все методы идентификации работоспособны в таких системах.

Вариационные методы идентификации наиболее адекватны многим возникающим в таких системах постановкам практических и теоретических задач. Рассмотренные в докладе методы и способы преобразования уравнений избранного класса направлены на решение некоторых из этих задач. Показано, что вариационная идентификация является одним из таких преобразований.

Новые постановки задач и результаты получены благодаря использованию описания динамических систем не в пространствах состояний, а в унитарных пространствах реализаций обобщенных отсчетов в конечных интервалах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоршин А. О.* Оптимизация параметров стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Вып. 12. С. 29–48.

ДОПУСКАЕМАЯ ГРУППА УРАВНЕНИЙ АНДЕРСОНА ДВУХФАЗНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Журавлев К. К.[1], **Серикова А. В.**[1], **Иванова Н. Д.**[2]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;*
[2] *Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;*
dijtex@yandex.ru, sav1995@mail.ru, natalia.d.ivanova@gmail.com

Рассмотрим модель Андерсона динамики двухфазной среды в трехмерном случае [1, 2]

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1\overline{u}_1)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho_1\overline{u}_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1\overline{u}_1^2)}{\partial x} + m_1\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{\rho_2(\overline{u}_1-\overline{u}_2)}{\tau}, \\ \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2\overline{u}_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho_2\overline{u}_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2\overline{u}_2^2)}{\partial x} + m_2\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} = \frac{\rho_2(\overline{u}_1-\overline{u}_2)}{\tau}. \end{cases}$$

Здесь $\overline{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ — вектор скорости газа, $\overline{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ — вектор скорости частиц, ρ_1 — плотность газа, ρ_2 — плотность частиц, $m_1 = 1 - m_2$ — объемная концентрация газа, $m_2 = \frac{\rho_2}{r}$ — объемная концентрация частиц, r — абсолютная плотность частиц, τ — параметр вязкости, $P_1 = \frac{a_1^2\rho_1}{1-\frac{\rho_2}{r}}$, $P_2 = a_2^2\rho_2$ — давление газа и давление частиц, соответственно. В отличие от модели Х. А. Рахматулина динамики двухфазной среды [3], модель Андерсона учитывает взаимодействие частиц второй фазы. Групповые свойства уравнения Рахматулина были ранее исследованы в работах [4, 5].

В данной работе исследуются свойства симметрии [6] представленной модели Андерсона. Одним из результатов работы является следующая теорема.

Теорема. *Базис алгебры Ли преобразований, допускаемых системой при любых значениях давлений P_1, P_2, состоит из операторов* $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, $X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}$, $X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}$, $X_6 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2}$, $X_7 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - w_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_1\frac{\partial}{\partial w_1} - w_2\frac{\partial}{\partial v_2} + v_2\frac{\partial}{\partial w_2}$, $X_8 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} - w_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial w_1} - w_2\frac{\partial}{\partial u_2} + u_2\frac{\partial}{\partial w_2}$, $X_9 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial v_2}$, $X_{10} = \frac{\partial}{\partial t}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00226).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glasser B. J., Kevrekids I. G., Sundars S.* One- and two-dimensional traveling wave solutions in fluidized beds // J. Fluid Mech. 1996. V. 306. P. 183–221.
2. *Федоров А. В., Бедарев И. А.* Структура ударных волн в газовзвеси с хаотическим давлением частиц // Мат. моделирование. 2017. Т. 29, № 6. С. 3–20.
3. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
4. *Панов А. В.* Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 2 (17). С. 71–82.
5. *Федоров В. Е., Панов А. В.* Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды // Вестн. ЧелГУ. Сер. Физика. 2011. № 38 (253), вып. 11. С. 65–68.
6. *Овсянников Л. В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Зикиров О. С.[1], **Сагдуллаева М. М.**[2]

[1] *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан;* zikirov@yandex.ru
[2] *Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Республика Узбекистан;* sagdullayevam@mail.ru

В докладе приводятся результаты о разрешимости неклассических задач для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части

$$L_1 u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

$$L_2 u \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{2}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции в области.

Уравнения (1) и (2) относятся соответственно к первому и второму каноническому виду относительно старших производных, указанных в работе [1].

В работе доказываются теоремы существования и единственности классических решений смешанных задач с интегральными условиями.

Заметим, что смешанные задачи с интегральными условиями для линейных гиперболических уравнений были исследованы многими авторами (см., например, [2]).

Работа выполнена при поддержке Международного Российско-Узбекского проекта MRU–OT–1/2017.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д., Попёлек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.
2. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарский университет, 2012.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Золотухин А. Я.

Тульский государственный университет, Тула, Россия; zolot_aj@mail.ru

Рассматривается краевая задача [1]

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ в } \ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u-\psi \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(u-\psi)=0 \ \text{ на } \ \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ, n — единичный вектор внешней нормали к Γ, $f \in L_2(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Gamma)$ — заданные функции.

Вариационная постановка задачи (1) имеет вид [1]

$$\begin{cases} J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - \int\limits_{\Omega} f u \, d\Omega \to \min, \\ u \in G. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $G = \{u \in W_2^1(\Omega) : \gamma u \geq \psi$ п.в. на $\Gamma\}$, $\gamma u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $u \in W_2^1(\Omega)$. Ядро билинейной формы $a(u,v) = \int\limits_{\Omega}(\nabla u \nabla v) d\Omega$ состоит из функций $u = \mathrm{const}$ и является одномерным множеством. В [1] установлено, что при условии $\int\limits_{\Omega} f d\Omega < 0$ задача (2) имеет единственное решение.

Численное решение задачи (2) проводилось для области Ω, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат, методом итеративной проксимальной регуляризации в сочетании с методом конечных элементов. Приведём алгоритм этого метода.

1) Зададим последовательность положительных чисел ε_k такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ и $z^0 \in G$.

2) Считая z^k известным, находим z^{k+1} из условий

$$J(u^{k+1}) + \alpha \|z^k - Qu^{k+1}\|^2_{L_2(\Omega)} = \inf_{v \in G}(J(v) + \alpha\|z^k - Qv\|^2_{L_2(\Omega)}),$$

$\|z^{k+1} - u^{k+1}\|_{W_2^1(\Omega)} < \varepsilon_{k+1}$, где $\alpha > 0$ — параметр, Q — оператор ортогонального проектирования $W_2^1(\Omega)$ на ядро R.

В [2] установлена сходимость алгоритма, когда пункт 2) имеет вид

$$J(u^{k+1}) + \alpha \|z^k - u^{k+1}\|^2_{L_2(\Omega)} = \inf_{v \in G}(J(v) + \alpha\|z^k - v\|^2_{L_2(\Omega)}),$$

$\|z^{k+1} - u^{k+1}\|_{W_2^1(\Omega)} < \varepsilon_{k+1}$.

Обоснование метода решения задачи Синьорини без регуляризации приведено в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
2. *Золотухин А. Я., Намм Р. В., Пачина А. В.* О линейной скорости сходимости методов с итеративной проксимальной регуляризацией // Изв. вузов. Матем. 2006. № 12. С. 44–54.
3. *Namm R. V., Zolotukhin A. Ya.* The finite element method for solving Signorini's problem // Comput. Fluid Dyn. J. 1996. V. 4, No. 4. P. 509–515.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД С АДАПТИВНОЙ СЕТКОЙ НА ОСНОВЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Идимешев С. В.[1], **Горынин А. Г.**[2]

[1]*ООО Научно-Производственное Предприятие "БИОМЕР", Новосибирск, Россия;* idimeshev@gmail.com

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* arsgorynin@yandex.ru

В работе рассматривается спектральный метод для решения краевых задач с особенностями в виде больших градиентов. Спектральные методы — это высокоточные численные методы решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, которые нашли свое применение в различных областях науки [1]. В отличие от широко известных численных методов таких как конечные разности, конечные элементы, конечные объемы, в которых используется кусочное (финитное) представление решения, в спектральном методе решение задачи аппроксимируется одной глобальной функцией, определенной на всей расчетной области.

Целью работы является исследование и разработка быстрого и устойчивого численного алгоритма реализации дробно-рациональной аппроксимации в спектральном методе для задач с особенностями. По сравнению с традиционной полиномиальной аппроксимацией дробно-рациональная (отношение двух полиномов) имеет принципиально лучшие свойства при приближении функций с особенностями в виде больших градиентов и ограниченной гладкости [2]. Но применение дробно-рациональных функций затруднено в связи с нелинейностью относительно коэффициентов и возможной сингулярностью из-за нулей полинома в знаменателе. В работе предлагается использовать барицентрическую форму записи дробно-рациональных функций, которая с одной стороны линеаризует форму записи, с другой стороны гарантирует отсутствие нулей в знаменателе [3]. При этом для функций с особенностями предлагается использовать различные методы адаптивного распределения точек в окрестности особенности. В работе предложен алгоритм адаптивного распределения точек коллокации, использующий информацию об особенности функции в комплексной плоскости. Предложен способ одновременного учета нескольких особенностей (учет нескольких фронтов). Верификация метода проведена на примере уравнения Бюргерса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00202 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A.* Spectral methods: fundamentals in single domains. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
2. *Trefethen L. N.* Spectral methods in MATLAB. Philadelphia: SIAM, 2000.
3. *Trefethen L. N.* Approximation theory and approximation practice. SIAM, 2013.

О НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ильин В. П.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; ilin@sscc.ru

Рассматриваются проблемы и концепция обеспечения высокопроизводительного вычислительного эксперимента как инструмента исследования решений широкого класса уравнений математической физики, включая прямые и обратные междисциплинарные задачи со сложными реальными конфигурациями кусочно-гладких многосвязных границ и контрастными свойствами материальных сред. Современные вычислительные методы различных порядков точности и информационные суперкомпьютерные технологии позволяют достичь эффективного качественного анализа соболевских пространств решений начально-краевых задач для систем дифференциальных и/или интегральных уравнений с наглядным представлением их асимптотических, динамических и других функциональных характеристик. Высокое разрешение результатов математического моделирования процессов и явлений, а также оперативное исследование их свойств и быстродействие расчетов поддерживаются существующими средствами масштабируемого распараллеливания, оптимизации исполняемого кода и отображения алгоритмов на архитектуру суперЭВМ. Комплексное решение данных проблем достигается путем создания интегрированного вычислительного окружения (ИВО), представляющего собой программное обеспечение нового поколения для постпетафлопсных компьютеров. Насущной проблемой в данном случае является кардинальное повышение уровня искусственного интеллекта ИВО с использованием современных когнитивных и онтологических подходов с целью создания инструментальной среды для автоматизации построения и анализа математических моделей и алгоритмов. В работе исследуются вопросы формирования расширяемой базы знаний, включающей описание изучаемых объектов и операций, в том числе теоретико-множественные и аналитические преобразования, геометрические, дифференциальные и дискретные формы и т. д. Данные интеллектуальные средства ориентированы на интеграцию с вычислительно-информационными методами и технологиями в составе ИВО и на генерацию фундаментальных знаний (deep learning) с помощью принципов математического моделирования.

ЛОКАЛЬНАЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Казаков А. Л., Кузнецов П. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; kazakov@icc.ru

Рассматривается параболическое уравнение второго порядка

$$T_t = \operatorname{div}(k(T)\nabla_x T), \quad k(T) = \alpha T^\sigma, \ \alpha > 0, \ \sigma > 0, \tag{1}$$

которое в отечественной литературе именуется “нелинейным уравнением теплопроводности со степенной нелинейностью” [1], “уравнением нелинейной фильтрации” [2], а в зарубежной — “The Porous Medium Equation” [3].

Для уравнения (1) рассматриваются решения специального вида, имеющие тип тепловой волны, которые представляют собой совокупность двух решений уравнения (1), одно из которых является неотрицательным, второе — тривиальным (нулевым). Решения непрерывно состыкованы вдоль достаточно гладкой гиперповерхности, именуемой фронтом тепловой волны. Впервые подобные конструкции для (1) были предложены Я. Б. Зельдовичем и А. С. Компанейцем [4].

В докладе продолжены выполненные ранее исследования авторов [5, 6] по построению тепловых волн для уравнения (1).

Во-первых, следуя [5], мы доказываем теоремы существования и единственности кусочно-аналитических решений задачи об инициировании тепловой волны краевыми режимами различного вида, являющиеся аналогами теоремы Коши – Ковалевской (локальная разрешимость).

Во-вторых, следуя [6], мы рассматриваем специальные точные решения задачи о движении тепловой волны с заданным фронтом, являющейся разновидностью задач со свободной границей. Построение указанных решений сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с особенностью перед старшей производной. Проводятся качественное исследование решений и интерпретация полученных результатов с точки зрения свойств соответствующих тепловых волн в заданной области (нелокальная разрешимость).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00608).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
3. *Vazquez J. L.* The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
4. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
5. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 56–64.
6. *Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 544–560.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА СТРУКТУРУ ЖОРДАНОВЫХ КЛЕТОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Кангужин Б. Е.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан; kanbalta@mail.ru

Пусть $n = 2\mu$ и на отрезке $[0,1]$ задано самосопряженное дифференциальное выражение с вещественными коэффициентами

$$l(y) \equiv \left(p_0 y^{(\mu)}\right)^{(\mu)} + \left(p_1 y^{(\mu-1)}\right)^{(\mu-1)} + \cdots + \left(p_{\mu-1} y^{(1)}\right)^{(1)} + p_\mu y,$$

где $p_0, \ldots, p_\mu$ — достаточно гладкие вещественные функции.

Пусть также задана система линейно независимых функций $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ из $\ker l$. Известно, что найдется биортогональная к системе $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ система линейных функционалов $\{U_1, \ldots, U_n\}$, т. е. $U_k(\varphi_j) = \delta_{kj}$. Обозначим через B_0 оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(\cdot)$ и граничными условиями

$$U_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно понять, что оператор B_0 обратим в функциональном пространстве $L_2(0,1)$. Непосредственно убеждаемся в том, что

$$B_0^{-1} f(x) = B_{00}^{-1} f(x) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) U_j(B_{00}^{-1} f),$$

где $B_{00}^{-1} f(x) = \int\limits_0^x g(x,t) f(t) dt$. Здесь функция $g(x,t)$ определяется по формуле $g(x,t) = \dfrac{Q(x,t)}{W(t)}$, где $W(t)$ — вронскиан системы $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$. Определитель $Q(x,t)$ получается из определителя $W(t)$ заменой ее последней строки на следующую строку: $\|\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\|$.

В дальнейшем предполагаем, что B_0 — самосопряженный оператор в $L_2(0,1)$. Пусть λ_s — собственное значение оператора B_0 кратности m_s. Жорданова клетка J_s, соответствующая λ_s, имеет вид $J_s = \operatorname{diag}\{\lambda_s \ldots \lambda_s\}$ — матрица размерности m_s.

В данной работе исследуется вопрос: как влияют возмущения оператора B_0 на структуру жордановых клеток?

Возмущения первого рода могут изменять только дифференциальное выражение $l(\cdot)$, оставляя неизменными граничные формы $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Подобного рода возмущения в случае периодической задачи для дифференциального выражения второго порядка изучили О. А. Велиев и А. А. Шкаликов. Возмущения второго рода могут менять область определения оператора B_0, сохраняя дифференциальное выражение $l(\cdot)$. Такие возмущения систематически исследовались А. С. Макиным. В настоящей работе изучается влияние возмущений второго рода на структуру жордановых клеток. Затем, как следствие, вытекают результаты о базисности системы корневых функций возмущенного оператора. Также обращаем внимание на то, что здесь исследуются дифференциальные операторы высших порядков. До этого большинство исследований касалось операторов второго порядка.

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кандаков А. А., Чудинов К. М.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; cyril@list.ru

Доклад посвящен получению условий устойчивости скалярного уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x(n-j) = 0, \tag{1}$$

где $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0,k}$, $a_0, a_k \neq 0$. Предложенный в недавней статье [1] подход состоит в сопоставлении метода D-разбиения с классическими результатами И. Шура и А. Кона о расположении корней многочлена относительно заданного круга на комплексной плоскости.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a_k/a_0| < 1$ *и экспоненциально устойчиво редуцированное уравнение*

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_j x(n-j) = 0, \tag{2}$$

где $b_0 \neq 0$, *а остальные коэффициенты определяются равенствами*

$$b_j = b_0 \frac{a_0 a_j - a_k a_{k-j}}{a_0^2 - a_k^2}, \quad j = \overline{1, k-1}.$$

Определение. Назовем упорядоченную пару коэффициентов (a_j, a_{k-j}) уравнения (1) *балансной*, если $a_0 a_j = a_k a_{k-j}$.

Балансная пара (a_j, a_{k-j}) коэффициентов уравнения (1) определяет коэффициент $b_j = 0$ редуцированного уравнения (2); пара, не являющаяся балансной, — коэффициент $b_j \neq 0$. Таким образом, количество ненулевых слагаемых в уравнении (2) на один больше количества не являющихся балансными пар (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, коэффициентов уравнения (1). Используя этот факт и теорему 1, можно существенно расширить область применения известных критериев (см., например, [2, 3]) устойчивости уравнения (1).

В частности, применяя простейший критерий устойчивости двучленного уравнения, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть из пар коэффициентов* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *уравнения* (1) *не является балансной ровно одна пара* (a_p, a_{k-p}). *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $\left|\dfrac{a_0 a_p - a_k a_{k-p}}{a_0^2 - a_k^2}\right| < 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кандаков А. А., Чудинов К. М.* Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 4. С. 88–103.
2. *Levitskaya I. S.* A note on the stability oval for $x_{n+1} = x_n + Ax_{n-k}$ // J. Difference Equ. Appl. 2005. V. 11, No. 8. P. 701–705.
3. *Ivanov S. A., Kipnis M. M., Malygina V. V.* The stability cone for a difference matrix equation with two delays // ISRN Appl. Math. 2011. Article ID 910936. 19 pages.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Карачик В. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
karachik@susu.ru

Основной результат работы — разложение в ряд по бигармоническим полиномам функции Грина $G_4(x,\xi)$ задачи Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Ранее, в работе [1] была построена функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре, в работах [2, 3] найден оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического и полигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальных данных, в [4] найдено представление функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном шаре.

Пусть $S=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ $(n>4)$, $f\in C^1(\bar S)$. Рассмотрим в S однородную задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x)=f(x),\ x\in S, \tag{1}$$

$$u|_{\partial S}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=0, \tag{2}$$

где ν — единичная внешняя нормаль к сфере ∂S.

Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i=1,\ldots,h_k,\ k\in\mathbb{N}_0\}$ — полная система однородных степени k ортогональных сферических гармоник (см., например, [5]), нормированных так, что $\int_{\partial S}(H_k^{(i)}(\xi))^2\,ds_\xi=\omega_n$, где h_k — размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k, а ω_n — площадь единичной сферы ∂S.

Теорема. *Функция Грина $G_4(x,\xi)$ задачи Дирихле* (1), (2) *при $|\xi|<|x|$ может быть записана в виде*

$$G_4(x,\xi)=\frac12\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\left(\frac{|x|^2}{2k+n-4}-\frac{|\xi|^2}{2k+n}\right)-\frac{1}{2k+n-2}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2k+n-4}-\frac{|x|^2|\xi|^2}{2k+n}+\frac{|x|^2-1}{2}\left(|\xi|^2-1\right)\right)\right)\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

При $|x|<|\xi|$ в формуле выше переменные ξ и x следует поменять местами.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalmenov T. Sh., Koshanov B. D., Nemchenko M. Yu.* Green function representation in the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball // Dokl. Math. 2008. V. 78. No. 1. P. 528–530.
2. *Карачик В. В., Антропова Н. А.* О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 86–98.
3. *Карачик В. В.* Функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 550–558.
4. *Карачик В. В., Турметов Б. Х.* О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // Мат. труды. 2018. Т. 21, № 1. С. 17–34.
5. *Karachik V. V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proc. Am. Math. Soc. 1998. V. 126, No. 12. P. 3513–3519.

СУММЫ ФЕЙЕРА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР

Качуровский А. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; agk@math.nsc.ru

Суммы Фейера периодических мер и нормы отклонений от предела в эргодической теореме фон Неймана вычисляются фактически по одним и тем же формулам (интегрированием ядер Фейера) — так что сама эта эргодическая теорема фактически является утверждением об асимптотике роста сумм Фейера в точке 0 спектральной меры соответствующей динамической системы. Это дает возможность перерабатывать известные оценки скоростей сходимости в эргодической теореме фон Неймана в оценки сумм Фейера в точке для периодических мер — например, так удается получить естественные достаточные признаки степенного роста и степенного убывания этих сумм в терминах коэффициентов Фурье.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЦИКЛОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Кириллова Н. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; n.kirillova@g.nsu.ru

Рассмотрим следующую нелинейную динамическую систему:

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1 + f_1(x_9);\ \frac{dx_2}{dt} = \mu_2x_1 - k_2x_2;\ \frac{dx_3}{dt} = \mu_3x_2 - k_3x_3;\\ \frac{dx_4}{dt} = \mu_4x_3 - k_4x_4;\ \frac{dx_5}{dt} = -k_5x_5 + f_5(x_4);\ \frac{dx_6}{dt} = \mu_6x_5 - k_6x_6;\\ \frac{dx_7}{dt} = \mu_7x_6 - k_7x_7;\ \frac{dx_8}{dt} = -k_8x_8 + f_8(x_7);\ \frac{dx_9}{dt} = \mu_9x_8 - k_9x_9.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь f_1, f_5, f_8 — гладкие положительные монотонно убывающие функции, которые описывают отрицательные обратные связи; уравнения, не содержащие функций f_1, f_2, f_3, соответствуют положительным обратным связям в генной сети, см. [1]; μ_j, k_j — положительные коэффициенты, $j = 1, \dots, 9$.

Пусть $A_j := \frac{f_j(0)}{k_j}$, если $j = 1,5,8$; $A_j := \frac{\mu_j}{k_j}A_{j-1}$, если $j \neq 1,5,8$; и $Q^9 := \prod_{j=1}^{j=9}[0, A_j] \subset \mathbb{R}^9_+$.

Лемма. 1) Q^9 — *инвариантная область системы* (1). 2) *Система* (1) *имеет единственную стационарную точку* $S_0 \in Q^9$.

Проведём через S_0 гиперплоскости, параллельные координатным; они разобьют область Q^9 на 2^9 блоков, которые нумеруются бинарными индексами.

Определение. Точка S_0 называется гиперболической, если матрица линеаризации системы (1) в этой точке имеет собственные числа с положительными и отрицательными вещественными частями и не имеет мнимых собственных чисел.

Теорема. *Если* S_0 — *гиперболическая точка системы* (1), *то в области* Q^9 *существует цикл, который переходит из блока в блок согласно диаграмме* $\{000011101\} \to \{000011100\} \to \{100011100\} \to \{110011100\} \to \{111011100\} \to \{111111100\} \to \{111101100\} \to \{111100100\} \to \{111100000\} \to \{111100010\} \to \{111100011\} \to \{011100011\} \to \{001100011\} \to \{000100011\} \to \{000000011\} \to \{000010011\} \to \{000011011\} \to \{000011111\} \to \{000011101\} \to \dots$

Диаграмма выделяет восемнадцать блоков из всех существующих и позволяет локализовать положение цикла в области Q^9.

Автор выражает искреннюю благодарность В. П. Голубятникову за постановку интересной задачи, а также С. И. Фадееву за полезные советы и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00057).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубятников В. П., Кириллова Н. Е.* О циклах в моделях функционирования кольцевых генных сетей // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2018. Т. 18, № 1. С. 54–63.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Кирьянова А. С.[1], **Просвиряков Е. Ю.**[2]

[1] *Институт машиноведения УрО РАН, Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия;* askiryanova@usurt.ru

[2] *Институт машиноведения УрО РАН, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;* evgen_pros@mail.ru

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое системой уравнений Навье – Стокса и уравнением несжимаемости. В прямоугольной декартовой системе координат течение будем моделировать между двумя плоскостями, параллельными плоскости Oxy, с толщиной слоя жидкости h. Вертикальная скорость $V_z = 0$ [1–3].

В этом случае изучается обобщение классического течения Пуазейля для сдвиговых потоков вязкой несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье – Стокса, дополненная уравнением несжимаемости, является переопределенной. Обсуждаются условия разрешимости и строятся классы точных решений уравнений Навье – Стокса. Найденные классы точных решений описывают течения жидкости с вертикальной закруткой, которая формируется из-за неоднородности поля скоростей и давления, которые не связаны с вращением жидкости. Таким образом, приведенные в докладе точные решения позволяют описывать новый способ переноса импульса в несжимаемой диссипативной среде, сопровождающийся увеличением скоростей и наличием застойных зон в потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.* Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294–301.
2. *Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.* Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182.
3. *Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.* Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 4. С. 50–54.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

Коврижкин В. В.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия; rudin09@rambler.ru

Пусть $Tu \equiv yu_{xx}+u_{yy}$ — формальный дифференциальный оператор, D — криволинейный треугольник в нижней полуплоскости $y<0$ с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(l,0)$, C, а BC — дуга характеристики оператора T $\Big(x+(2/3)|y|^{3/2}=l\Big)$.

Угол A таков, что треугольник D является выпуклым относительно характеристик T.

Под задачей Дарбу будем понимать задачу об отыскании решения $u \in W_2^1(D)$ уравнения
$$Tu+au_x+bu_y+cu=f, \quad f\in L_2(D) \tag{1}$$
такого, что $u|_{AB\cup AC}=0$.

Рассмотрим характерный параметр
$$d(l)=\sup\left\{\frac{\|u_y(x,0)\|_0}{\|Tu\|_0}\;\middle|\; u\in C^2(\overline{D}),\ u|_{AB\cup AC}=0\right\},$$
где $\|\ \|_0$ — норма в L_2 над соответствующим множеством.

Корректность задачи Дарбу зависит от $a(0,0)$ (коэффициент в (1)). Соответствующие ограничения на $a(0,0)$ определяются $\lim\limits_{l\to+0} d(l)$.

Есть предположение, что $\lim\limits_{l\to+0} d(l)=0$.

В [1] анонсировано монотонное убывание параметра $d(l)$ при $l\to+0$.

Справедлив более общий результат.

Теорема. *Параметр $d(l)$ монотонно убывает и непрерывен слева.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коврижкин В. В.* Задача Дирихле для уравнения Трикоми // Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”: тезисы докладов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. С. 384.

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

Кожанов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru

В докладе излагаются результаты о разрешимости в классах регулярных решений краевых задач для дифференциальных уравнений:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} L_\alpha u_t + L_\beta u_a - Mu = f(x,t,a) \\ \quad (0 < t < T < +\infty, \quad 0 < a < A < +\infty, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n), \end{array}$$

L_α и L_β — дифференциальные операторы:

$$L_\alpha = \alpha_0(t,a) + \alpha_1(t,a)\Delta, \quad L_\beta = \beta_0(t,a) + \beta_1(t,a)\Delta,$$

Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным, M — дифференциальный оператор, также действующий по пространственным переменным;

$$(2)\qquad \begin{array}{l} Au_{tt} - Bu_t - Cu = f(x,t) \\ \quad (0 < t < T < +\infty, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n) \end{array}$$

с оператором A вида

$$A = a_0(t) + a_1(t)\Delta$$

и с эллиптическими операторами B и C, действующими по пространственным переменным;

$$(3)\qquad \begin{array}{l} Au_{tt} + Bu_t + h(x,t)Cu = f(x,y,t) \\ \quad (0 < t < T < +\infty, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n_x, \quad y \in G \subset \mathbb{R}^m_y), \end{array}$$

A и B — эллиптические операторы, действующие по переменным $x_1, \ldots, x_n$, C — эллиптический оператор, действующий по переменным $y_1, \ldots, y_m$.

Особенностью изучаемых уравнений является то, что они имеют меняющееся произвольным образом направление эволюции — функции $\alpha_0(t,a)$, $\alpha_1(t,a)$, $\beta_0(t,a)$ и $\beta_1(t,a)$ для уравнений (1), $a_0(t)$ и $a_1(t)$ для уравнений (2), $h(x,t)$ для уравнений (3) не имеют заранее фиксированные знаки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41009).

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Кожанов А. И.[1], **Кодзоков А. Х.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* kozhanov@math.nsc.ru

[2]*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия;* kodzoko@mail.ru

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^m$ переменных $y_1, \ldots, y_m$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть область из пространства $\mathbb{R}^{m+2}$ переменных (x, y, t) таких, что $x \in (0,1)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $f(x, y, t)$ есть заданная функция, определяемая при $(x, y, t) \in \bar{Q}$, α, β и γ есть заданные действительные числа, Δ_y есть оператор Лапласа по переменным $y_1, \ldots, y_m$, k есть целое неотрицательное число.

В области Q рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} (u_t - \alpha u_x) + \beta \Delta_y u + \gamma u = f(x, y, t). \qquad (*)$$

Это уравнение при $k = 0$, $\alpha \neq 0$ представляет собой модель линеаризованного уравнения Линя – Рейснера – Цзяня [1–3]. Задача Коши и начально-краевые задачи для подобных уравнений изучались в работах [4, 5]. В случае $k = 0$, $\alpha = 0$, $m = 1$ уравнение $(*)$ изучалось в работе [6].

В данной работе будут изучаться уравнения $(*)$ в случаях а) $k = 1$, $\alpha > 0$; б) $k = 1$, $\alpha = 0$. Для уравнений $(*)$ предлагаются постановки краевых задач, для которых доказываются теоремы существования и единственности решений с помощью метода регуляризации, метода продолжения по параметру и априорных оценок.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41009).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. Phys. 1948. V. 27, No. 3. P. 220–231.
2. *Мамонтов Е. В.* Об уравнениях малых возмущений в нестационарном околозвуковом потоке газа // Нестационарные проблемы механики. Сборник научных трудов. Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, Ин-т гидродинамики, 1978. С. 139–143.
3. *Глазатов С. Н.* О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя – Рейсснера – Цзяня трансзвуковой газовой динамики // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 137–140.
4. *Ларькин Н. А.* К теории линеаризованного уравнения Линя – Рейснера – Цзяня // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Сборник научных трудов. Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, Ин-т математики, 1980. С. 126–131.
5. *Кожанов А. И.* О постановке и разрешимости краевой задачи для одного класса уравнений, не разрешенных относительно временной производной // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Сборник научных трудов. Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, Ин-т математики, 1987. С. 84–98.
6. *Умаров Х. Г.* Явный вид решения линеаризованного трехмерного уравнения Линя – Рейснера – Цзяня с постоянными коэффициентами // Вестн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. 2011. Т. 15, № 5. С. 113–119.

РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ КВАЗИДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Козлов А. А.

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь;
kozlovaa@tut.by

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными матрицами A и B. Выбрав управление u в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U — некоторая измеримая и ограниченная $(m \times n)$-матрица, получим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Определение 1 [1]. Система (1) *обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости*, если найдется такое число $T > 0$, при котором для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что для всякого $t_0 \geqslant 0$ найдется ортогональная $(n \times n)$-матрица $F = F(t_0, r, \rho)$, при которой для произвольной верхнетреугольной $(n \times n)$-матрицы H, удовлетворяющей неравенствам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ найдется измеримое и ограниченное $(m \times n)$-управление U, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta(r, \rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (2) выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0)FHF^{-1}$.

Свойство равномерной глобальной квазидостижимости является [1] действенным инструментом при решении задач глобального управления асимптотическими инвариантами [2] линейной системы (2). В работе [1] было установлено, что в случае $n = 2$ достаточным условием глобальной квазидостижимости системы (2) является равномерная полная управляемость соответствующей системы (1).

Определение 2 [3, 4]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

В настоящей работе дано обобщение вышеуказанного утверждения работы [1].

Теорема. *Если линейная нестационарная управляемая система* (1) *равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция–2020” (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов А. А., Инц И. В.* О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 6. С. 720–742.
2. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.
3. *Тонков Е. Л.* Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.
4. *Kalman R. E.* Contribution to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mex., II. Ser. 1960. V. 5, No. 1. P. 102–119.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЦАХ НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С МЕТРИКАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Кондрашов А. Н.

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия;
alexander.kondrashov@volsu.ru

Пусть $\mathcal{M}$ — некомпактное риманово многообразие, $\dim \mathcal{M} = N$; $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ — его конец, причем метрика на $\mathcal{X}$ имеет вид

$$dl^2 = h^2(r)dr^2 + q^2(r)d\theta^2. \qquad (*)$$

Здесь $r \in [r_0, +\infty)$, а $\theta \in S$, где S — компактное риманово многообразие с метрикой $d\theta^2$. Рассмотрим линейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\Delta u + c(x)u = 0, \qquad (**)$$

где $c(x)$ имеет вид $c(x) = c(r)$ на конце $\mathcal{X}$. Положим $K = \int_{r_0}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds$.

Теорема 1. *Пусть задан конец $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$, на котором метрика имеет вид $(*)$. Предположим, что $K = +\infty$ и для некоторого $k > 0$ выполнено*

$$\sup_{r\in[r_0,+\infty)} \Big(q^{2(N-2)}(r) + |c(r)|q^{2(N-1)}(r)\Big)\Big(\int_{r_0}^{r} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big)^{k+2} < +\infty.$$

Если для некоторых решений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ уравнения $(**)$ на конце $\mathcal{X}$ выполнено $\lim\limits_{r\to+\infty} \int_S |f_2(r,\theta) - f_1(r,\theta)|d\sigma = 0$, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на $\mathcal{M}$.

Теорема 2. *Пусть задан конец $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$, на котором метрика имеет вид $(*)$. Предположим, что $K < \infty$ и для некоторого $\alpha < 2$ выполнено*

$$\sup_{r\in[r_0,+\infty)} \Big(q^{2(N-2)}(r) + |c(r)|q^{2(N-1)}(r)\Big)\Big(\int_{r}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big)^{\alpha} < +\infty.$$

Если для некоторых решений $f_1(x)$, $f_2(x)$ уравнения $(**)$, заданных на $\mathcal{M}$, на конце $\mathcal{X}$ имеет место асимптотика $\int_S |f_2(r,\theta) - f_1(r,\theta)|d\sigma = \mathrm{o}\Big(\int_r^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big)$ при $r \to +\infty$, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на $\mathcal{M}$.

Первая теорема говорит о том, что существуют многообразия с концами параболического типа, на которых асимптотическое поведение всех решений $(**)$ строго различно. Вторая является версией теоремы о допустимой скорости стремления к нулю разности решений $(**)$ на некоторых концах гиперболического типа. Подробнее познакомиться с имеющимися задачами и состоянием развития теории эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях можно по монографиям [1, 2] и обзору [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Greene R. E., Wu H.-H.* Function theory on manifolds which possess a pole. Lecture Notes in Mathematics, vol. 699. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979.
2. *Grigor'yan A.* Heat kernel and analysis on manifolds. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 47. Providence: American Mathematical Society (AMS); Somerville: International Press, 2009.
3. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 1999. V. 36, No. 2. P. 135–249.

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Коновалова Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; dsk@math.nsc.ru

Рассматривается процесс поперечных колебаний полуограниченной струны. В качестве математической модели берется следующее гиперболическое уравнение:

$$\alpha(x)\frac{\partial_2 u(x,t)}{\partial t^2} - \beta(x)\frac{\partial_2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ \alpha(x),\beta(x) > 0, \qquad (1)$$

и дополнительные условия

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \qquad (2)$$

Также предполагаются выполненными условия согласования:

$$\mu(0) = \varphi(0),\ \mu'(0) = \psi(0),\ \mu''(0) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\varphi''(0).$$

Коэффициенты $\alpha(x)$, $\beta(x)$ считаются кусочно-постоянными, т. е. $\alpha(x) = \alpha_1$, $0 \le x \le x_0$, $\alpha(x) = \alpha_2$, $x_0 < x < \infty$; $\beta(x) = \beta_1$, $0 \le x \le x_0$, $\beta(x) = \beta_2$, $x_0 < x < \infty$, где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_0$ — положительные числа. Решение задачи (1), (2) ищется в классе функций $u(x,t)$, непрерывных при $x \ge 0$, $t \ge 0$ и имеющих кусочно-гладкие производные до второго порядка включительно. В качестве первого этапа исследования рассматривается случай, когда колебания инициированы только граничным режимом, т. е. $\varphi(x) = \psi(x) = f(x,t) = 0$. Доказана теорема существования и единственности решения, которое представляется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \mu(t_k), \qquad (3)$$

где отличны от нуля только конечное число слагаемых. Из формулы (3) следует, что при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ функция $u(x,t)$ совпадает с классическим решением. Проведен анализ поведения производных функции $u(x,t)$ вблизи некоторых линий и выписаны величины их скачков. Планируется использовать полученные результаты в теории зондирования неоднородных сред физическими сигналами.

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА

Копылова В. Г.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
kopylova.vera@mail.ru

Рассмотрена задача идентификации функции источника в двумерной системе уравнений составного типа, в которой одно из уравнений является параболическим, а второе — эллиптическим. Исходная задача аппроксимируется задачей, в которой эллиптическое уравнение заменяется параболическим, содержащим малый параметр $\varepsilon > 0$. Неизвестная функция источника стоит в параболическом уравнении, не содержащем малый параметр ε. Изучению подобной задачи в одномерном случае посвящены работы [1, 2].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_2\}$ рассматривается задача определения функций $\big(\overset{\varepsilon}{u}(t,x), \overset{\varepsilon}{v}(t,x), \overset{\varepsilon}{g}(t)\big)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \overset{\varepsilon}{u}_t + a_{11}(t)\overset{\varepsilon}{u} + a_{12}(t)\overset{\varepsilon}{v} = \mu_{11}\overset{\varepsilon}{u}_{x_1x_1} + \mu_{12}\overset{\varepsilon}{u}_{x_2x_2} + \overset{\varepsilon}{g}(t)f(t,x), \\ \varepsilon\overset{\varepsilon}{v}_t + a_{21}(t)\overset{\varepsilon}{u} + a_{22}(t)\overset{\varepsilon}{v} = \mu_{21}\overset{\varepsilon}{v}_{x_1x_1} + \mu_{22}\overset{\varepsilon}{v}_{x_2x_2} + F(t,x), \end{cases}$$

ε — const, $\varepsilon \in (0,1]$, начальным условиям

$$\overset{\varepsilon}{u}(0,x) = u_0(x), \quad \overset{\varepsilon}{v}(0,x) = v_0(x),$$

и условиям переопределения

$$\overset{\varepsilon}{u}(t,x^0) = \varphi(t), \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0), \quad \varphi \in C^2[0,T].$$

Получена оценка скорости сходимости

$$|u(t,x) - \overset{\tau}{u}(t,x)| + |v(t,x) - \overset{\tau}{v}(t,x)| \leqslant C\tau,$$

где $(\overset{\tau}{u}, \overset{\tau}{v})$ — решение обратной задачи при применении метода слабой аппроксимации [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я.* О задаче идентификации функции источника для одной полуэволюционной системы // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2010. Т. 3, № 4. С. 487–499.
2. *Belov Yu. Ya., Kopylova V. G.* On some identification problem for source function to one semievolutionary system // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, No. 5–6. P. 723–743.
3. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Космакова М. Т., Орумбаева Н. Т., Медеубаев Н. К., Тулеутаева Ж. М.

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Республика Казахстан; Svetik_mir69@mail.ru

В области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\, t \in \mathbb{R}_+\}$ рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \cdot {}_0D_t^{\nu} u\,(x,t)\Big|_{x=t} = f\,(x,t)\,, \tag{1}$$

$$u\,(x,0) = 0, \quad u\,(0,t) = 0, \tag{2}$$

где

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad 0 \le \nu < 1, \quad {}_0D_t^{\nu} u\,(x,t) = \frac{1}{\Gamma\,(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\nu}} u\,(x,\tau)\,d\tau$$

— дробная производная Римана – Лиувилля функции $u(x,t)$ по переменной t порядка ν,

$${}_0D_t^{\nu}\left\{\int\limits_0^t\int\limits_0^{\infty} G\,(x,\xi,t-\tau)\cdot f\,(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\right\} \in M\,(\mathbb{R}_+)\,.$$

Здесь

$$M\,(\mathbb{R}_+) = L_{\infty}\,(\mathbb{R}_+) \cap C\,(\mathbb{R}_+)\,,$$

$$G\,(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right\}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Особенность данной задачи заключается в том, что нагруженное слагаемое является значением дробной производной на линии $x = t$. Подобного рода задачи были рассмотрены в [1–2]. В [1] было показано, что при $\nu = 1$ нагрузка является сильным возмущением — при определенных значениях параметра λ соответствующая однородная задача имеет ненулевые решения, т. е. неоднородная задача имеет неединственное решение.

В данной работе доказано, что при $0 \le \nu < 1$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ нагруженное слагаемое в (1)–(2) является слабым возмущением.

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема. *Краевая задача* (1)–(2) *при* $0 \le \nu < 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *имеет единственное решение* $u_\lambda \in U$, *где*

$$U = \left\{u \;\Big|\; \left(x+\sqrt{t}\right)^{-1}\cdot u,\ u_t - u_{xx} \in M\,(Q)\,,\quad \left[{}_0D_t^{\nu} u\,(x,t)\right]\Big|_{x=t} \in M\,(\mathbb{R}_+)\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Гылым, 2010.
2. *Нахушев А. М., Борисов В. Н.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их применение к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Кошелева Ю. А.

Сахалинский государственный университет,
Южно-Сахалинск, Россия; ynuta@mail.ru

В настоящее время теория неклассических краевых задач для уравнений математической физики представляет собой бурно развивающуюся область математики, содержащую огромное число нерешенных проблем. Актуальным является получение новых результатов о разрешимости нелокальных краевых задач, а также обратных задач определения вместе с решением дифференциального уравнения тех или иных коэффициентов самого уравнения или же правой части.

Обратные задачи, которые представлены в данной работе, связаны с математическим моделированием динамики популяций с учетом астрономического времени, биологического времени и дополнительного учета диффузии (перемешивание в процессе взаимодействия). Такие задачи зачастую сводятся к исследованию нелокальных краевых задач для ультрапараболических уравнений.

В частности, работа посвящена исследованию разрешимости линейных и нелинейных обратных задач для ультрапараболических уравнений с неизвестными коэффициентами пространственного типа или же с неизвестными коэффициентами временного типа (как правило, предполагается, что неизвестный коэффициент имеет специальный вид).

Подобные задачи достаточно хорошо изучены для параболических уравнений [1–7], что же касается ультрапараболических уравнений, то здесь можно отметить лишь работы [8, 9] автора.

Для решения обратных задач вводятся все необходимые обозначения, проводятся некоторые построения, касающиеся данных задач. Далее осуществляется переход к прямым краевым задачам. Для них формулируются и доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Методы исследования основываются на сведении исходной обратной задачи к прямой задаче для "нагруженного" ультрапараболического уравнения, использовании метода регуляризации и метода априорных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcell Dekker, 2000.
2. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer, 2006.
3. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: VNTL Publishers, 2003.
4. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP, 2002.
5. *Kozhanov A. I., Safiullova R. R.* Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. V. 18, No. 1. P. 1–24.
6. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation. II // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. V. 11, No. 5. P. 505–522.
7. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* Об определении функции источника в математических моделях конвекции-диффузии // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 117–130.
8. *Кошелева Ю. А.* О разрешимости некоторых линейных обратных задач для ультрапараболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 2. С. 79–98.
9. *Кошелева Ю. А.* Ультрапараболические уравнения с неизвестной правой частью // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 2. С. 73–93.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Кудрявцев А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
byptlp@gmail.com

В монографии [1] была введена классификация линейных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, следующего вида

$$L_0(D_x)D_t^l w + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k w = F(t,x),$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, и построена некоторая теория краевых задач для таких уравнений. В частности, был введён класс псевдогиперболических дифференциальных уравнений и для них была изучена задача Коши. Обобщение этих результатов содержится в работе [2].

Рассматриваются краевые задачи в четверти плоскости $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{(t,x) | t > 0, x > 0\}$ для псевдогиперболического уравнения

$$\begin{cases} (I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \\ b_1(D_x)u\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \\ b_2(D_x)u\big|_{x=0} = \varphi_2(t), \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ D_t u\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a = \text{const}$, граничные операторы

$$b_j(D_x) = \sum_{k=0}^{3} b_{jk} D_x^k, \quad j = 1, 2,$$

такие, что краевая задача (1) удовлетворяет условию Лопатинского [1].

В работе приведены теоремы об однозначной разрешимости задачи (1) в соболевских пространствах $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ и получены оценки норм решения в этих пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ БИНЕ

Кузоватов В. И.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
kuzovatov@yandex.ru

Классическая формула Бине [1] выражает значение логарифмической производной Γ-функции Эйлера $\Gamma(z)$ (в случае, если вещественная часть z положительна) через некоторые интегралы. А именно,

$$\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \lg z - 2\int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{(z^2+t^2)\,(e^{2\pi t}-1)}.$$

Данная формула имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения [2] для классической дзета-функции Римана.

Целью данной работы является получение аналога интегрального представления Бине. Построенный аналог выражает значение логарифмической производной некоторой целой функции конечного порядка роста через некоторые интегралы.

В дальнейшем с использованием построенного аналога интегрального представления Бине будет осуществлен переход к получению функционального соотношения для дзета-функции корней некоторого класса целых функций [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00019).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A course of modern analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
2. *Titchmarsh E. C.* The theory of the Riemann zeta-function. Oxford: Oxford University Press, 1951.
3. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* On the zeta-function of systems of nonlinear equations // Sib. Math. J. 2007. V. 48, No. 5. P. 863–870.

НЕАВТОНОМНОЕ РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ. ОГРАНИЧЕНИЕ НА КОЭФФИЦИЕНТ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ЗАВИСИТ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Куликов А. Ю.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия; stphn@mail.ru

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) = -ab^{h(n)}x(n - h(n)), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $0 < a \leqslant 2$, $0 < b \leqslant 1$, $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Обозначим $H = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} h(n)$. Очевидно, при $H = 0$ и $a \leqslant 2$ уравнение (1) равномерно устойчиво, а при $H = 0$ и $a < 2$ оно экспоненциально устойчиво.

Простой вид у области устойчивости при $H = 1$:

- Пусть $a + ab < 2$. Тогда (1) экспоненциально устойчиво.
- Пусть $a + ab \leqslant 2$. Тогда (1) равномерно устойчиво.
- Пусть $a+ab > 2$. Тогда среди уравнений вида (1) существуют неустойчивые.

Опишем область “абсолютной” (не зависящей от величины H) устойчивости:

- Пусть $a + 2b \leqslant 2$ и $H < \infty$. Тогда (1) экспоненциально устойчиво.
- Пусть $a + 2b \leqslant 2$. Тогда (1) равномерно устойчиво.
- Пусть $a + 2b > 2$. Тогда при некотором (достаточно большом) $H \in \mathbb{N}$ среди уравнений вида (1) существуют неустойчивые.

Далее полагаем $2 \leqslant H < \infty$.

Зададим запаздывания в уравнении (1) следующим образом: $h(n) = n$ при $n \leqslant H$, $h(n) = H$ при $n > H$. Положим $x(0) = 1$. Полученная начальная задача называется test-задачей для уравнения (1). Ее решение — функция $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

Очевидно, вначале решение test-задачи убывает. Если оно убывает не слишком быстро, то никакие решения уравнения (1) не отклоняются далеко от нуля.

Лемма. *Если* $y(n) \geqslant 0$, $n \in \{0, \dots, H+1\}$, *то* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим случай, когда найдется $n^* \in \{1, \dots, H+1\}$ такое, что $y(n^*) < 0$, а $y(n) \geqslant 0$, $n \in \{0, \dots, n^* - 1\}$. Нетрудно показать, что в этом случае функция y достигает своего первого минимума в точке $l = n^* + H$.

Теорема.

- *Если* $y(l) > -1$, *то* (1) *экспоненциально устойчиво.*
- *Если* $y(l) \geqslant -1$, *то* (1) *равномерно устойчиво;*
- *Если* $y(l) < -1$, *то среди уравнений вида* (1) *существуют неустойчивые.*

Отметим, что уравнение (1) в случае $b = 1$ изучено в работе [1]. В ней получены признаки устойчивости уравнения, явно выраженные через параметры a и H для всех $H \in \mathbb{N}_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Об устойчивости полуавтономных разностных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2011. № 5. С. 25–34.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ ОБРАТНОГО ГИСТЕРЕЗИСА И АВТОКОЛЕБАНИЙ В РЕАКЦИИ ОКИСЛЕНИЯ CO НА ПАЛЛАДИИ

Лашина Е. А.[1,3], **Чумаков Г. А.**[2,3], **Чумакова Н. А.**[1,3]

[1] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
lashina@catalysis.ru, chumakov@math.nsc.ru, chum@catalysis.ru

В работе рассматривается математическая модель, описывающая динамику реакции окисления СО на палладии в реакторе идеального смешения. Математическая модель является системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, P, k, u), \\ \dot{P} &= g(x, P, k, u), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^7$ — вектор концентраций соединений на поверхности катализатора, $P \in \mathbb{R}^2$ — вектор парциальных давлений веществ в газовой фазе. Параметры системы: $k \in \mathbb{R}^{11}$ — вектор констант скоростей отдельных стадий, зависящих от T-температуры катализатора по закону Аррениуса, так что $k = (k_1, \ldots, k_{11})$, где $k_i = k_{0,i} \exp(-E_i/(RT))$ и $E = (E_1, \ldots, E_{11})$ — вектор энергий активации.

Интерес представляют семейства стационарных и периодических решений, которые качественно описывают экспериментальные зависимости степени превращения СО от температуры катализатора. Используются методы качественной теории динамических систем, а также методы продолжения стационарного и периодического решения по параметру.

В результате параметрического анализа модели выделен интервал значений одной из компонент вектора энергий активации такой, что при изменении значений внутри этого интервала происходит качественное изменение семейств стационарных и периодических решений. Более того, существует объединение двух семейств, которые качественно приближают обратный гистерезис.

Различные значения энергии активации соответствуют различным структурам объема палладия (оксид или металл), т. е. система содержит еще один скалярный параметр u, принимающий два значения: $u = u_{met}$ соответствует металлической структуре, а $u = u_{ox}$ — оксидной. Совокупность систем (1) при $u = u_{ox}$ и $u = u_{met}$ представляет собой кусочно-непрерывную динамическую систему. При увеличении температуры изображающая точка в фазовом пространстве системы проходит в окрестности верхней ветви обратного гистерезиса, при этом $u = u_{met}$. При некотором значении температуры происходит скачок на нижнюю ветвь, и $u = u_{ox}$. Имеет место разрыв в зависимости значений параметров от T. Далее, при уменьшении температуры изображающая точка движется в окрестности нижней ветви до тех пор, пока не будет достигнуто критическое значение температуры, при котором происходит скачок на верхнюю ветвь $u = u_{met}$ и значения параметров изменяются к прежним значениям.

К ВОПРОСУ ОБ УПАКОВКЕ ШАРОВ В ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО В ТРЕХМЕРНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Лемперт А. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; `lempert@icc.ru`

В работе рассматривается задача об оптимальной упаковке заданного числа шаров равного радиуса в замкнутое множество в трехмерном метрическом пространстве. Данная задача возникла достаточно давно, и в случае неограниченных множеств успешно решена [1], для ограниченных же множеств вопрос остается открытым. Отметим, что, как правило, изучается наиболее естественный случай, когда пространство является евклидовым [2], однако существует ряд задач, которые требуют введения специальных метрик [3].

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ, $P \subset X$ — замкнутое односвязное множество, $s_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, n$, — координаты центров упаковываемых шаров. Требуется определить вектор координат центров кругов $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{3n}$, при которых значение радиуса R будет максимальным. Таким образом, получаем оптимизационную задачу:

$$R \to \max,$$
$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R,\ \forall i = \overline{1, n-1}, \forall j = \overline{i+1, n},$$
$$\rho(s_i, \partial P) \geq R,\ \forall i = \overline{1, n},$$
$$s_i \in P,\ \forall i = \overline{1, n}.$$

Здесь ∂P — граница P, $\rho(s_i, \partial P)$ — расстояние от точки до множества.

Введем следующую метрику:

$$\rho(a, b) = \min_{G \in G(a,b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y, z)},$$

где $G(a, b)$ — множество непрерывных кривых, соединяющих точки a и b, $0 < \alpha \leqslant f(x, y, z) \leqslant \beta$ — непрерывная функция. Отметим, что в случае $f(x, y, z) \equiv 1$ данная метрика является евклидовой.

Для решения поставленной задачи предложен и программно реализован алгоритм, основанный на оптико-геометрическом подходе [4] и модифицированном алгоритме Ллойда. Проведено сравнение с известными результатами [5], позволяющее сделать вывод о применимости и эффективности предложенного алгоритма.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00604).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hales T. C.* Cannonballs and honeycombs // Notices Am. Math. Soc. 2000. V. 47, No. 4. P. 440–449.
2. *Hifi M., M'Hallah R.* A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies // Adv. Oper. Res. 2009. Article ID 150624, 22 pages.
3. *Kazakov A. L., Lempert A. A.* On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure // Int. J. Artif. Intell. 2015. V. 13, No. 1. P. 200–210.
4. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. 50–57.
5. *Specht E.* Packomania. http://www.packomania.com/ (Дата обращения 2018-04-28).

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ В МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ПРОНИ

Ломов А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
lomov@math.nsc.ru

Рассматривается задача аппроксимации сеточной функции $x \in \mathbb{R}^N$ решениями $z \doteq [z_1; \ldots; z_N] \in \mathbb{R}^N$ однородного разностного уравнения с вещественными коэффициентами; подбираются начальные условия $z_1, \ldots, z_n$ и коэффициенты $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ с целью минимизации целевой функции

$$J = \|x - z\|^2 = (x - z)^\top (x - z) \to \min$$

при условии $\gamma_0 z_k + \gamma_1 z_{k+1} + \ldots + \gamma_n z_{k+n} = 0$, $k \in \overline{1, N-n}$. К этой задаче сводится известный в литературе модифицированный метод Прони для выделения экспонент и затухающих синусоид из наблюдений [1–4]. В докладе получены условия полулокальной сходимости вычислительных алгоритмов [1–3] для приближенного и точного нахождения точек глобального минимума целевой функции J в предположении малости ошибок наблюдений $\sqrt{\min J} \ll \|x\|$. Для алгоритмов [1, 2] получено условие на область глобальной сходимости в малую окрестность экстремума.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osborne M. R.* A class of non-linear regression problems // Data Represent., Proc. Semin. Aust. Nat. Univ. 1970. P. 94–101.
2. *Будянов В. П., Егоршин А. О.* Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. № 1. С. 78–82.
3. *Osborne M. R.* Some special nonlinear least squares problems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12. P. 571–592.
4. *Pereyra V., Scherer G.* Exponential data fitting // Exponential Data Fitting and its Applications. Bentham Science Publishers, 2010. P. 1–26.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Лукина Г. А.

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия; lukina-g@mail.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости новых нелокальных по временной переменной краевых задач для псевдопараболических и псевдогиперболических дифференциальных уравнений с одной пространственной переменной. Отличительной особенностью этих задач является то, что их решения ищутся в нецилиндрических областях с криволинейным верхним основанием (а не с криволинейными боковыми сторонами, как в других работах).

Пусть Ω есть интервал (0,1) оси Ox, $\psi(x)$ есть определенная при $x \in \overline{\Omega}$ непрерывно-дифференцируемая положительная на $\overline{\Omega}$ функция такая, что

$$\psi'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Далее, пусть Q есть множество $\{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < \psi(x)\}$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$ функции, γ есть заданное действительное число.

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения

$$u_t - a(x,t)u_{xx} - u_{xxt} + c(x,t)u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0,t) = 0, \quad 0 < t < \psi(0), \tag{1}$$

$$u(1,t) = 0, \quad 0 < t < \psi(1), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \gamma u(x,\psi(x)), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$u_t(x,\psi(x)) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{4}$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения

$$u_{tt} - a(x,t)u_{xx} - u_{xxt} + c(x,t)u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1)–(4), а также условие

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

КРИТЕРИЙ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Люлько Н. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
natlyl@mail.ru

Для линейной автономной гиперболической системы рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ t > 0\}$ смешанную задачу

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(0) \in L^2(0,1) \quad (0 < t < \infty), \tag{1}$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$ — n-мерная вектор-функция, $n \geq 2$, и

$$A : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1) : \qquad (Au)(x) = -a(x)u_x + b(x)u,$$

$$D(A) = \{u \in L^2(0,1) :\ u_x \in L^2(0,1),\ u_{in} = Pu_{out}\}.$$

Здесь a, $b \in C^1[0,1]$ — диагональные матрицы размерности $n \times n$, при этом первые m элементов матрицы a положительны, а остальные — отрицательны, $0 \leq m \leq n$. Постоянная матрица P задает для задачи (1) граничные условия отражения, где $u_{in} = (u_1(0), \dots, u_m(0), u_{m+1}(1), \dots, u_n(1))$, $u_{out} = (u_1(1), \dots, u_m(1), u_{m+1}(0), \dots, u_n(0))$.

Известно [1], что задача (1) корректна и при некоторых граничных условиях является *сверхустойчивой*, т. е. все решения этой задачи убывают быстрее экспоненты в любой степени [2]. Исследование спектра и резольвенты оператора A позволяет доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* (1) *сверхустойчива* $\Leftrightarrow$ *когда она обладает конечным временем стабилизации всех решений к нулю (причем это время не зависит от начальных данных* $u(0)$*).*

Теорема 2. *Задача* (1) *сверхустойчива* $\Leftrightarrow$ *когда спектр оператора* A *пустой.*

Теорема 3. *Задача* (1) *сверхустойчива для любых матриц* a *и* b $\Leftrightarrow$ *когда все главные миноры матрицы* P *нулевые.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kmit I., Lyul'ko N.* Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460, No. 2. P. 838–862.
2. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Appl. Math. Comput. 2005. V. 164, No. 2. P. 321–326.

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Мамонтов А. Е.[1], **Прокудин Д. А.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]aem@hydro.nsc.ru, [2]prokudin@hydro.nsc.ru

Рассматривается система уравнений движения смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей [1–4], состоящая из дифференциальных законов сохранения массы, импульса и энергии компонент. В рамках модели предполагается, что в каждой точке пространства присутствуют все составляющие, которые имеют каждая свою локальную скорость движения, а взаимодействие между ними осуществляется через обмен импульсом, вязкое трение и посредством теплообмена. Особенностью исследуемых уравнений помимо их нелинейности является наличие в законах сохранения импульса и энергии старших производных от полей скоростей всех компонент в силу сложного вида тензоров вязких напряжений, что делает невозможным автоматическое распространение теории однокомпонентных вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей на случай смесей.

В докладе будет представлена теорема существования решений начально-краевой задачи для уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в общем случае трех пространственных переменных. В стационарном случае существование слабых решений соответствующих краевых задач доказано в работах [5, 6].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-31-00034.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
2. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. Singapore: World Scientific, 1995.
3. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-d existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20, No. 2. P. 179–195.
4. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 388–397.
5. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 135–160.
6. *Кучер Н. А., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1338–1353.

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

Мансурова Е. Р.

Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Россия;
mansurovka@mail.ru

Для уравнения

$$Lu \equiv \begin{cases} \Delta u + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = 0, & y > 0, \\ u_{xy} + a_2(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c_2(x,y)u = 0, & y < 0, \end{cases}$$

в области D, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ простой кривой Жордана Γ с концами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезками $AC : y = -x$, $BC : x = 1$ при $y < 0$ рассматривается следующая задача.

Задача. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+), \quad u_{xy} \in C(D_-);$$

$$Lu \equiv 0; \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma;$$

$$u(1,y) = \psi(y), \quad y \in [-1,0]; \quad u_y(x,+0) = a(x)v_-(x), \quad x \in (0,1),$$

где

$$v_-(x) = \Gamma(1-\lambda)\left[D^{\lambda}_{Ox}u(x,0) + D^{\lambda-1}_{Ox}u(t,-x)\right], \quad 0 < \lambda < 1,$$

$\varphi(x,y)$, $\psi(y)$, $a(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(1,0) = \psi(0)$, $D^{\lambda}_{Ox}u$ и $D^{\lambda-1}_{Ox}u$ — соответственно производная и интеграл дробного порядка, $D_\pm = D \cap \{y \gtrless 0\}$.

Доказывается однозначная разрешимость задачи.

Ранее исследовались задачи с нелокальным условием сопряжения [1, 2].

Данная работа является продолжением исследований аналогов задачи Трикоми с условием сопряжения на характеристической линии [3–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б., Исянгильдин А. Х.* Задача Трикоми с нелокальным условием сопряжения для обобщённого уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 409–412.
2. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Нелокальная задача с обобщёнными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Изв. вузов. Матем. 2015. № 4. С. 60–64.
3. *Мансурова Е. Р.* Аналог задачи Трикоми с нелокальным интегральным условием сопряжения // Изв. вузов. Матем. 2009. № 4. С. 61–66.
4. *Волкодавов В. Ф., Наумов О. Ю.* Для уравнения смешанного типа задача Т с сопряжением специального вида // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2002. С. 41–49.
5. *Волкодавов В. Ф., Илюшина Ю. А.* Для уравнения смешанного типа единственность решения задачи Т с сопряжением производной по нормали с дробной производной // Изв. вузов. Матем. 2003. № 9. С. 6–9.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Матвеева И. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
matveeva@math.nsc.ru

Рассматриваются некоторые классы уравнений с запаздыванием. Мы устанавливаем условия экспоненциальной устойчивости решений и получаем оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений уравнений с запаздыванием (см., например, [1–7]). При получении результатов используются функционалы Ляпунова – Красовского специального вида.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
3. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015, No. 83. P. 1–22.
4. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Differ. Equ. 2016. V. 2016, No. 19. P. 1–20.
5. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
6. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.
7. *Матвеева И. И.* О робастной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 86–95.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Меграбов А. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия; mag@sscc.ru

Доклад развивает результаты статей автора в ДАН (2009. Т. 424, № 5; 2010. Т. 433, № 3, 4; 2011. Т. 441, № 3) и в Lobachevskii Journal of Mathematics (2018. № 1).

Рассматриваем семейство $\{L_\tau\}$ кривых L_τ с базисом Френе $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — главной нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — бинормали), кривизной k и кручением $\varkappa$, а также семейство $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau}$, главными направлениями $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, главными кривизнами k_1, k_2 и гауссовой кривизной K ($\boldsymbol{l}_i$ — единичный касательный вектор линии кривизны на S_τ).

1. Найдено, что в плоском случае $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{S}^* = 0$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{S}^*$, где $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu = \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}$ — сумма векторов кривизны плоских кривых L_τ с ортами Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и ортогональных к ним кривых L_ν, что означает закон сохранения для семейства плоских кривых.

В трехмерном случае получены его аналоги двух видов:

1) тождества вида $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \Phi$, $\operatorname{div} \boldsymbol{S}^* = \Psi$, где поля $\Phi \equiv \Psi \equiv 0$ в плоском случае (когда $\varkappa = 0$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{k}$), например, тождества $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})/2 = \varkappa[\varkappa - (\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau})] - (\boldsymbol{\tau} \cdot [\operatorname{rot} \boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}])$, $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 2(\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{R}^*)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{S}^* = \operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})/2 + \varkappa(\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}) + k(\boldsymbol{\tau} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta})$ для семейства $\{L_\tau\}$, где $\boldsymbol{R}^* = \kappa \boldsymbol{\tau} + k \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \operatorname{div} \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \operatorname{div} \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{S}^*$ — сумма трех векторов кривизны векторных линий полей $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{R}^*$;

2) законы сохранения вида $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ для семейства $\{L_\tau\}$ кривых и для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей. Поле $\boldsymbol{F}$ выражается соответственно через характеристики кривых и поверхностей (в конечном итоге — через поле $\boldsymbol{\tau}$). Часть из них имеет вид $\operatorname{div} \{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\Phi}\} = 0$ или $\operatorname{div} \{\boldsymbol{S}^* - \boldsymbol{\Phi}\} = 0$, где $\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} \equiv 0$ в плоском случае. Другие законы имеют более высокий порядок. Например, $\operatorname{div} \{\boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{S}^* - \varkappa \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} - k \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \{\boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})/2 - k \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}) - k \boldsymbol{\beta}[(\boldsymbol{\beta} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}) + \varkappa]\} = 0$ для $\{L_\tau\}$ и $\operatorname{div} \{-K \boldsymbol{\tau} - k_2(\boldsymbol{l}_2 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{l}_1 + k_1(\boldsymbol{l}_1 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{l}_2\} = 0$ для $\{S_\tau\}$, где выражение в $\{\ \}$ всюду равно $\operatorname{rot} \boldsymbol{R}^*$. Получена формула $K = (\boldsymbol{\tau} \cdot [\operatorname{rot} \boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}]) - \varkappa^2$ для гауссовой кривизны K поверхности $S_\tau \in \{\boldsymbol{S}_\tau\}$.

2. С помощью этих общих геометрических формул получены дифференциальные законы сохранения и другие формулы в плоском и в трехмерном случаях для решений ряда классических уравнений математической физики. При этом роль кривых L_τ и поверхностей S_τ играют векторные линии полей $\boldsymbol{v}$ решений и ортогональные к ним поверхности. Например, в плоском случае получены:

1) для уравнения эйконала $\tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x, y)$ (здесь $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \tau$, $\boldsymbol{\tau} = \operatorname{grad} \tau / n$) — закон сохранения $\operatorname{div} \boldsymbol{T} = 0$, где $T = \operatorname{grad} \ln n - \Delta \tau \operatorname{grad} \tau / n^2$ с геометрическим смыслом: сумма $\boldsymbol{S}^*$ векторов кривизны лучей и фронтов есть соленоидальное поле ($\operatorname{div} \boldsymbol{S}^* = 0$);

2) для гидродинамических уравнений Эйлера (здесь $\boldsymbol{v}$ — скорость, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$) — закон сохранения $\operatorname{div} \boldsymbol{G} = 0$, где $\boldsymbol{G} = |\boldsymbol{v}|^{-2}\{\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} p/\rho - \boldsymbol{F}\}$, ρ — плотность, p — давление, $\boldsymbol{F}$ — массовая сила, с геометрическим смыслом: сумма $\boldsymbol{S}^*$ векторов кривизны линий тока и ортогональных к ним кривых есть соленоидальное поле ($\operatorname{div} \boldsymbol{S}^* = 0$); и др.

О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ТОЧЕЧНЫМ СТОКОМ

Местникова А. А.[1], **Старовойтов В. Н.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]mestnikova@hydro.nsc.ru, [2]starovoitov@hydro.nsc.ru

Рассматривается двумерная стационарная задача о течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной плоским горизонтальным дном снизу и свободной поверхностью сверху. Течение вызвано расположенным на дне точечным стоком заданной интенсивности. Поле скорости предполагается потенциальным. Верхняя граница является неизвестной и должна быть определена в процессе решения задачи.

С помощью метода Леви-Чивита задача переписывается в виде операторного уравнения в гильбертовом пространстве $L^2(0, \pi/2)$. В работе [1] доказано, что существует единственное решение задачи при условии, что число Фруда больше некоторого конкретного значения.

Для полученного решения исследуется свободная граница. В точке над стоком свободная поверхность имеет особенность типа касп. Свободная граница монотонно убывает при переходе от бесконечности к точке над стоком. Свободная граница является аналитической кривой всюду кроме точки каспа. Установлено, что угол наклона свободной поверхности меньше, чем $\pi/2$, всюду кроме точки каспа, где данный угол равен $\pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mestnikova A. A., Starovoitov V. N.* Free-surface potential flow of an ideal fluid due to a singular sink // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722, Article ID 012035.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ УЗЛОВ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ NOT-A-KNOT

Мирошниченко В. Л.[1], **Сунь М.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* miroshn@math.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* sun_meng@mail.ru

При решении практических задач широко применяются кубические сплайны класса C^2. Успех применения таких сплайнов в немалой степени зависит от выбора краевых условий, которые, во-первых, необходимы для существования и единственности сплайнов, а во-вторых, от этих условий существенно зависит точность интерполяции. Обычно для задания краевых условий привлекаются значения производных интерполируемой функции на концах интервала интерполяции. Однако в практических задачах такая информация, как правило, отсутствует. И в такой ситуации часто используют так называемые краевые условия not-a-knot [1], [2] (в [1] они называются условиями типа IV), которые не требуют задания никакой дополнительной информации об интерполируемой функции, кроме ее узловых значений. При этом вместо задания производных на концах промежутка интерполяции требуют непрерывности третьей производной сплайна в двух приграничных узлах интерполяции. Существенным недостатком таких краевых условий является резкое снижение точности интерполяции на крайних интервалах по сравнению со случаем, когда в качестве краевых условий используются значения первых производных интерполируемой функции на концах интервала интерполяции [3], [4].

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах равномерной сетки $\Delta : x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,n$, кубический сплайн $S(x) \in C^2$ с краевыми условиями not-a-knot интерполирует значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$, функции $f(x)$. В этом случае узлами сплайна $S(x)$ являются точки множества $\Delta \setminus \{x_1, x_{n-1}\}$.

В докладе предлагается дополнительно к схеме расположения узлов сплайна, принятой в краевых условиях not-a-knot, изменить (сдвинуть) расположение двух узлов сплайна. А именно, вместо узлов сплайна x_2, x_{n-2} предлагается рассматривать узлы $x_1 + \gamma h, x_{n-1} - \gamma h$, $\gamma \in (0,1]$. Очевидно, значение $\gamma = 1$ соответствует краевым условиям not-a-knot.

Для всех $n \geq 6$ найдено оптимальное расположение сдвинутых узлов сплайна ($\gamma = 0.648888$ при достаточно больших n), что позволило примерно в 3.5 раза повысить точность интерполяции достаточно гладких функций по сравнению с классическими краевыми условиями not-a-knot. Изложение иллюстрируется численными примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. С., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
3. *Мирошниченко В. Л.* О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. II // Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1983. С. 51–66.
4. *Мирошниченко В. Л.* О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. III // Сплайн-аппроксимация и численный анализ (Вычислительные системы, вып. 108). Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1985. С. 3–30.

ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Мулюков М. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; Mulykoff@gmail.com

Рассмотрим линейные автономные дифференциальные уравнения запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b\int\limits_0^\infty x(t-s)dR(s) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

где R — монотонно возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция такая, что $\int\limits_0^\infty s dR(s) = 1$. Оба уравнения дополнены суммируемыми начальными функциями при $t \in [-\infty, 0]$.

Повторив доказательство теоремы 3 работы [1], нетрудно показать, что при $a = 0$ из асимптотической устойчивости уравнения (1) вытекает асимптотическая устойчивость уравнения (2). Вопрос о том, существует ли подобная связь признаков устойчивости данных уравнений при $a \neq 0$, в общем случае открыт, но существуют результаты для функций R заданного типа [2]. Данная работа посвящена исследованию этой задачи в случае, когда уравнение (2) имеет вид:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b\big(x(t-\tau_1) + x(t-\tau_2)\big)/2 = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

где $\tau_1 + \tau_2 = 2$, $\tau_1, \tau_2 > 0$.

Теорема 1. *Если уравнение* (1) *асимптотически устойчиво, то уравнение* (3) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Характеристические функции уравнений (1) и (3) имеют вид $\Phi_1(z) = z + a + be^{-z}$ и $\Phi_2(z) = z + a + be^{-z}\operatorname{ch}\gamma z$ соответственно, где $\gamma = (\tau_1 - \tau_2)/2$.

Область устойчивости функции Φ_1 — бесконечный угол A: $a + b > 0$, $a > -1$ и $b < \psi/\sin\psi$, где ψ — единственный корень уравнения $a = -\psi\operatorname{ctg}\psi$.

Кривые D-разбиения для функции Φ_2 задаются равенствами: $a = -\varphi\operatorname{ctg}\varphi$, $b = \varphi/(\sin\varphi\cos\gamma\varphi)$. Нетрудно показать, что каждая из этих кривых имеет точки вне A. Предположим, что некоторая кривая пересекает границу A, тогда справедлива система

$$\begin{cases} \varphi\operatorname{ctg}\varphi = \psi\operatorname{ctg}\psi, \\ \varphi\sin\psi = \psi\cos\gamma\varphi\sin\varphi, \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$. Из первого уравнения системы (4) вытекает $|\cos\varphi| \leq |\cos\psi|$, что противоречит второму уравнению данной системы.

Следовательно, A является подмножеством области устойчивости Φ_2. $\square$

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагина М. Ю., Кипнис М. М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 5. С. 786–789.
2. *Малыгина В. В., Сабатулина Т. Л.* Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2007. № 6. С. 55–63.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Мусабеков К. С.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, Республика Казахстан; it.kgu@mail.ru

Рассмотрим задачу оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a\cdot\dfrac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - c\cdot v_1\cdot f(v_2), \\ \dfrac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b\cdot\dfrac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + k\cdot v_1\cdot f(v_2) + g\cdot(v_3(t)-v_2(x,t)), \\ \dfrac{dv_3(t)}{dt} = d\cdot\left(\displaystyle\int_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)\right) + u(t)\cdot(E-v_3(t)), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a\cdot\dfrac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \quad \dfrac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b\cdot\dfrac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \quad \dfrac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), \quad v_2(x,0) = v_{20}(x), \quad v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, d, E, v_{30} — константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно, $(x,t)\in\overline{Q}_T$, $Q_T = (0,1)\times(0,T)$.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1,t)dt, \tag{4}$$

т. е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1)–(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(x,t)$:

$$0 \le u(t) \le u_0 = \text{const}, \tag{5}$$

$$v_2(x,t) \le v_2^* = \text{const}. \tag{6}$$

Для каждого измеримого управления $u(t)$, удовлетворяющего условию (5), система (1)–(3) имеет [1] единственное классическое решение. В данной работе предлагается алгоритм поиска оптимального управления в задаче (1)–(6) методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусабеков К. С.* Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 2. С. 71–84.

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Нагаев А. С.[1], **Чумаков Г. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
ngvru@yahoo.com, chumakov@math.nsc.ru

Рассмотрим систему ОДУ с малым параметром $\mu > 0$

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z), \quad \dot{z} = \mu h(x, y, z) \tag{1}$$

в области

$$G = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

и предположим, что $h(x, y, z) < 0$ всюду в G.

При $\mu = 0$ полная система (1) переходит в однопараметрическое семейство двумерных подсистем

$$\dot{x} = f(x, y, z), \quad \dot{y} = g(x, y, z) \tag{2}$$

с параметром z. Пусть при $z_1 = p$ и $z_2 = q$, $q > p$, в системе (2) происходят бифуркации Андронова – Хопфа:
1) $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(z) = 0$ в точках p и q;
2) $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(z) < 0$ при $z \in (0, p) \cup (q, 1)$;
3) $\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(z) > 0$ при $z \in (p, q)$;
4) $\frac{d}{dz} \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(z) \neq 0$ в точках p и q.
Предположим, что кривую

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0, \quad z \in [0, 1],$$

состоящую из неподвижных точек подсистем (2), можно параметризовать с помощью функции $\boldsymbol{\rho}(z)$. Тогда верна теорема.

Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \le \mu_0$ существуют $(x_0, y_0, z_0) \in G$, причём $q < z_0 \le 1$, и $T = T(\mu, x_0, y_0, z_0) > 0$, для которых $\|\boldsymbol{r}(x_0, y_0, z_0, t) - \boldsymbol{\rho}(z)\| \le \varepsilon$ при $0 \le t \le T$, где $\boldsymbol{r}(x_0, y_0, z_0, t)$ — решение полной системы (1) с начальными данными $\boldsymbol{r}(x_0, y_0, z_0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ и $z(x_0, y_0, z_0, T) = 0$.*

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ДЛЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВРЕМЕНИ

Нещадим М. В.[1], **Симонов А. А.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* neshch@math.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* andrey.simonoff@gmail.com

В работе строятся решения системы Максвелла, которые можно представить в виде конечного функционального ряда от производных произвольной функции с функциональным аргументом (фазой) и функциональными коэффициентами (амплитудами). В таком виде развиваемый здесь подход можно рассматривать как поиск обобщенных функционально инвариантных решений [1] системы Максвелла. С другой стороны, это аналог лучевого метода применительно к системе уравнений Максвелла. Классическое применение лучевого метода [2] заключается в том, что лучевой ряд является решением системы Максвелла асимптотически. В настоящей работе предполагается, что лучевой ряд конечный и является точным решением.

Наиболее полно обобщенные функционально инвариантные решения (ОФИР) исследованы для волнового уравнения (см. литературу в [3]). (В литературе используется также термин — относительно неискажающиеся волны [4].) Так в работах [5–7] были детально изучены комплексные функционально инвариантные решения (ФИР) и, как оказалось, эти решения имеют обширные применения в задачах распространения колебаний (акустических, электромагнитных), связанных с волновым уравнением, а также и в более сложных задачах распространения упругих колебаний.

Данная работа является непосредственным продолжением исследований работы [8], в которой рассматривались ряды с коэффициентами, не зависящими от времени. Здесь же мы предполагаем, что коэффициенты зависят от времени. Построенные решения системы Максвелла содержат функциональный произвол.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н. П., Смирнов М. М.* Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 853–865.
2. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
3. *Нещадим М. В.* Классы обобщенных функционально инвариантных решений волнового уравнения. I // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 418–435.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
5. *Смирнов В. И., Соболев С. Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсм. ин-та АН СССР. 1932. Т. 20. 37 с.
6. *Смирнов В. И., Соболев С. Л.* О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсм. ин-та АН СССР. 1933. Т. 29. С. 43–51.
7. *Соболев С. Л.* Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 259–264.
8. *Нещадим М. В.* Функционально инвариантные решения системы Максвелла // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 66–74.

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Никитенко Е. В.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия; evnikit@mail.ru

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\begin{array}{l} \Delta u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n\ (n \geq 3), \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{array} \tag{1}$$

где $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр.

Установлены асимптотические оценки при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от параметра λ.

Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при $|x| \to \infty$ [1]. При выводе асимптотических оценок при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [2].

Сформулируем основной результат об асимптотическом поведении решения задачи Коши (1).

Теорема 1. *Пусть $\lambda > 1$, тогда на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ для решения задачи* (1) *имеет место оценка*

$$\left| u(t, x, \lambda) + e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2)} d\xi \right| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1,$$

где $|\xi'|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \xi_i^2$, $c(K, \lambda)$ — *константа, зависящая от K и λ.*

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, тогда на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta \right) u(t, x, \lambda) - e^{i\lambda t} f(x) \right| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Доказательство теорем при $n = 3$ и $\varphi_i(x) = 0$ проведено в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 320–324.
2. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
3. *Никитенко Е. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн // Динамические системы. 2017. Т. 7(35), № 4. С. 387–393.

УРАВНЕНИЕ МОНЖА – АМПЕРА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОТОКАХ ВЫСШЕЙ БИСТЕПЕНИ

Никитина Т. Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия; AANick@yandex.ru

Пусть T — $(2,2)$-форма $T=\sum_{m=0}^{3} dV_{2m+1,2(m+1)}$ в $\mathbb{C}^8$. Легко заметить, что локальная разрешимость для $(\overline{\partial}\partial u)^l$ при $l=2$ на $(6,2)$-формах не имеет места при таком выборе T.

Разрешимость уравнений Монжа – Ампера в случае $l=1$ является классической (см. [1–4]).

Возьмем $f=\sum_{k_1<k_2}\sum_{m=0}^{3} f_{k_1k_2;\widehat{2m+1,2(m+1)}}d\overline{z}_{k_1}\wedge d\overline{z}_{k_2}\wedge \widehat{dz}_{2m+1,2(m+1)}$ так, что $f\wedge T=\sum_{k_1<k_2}\sum_{m=0}^{3} f_{k_1k_2;\widehat{2m+1,2(m+1)}}d\overline{z}_{k_1}\wedge d\overline{z}_{k_2}\wedge \widehat{dz}_{2m+1,2(m+1)}\wedge dV_{2m+1,2(m+1)}$. Тогда $\overline{\partial}f\wedge T=0$ означает, что

$$(-1)^{k_1+k_2+k_3}\left(\frac{\partial f_{k_1k_2;\widehat{2m+1,2(m+1)}}}{\partial\overline{z}_{k_3}}-\frac{\partial f_{k_1k_3;\widehat{2m+1,2(m+1)}}}{\partial\overline{z}_{k_2}}+\frac{\partial f_{k_2k_3;\widehat{2m+1,2(m+1)}}}{\partial\overline{z}_{k_1}}\right)$$
$$+(-1)^{k_1+k_2+2(m+1)-2}\left(\frac{\partial f_{k_1k_2;\widehat{k_32m+1}}}{\partial\overline{z}_{2(m+1)}}-\frac{\partial f_{k_12(m+1);\widehat{k_32m+1}}}{\partial\overline{z}_{k_2}}+\frac{\partial f_{k_22(m+1);\widehat{k_32m+1}}}{\partial\overline{z}_{k_1}}\right)$$
$$+(-1)^{k_1+2m+1+2(m+1)-4}\left(\frac{\partial f_{k_12m+1;\widehat{k_2k_3}}}{\partial\overline{z}_{2(m+1)}}-\frac{\partial f_{k_12(m+1);\widehat{k_2k_3}}}{\partial\overline{z}_{2m+1}}+\frac{\partial f_{2m+1,2(m+1);\widehat{k_2k_3}}}{\partial\overline{z}_{k_1}}\right)$$
$$+(-1)^{k_3+2m+1+2(m+1)-6}\left(\frac{\partial f_{k_32m+1;\widehat{k_1k_2}}}{\partial\overline{z}_{2(m+1)}}-\frac{\partial f_{k_32(m+1);\widehat{k_1k_2}}}{\partial\overline{z}_{2m+1}}+\frac{\partial f_{2m+1,2(m+1);\widehat{k_1k_2}}}{\partial\overline{z}_{k_3}}\right)=0 \tag{1}$$

для любого $k_1<k_2<k_3<2m+1<2(m+1)$ при $m=0,\dots,3$.

Если $f\wedge T=(\overline{\partial}\partial u)^2\wedge T$, для $(2,0)$-формы u можно записать $u=\sum\limits_{|M'|=2}u_M dz_M$ и можно показать, что $(\overline{\partial}\partial u)^2\wedge T=\sum_{k_1<k_2}\sum_{m=0}^{3} f_{k_1k_2;\widehat{2m+1,2(m+1)}}\widehat{dz}_{2m+1,2(m+1)}\wedge dV_{2m+1,2(m+1)}$. Это уравнение разрешимо, только если

$$\frac{\partial f_{k_1k_2;\widehat{2m+1,2(m+1)}}}{\partial\overline{z}_{k_3}}-\frac{\partial f_{k_1k_3;\widehat{2m+1,2(m+1)}}}{\partial\overline{z}_{k_2}}+\frac{\partial f_{k_2k_3;\widehat{2m+1,2(m+1)}}}{\partial\overline{z}_{k_1}}=0$$

для $k_1<k_2<k_3<7$ при $m=3$, и еще выполняются шесть аналогичных равенств, состоящих из одного или двух слагаемых равенства (1), что не предполагается (1).

Пусть T — $(2,2)$-форма $T=\sum_{k_4<k_5} dV_{k_4k_5}$ в $\mathbb{C}^8$. Легко заметить, что локальная разрешимость для $(\overline{\partial}\partial u)^2$ на $(6,2)$-формах имеет место при таком выборе T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никитина Т. Н.* Устранимые особенности на границе и $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии. Новосибирск: Наука, 2008.
2. *Никитина Т. Н.* О $\overline{\partial}\partial$ уравнении на положительном потоке // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 2. С. 38–50.
3. *Nikitina T. N.* The $\overline{\partial}\partial$-equation on positive currents of higher bidegree // 7th European Congress of Mathematics. Berlin, 2016. P. 57.
4. *Berndtsson B., Sibony N.* The $\overline{\partial}$-equation on a positive current // Invent. Math. 2002. V. 147, No. 2. P. 371–428.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НАСЛЕДСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Орлов С. С.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
orlov_sergey@inbox.ru

Уравнения в частных производных, не разрешенные относительно старшей производной, в научной литературе называют уравнениями соболевского типа. Название этих уравнений восходит к пионерской работе С. Л. Соболева [1], где была поставлена и изучена задача о малых колебаниях вращающейся жидкости. В наследственной механике сплошных сред возникают уравнения соболевского типа, возмущенные сверточным интегральным оператором Вольтерра. Примеры доставляют уравнения электронных (ионных) магнитозвуковых волн [2]

$$(\Delta - \alpha)\varphi - k_1(t) * \varphi_{x_3x_3} = f(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

течений вязкоупругих жидкостей [3]

$$(\nu - \Delta)v_t - \Delta v - k_2(t) * \Delta v = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

вязкоупруго-динамического состояния среды [4]

$$(a - \Delta)u_{tt} - b\Delta u_t - \Delta u + k_3(t) * \Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

и многих других процессов. Разрешимость начально-краевых задач для этих и других подобных уравнений можно изучать с единых позиций, рассматривая классы линейных интегральных

$$Bu(t) - \mathcal{K}(t) * u(t) = f(t)$$

и интегродифференциальных

$$Bu^{(N)}(t) - \sum_{i=1}^{N} A_{N-i}u^{(N-i)}(t) - \mathcal{K}(t) * u(t) = f(t),\ u^{(i-1)}(0) = u_{i-1},\ i = 1, \ldots, N,$$

уравнений в банаховых пространствах с необратимым оператором B в главной части. Некоторым результатам, полученным автором в этом направлении, будет посвящен предполагаемый доклад. Исследования проводятся на основе теории обобщенных функций (распределений) Соболева – Шварца, имеющих значения в банаховом пространстве, и концепции фундаментального решения абстрактного линейного интегродифференциального оператора [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00643).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
4. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math. Methods Appl. Sci. 2001. V. 24, No. 14. P. 1043–1053.
5. *Sidorov N. A., Loginov B. V., Sinitsyn A. V., Falaleev M. V.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Орлов Св. С.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; s.orlov@icc.ru

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$\partial_t u = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [k(u)\nabla_{\mathbf{x}} u], \tag{1}$$

в котором искомая функция $u = u(t,\mathbf{x})\colon \Omega \to [0;+\infty)$, $\Omega \subset [0;+\infty) \times \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$; коэффициент $k(u) = k_0 u^\sigma$, действительные параметры $k_0, \sigma > 0$. Это уравнение используется при описании многих процессов, встречающихся в задачах тепло- и массопереноса, теории горения и взрыва, фильтрации жидкости и газа, химической кинетике, биологии и др. В литературе (1) наиболее часто называют *уравнением нелинейной диффузии*, *теплопроводности*, *нестационарной фильтрации* [1], а также *пористой среды* (*the porous medium equation*) [2].

Сходимость интеграла $\int_0^1 k(u)/u\,du$ в данном случае гарантирует конечную скорость распространения возмущений в процессах, описываемых исследуемым уравнением [1]. Решения уравнения (1), демонстрирующие эту особенность, состоят из двух гиперповерхностей: $u = \varphi(t,\mathbf{x}) > 0$, $\varphi \in C^{1,2}_{t\mathbf{x}}(\Omega) \cap C(\Omega)$ (возмущенного решения) и $u \equiv 0$ (невозмущенного фона), непрерывно состыкованных вдоль некоторой гиперповерхности $s(t,\mathbf{x}) = 0$ (свободной границы) в пространстве независимых переменных $(t,\mathbf{x}) \in [0;+\infty) \times \mathbb{R}^n$. Классическим примером является *решение Зельдовича – Компанейца – Баренблатта* (*ZKB solution*) [2].

Доклад посвящен вопросам построения новых классов точных решений уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$u(t,\mathbf{x})|_{s(t,\mathbf{x})=0} = 0. \tag{2}$$

Аналитический вид и свойства гиперповерхностей $s(t,\mathbf{x}) = 0$ определяются в процессе нахождения решений. Сама процедура построения основывается на так называемом *прямом методе Кларксона – Крускала* (*the Clarkson–Kruskal direct method*) [1]. Этот подход позволяет редуцировать краевую задачу (1), (2) к начальным задачам для семейства обобщенных уравнений Льенара [3]. Далее при помощи методов теории динамических систем [4] и степенной геометрии [5] проводится качественный анализ найденных решений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00608).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. *Vázquez J. L.* The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
3. *Казаков А. Л., Орлов Св. С., Орлов С. С.* Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 544–560.
4. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
5. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

О ПРИМЕНЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГРИНА – НАГДИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С ОНДУЛЯРНЫМИ БОРАМИ

Остапенко В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
ostapenko_vv@ngs.ru

Следствием длинноволнового приближения $H/L \ll 1$, где H — характерная глубина потока, а L — характерная длина поверхностных волн [1], является неравенство $|h_x| \ll 1$, где $h(x,t)$ — глубина плоскопараллельного потока. Несмотря на это, уравнения теории мелкой воды, получаемые на основе длинноволнового приближения, успешно применяются для моделирования быстро протекающих волновых процессов, связанных с распространением гидравлических боров, на фронтах которых $h_x \geq O(1)$. В работах [2, 3] для обоснования применения первого приближения теории мелкой воды при моделировании волновых течений с гидравлическими борами базисные законы сохранения этого приближения были получены из двумерных интегральных законов сохранения массы и полного импульса, описывающих плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости. При этом в [3] было использовано понятие локального гидростатического приближения, которое обобщает понятие длинноволнового приближения. В настоящей работе локальное гидростатическое приближение применяется для вывода базисных законов сохранения модели Грина – Нагди второго приближения теории мелкой воды и анализа применимости этой модели для численного расчета волновых течений жидкости с ондулярными борами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Friedrichs K. O.* Water waves on a shallow sloping beach // Commun. Appl. Math., New York. 1948. V. 1, No. 2. P. 109–134.
2. *Остапенко В. В.* О законах сохранения теории мелкой воды // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 5. С. 558–561.
3. *Остапенко В. В.* К обоснованию теории мелкой воды // Докл. АН. 2018. Т. 478, № 2. С. 158–163.

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ СИНУС И КОСИНУС ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ; ФЕНОМЕН АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОДОЛЖЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Павлов А. В.

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия; a_pavlov@mirea.ru

Определим функции

$$L_{\pm}S(x)(\cdot)(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{\pm sx} S(x)dx, \quad s \in [0, \infty), \quad L_- = L,$$

$$F_{\pm}u(x)(\cdot)(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixs}\, u(x)dx, \quad F^0_{\pm}u(x)(\cdot)(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{\pm ixs}\, u(x)dx, \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Пользуясь равенством

$$LF^0_+u(t)(\cdot)(iy) + L_+F^0_-u(t)(\cdot)(iy) = 2\pi u(y)I(y), \quad y \in (-\infty, -\infty),$$

где $I(y) = 1$, $y \in [0, \infty)$, $I(y) = 0$, $y \in (-\infty, 0)$, и равенством $\operatorname{Re} LF_+u(t)(\cdot)(iy) = \operatorname{Re} L_+F_-u_{ev}(t)(\cdot)(iy)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, при $-u_{ev}(-t) = u_{ev}(t)$, $u(t) = u(-t)$, $t \in [0, +\infty)$, получаем, повторяя методы [1], $LF^0_+u(t)(\cdot)(iy) = LF_+u(t)(\cdot)(iy)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, что после приравнивания мнимых частей эквивалентно равенству $-2S^0C^0u(t)(\cdot)(y) = C^0S^0u(t)(\cdot)(t) - S^0C^0u(t)(\cdot)(y)$, $y \in [0 + \infty)$.

Условие Y1. Функция $u(x)$ и ее первая и вторая непрерывные производные абсолютно сходятся на всей действительной оси, и $u(0) = 0$.

Теорема. *При выполнении условия Y1 имеет место равенство* $-S^0C^0u(t)(\cdot)(y) = C^0S^0u(t)(\cdot)(y)$, $y \in [0 + \infty)$.

С точки зрения аналитических продолжений мы доказали, что $LF^0_+u(t)(\cdot)(p)$ аналитически продолжается через всю мнимую ось, совпадая с регулярной в открытой окрестности мнимой оси функцией $LF_+u(t)(\cdot)(p)$ при выполнении условия Y1 и условия регулярности $u(p)$ в области $\{|\operatorname{Im} p| < a\} \bigcap \{|\operatorname{Re} p| < a\}$, $a > 0$, хотя данная функция должна вести себя в окрестности нуля как двулистная функция $\sqrt{p}$.

Отметим, что это не первый результат, в котором регулярность аналитического продолжения требует отдельного исследования перед применением: удивительная теорема о регулярности функции двойного преобразования Лапласа $LLu(t)(\cdot)(p)$ в открытой окрестности нуля при выполнении аналогичных условий была доказана в работах [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pavlov A. V.* About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // Probl. Anal. Issues Anal. 2016. V. 5 (23), No. 1. P. 21–30.
2. *Павлов А. В.* Дисциплины с приоритетом коротким требованиям и идентичное обслуживание. М.: МГТУРЭА (МИРЭА), 2014 (электрон. изд.).
3. *Павлов А. В.* Достоверное прогнозирование функций, представимых в виде преобразований Лапласа или Фурье // Вестник МГТУ МИРЭА. 2014. № 2 (3). С. 78–85.

АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И РАСЧЕТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ГРУППОВЫМ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Павский В. А.[1], **Павский К. В.**[2]

[1] *Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;* pavva46@mail.ru

[2] *Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН, Новосибирск, Россия;* pkv@isp.nsc.ru

Конкурентоспособность современных большемасштабных распределенных вычислительных систем (ВС), безусловно, определяется стоимостью, производительностью, надежностью [1, 2]. Такие ВС не должны выходить из строя, хотя производительность может временно понижаться. При анализе эффективности функционирования ВС используют ряд показателей, среди которых показатели надежности и потенциальной живучести [3]. В силу своей большемасштабности распределенные ВС эффективно исследуются стохастическими методами [4]. Представленные в работе решения основаны на методах теории массового обслуживания. Использование разработанного авторами метода расчета моментов случайных величин [4] позволило получить аналитические решения для расчета показателей потенциальной живучести при групповом восстановлении отказавших машин. Методом моментов система дифференциальных уравнений, неизвестными функциями которой является распределение вероятностей состояний ВС, сведена к системе дифференциальных уравнений непосредственно для моментов случайных величин, без нахождения самих вероятностей.

В работе также получена функция распределения времени пребывания ВС в состоянии низкой производительности.

Работа выполнена при поддержке: РФФИ (грант 16-07-00712), программы фундаментальных исследований СО РАН (ГЗ 0306-2016-0018).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В. П.* Эволюция понятия и показателей надёжности вычислительных систем // Препринт ИФВЭ. 2012-24. Протвино, 2012.
2. *Schroeder B., Gibson G. A.* A large-scale study of failures in high-performance computing systems // Proceedings of the International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN2006), Philadelphia, PA, USA, June 25–28, 2006, 10 pages.
3. *Хорошевский В. Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008.
4. *Павский В. А., Павский К. В., Хорошевский В. Г.* Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект, “Наука і освіта” ДонДІШІ. 2006. № 4. С. 28–34.

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Панов А. В., Туров М. М.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; gjd.y@ya.ru

Рассматривается система уравнений двухфазной газовой динамики в изотермическом случае [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 + \rho_1 \mathrm{div} \vec{u}_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \rho_2 + \rho_2 \mathrm{div} \vec{u}_2 = 0, \\ \rho_1 \left(\dfrac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_1 \right) + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\dfrac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \\ \rho_2 \left(\dfrac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \vec{u}_2 \right) + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \dfrac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2). \end{cases}$$

Для данной системы выписана инвариантная подмодель относительно подалгебры $SO(3)$ из допускаемой алгебры Ли [2, 3]. Доклад посвящён исследованию стационарных движений указанной инвариантной подмодели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00226 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Панов А. В.* Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 71–82.

ОЦЕНКА ГЕЛЬФАНДА – ШИЛОВА И МЕТОД ЗАМОРОЖЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Перов А. И.[1], **Коструб И. Д.**[2]
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]anperov@mail.ru, [2]ikostrub@yandex.ru

Пусть $\mathbf{A}$ — квадратная матрица n-го порядка и $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — полный набор ее собственных значений. Из [1] вытекает следующая оценка

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \le e^{t\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+\|\mathbf{A}\|)^j}{j!}t^j,\ \ 0\le t<\infty, \tag{1}$$

где $\alpha=\max\{\operatorname{Re}\lambda_i : 1\le i\le n\}$ — спектральная абсцисса и $\rho=\max\{|\lambda_i| : 1\le i\le n\}$ — спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$, а $\|\mathbf{A}\|$ — ее норма. Отметим, что всегда $|\alpha|\le\rho\le\|\mathbf{A}\|$. Оценка (1) с заменой ρ на $\|\mathbf{A}\|$ встречается в [2] и [3]; оценка в указанном выше виде представляется новой.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x},\ \ 0\le t<\infty, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — измеримая ограниченная матричная функция, причем, $\operatorname{spa}\mathbf{A}(t)\le\alpha<0$, $\operatorname{spr}\mathbf{A}(t)\le\rho$ и $\|\mathbf{A}(t)\|\le a$ при $0\le t<\infty$, где $\alpha,\ \rho,\ a$ — некоторые постоянные; ясно, что $|\alpha|\le\rho\le a$. Если, кроме того, $\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\le\omega(|t-s|)$, то согласно методу замороженных коэффициентов [4] достаточное условие равномерной экспоненциальной устойчивости системы (2) имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-t\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\rho+a)^j}{j!}t^j\omega(t)dt<1. \tag{3}$$

Положим для простоты $\xi=(\rho+a)/|\alpha|$ (≥ 2). Тогда, если $\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\le k$, то согласно (3) находим

$$0<k<|\alpha|\frac{\xi-1}{\xi^n-1}. \tag{4}$$

Если выполнено условие Липшица $\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\le l|t-s|$, то согласно (3)

$$0<l<|\alpha|^2\frac{(\xi-1)^2}{n\xi^{n+1}-(n+1)\xi^n+1}. \tag{5}$$

Близкие к (4) и (5) оценки установлены в [5]. Если выполнено условие Гёльдера $\|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}(s)\|\le h|t-s|^\sigma$ $(0<\sigma<1)$, то согласно (3) имеем

$$0<h<|\alpha|^{1+\sigma}\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\xi^j\frac{(j+\sigma)(j-1+\sigma)\ldots(\sigma)}{j!}\Gamma(\sigma)},$$

где $\Gamma(\sigma)$ есть гамма-функция Эйлера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
4. *Алексеев В. М.* Об асимптотическом поведении решений слабо нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 2. С. 247–250.
5. *Левин А. Ю.* Теорема Харитонова для слабо нестационарных систем // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 6. С. 189–190.

УСТОЙЧИВОСТЬ БЛОЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МОДЕЛЯХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Перцев Н. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск, Россия; homlab@ya.ru

Дифференциальные уравнения с запаздыванием имеют широкое применение при исследовании различных процессов в технике, экономике, биологии, иммунологии, эпидемиологии и в других областях. Одним из этапов изучения систем дифференциальных уравнений является анализ устойчивости их положений равновесия с помощью метода линеаризации. Важным аспектом здесь является учет структуры правых частей возникающих систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

При разработке и исследовании математических моделей живых систем часто возникают системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} C_i x(t-\omega_i) + \int\limits_{-\tau}^{0} C_{n+1}(\theta) x(t+\theta) d\theta, \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$, C_i — $m \times m$ матрицы, $0 \leqslant i \leqslant n$; $C_{n+1}(\theta)$ — $m \times m$ матрица с интегрируемыми по Риману элементами; константы $\omega_0 = 0$, $0 < \omega_i < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant \tau < \infty$. Некоторые из систем вида (1) могут быть представлены в блочной форме

$$\frac{dz(t)}{dt} = Qz(t) + \sum_{i=0}^{n} D_i y(t-\omega_i) + \int\limits_{-\tau}^{0} D_{n+1}(\theta) y(t+\theta) d\theta,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} A_i y(t-\omega_i) + \int\limits_{-\tau}^{0} A_{n+1}(\theta) y(t+\theta) d\theta - By(t), \tag{2}$$

где $x(t) = (z_1(t), \ldots, z_\ell(t), y_1(t), \ldots, y_k(t))^T$, $\ell + k = m$, $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_\ell(t))^T$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_k(t))^T$, Q — $\ell \times \ell$ устойчивая матрица; $D_0, D_1, \ldots, D_n$ — $\ell \times k$, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — $k \times k$ матрицы; $D_{n+1}(\theta)$ — $\ell \times k$, $A_{n+1}(\theta)$ — $k \times k$ матрицы, содержащие интегрируемые по Риману элементы; $B = \mathrm{diag}(b_{11}, \ldots, b_{kk})$ — диагональная матрица с положительными диагональными элементами.

Проблема устойчивости тривиального решения системы (1) сводится к изучению устойчивости тривиального решения системы (2).

В докладе рассмотрены два случая: 1) матрицы $A_0, A_1, \ldots, A_n$, $A_{n+1}(\theta)$, входящие в (2), являются неотрицательными, 2) хотя бы одна из указанных матриц не является неотрицательной. Приведены условия асимптотической устойчивости или неустойчивости тривиального решения системы (1), выраженные в терминах М-матриц.

Представлены примеры изучения высоко-размерных математических моделей в задачах иммунологии и эпидемиологии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086 мк).

УРАВНЕНИЕ С ДВОЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ В МОДЕЛЯХ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

Петрова А. Г.

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
annapetrova07@mail.ru

Исследуется решение уравнения

$$(q')^2 - qq'' = 1 + q''' + \delta(q'q''' - qq''''), \quad q = q(y), \quad y > 0,$$

с малым параметром δ, удовлетворяющее следующим условиям:

$$q(0) = q'(0) = 0, \quad q' \to 1, \quad y \to \infty.$$

Такая задача возникает при описании плоского стационарного движения раствора полимера вблизи критической точки. При $\delta = 0$ имеем широко известное решение Хименца [1], а при $\delta = 1$ решением является функция $q(y) = y + \exp(-y) - 1$.

Аналогичная задача для осесимметричного течения рассмотрена в работе [2], где решение предлагается искать в виде формального ряда по степеням δ и численно находятся два первых приближения.

В настоящей работе исследуются вопросы существования и единственности решения, его качественное поведение и проблема обоснования асимптотического разложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00127).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-layer theory. Berlin: Springer, 2000.
2. *Пухначева Т. П.* Задача об осесимметричном течении водного раствора полимеров вблизи критической точки // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. Барнаул: АлтГУ, 2016. С. 75–80.

ОБ АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ II РОДА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРИАТОМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Пикулин С. В.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН,
ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия;
spikulin@gmail.com

Рассмотрено уравнение Абеля II рода специального вида

$$y(x)\,\frac{dy}{dx} + a(x)\,y(x) + F(x) = 0, \tag{1}$$

где функция $F(x)$ представима в форме $F(x) = f_0\,x\,\varphi\big(x^\sigma\big)$, $f_0 > 0$, с положительной аналитической в окрестности нуля функцией $\varphi(\zeta)$ переменной $\zeta = x^\sigma$, $\sigma = \mathrm{const} > 0$, коэффициент $a(x)$ является аналитической функцией в окрестности $x = 0$, $a(0) =: a_0 < 0$, и справедливо неравенство $a_0^2 > 4\,f_0$, означающее, что уравнение (1) имеет узловую особую точку в начале координат.

С помощью некоторой модификации теста Фукса – Ковалевской – Пенлеве показано (см. [1]), что при выполнении определенного условия на a_0, f_0, σ, а именно, условия включения

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\sigma\beta_1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}, \qquad \beta_{1,2} = \frac{-a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4\,f_0}}{2}, \qquad 0 < \beta_1 < \beta_2,$$

уравнение (1) приводимо к другому уравнению того же класса уравнений Абеля II рода, все решения которого являются аналитическими в окрестности соответствующей $x = 0$, $y = 0$ особой точки, а решения уравнения (1) представимы с помощью ряда по дробным степеням x в окрестности начала координат.

Подход к решению уравнения (1), представленный в докладе, заключается в применении численного интегрирования к вспомогательному уравнению, решения которого являются аналитическими на всем отрезке интегрирования, включая концевые точки, вместо исходного уравнения (1), решения которого, вообще говоря, теряют аналитичность в начале координат.

Полученные результаты применены к известной [2] модели Томаса – Ферми распределения внутриатомного потенциала в многоэлектронном атоме или ионе, описываемой уравнением $d^2\Psi/dr^2 - r^{-1/2}\,\Psi^{3/2}(r) = 0$ относительно функции экранирования $\Psi(r)$, где r — расстояние до ядра. Найдено новое эффективное при численной реализации параметрическое представление соответствующего иону решения при $r \in [0, R]$, $\Psi(0) = Z > 0$, $\Psi(R) = 0$, в виде

$$r = C_1\,(1-u)^2\,S(u), \qquad \Psi = C_2\,\big(3\,u+1\big)^2\,S^{-3}(u), \qquad u \in [-1/3,\,1],$$

где $C_1, C_2 = \mathrm{const} > 0$, и аналитическая на отрезке $u \in [-1/3,\,1]$ функция $S(u)$ выражена через решение вспомогательного уравнения Абеля II рода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00781).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пикулин С. В.* О поведении решений уравнения Абеля II рода специального вида вблизи узловой особой точки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12 (в печати).
2. *Torrens I. M.* Interatomic potentials. New York: Academic Press, 1972.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ВОЛНОВУЮ ДИНАМИКУ В СТЕРЖНЯХ

Пинтус Г. М.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
Vincent1853@yandex.ru

Работа посвящена изучению задачи Коши для системы уравнений с частными производными следующего вида

$$\begin{cases} (1-D_x^2)D_t^2u-\delta D_x^2u+c^2D_x^4u+\varepsilon\cdot(D_t^2-c^2\cdot D_x^2)D_x^2v=f_1(t,x), \\ (1-D_x^2)D_t^2v+c^2D_x^4v+\varepsilon\cdot(D_t^2-c^2\cdot D_x^2)D_x^2u=f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $c \geq 1$, $\varepsilon \geq 0$.

Эта система уравнений возникает при описании малых изгибно-крутильных колебаний стержня без учета геометрической нелинейности [1].

Система уравнений (1) относится к типу систем, не разрешенных относительно старшей производной по времени. В литературе системы такого вида называют системами соболевского типа, поскольку именно в работах С. Л. Соболева [2] впервые были проведены исследования краевых задач для систем уравнений

$$A_0u_t+\sum A_ju_{x_j}+Bu=F(t,x) \tag{2}$$

с вырожденной матрицей A_0.

В работе рассмотрен вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для системы уравнений (1), описывающей малые изгибно-крутильные колебания стержня.

В ходе работы было построено в явном виде решение данной задачи Коши (1), а также были получены различные оценки решений в норме весового соболевского пространства $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_+)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.
2. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; Академическое изд-во “Гео”, 2003.

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ, СОГЛАСОВАННЫЕ С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Платонова К. С.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; kseniya-plat@yandex.ru

Рассматривается одномерное уравнения Больцмана [1, § 3]

$$f_t + cf_x + (\mathcal{F}(t,x,c)f)_c = 0. \tag{1}$$

В работе [2] была построена групповая классификация семейства уравнений (1). В настоящей работе мы осуществляем перенос найденных групп симметрий на моментные функции и для случая $\mathcal{F} = 0$ находим инварианты, согласованные с группой симметрий, которые будут уравнениями состояния для моментной системы, полученной из уравнения Больцмана. Моментные величины определяются следующей формулой:

$$j^{(n)}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x,c)c^n\,dc, \quad n = 0, 1 \ldots .$$

Для $\mathcal{F} = 0$ алгебра симметрий уравнения Больцмана является восьмимерной. Инвариант этой алгебры симметрий, который мы будем обозначать через $I = I(t, x, \ldots j^{(n)} \ldots)$, должен удовлетворять уравнениям:

$$\begin{gathered} I_t = 0, \quad I_x = 0, \quad j^{(n)}I_{j^{(n)}} = 0, \quad nj^{(n)}I_{j^{(n)}} = 0, \\ nj^{(n-1)}I_{j^{(n)}} = 0, \quad (1-n)j^{(n+1)}I_{j^{(n)}} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 1. *Решение первых пяти уравнений системы* (2) *имеет вид:*

$$I = I\left(a_3, \ldots a_n, \ldots\right), \quad \text{где} \quad a_n = b_2^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i C_n^i b_{n-i}, \quad b_i = 1 - \frac{j^{(i)}(j^{(0)})^{i-1}}{(j^{(1)})^i}.$$

Последнее уравнение в (2) в переменных a_n записывается как

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n}{2}a_n a_3 - (n-1)a_{n+1}\right) I_{a_n} = 0,$$

его система характеристик

$$\frac{da_3}{\frac{3}{2}a_3^2 - 2a_4} = \frac{da_4}{2a_4a_3 - 3a_5} = \cdots = \frac{da_n}{\frac{n}{2}a_na_3 - (n-1)a_{n+1}} = \ldots . \tag{3}$$

Теорема 2. *Общее решение системы* (3) *в классе бесконечно дифференцируемых функций имеет следующий вид: $a_4 = f(a_3)$, где f — произвольная функция, остальные a_n выражаются через a_3 по рекуррентным формулам:*

$$(n-2)a_n = \frac{n-1}{2}a_{n-1}a_3 - \left(\frac{3}{2}a_3^2 - 2f(a_3)\right)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial a_3}.$$

Собственно говоря, соотношение $a_4 = f(a_3)$ может рассматриваться как искомое уравнение состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Müller I., Ruggeri T.* Extended thermodynamics. New York: Springer-Verlag, 1993.
2. *Платонова К. С., Боровских А. В.* Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Условие сохранения физического смысла моментных величин // Теор. и мат. физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 452–483.

ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Полынцева С. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
siriuspsv@mail.ru

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t = \alpha_1(t,x)u_{xx} + \alpha_2(t,x)u_{zz}$$

$$+\alpha_3(t,x)(u_x)^2 + \alpha_4(t,x)(u_z)^2 + \alpha_5(t,x)u + a_6(t,x)f(t,x,z), \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in E_1, \quad z \in E_1. \tag{2}$$

Функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in E_1, z \in E_1\}$ и E_2 соответственно, коэффициенты $\alpha_i(t,x)$, $i = \overline{1,4}$, — непрерывно дифференцируемые действительнозначные функции переменных t, x, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 0$, $T = \mathrm{const}$, причем $\alpha_1(t,x) \geq a_1 > 0$, $\alpha_2(t,x) \geq a_2 > 0$, a_1, a_2 — const. E_n — n-мерное евклидово пространство, $n \in \mathbb{N}$.

Неизвестными в задаче являются коэффициенты $\alpha_5(t,x)$, $\alpha_6(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Предполагаем, что выполняются условия переопределения

$$u(t,x,b_1(t)) = \varphi(t,x), \quad u(t,x,b_2(t)) = \psi(t,x), \tag{3}$$

где $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in E_1\}$, $b_j(t)$, $j = 1,2$, — различные действительнозначные функции переменной t, причем $b_j(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi(0,x) = u_0(x,b_1(0)), \quad \psi(0,x) = u_0(x,b_2(0)), \quad x \in E_1.$$

В работе доказана теорема существования и единственности классического решения обратной задачи (1)–(3) в классе гладких ограниченных функций. Доказательство теоремы было проведено с помощью перехода от обратной задачи (1)–(3) к прямой вспомогательной задаче Коши для нагруженного уравнения. Методом слабой аппроксимации [1, 2] доказана разрешимость прямой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.
2. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Издательство “Наука” – Сибирское отделение, 1967.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППЫ ДИЭДРА $\mathbf{D_{5d}}$

Попов А. С.

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
popov@labchem.sscc.ru

Основы теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований конечных групп вращений, были заложены С. Л. Соболевым [1]. На сегодняшний день наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [2–3] и имеющуюся там литературу). Среди этих кубатурных формул особый интерес представляют кубатуры, инвариантные относительно групп вращений тетраэдра, октаэдра и икосаэдра с инверсией. Эти формулы обладают центральной симметрией и поэтому автоматически точны для всех нечётных функций.

Кубатурные формулы, инвариантные относительно различных диэдральных групп симметрии, рассматривались в работах [4–6]. В частности, в [4] был предложен алгоритм построения наилучших (в некотором смысле) кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h}, в [5] — относительно группы D_{4h}, а в [6] — относительно группы D_{2h}.

В данной работе будет описан аналогичный алгоритм построения наилучших кубатур, инвариантных относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{5d}. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии до 35-го порядка точности n. При этом для $n \leq 11$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n — приближённые, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 769–796.
2. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
3. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений икосаэдра с инверсией // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 413–423.
4. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h} // Сиб. журн. вычисл. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 57–62.
5. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{4h} // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 457–464.
6. *Попов А. С.* Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы диэдра D_{2h} // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 252–259.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА

Попов Н. С.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; guspopov@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $N(t)$, $K(x,y,t)$ — заданные функции в соответствующих множествах.

В области Q ищется функция $u(x,t)$, которая является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au) - \Delta u = f(x,t), \quad Au = \int\limits_0^t N(t-\tau)u(x,\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

такая, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)\Big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)dy\,\Big|_{(x,t)\in S}. \tag{3}$$

Исследованию краевых задач для интегродифференциальных уравнений с нелокальными граничными условиями посвящена работа [1]. Методом Фурье, а также методами, использованными в [1, 2], доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений поставленной краевой задачи (1)–(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для одного класса нелокальных интегродифференциальных уравнений с вырождением // Вестн. Самар. ун-та. Сер. естественнонаучная. 2017. Т. 23, № 4. С. 19–24.
2. *Popov N. S.* On solvability of boundary value problems for hyperbolic fourth-order equations with nonlocal boundary conditions of integral type // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907, Article ID 030008, 7 pages.

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Попов С. В.

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия; guspopov@mail.ru

Разрешимость краевых задач Жевре для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками рассматривалась в работах Т. Д. Джураева (1979), где разрешимость краевой задачи Жевре сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая в классе регулярных решений однозначно и безусловно разрешима. Известно, что в случае краевых задач для уравнений с меняющимся направлением времени, задач Жевре гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения этим пространствам. С. А. Терсенов (1985) в простейших случаях получил необходимые и достаточные условия разрешимости задач Жевре для параболических уравнений второго порядка в пространствах $H_{x\,t}^{p,p/2}$ при $p > 2$. Краевые задачи Жевре для таких уравнений, а также для общих операторно-дифференциальных уравнений рассматривались в работах С. Г. Пяткова, В. И. Антипина (2014–2016).

В настоящей работе рассматриваются вопросы гладкости краевых задач Жевре для уравнений третьего порядка с общими условиями склеивания, найдены зависимости показателей гёльдеровских пространств от весовых функций склеивания. Рассматриваются также гладкие решения задачи Жевре для уравнения третьего порядка с операторами теплопроводности в главной части. Разрешимость краевых задач сопряжения для некоторых уравнений такого вида с разрывными коэффициентами изучена в работах [1, 2].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания НИР на 2017–2019 гг. (проект 1.6069.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, со знакопостоянной функцией при старшей производной // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 51–59.
2. *Попов С. В.* Краевые задачи Жевре для уравнений третьего порядка // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции “Понтрягинские чтения – XXIX”. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 181.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

Постнов С. С.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия; postnov.sergey@inbox.ru

Рассматривается система, состояние которой описывается уравнением колебаний неоднородной струны дробного порядка:

$$r(x)\, {}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t) + u(x,t),$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, ${}_0^C D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Капуто по времени [1], $\alpha \in (1,2]$, $(x,t) \in \Omega = [0,L] \times [0,\infty)$, $r(x) > 0$, $w(x) > 0$. Распределённое управление $u(x,t)$ считается или интегрируемым со степенью p_1 по временно́й переменной и со степенью p_2 по пространственной, $1 < p_{1,2} < \infty$, или существенно ограниченным по обеим переменным.

Начальные условия зададим следующим образом:

$$\frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial x^k} = \varphi^k(x), \quad x \in [0,L], \quad k = 0,1.$$

Граничные условия задаются в виде:

$$\left[b_i \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t)\right]_{x=x^i} = h_i(t) + u^i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1,2,$$

где a_i и b_i — постоянные коэффициенты, $b_1 \leq 0$, $b_2 \geq 0$; $h_i(t)$ — некоторые известные вполне регулярные (дифференцируемые) функции, $x^1 = 0$, $x^2 = L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами либо пространства $L_p[0,T]$, $1 < p < \infty$, либо пространства $L_\infty[0,T]$.

Конечное условие сформулируем так, чтобы в некоторый момент времени $T > 0$ состояние системы совпадало с заданным желаемым состоянием $Q^*(x)$:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \quad T > 0, \quad x \in [0,L].$$

Рассматриваются две разновидности задачи оптимального управления: поиск управлений $u(x,t)$ и $U(t)$ с минимальной нормой и поиск управлений $u(x,t)$ и $U(t)$, переводящих систему в желаемое состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управлений.

Решение задачи оптимального управления строится с помощью метода моментов аналогично рассмотренному ранее случаю уравнения диффузии дробного порядка [2, 3]. Изучаются зависимости свойств оптимальных управлений от показателя дробной производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* The optimal control problem for linear systems of non-integer order with lumped and distributed parameters // Discontin. Nonlinearity Complex. 2015. V. 4, No. 4. P. 429–443.
3. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка // Автоматика и телемеханика. 2018. Вып. 5. С. 137–152.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Прилепко А. И.[1]**, Камынин В. Л.**[2]**, Костин А. Б.**[3]

[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* prilepko.ai@yandex.ru
[2]*Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия;* vlkamynin2008@yandex.ru
[3]*Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия;* abkostin@yandex.ru

Исследуются вопросы однозначной разрешимости обратных задач нахождения пары функций $u(t,x), p(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u_t - a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u = p(x)g(t,x) + r(t,x),\ (t,x) \in Q \equiv [0,T]\times[0,l], \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in [0,l], \quad u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t \in [0,T], \quad (2)$$

$$\int\limits_0^T u(t,x)\omega(t)\,dt = \varphi(x),\ x \in [0,l]. \quad (3)$$

Уравнение (1) не предполагается равномерно параболическим. Рассматриваются два основных случая.

1. Уравнение (1) вырождается: $0 \leqslant a(t,x) \leqslant a_1$, $\dfrac{1}{a} \in L_q(Q)$.
2. Коэффициент $a(t,x)$ неограничен: $0 < a_0 \leqslant a(t,x)$, $a \in L_q(Q)$, $q > 1$.

Во втором случае уравнение (1) также можно переписать как вырождающееся уравнение в виде

$$\rho(t,x)u_t - u_{xx} + \frac{b(t,x)}{a(t,x)}u_x + \frac{c(t,x)}{a(t,x)}u = p(x)\frac{g(t,x)}{a(t,x)} + \frac{r(t,x)}{a(t,x)}, \quad (4)$$

где $\rho \equiv 1/a(t,x) \geqslant 0$ и $1/\rho(t,x) \in L_q(Q)$.

Установлено несколько вариантов условий, при которых существуют и единственны обобщенные решения в классах Соболева обратных задач (1)–(3) и (4), (2), (3). Эти условия выписываются в виде легко проверяемых неравенств, все члены которых явно выражаются через входные данные обратных задач.

Получены оценки решений с константами, которые также явно выписываются через входные данные, что важно для приложений. Приводятся примеры обратных задач, для которых выполняются условия доказанных теорем. Часть результатов исследований опубликована в [1].

Работа второго и третьего авторов выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ” (Московского инженерно-физического института), проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Kamynin V. L., Kostin A. B.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26, No. 4. P. 523–539.

О СИСТЕМЕ КОШИ – РИМАНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Псху А. В.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right) u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ — дробная производная порядка α с началом в точке $y = 0$ [1, 2], $\alpha \in (0,1)$, $u(x,y)$ — искомая комплекснозначная функция. В случае $\alpha = 1$ уравнение (1) переходит в систему Коши – Римана.

В работе обсуждаются аналоги формул Коши и Шварца для полуплоскости, связывающие значения решения уравнения (1) в верхней полуплоскости со значениями на действительной оси.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. Математика. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–29.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ И ИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Пухначев В. В.[1], **Фроловская О. А.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]pukhnachev@gmail.com, [2]oksana@hydro.nsc.ru

В данной работе исследуются математические свойства решений наследственной модели движения водных растворов полимеров [1], учитывающей релаксационные свойства среды. Искомыми функциями в этой модели являются вектор скорости и давление. Модель содержит два эмпирических параметра: время релаксации и релаксационную вязкость. Также рассматриваются модификации этой модели в предельном случае малых времен релаксации [2] и близкой модели жидкости второй степени.

Изучены плоские нестационарные слоистые движения. В первой модели их свойства аналогичны свойствам движения обычной вязкой жидкости. В других моделях возможно существование слабых разрывов, которые сохраняются в процессе движения.

Рассмотрена задача о стационарном движении разбавленного водного раствора полимера в цилиндрической трубе под действием продольного градиента давления. Здесь реализуется течение с прямолинейными траекториями (аналог течения Хагена – Пуазейля). Однако, в отличие от последнего, в этом течении давление зависит от всех трех пространственных переменных.

На основе группового анализа изучаемых систем уравнений найдены их точные решения. Они описывают движение в зазоре между соосными вращающимися цилиндрами, течение вблизи критической точки, движение в полупространстве, вызванное вращением плоскости (аналог вихря Кармана).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00127).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войткунский Я. И., Амфилохиев В. Б., Павловский В. А.* Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Труды Ленинградского кораблестроительного института. 1970. Т. 69. С. 19–26.
2. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Рогалев А. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; rogalyov@icm.krasn.ru

В докладе исследованы задачи, в которых изменение вектора состояния системы происходит в условиях априорной неопределенности либо под действием внешних воздействий, либо того и другого одновременно. При этом известны лишь общие характеристики возмущений и погрешностей измерения. К подобным задачам относится задача Булгакова о максимальном отклонении (накоплении возмущений) [1], получившая свое дальнейшее развитие и приложения в наши дни. Такие задачи приходится, например, исследовать при моделировании технических устройств, для нахождения максимального отклонения управляемой системы от желаемого состояния, в задачах контроля за накопившимися боковыми отклонениями движения самолета или построения включения области достижимости при движении самолета на горизонтальной плоскости.

В докладе представлены новые результаты применения гарантированных методов [2–5], основанных на символьном представлении формул решений, в типичных задачах накопления возмущений, при решении которых необходимо учитывать влияние многих реально существующих возмущений на движение системы. Это достигается за счет того, что выписаны условия выпуклости и компактности множеств всех решений исходной задачи о максимальном отклонении, и представлены свойства границ множеств всех решений. Тем самым повышается точность построения символьных формул приближенных решений $\mathrm{S}^{\mathrm{n}}(\mathrm{Y}^0) \circ \mathrm{S}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{Y}^0) \circ \ldots \circ \mathrm{S}^1(\mathrm{Y}^0)$, где вектор Y^0 — вектор начальных значений, рассматриваемых как символьные величины. Более точно вычисляются границы области значений S_{y} символьных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Накопление возмущений линейных осциллирующих систем // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51, № 5. С. 339–342.
2. *Новиков В. А., Рогалёв А. Н.* Влияние эффекта "раскрутки" на получение верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 10. С. 1593–1596.
3. *Rogalyov A. N.* Computation of reachable sets guaranteed bounds // Proc. IASTED Int. Conf. on Automation, Control, and Information Technology. Control, Diagnostics, and Automation. Calgary: Acta Press, 2010. P. 132–139.
4. *Рогалев А. Н.* Границы решений дифференциальных уравнений в задаче максимальных отклонений // Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева: тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 242.
5. *Doronin S., Rogalev A.* Numerical approach and expert estimations of multi-criteria optimization of precision constructions // Proceedings of the School-Seminar on Optimization Problems and their Applications (OPTA-SCL 2018). Omsk, Russia, July 8–14, 2018. CEUR-WS.org/Vol-2098. P. 323–337.

ОБ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ

Романов А. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; asrom@math.nsc.ru

При изучении операторов композиции в пространствах Соболева возникает необходимость такого изменения исходной области G, чтобы в новой области G' пространство Соболева $L^1_p(G')$ было изоморфным пространству Соболева $L^1_p(G)$ [1, 2].

Рассмотрим две области $G, G_1 \subset \mathbb{R}^n$, $G_1 \subset G$, и пространство Соболева $L^1_{p(\cdot)}(G)$ с переменным показателем $p(\cdot) : G \to (1, \infty)$ [3]. Свойства таких пространств существенным образом зависят от свойств показателя $p(x)$. Мы предполагаем, что $p(x)$ имеет логарифмический модуль непрерывности.

Области G и G_1 будем называть $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными, если оператор сужения $\theta\, u = u|_{G_1}$ является изоморфизмом векторных пространств $L^1_{p(\cdot)}(G)$ и $L^1_{p(\cdot)}(G_1)$.

Доказывается, что множество $G \setminus G_1$ имеет нулевую меру Лебега, а изоморфизм θ является изометрией.

Замкнутое относительно области G множество E назовем $NC_{p(\cdot)}$-множеством, если для $L^1_{p(\cdot)}$-емкости любой пары непересекающихся компактов $F_0, F_1 \subset G \setminus E$ выполняется равенство

$$cap_{s,p(\cdot)}(F_0, F_1, G) = cap_{s,p(\cdot)}(F_0, F_1, G \setminus E).$$

Поскольку при переменном показателе суммируемости участвующий в определении емкости функционал $\rho_{p(\cdot)}(*)$ не является однородным, то приходится рассматривать допустимые функции, равные нулю квазивсюду на F_0 и равные s квазивсюду на F_1, $s \in (0, \infty)$. При $p \equiv \text{const}$ достаточно выполнения условия при $s = 1$.

Наш интерес к $NC_{p(\cdot)}$-множествам можно объяснить следующим результатом: *области G и G_1 являются $L^1_{p(\cdot)}$-эквивалентными тогда и только тогда, когда $E = G \setminus G_1$ является $NC_{p(\cdot)}$-множеством.*

Для $NC_{p(\cdot)}$-множеств удается получить результаты, вполне аналогичные соответствующим результатам для случая постоянного показателя суммируемости.

Работа поддержана Российским научным фондом (соглашение № 16-41-02004).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 17–62.
2. *Романов А. С.* Операторы композиции в пространствах Соболева с переменным показателем суммируемости // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 794–806.
3. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Романовский Н. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; nnrom@math.nsc.ru

Пусть открытое множество $V \subset X$, (X, d, μ) — метрическое пространство с борелевской мерой, $p \in [1, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, для последовательности разбиений $\Xi = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_j, \ldots)$, во-первых, каждое последующее разбиение является измельчением предыдущего и, во-вторых, выполняются неравенства $\operatorname{diam}(E_i^j) \leq C_1 10^{-j}$, $\mu(E_i^j) \geq C_2 10^{-jd}$, $u \in L_p(V)$. Обозначим множества, из которых состоит разбиение σ_j, через E_i^j, $i = 1, \ldots, m(j)$. Фиксируем замкнутое относительно линейных комбинаций семейство функций $\mathfrak{A}$, удовлетворяющих неравенству $\sup_{x \in E_i^k} |A(x)| \leq \frac{C_3}{\mu(E_i^k)} \int_{E_i^k} |A(x)|\, d\mu(x)$. Пусть A_i^j — функция из $\mathfrak{A}$, наилучшим образом приближающая функцию u на множестве E_i^j по норме пространства $L_p(V)$. Предположим, что найдется функция $h^r \in L_p(V)$ такая, что для любого множества $E_l^k \in \sigma_k$, $E_l^k \subset E_i^j$, $k \geq j$, выполняется равенство $10^{jrp} \int\limits_{E_l^k} |u(x) - A_i^j(x)|^p\, d\mu(x) \leq \int\limits_{E_l^k} (h^r(x))^p\, d\mu(x)$. Тогда будем писать, что $u \in W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A},d}(V)$.

Обозначим через G_{σ_k} множество функций, совпадающих на множествах E_i^k с функциями из семейства $\mathfrak{A}$. Такую функцию g_k можно отождествить с вектором v_k, компоненты которого суть заданные на E_i^k функции из $\mathfrak{A}$. Рассмотрим линейный оператор L_k, сопоставляющий функции g_k функцию $L_k g_k$ из G_{σ_k}, которой соответствует вектор $A_k v_k$, где A_k — постоянная матрица. Нетрудно видеть, что в евклидовом случае линейный дифференциальный оператор Lu можно аппроксимировать операторами $L_k g_k$ и свести решение краевых задач для дифференциальных уравнений к решению последовательности линейных алгебраических уравнений и изучению сходимости соответствующих функций по норме подходящего пространства Соболева. Эту аппроксимацию можно комбинировать с другими, рассматривая действие оператора L на $\mathfrak{A}$ или рассматривая слабые решения. Наше описание пространств Соболева оказалось удобным для доказательства различных теорем вложения. Наш подход к решению краевых задач для дифференциальных уравнений удобен для исследования регулярности решений линейных эллиптических и субэллиптических уравнений, включая случай негладких коэффициентов. Помимо эллиптических уравнений и их обобщений мы рассматриваем параболические уравнения и их общения. Для этого мы рассматриваем вместо функций, заданных на произвольном метрическом пространстве с мерой X, функции, заданные на произведении $\mathbb{R} \times X$, и проводим дискретизацию только по второй переменной (принадлежащей метрическому пространству X). В результате мы получаем вместо систем линейных алгебраических уравнений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Решая эти системы, учитывая начальные условия и переходя к пределу в подходящем пространстве Соболева, мы получаем решение исследуемой задачи. Таким образом можно достаточно просто и единообразным способом изучать свойства решений ультрапараболических уравнений, включая уравнения, описывающие важные в приложениях модели, например, уравнения Колмогорова. Используя некоторые дополнительные идеи, мы рассматриваем также нелинейные уравнения.

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ И ЗНАКООПРЕДЕЛЁННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Сабатулина Т. Л.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; TSabatulina@gmail.com

Рассмотрим следующий класс нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \frac{k}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} f(x(s))\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a, k \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $h > 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$, $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$. При отрицательном значении аргумента решение доопределим начальной функцией φ.

Заметим, что к исследованию уравнения вида (1) приводит, например, изучение уравнений Хатчинсона, Ласоты – Важевски и Николсона с распределённым запаздыванием.

В указанных предположениях с помощью [1, теорема 1.1] задача исследования осцилляции решений уравнения (1) сводится к изучению осцилляции решений линейного уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \frac{k}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

В работе [2] построена область осцилляции решений уравнения (2) в пространстве параметров $\left\{ah, kh, \frac{\tau}{h}\right\}$, обозначим эту область D_1. Кроме того, в этой же работе показано, что дополнение к D_1, обозначим его D_2, является областью положительности фундаментального решения уравнения (2). Итак, $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^3$.

В случае положительности фундаментального решения уравнения (2) можно показать, что уравнение (1) имеет хотя бы одно знакоопределённое (положительное или отрицательное) решение.

Таким образом, имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\left\{ah, kh, \frac{\tau}{h}\right\} \in D_1$. *Тогда все решения уравнения* (1) *осциллируют.*

Теорема 2. *Пусть* $\left\{ah, kh, \frac{\tau}{h}\right\} \in D_2$ *и* $y - f(y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *при* $y \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$. *Тогда уравнение* (1) *имеет бесконечное множество знакоопределённых решений.*

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание № 1.5336.2017/8.9) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berezansky L., Braverman E.* Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay // Math. Comput. Modelling. 2008. V. 48, No. 1–2. P. 287–304.
2. *Sabatulina T. L.* Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations // J. Math. Sci., New York. 2018. V. 230, No. 5. P. 766–769.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Сабитов К. Б.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований, Стерлитамак, Россия; sabitov_fmf@mail.ru

При исследовании прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях в последние годы находит важное применение метод спектрального анализа, основу которого составляют ортогональные или биортогональные ряды [1–4].

Для примера рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \frac{1+\operatorname{sgn} t}{2}u_t + \frac{1-\operatorname{sgn} t}{2}u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu = 0 \tag{1}$$

в области

$$Q = \{(x,y,t)|\, 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ -\alpha < t < \beta\},$$

где p, q, α и β — заданные положительные числа, b — заданное любое действительное число, и поставим следующую задачу: найти решение $u(x,y,t)$ уравнения (1) на множестве $Q \setminus \{t=0\}$ из класса $C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q \setminus \{t=0\})$, удовлетворяющее условиям

$$u(0,y,t) = u(p,y,t) = u(x,0,t) = u(x,q,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta,$$

$$u(x,y,-\alpha) = \psi(x,y), \quad 0 \le x \le p, \quad 0 \le y \le q.$$

Для этой задачи установлен критерий единственности, решение построено в виде суммы двойного ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим установлена оценка об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которой доказана сходимость ряда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функции $\psi(x,y)$, а также получены оценки устойчивости решения по отношению к граничному условию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2007. Т. 431, № 1. С. 23–26.
2. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Мат. заметки. 2015. Т. 97, вып. 2. С. 262–276.
3. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647.
4. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016.

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ГЛАДКИЙ АНАЛИЗ

Савельев Л. Я.

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; savelev@math.nsc.ru

Рассмотрим базовую мультипликативную группу $\mathcal{B} = (\epsilon^i)$ с единицей $\epsilon^0 = 1$, образованную целыми степенями последовательности $\epsilon = (1/n)$. Лорановские полиномы с вещественными (комплексными) коэффициентами и переменной ϵ образуют кольцо $\mathcal{Z}$ без делителей нуля. Назовем секвенциальными числами (s-числами) элементы его поля частных $\mathcal{S}$. С каждым s-числом естественно связать рациональную функцию, заменяя переменную на вещественную (комплексную). Секвенциальные числа делятся на постоянные и переменные. Постоянные числа отождествляются со своими значениями. В докладе — вещественный случай.

Поле $\mathcal{S}$ изоморфно подполю поля формальных степенных рядов. Наименьший номер $m = ord(x)$ ненулевого коэффициента s-числа $x = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \, \varepsilon^i$ называется порядком этого числа. Порядок для поля $\mathcal{S}$ определяется стандартно: $x > 0 \Leftrightarrow a_m > 0$ и $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$. Он согласован с поведением в окрестности нуля представляющих s-числа рациональных функций. Для каждого s-числа существует строго большее базовое s-число. Все s-числа делятся на бесконечно малые $\mathcal{O}$ (ord (x) > 0 и ноль), конечные $\mathcal{F}$ (ord (x) $= 0$ и ноль), бесконечно большие $\mathcal{G}$ (ord (x) < 0). Каждое конечное число равно сумме вещественного и бесконечно малого. Все бесконечно малые числа — между строго отрицательными и строго положительными вещественными. У множества $\mathcal{O}$ нет точных граней.

Порядок определяет для $\mathcal{S}$ интервальную топологию $\mathcal{T}$. Выделяют интервалы бесконечно малой, конечной и бесконечно большой длины. С топологией $\mathcal{T}$ поле $\mathcal{S}$ становится не локально компактным несвязным топологическим полем. На содержащемся в $\mathcal{S}$ вещественном поле $\mathcal{R}$ индуцируется стандартная топология.

Введение бесконечно малых чисел позволяет дать простые алгебраические определения предела и дифференциала, рассматривать функции с бесконечно малыми и большими значениями на бесконечно малых и больших интервалах, сглаживать разрывные функции и производить последовательные вычисления по достаточно простым алгоритмам. Гладкими s-функциями можно сглаживать разрывные коэффициенты в дифференциальных уравнениях. Даются примеры сглаживания дельта-функции, функции sign и ступенчатых функций с помощью секвенциальной ϵ-шапочки $\exp[-x^2/(\epsilon^2 - x^2)]$ на секвенциальной ϵ-окрестности нуля и равной нулю вне ее. Гладкая дельта-функция удовлетворяет классическому определению: она равна нулю на всей вещественной прямой без точки ноль и ее интеграл равен 1. Производная сглаженной ступеньки Хевисайда равна гладкой дельта-функции Дирака. Применение сглаженной функции sign представляется полезным для смешанных уравнений. Сглаженные дискретные распределения, бесконечно малые и бесконечно большие плотности могут оказаться полезными в стохастических задачах.

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ–РЕАКЦИИ

Сарицкая Ж. Ю.[1], **Бризицкий Р. В.**[2]

[1]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;* zhsar@iclod.com
[2]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;* mlnwizard@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N, рассматривается краевая задача

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla \varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + k\varphi = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial\varphi/\partial n + \alpha\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь φ — концентрация вещества, $\mathbf{u}$ — заданный вектор скорости, f — объемная плотность внешних источников (загрязняющего) вещества, $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ — коэффициент диффузии, $k = k(\varphi, \mathbf{x})$ — коэффициент реакции, $\alpha = \alpha(\varphi, \mathbf{x})$ — коэффициент массообмена.

В настоящей работе доказывается глобальная разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда коэффициент реакции k и коэффициент массообмена α достаточно произвольно зависят как от концентрации φ, так и от пространственной переменной. В случае, когда $\psi \neq 0$ на Γ_D, на указанные коэффициенты накладывается условие монотонности (см. [1]), но в этом случае имеет место нелокальная единственность решения нелинейной краевой задачи (1), (2).

Среди экстремальных задач для модели (1), (2) отдельно отметим задачи мультипликативного управления, роль управления в которых могут играть функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\alpha(\mathbf{x})$ (см. [2]), а также функция $\beta(\mathbf{x})$ в случае, когда $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})\varphi^2$ (см. [3]).

В настоящей работе исследуется устойчивость решений задач мультипликативного граничного управления в случае, когда $\alpha(\varphi, \mathbf{x}) = a_1(\mathbf{x})|\varphi|$ и $\alpha(\varphi, \mathbf{x}) = a_2(\mathbf{x})\varphi^2$, а роль управлений играют функции $a_1(\mathbf{x})$ и $a_2(\mathbf{x})$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00365-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 12. С. 2011–2022.
2. *Brizitskii R. V., Saritskaya Zh. Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. (to appear).
3. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82, № 1. С. 17–33.

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С НЕИЗВЕСТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Сафиуллова Р. Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; regina-saf@yandex.ru

Многие процессы, изучаемые современным естествознанием, приводят к необходимости исследования тех или иных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Данная работа посвящена исследованию нелинейной обратной задачи с неизвестным коэффициентом для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением $u(x,t)$ определить неизвестный коэффициент, представляющий собой константу. В работе доказывается теорема существования регулярных решений. При доказательстве разрешимости исходной обратной задачи используется метод, основанный на переходе от обратной задачи к прямой задаче для нелинейного уравнения высокого порядка. Доказывается ее разрешимость и строится решение обратной задачи с помощью решения вспомогательной задачи.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$ и при $t \in [0,T]$, A — заданное положительное число.

Обратная задача: найти функцию $u(x,t)$ и число a такие, что для них в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + au = f(x,t),$$

и при этом для функции $u(x,t)$ выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,T)dx = A. \tag{3}$$

В данной обратной задаче условия (1) и (2) есть обычные условия первой начально-краевой задачи, условие (3) есть условие переопределения. Хотелось бы отметить, что предложенный ниже метод дает легко проверяемые в данной задаче условия.

Доказательство разрешимости обратной задачи будет основано на исследовании разрешимости первой начально-краевой (прямой) задачи для некоторого вспомогательного нелинейного интегродифференциального ("нагруженного") уравнения. При доказательстве разрешимости задачи для "нагруженного" уравнения используется техника, в основе которой лежат метод срезок, метод неподвижной точки.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Свешников В. М.[1], Третьяков А. С.[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]`victor@lapasrv.sscc.ru`, [2]`gradinos105@gmail.com`

В докладе предложены и экспериментально исследованы численно-аналитические методы интегрирования уравнений движения заряженных частиц в электрических полях. Необходимость в разработке таких методов возникла при моделировании интенсивных пучков заряженных частиц в протяженных системах. Характерной задачей при этом является по возможности точное определение расширения пучка и его угловой расходимости на значительном расстоянии от поверхности старта (эмиттера). Применение классических численных алгоритмов не давало адекватных результатов. Поэтому возникло предложение на каждом шаге численного интегрирования использовать аналитическое решение уравнений движения, сделав упрощающие предположения об электрических полях. Упрощающие предположения в пределах шага численного интегрирования, дающие достаточную точность и, в то же время, несложное решение, состояли в следующем: в продольном направлении поле предполагается постоянным, а в поперечном — линейным по координате, что характерно для интенсивных пучков. Даны результаты численных экспериментов, демонстрирующие точность предлагаемого подхода.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315-2016-0008) и поддержана грантом РНФ (проект 14-11-00485п) и грантом РФФИ (проект 16-01-00168).

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Семенко Е. В., Семенко Т. И.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия; semenko54@gmail.com

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида $By = 0$, где $y(t, x)$ — искомый вектор-столбец размерности n, x — пространственные переменные размерности $m = 1$, 2 или 3,

$$B = \frac{\partial}{\partial t}E + A_0 + A_1(\nabla) + A_2(\nabla), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^T,$$

где A_0 — постоянная матрица, A_1 — линейная, а A_2 — квадратичная матричные формы от вектора ∇. Такой вид, в частности, имеют многие системы уравнений гидродинамики, линеаризованные на постоянном решении: уравнения Эйлера, уравнения Навье – Стокса, уравнения Сен-Венана теории мелкой воды (см. [1]) или обобщенные уравнения Сен-Венана, так называемая теория “shear shallow-water flows” [2]. После преобразования Фурье система примет вид $\hat{B}\hat{y} = \hat{H}$, где $\hat{B} = \omega E + iA_0 - A_1(\xi) - iA_2(\xi)$, а вектор $\hat{H}(\xi, \omega)$ определяется постановкой задачи — набором начальных и граничных условий.

Пусть матрица $\hat{B}$ обладает полным набором собственных чисел $\lambda_j(\xi, \omega)$, $j = \overline{1, n}$. Соответствующие наборы собственных векторов: столбцов $e_j(\xi, \omega)$ ($\hat{B}e_j = \lambda_j e_j$) и строчек $g_j(\xi, \omega)$ ($g_j\hat{B} = \lambda_j g_j$) образуют биортогональную систему, а значит, любой вектор можно разложить по этой системе, т. е. $\sum e_j \otimes g_j = \sum \Omega_j = E$, здесь Ω_j — проекторы на соответствующие одномерные собственные подпространства. Тогда решение системы в плоскости Фурье имеет вид $\hat{y} = \hat{B}^{-1}\hat{H} = \sum \Omega_j \hat{H}/\lambda_j(\xi, \omega)$. Но наличие начальных/граничных условий накладывает ограничения на класс искомых функций в переменных Фурье, так, обычное для начальной задачи условие $t > 0$ означает, что функции $\hat{y}$, $\hat{H}$ аналитичны по ω в верхней полуплоскости, условие $x_1 > a_1$ означает, что функция $\hat{y}e^{ia_1\xi_1}$ аналитична по ξ_1 в верхней полуплоскости, при $x_1 < b_1$ функция $\hat{y}e^{ib_1\xi_1}$ будет аналитична по ξ_1 в нижней полуплоскости и т. п. Тогда мы получим условия разрешимости на правую часть системы: $\Omega_j\hat{H} = 0$ в точках (ξ, ω), расположенных в соответствующем множестве, и в которых $\lambda_j(\xi, \omega) = 0$. Эти условия позволяют выразить часть граничных значений (возможно, все граничные значения) через начальные данные и оставшиеся граничные. При этом решение начально-краевой задачи строится в виде не слишком сложной алгебраической формулы, что сильно облегчает его исследование в самых разных задачах, в том числе (и в особенности) в задачах поиска разрывных решений (задачи об ударной волне), см., например, [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика (4-е изд.). М.: Наука, 1988.
2. *Richard G. L., Gavrilyuk S. L.* The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows // J. Fluid Mech. 2013. V. 725. P. 492–521.
3. *Semenko E. V.* Linear problem of the shock wave disturbance in a non-classical case // Phys. Fluids. 2017. V. 29, No. 6. Article ID 066101.

ЗАДАЧА ТИПА СТЕФАНА КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ОПУХОЛИ ПРИ ГОРМОНАЛЬНОМ ЛЕЧЕНИИ В УСЛОВИЯХ ГОРМОНОРЕЗИСТЕНТНОСТИ

Серовайский С. Я.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан; serovajskys@mail.ru

Существуют определенные формы рака, связанные с действием гормонов. Так, для рака простаты раковые клетки нуждаются в андрогенной стимуляции, т. е. в подпитке половыми гормонами — андрогенами. В этом случае часто применяется гормональное лечение, предполагающее использование препаратов, подавляющих выработку организмом гормонов. Это позволяет затормозить развитие опухоли. Однако эффективность лечения носит временный характер ввиду постепенного привыкания клеток рака к действию гормонов, т. е. явления гормонорезистентности. Это объясняется тем, что опухоль состоит из двух типов клеток — чувствительных и резистентных к действию гормональных препаратов. В условиях гормонального лечения происходит замещение чувствительных раковых клеток резистентными, что приводит к дальнейшему развитию опухоли.

В основе предлагаемой математической модели рассматриваемого процесса лежит предположение о наличии аналогии между процессом развития опухоли, т. е. ее ростом и уменьшением, и процессом таяния и обледенения. Таким образом, рассматриваемый процесс в одномерном случае (это предположение не обязательно) описывается однофазной задачей Стефана для системы уравнений

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + \Big[\frac{a_s}{1+f(t)u_s^\theta} - b_s(u_s+u_r)\Big]u_s + c_{rs}u_r, \quad 0<x<\xi(t), \quad t>0;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = D_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \big[a_r - b_r(u_s+u_r)\big]u_r + c_{sr}u_s, \quad 0<x<\xi(t), \quad t>0;$$

где u_s и u_r — концентрации чувствительных и устойчивых раковых клеток, D_s и D_r — коэффициенты диффузии соответствующих клеток, a_s и a_r характеризуют приросты клеток, b_s и b_r учитывают ограниченность жизненного пространства, c_{sr} и c_{rs} учитывают трансформации чувствительных клеток в устойчивые и наоборот, f и θ описывают концентрацию лекарственного препарата и его эффективность, переменная $\xi = \xi(t)$ характеризует размер опухоли. В начальный момент времени задаются распределение концентраций обоих типов раковых клеток с существенным преобладанием чувствительных клеток, а также начальный размер опухоли. На левом конце, соответствующем очагу образования опухоли, задается условие Неймана. На правом конце, соответствующем подвижной границе опухоли, задаются нулевые значения концентрации раковых клеток. Движение подвижной границы описывается условием типа Стефана.

Согласно расчетам в отсутствии лечения опухоль увеличивается в размерах главным образом за счет роста преобладающих чувствительных клеток. После начала лечения наблюдается сокращение опухоли за счет уменьшения концентрации чувствительных клеток. Однако со временем опухоль снова начинает расти из-за увеличения концентрации резистентных клеток, устойчивых к действию лекарства, что соответствует явлению гормонорезистентности. В случае прекращения лечения наблюдается постепенное замещение резистентных клеток чувствительными, обладающими большей жизнеспособностью в отсутствии лечения.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СУФФОЗИИ

Сибин А. Н.

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
sibin_anton@mail.ru

Процесс эрозии почвогрунтов имеет большое значение при решении прикладных задач в сельском хозяйстве: ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей [1] и процесс внутренней эрозии, сопутствующий канальному орошению почвогрунтов [2]. Процесс эрозии необходимо учитывать в исследованиях, связанных с прогнозом распространения загрязнений, фильтрацией вблизи водохранилищ и других гидротехнических сооружений [3]. Более того, аналогичные проблемы, связанные с процессом эрозии грунта, возникают и в других областях, включая добычу нефти и газа [4].

В работе численно исследована двумерная задача внутренней суффозии в межмерзлотном водоносном горизонте. Фильтрация подземных вод происходит в водоносном горизонте, который соприкасается с промерзшим песчаным грунтом. В процессе оттаивания грунта и при достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели использованы уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также закон Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Задача сведена к системе из трех уравнений относительно пористости, приведенного давления и вырождающегося на решении уравнения для водонасыщенности [5].

Для модельной задачи рассмотрена начально-краевая задача и построена конечно-разностная схема на основе метода переменных направлений. Проведены расчеты тестовой задачи, определены давление воды, пористость грунта, водонасыщенность, скорости воды и подвижных частиц грунта. Сравнение найденной скорости смеси воды и подвижных частиц грунта с критической позволило найти область, подверженную суффозионному воздействию. Проведено численное исследование совместного влияния процессов суффозии и кольматации. Исследована зависимость искомых функций от параметра, характеризующего суффозионную устойчивость грунта.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vieira D. A. N., Dabney S. M.* Modeling edge effects of tillage erosion // Soil Tillage Research. 2011. V. 111, No. 2. P. 197–207.
2. *Wilson G.* Understanding soil-pipe flow and its role in ephemeral gully erosion // Hydrol Process. 2011. V. 25. P. 2354–2364.
3. *Einstein H. A.* Der Geschiebetrieb als wahrscheinlichkeits Problem. Zurich: Mitt. d. Versuchsanstaltf Wasserbau, Eidg. T. H., 1937.
4. *Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G.* Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects // 1st Heavy Oil Conference 2006.
5. *Papin A. A., Sibin A. N.* Model isothermal internal erosion of soil // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722. Article ID 012034, 8 pages.

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ, ИМЕЮЩИМ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

Сказка В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
skazka@math.nsc.ru

В комплексном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ рассматривается следующая задача Коши:

$$B\frac{du}{dt} = iAu + \varepsilon\cos(\omega t)Pu, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{1}$$

Здесь A — самосопряженный оператор, B — ограниченный положительно определенный оператор, т. е. $(Bu,u) \geq \delta(u,u)$, $\delta > 0$, P — ограниченный оператор.

Работа является продолжением исследований, начатых в [1, 2] и посвященных вопросам о влиянии непрерывного спектра на явление параметрического резонанса в дифференциальных уравнениях.

Под решением уравнения (1) мы будем понимать решение следующего интегрального уравнения:

$$u(t) = u_0 + \varepsilon\int_0^t e^{iB^{-1}A(t-\tau)}B^{-1}\cos(\omega\tau)Pu(\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Введем следующее банахово пространство аналитических в правой полуплоскости функций GH с нормой $[\![\varphi]\!]_H = \sup\limits_{x>0}\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(x+iy)\|_H^2\,dy$.

Пусть выполнены следующие предположения ($\lambda = x+iy$, $x>0$):
1. Для любой $\psi \in H$ справедливо $\left[\!\left[P(\lambda B - iA)^{-1}\psi\right]\!\right]_H \leq K\|\psi\|_H$.
2. Для любой $\varphi \in GH$ справедливо
$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|P(\lambda B - iA)^{-1}\varphi(\lambda)\right\|_H^2\,dy \leq K\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(\lambda)\|_H^2\,dy$.
3. Для любой $\varphi \in GH$ справедливо
$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}(\lambda B - iA)^{-1}\varphi(\lambda)\,dy\right\|_H^2 \leq Ke^{2xt}\int_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(\lambda)\|_H^2\,dy$.

Теорема. *При вышеперечисленных условиях существуют $\varepsilon_0 > 0, C > 0$ такие, что для любых ε,ω, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\omega \in \mathbb{R}$, для решения уравнения* (2) *справедливо* $\|u(t)\|_H \leq C\|u_0\|_H$.

В качестве примера можно рассмотреть модельное для линейных уравнений акустики и теории упругости уравнение в $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$\frac{du(x,t)}{dt} = i\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,u + \varepsilon\cos(\omega t)\iiint_{\mathbb{R}^3}K(x,y)u(y,t)\,dy.$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5., проект № 0314-2016-0012.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сказка В. В.* О влиянии непрерывного спектра на эффект параметрического резонанса. Случай ограниченных операторов // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 5. С. 77–96.
2. *Сказка В. В.* Об устойчивых возмущениях линейных дифференциальных уравнений, порождающих равномерно ограниченную группу // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 8. С. 168–182.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Скворцова М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с двумя неотрицательными запаздываниями

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(u(t-\tau_1), w(t-\tau_2)) - \mu x(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}u(t) = \alpha_1 x(t) - \mu_1 u(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}w(t) = \alpha_2 x(t) - \mu_2 w(t), \end{cases}$$

где функция $f(u, w)$ неотрицательна, непрерывна, не убывает по u и не возрастает по w, коэффициенты предполагаются положительными. Система может рассматриваться как модель динамики некоторой клеточной популяции, $x(t)$ — численность популяции, $u(t)$ — стимулятор роста популяции, $w(t)$ — ингибитор роста популяции. Модель предложена Н. В. Перцевым.

В работе изучается устойчивость положений равновесия данной системы. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и указаны оценки на области притяжения. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10086 мк).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

МНОГОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ФУНКЦИЕЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО РОДА В ЯДРЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Скоромник О. В.

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь;
skoromnik@gmail.com

Рассматривается многомерное интегральное преобразование:

$$(\mathbf{P}_\delta^\gamma f)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \left(\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2\right)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma \left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > \mathbf{0}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$; $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} := \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_n}$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum\limits_{k=1}^n x_k\, t_k$; $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $0 < \mathrm{Re}(\gamma_j) < 1$ $(j = \overline{1,n})$; $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$; $(\mathbf{x})^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+$; $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)$; $d\mathbf{t} = dt_1 \cdots dt_n$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, \ldots, t_n)$; $\mathbf{x} \geq \mathbf{t}$ означает $x_1 \geq t_1, \ldots, x_n \geq t_n$; $P_\delta^\gamma(\mathbf{x}) = \prod\limits_{j=1}^n P_{\delta_j}^{\gamma_j}(x_j)$, где $P_{\delta_j}^{\gamma_j}(x_j)$ $(j = \overline{1,n})$ — функции Лежандра первого рода [1, 2].

С помощью формулы многомерного преобразования Меллина [3, формула 1.4.42] от $\mathbf{P}_\delta^\gamma f$ доказывается, что преобразование (1) является многомерным аналогом модифицированного H-преобразования [4, формула 5.1.4]. На основании этого в работе исследованы свойства рассматриваемого интегрального преобразования в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x})= f(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{R}^n_+$, для которых:

$$\|f\|_{\overline{v},\overline{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^1_+} x_n^{v_n \cdot 2-1} \left\{ \cdots \left\{ \int_{\mathbb{R}^1_+} x_2^{v_2 \cdot 2-1} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left[\int_{\mathbb{R}^1_+} x_1^{v_1 \cdot 2-1} |f(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\} \cdots \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty$$

$(\overline{2} = (2, \ldots, 2)$, $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $v_1 = v_2 = \ldots = v_n)$.

Даются условия ограниченности оператора преобразования (1), описание образа этого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Настоящая работа обобщает результаты, полученные ранее для соответствующего одномерного случая [5, формула 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965.
3. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006.
4. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. Theory and applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.
5. *Kilbas A. A., Skoromnik O. V.* Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $L_{\nu,r}$-spaces // Integral Transforms Spec. Funct. 2009. V. 20, No. 9–10. P. 653–672.

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Степанова И. В.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; stepiv@krasn.ru

Рассматривается класс эволюционных уравнений

$$u_t^a = F^{ab}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}) u^b_{x_i x_i} + G^a(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}). \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $t = x_0$ — независимые переменные, $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^m)$, $i, j = 1, \ldots, n,$ — неизвестные функции, индексы $a, b = 1, \ldots, m$. Матрица коэффициентов F^{ab} и вектор правых частей G^a считаются неизвестными функциями, подлежащими определению одновременно с функциями $\boldsymbol{u}$. В зависимости от матрицы коэффициентов и правой части уравнения (1) описывают различные диффузионные процессы (реакция-диффузия, конвекция-диффузия), их исследование важно для приложений.

В работе доказаны теоремы о виде точечных преобразований, переводящих уравнения (1) в аналогичные. Доказательство этих теорем основывается только на невырожденности якобиана перехода. Описываемые точечные преобразования позволяют упростить нахождение симметрий уравнений класса (1). Задача групповой классификации для уравнений (1) решена в случае

$$u^1 = T(t, x^1, x^2, x^3), \quad u^2 = C(t, x^1, x^2, x^3),$$

где T и C — функции температуры и концентрации, матрица коэффициентов и вектор правой части задаются формулами

$$F = \begin{pmatrix} \kappa & D^F \\ D^\theta & D \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \sum\limits_{i=1}^{3} T^2_{x^i} + (\frac{\partial \kappa}{\partial C} + \frac{\partial D^F}{\partial T}) \sum\limits_{i=1}^{3} T_{x^i} C_{x^i} + \frac{\partial D^F}{\partial C} \sum\limits_{i=1}^{3} C^2_{x^i} \\ \frac{\partial D^\theta}{\partial T} \sum\limits_{i=1}^{3} T^2_{x^i} + (\frac{\partial D^\theta}{\partial C} + \frac{\partial D}{\partial T}) \sum\limits_{i=1}^{3} T_{x^i} C_{x^i} + \frac{\partial D}{\partial C} \sum\limits_{i=1}^{3} C^2_{x^i} \end{pmatrix},$$

где $\kappa(T, C)$, $D(T, C)$, $D^\theta(T, C)$ и $D^F(T, C)$ — коэффициенты теплопроводности, диффузии, термодиффузии и диффузионной теплопроводности соответственно. Для исследования используется классический метод симметрий Ли – Овсянникова [1]: находится основная алгебра операторов преобразований, допускаемых уравнениями тепломассообмена при произвольных коэффициентах переноса, вычисляются формы коэффициентов, при которых возможно расширение основной алгебры. С помощью полученных групп преобразований построены некоторые новые точные решения стационарных и нестационарных уравнений тепломассообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Стрелецкая Е. М.[1], Федоров В. Е.[2]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
[1]`wwugazi@gmail.com`, [2]`kar@csu.ru`

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, т. е. линейный и ограниченный оператор. Рассмотрим уравнение распределенного порядка [1]

$$\int\limits_a^b \omega(\alpha) \mathrm{D}_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{D}_t^\alpha x(t)$ — дробная производная Герасимова – Капуто, $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, и задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

для него. Решением задачи (1), (2) будем называть такую функцию $x \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$, что существует $\int\limits_a^b \omega(\alpha) \mathrm{D}_t^\alpha x(t) d\alpha \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$ и выполняются равенства (1), (2).

Обозначим через $E(K, a_0; \mathfrak{X})$ множество таких функций $x : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathfrak{X}$, что

$$\exists K > 0 \quad \exists a_0 > 0 \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|x(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq K e^{a_0 t}.$$

Будем использовать также обозначения

$$E(\mathfrak{X}) := \bigcup_{K>0} \bigcup_{a_0>0} E(K, a_0; \mathfrak{X}), \quad W(\lambda) := \int\limits_a^b \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha,$$

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$\gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \arg\lambda = \pi,\ \lambda \in [-r_0, -\infty)\}$, $\gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \arg\lambda = -\pi,\ \lambda \in (-\infty, -r_0]\}$.

Теорема [2]. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $x_0 \in \mathfrak{X}$ и функция $\omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ такова, что при некотором $\beta > 0$ $W(\lambda)$ — аналитическая функция на множестве $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \beta, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}$, при этом*

$$\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (|\lambda| \geq \beta) \Rightarrow (|W(\lambda)| \geq C|\lambda|^\delta).$$

Тогда функция

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{W(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} x_0 d\lambda, \quad r_0 = \max\left\{\beta, \left(\frac{2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}}{C}\right)^{1/\delta}\right\},$$

является единственным решением задачи (1), (2) в пространстве $E(\mathfrak{X})$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание № 1.6462.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kochubei A. N.* Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 340, No. 1. P. 252–281.
2. *Стрелецкая Е. М., Федоров В. Е., Дебуш А.* Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–72.

О РАСШИРЕНИЯХ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

Талышев А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
tal@academ.org

Под расширением группы Ли, согласно [1, § 17 п. 6], здесь понимается расширение пространства представления группы Ли. В [1] приводятся примеры расширения групп: кратные группы, продолженные группы на пространство производных зависимых переменных по независимым.

В настоящей работе рассматривается задача расширения представления группы Пуанкаре с пространства независимых переменных (t, x, y, z) на зависимые переменные (полевые переменные).

Показано, что для нетривиальных расширений векторных переменных должно быть четное число. При этом при подходящем выборе базиса переменные могут быть разбиты на независимые пары, и каждая пара преобразуется как электромагнитное поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

О НЕПРЕРЫВНЫХ ПО ЛИПШИЦУ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Терсенов Ал. С.[1], **Терсенов Ар. С.**[2]

[1] *Университет Крита, Ираклион, Греция;* tersenov@uoc.gr
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* aterseno@math.nsc.ru

В докладе будет рассмотрена первая краевая задача, а также задача Коши для анизотропных параболических уравнений вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)(|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = f(t,x,u,\nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega_T = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область. Уравнения вида (1) принадлежат к широкому классу уравнений, часто называемых *уравнениями с нестандартными условиями роста* [1]. Как известно, при исследовании этих уравнений широко применяются методы вариационного исчисления, которые встречают серьезные трудности в случае, когда правая часть зависит от градиента решения. Классическими методами исследования являются различные аппроксимационные методы.

Мы рассматриваем уравнение, в котором показатели $p_i(t) > 1$ зависят от времени. В случае, когда Ω — выпуклая область и функция f зависит линейно от градиента, мы доказали существование непрерывного по Липшицу по пространственным переменным и непрерывного по Гёльдеру по времени слабого решения, удовлетворяющего уравнению (1) в интегральном смысле. Доказательство существования решения указанной гладкости является новым результатом для уравнений вида (1). Существование решений доказывается путем регуляризации исходного уравнения и построения решения как предела классических решений регуляризованной задачи.

В случае сильных градиентных нелинейностей одной из принципиальных сложностей является переход к пределу в нелинейных членах. С помощью теории вязких по Лионсу решений нам удалось доказать существование решения в выпуклых областях в случае градиентных нелинейностей, не удовлетворяющих условию Бернштейна, которое является непрерывным по Гёльдеру по t и липшицевым по пространственным переменным.

В случае, когда f не зависит от градиента и показатели p_i являются постоянными, нам удалось показать липшицевость решений по всем переменным, включая переменную t, в выпуклых областях [2]. Причем липшицевость по времени можно получить в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы. Надо отметить, что непрерывность решения по Липшицу по t получена в случае $f \in L^\infty(\Omega_T)$, что является новым результатом в теории уравнений с нестандартными условиями роста.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00649).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness, localization, blow-up. Series: Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 4. Paris: Atlantis Press, 2015.
2. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence of Lipschitz continuous solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations // J. Funct. Anal. 2017. V. 272, No. 10. P. 3965–3986.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВРАГОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Тихонова И. М.[1], **Егоров И. Е.**[2]

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; [1]IrinaMikh3007@mail.ru, [2]IvanEgorov51@mail.ru

В данной работе рассматривается краевая задача Врагова для уравнения смешанного типа высокого порядка, не разрешенного относительно старшей производной

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s} k_i(x,t)D_t^i u - \triangle u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q.$$

При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения с помощью нестационарного метода Галеркина и метода регуляризации доказывается однозначная регулярная разрешимость краевой задачи. Также получена оценка погрешности приближенных решений, построенных по методу Галеркина, относительно точного решения. Оценка выражается через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Отметим, что данная краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка была рассмотрена в [1].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания (проект № 1.6069.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Egorov I. E.* Vragov's boundary value problem for an implicit equation of mixed type // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 894. Article ID 012028, 5 pages.

О МОДЕЛИ КАТАЛИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ КИСЛОРОДА В ОБЪЕМЕ КАТАЛИЗАТОРА

Толстихин А. А.[1], **Чумакова Н. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;*
chum@catalysis.ru

Исследуется динамика процесса углекислотного риформинга метана в реакторе с блочным катализатором в предположении однородного распределения потока, активности катализатора и состава реакционной смеси по сечению блока. Рассматривается изотермический процесс в одном канале в предположении, что химические превращения происходят на внешней поверхности катализатора при возможной диффузии кислорода в объеме катализатора. Целью работы является изучение динамики распределения концентраций веществ в реакторе и объеме катализатора методами математического моделирования: построение математической модели, разработка алгоритма численного построения решения, выполнение тестовых расчетов и параметрического анализа. Отметим, что коэффициент диффузии является малым параметром, влияние которого на динамику каталитической системы представляет определенный интерес.

Математическая модель процесса представляет собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений: распределение концентраций веществ в потоке газа вдоль реактора описывается четырьмя уравнениями переноса (уравнения гиперболического типа первого порядка), концентрации промежуточных веществ на поверхности катализатора в каждой точке по длине удовлетворяют двум обыкновенным дифференциальным уравнениям по времени, а распределение концентрации кислорода в объеме катализатора описывается уравнением параболического типа второго порядка. Таким образом, рассматривается система уравнений в области с координатами (t, l, h), где $t \in [0, T]$ обозначает время, $l \in [0, L]$ — продольная координата в реакторе, а $h \in [0, H]$ — координата по толщине приповерхностного слоя катализатора, в который проникает окислитель. На границе области задаются начальные (при $t = 0$) и краевые (при $l = 0$, $h = 0$ и $h = H$) условия. Рассмотрены также соответствующие стационарные задачи. Для численного построения решения разработан алгоритм, аппроксимирующий задачу с первыми порядком точности по времени t, длине l и координате h.

Рассмотрено два случая: когда реакция происходит только на внешней поверхности (коэффициент диффузии и соответствующие константы скоростей реакции равны нулю) и когда коэффициент диффузии отличен от нуля; проведено сравнение свойств решения в этих условиях.

Выявлены характерные времена трех этапов переходного процесса: время определяющего влияния конвекции, время относительно медленного изменения решений и время стабилизации решений. Численно показано, что решения каждой из рассмотренных краевых задач стабилизируются к решениям соответствующей стационарной задачи (входят в их малую окрестность). Показано, что диффузия кислорода в объеме катализатора на два порядка увеличивает время релаксации.

Работа выполнена в рамках проекта ББФ 0303-2016-0017 Института катализа им. Г. К. Борескова СО РАН.

ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСИ

Туров М. М., Панов А. В.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; gjd.y@ya.ru

Динамика газовзвеси в изотермическом случае без учета взаимодействия частиц описывается системой уравнений [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 + \rho_1 \mathrm{div} \vec{u}_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \rho_2 + \rho_2 \mathrm{div} \vec{u}_2 = 0, \\ \rho_1 \left(\dfrac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_1 \right) + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\dfrac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \\ \rho_2 \left(\dfrac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \vec{u}_2 \right) + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \dfrac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2). \end{cases}$$

Здесь $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ — векторы скоростей первой и второй фаз, ρ_1, ρ_2 — парциальные плотности фаз, $P(\rho_1, \rho_2)$ — давление смеси, $m_2 = \dfrac{\rho_2}{\rho_{22}}$ — объёмная концентрация второй фазы, ρ_{22} — абсолютная плотность второй фазы (постоянная величина), $m_1 = 1 - m_2$ — объёмная концентрация первой фазы, $\dfrac{d}{dt_1} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla$, $\dfrac{d}{dt_2} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla$.

В докладе рассматриваются точные упрощения указанной системы уравнений, выведенные относительно трехмерных подалгебр алгебры Ли допускаемых преобразований [2, 3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00226 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Панов А. В.* Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 2. С. 71–82.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ТИПА КАРТРАЙТ – ЛИТТЛВУДА

Уткина Е. А.[1], **Чупахин А. П.**[2]

Новосибирский государственный университет,
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия;
[1]e_a_utkina@list.ru, [2]alexander190513@gmail.com

Уравнение нелинейного осциллятора успешно применяется для описания релаксационных колебаний гемодинамических параметров (давление и скорость) в сосудах головного мозга [1]. Это уравнение адекватно описывает пульсации сложной системы “поток крови — упругая стенка сосуда — гелеобразная среда головного мозга” и моделирует изменение параметров каждой из компонент системы (течение крови в артериях, венах, синусах). Коэффициенты уравнения, описывающие демпфирующие и упругие свойства этой системы, определяются исходя из экспериментальных (клинических) данных.

В работе Картрайт и Литтлвуда [2] аналитически исследовано поведение решений $y = y(t)$ модельного уравнения

$$\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos \lambda t \tag{1}$$

и обнаружено большое многообразие решений в зависимости от значений вещественных параметров b, k и λ. Уравнение (1) может иметь как устойчивые периодические решения, так и субгармоники. При некоторых значениях параметров происходит разрушение периодического решения.

В работе приведен численный анализ решений уравнения в зависимости от параметров, входящих в (1). Исследуется также случай нелинейной упругости системы и тригонометрического полинома в качестве вынуждающей силы. Этот анализ опирается на результаты работ [2–3] и обнаруживает как интересные периодические решения, так и режимы их разрушения. Рассматривается связь уравнения (1) с уравнением нелинейного осциллятора, описывающим гемодинамику головного мозга.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cherevko A. A., Mikhaylova A. V., Chupakhin A. P., Ufimtseva I. V., Krivoshapkin A. L., Orlov K. Yu.* Relaxation oscillation model of hemodynamic parameters in the cerebral vessels // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722. Article ID 012045, 8 pages.
2. *Cartwright M. L., Littlewood J. E.* On non-linear differential equations of the second order. I. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large // J. Lond. Math. Soc. 1945. V. 20. P. 180–189.
3. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964.

О МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МИКРОГЕНЕРАТОРЕ ТАКТОВОЙ ЧАСТОТЫ

Фадеев С. И.[1], **Косцов Э. Г.**[2], **Когай В. В.**[3]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* fadeev@math.nsc.ru

[2]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия;* kostsov@iae.nsk.su

[3]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* kogai@math.nsc.ru

В последние годы широкое распространение получили принципиально новые микроэлектромеханические генераторы тактовой частоты (МЕМС-генераторы). Среди возможных физических принципов их функционирования, электростатические генераторы являются наиболее технологичными, они допускают широкую вариацию их параметров [1]. В рассматриваемой схеме генератора основной компонентой является подвижный электрод в виде недеформируемой микроплатформы, прикреплённой к пружине, совершающий колебания в межэлектродном микрозазоре в присутствии электрического поля. Отличительной особенностью функционирования указанной структуры в режиме генератора частоты является необходимость поддержания незатухающих колебаний подвижного электрода с постоянной амплитудой в среде с сопротивлением. При этом подкачка энергии реализуется в виде последовательности прямоугольных электростатических импульсов конечной длительности, воздействующих на подвижный электрод в момент его перехода через исходную позицию с положительной скоростью.

Принцип работы рассматриваемой математической модели микрогенератора аналогичен теории часов со спусковым ударным механизмом, изложенной в [2], отличаясь формулировкой правой части в уравнении движения учётом электростатической природы импульсного воздействия. Как показывает проведенный численный анализ, ограниченные колебания с ростом времени стремятся в фазовой плоскости к устойчивому предельному циклу. Тем самым выполняется основное свойство автоколебаний, описываемых математической моделью. В работе сформулирована краевая задача для описания периодических колебаний и периода. Это позволило применением метода продолжения по параметру, использующем дифференциальные прогонки метода множественной стрельбы [3, 4], определить в виде диаграмм основные характеристики нелинейных колебаний, включая построение в плоскости параметров областей существования устойчивых предельных циклов.

Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта № 273 “Разработка физико-технических принципов создания генератора тактовой частоты, устойчивого к сверхвысоким инерциальным перегрузкам”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косцов Э. Г., Фадеев С. И.* Новые электромеханические резонаторы для гигогерцевых частот // Автометрия. 2013. Т. 10, № 2. С. 115–122.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Когай В. В., Фадеев С. И.* Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1. С. 83–101.
4. *Фадеев С. И., Когай В. В.* Линейные и нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 2018.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Фалалеев М. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
mvfalaleev@gmail.com

В докладе представлен обзор результатов о разрешимости задачи Коши для абстрактного интегродифференциального уравнения в банаховых пространствах вида

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t),$$

где B, A, $k(t)$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, здесь E_1, E_2 — банаховы пространства, оператор B — фредгольмов [1], $N \geq 2$. Оператор B имеет полный A-жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\} \in E_1$ [1], в этом случае сопряженный оператор B^* имеет полный A^*-жорданов набор $\{\psi_i^{(j)}\} \in E_2^*$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$.

Для рассматриваемого уравнения решена проблема однозначной разрешимости в классе распределений с ограниченным слева носителем. Представлены результаты исследований для следующих случаев:

а) ядро интегрального оператора является линейной комбинацией операторов A и B, т. е. $k(t) = \alpha(t)A + \beta(t)B$, см. [2];

б) $k^{(\nu)}(0) = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots N(p-1) - 1$, $p = \max p_i > 1$, см. [3];

в) $\{\varphi_i^{(j)}\} \in \ker k(0)$, см. [4];

г) $\langle k(t)\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle \equiv 0$, см. [5].

Полученные теоремы допускают обобщения на другие случаи вырождения оператора B, а именно, нётеровость [1], спектральная, секториальная или радиальная ограниченность операторного пучка $(B - \lambda A)$. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах различных начально-краевых задач из теории математического моделирования колебательных процессов в вязкоупругих средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М: Наука, 1969.
2. *Фалалеев М. В.* Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2013. Т. 6, № 4. С. 128–137.
3. *Falaleev M. V.* Fundamental operator-valued functions of singular integrodifferential operators in Banach spaces // J. Math. Sci., New York. 2018. V. 230, No. 5. P. 782–785.
4. *Фалалеев М. В.* Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2016. Т. 17. С. 77–85.
5. *Фалалеев М. В.* Теория фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах и приложения // Математика, её приложения и математическое образование (МПМО–17): Материалы VI Международной конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017. С. 349–353.

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДВУСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ С ТРЕЩИНОЙ

Фанкина И. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; fankina.iv@gmail.com

Изучается задача, описывающая равновесие двуслойной конструкции с трещиной. Конструкция состоит из двух упругих пластин, поведение которых моделируется в рамках плоской задачи теории упругости. Верхняя пластина приклеена к нижней по части края. Для нижней пластины линия склейки представляет собой кривую, выходящую на внешнюю границу области, занимаемой пластиной, под нулевым углом. Предполагается, что вне линии склейки край нижней пластины закреплен, а край верхней пластины свободен от поверхностных сил. Также предполагается, что в нижнем слое вдоль линии склейки присутствует трещина. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, которые препятствуют их взаимному прониканию.

С помощью метода фиктивных областей доказана разрешимость задачи равновесия. Рассмотрено семейство аналогичных задач равновесия, снабженных параметром, отвечающим за упругость верхнего слоя. Установлена сходимость решений семейства задач при стремлении параметра к нулю и к бесконечности. Получены формулировки задач равновесия в обоих предельных случаях.

ИМПУЛЬСНО-СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Финогенко И. А.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; fin@icc.ru

Исследуется управляемый объект вида

$$\dot{x} = f(t, x) + u, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(t, x)$ — измеримая функция, u — управляющее воздействие, задаваемое некоторым абстрактным оператором $u \leftarrow p(t, x)\delta_t$, сопоставляющим каждому текущему моменту времени t и состоянию объекта x импульс $p(t, x)\delta_t$, вектор-функция $p(t, x)$ — интенсивность импульса, δ_t — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени t. Выражение $p(t, x)\delta_t$ ("бегущий импульс"), как обобщенная функция, смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе (1) функционирует импульсное позиционное управление, подразумевающее дискретную реализацию "бегущего импульса" в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках $h : t_0 < t_1 < \ldots t_N = \theta$ разбиения отрезка I. Результатом такой последовательной коррекции является разрывная кривая $x^h(\cdot)$, называемая ломаной Эйлера, по определению совпадающая на промежутках $(t_k, t_{k+1}]$ с решением в смысле Филиппова задачи Коши

$$\dot{x} \in f(t, x), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big).$$

В случае, когда в результате действия корректирующего импульса в момент времени t_k предельная справа точка $(t_k, x(t_k + 0))$ интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sigma^j(t, x) = 0,\ j = \overline{1, m}\}$, множество ломаных Эйлера называется *импульсно-скользящим режимом*, а предел последовательности ломаных Эйлера — *идеальным импульсно-скользящим режимом.* Мы рассматриваем вопрос об уравнении идеального импульсно-скользящего режима. Изучается также случай уравнений $\dot{x} = f(t, x_t)$ с кусочно непрерывной функцией f при наличии запаздывания.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-01-00505).

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ПЛАСТИНЫ И БАЛКИ С ПАРАМЕТРОМ СЦЕПЛЕНИЯ

Фурцев А. И.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; furtsev@hydro.nsc.ru

Доклад посвящен задаче теории упругости, описывающей контакт двух тел — пластины и балки. Рассматриваемая задача обладает рядом отличительных свойств, к числу которых относятся следующие особенности. Во-первых, задача ставится в области с негладкой границей (а именно, в области, содержащей разрез): эта особенность связана с тем, что пластина и балка являются телами различных размерностей. Во-вторых, набор краевых условий включает в себя условия вида неравенств: эта особенность задачи является следствием того, что используются контактные условия типа Синьорини, предотвращающие нежелательный эффект взаимного проникновения тел при контакте. И, наконец, в задаче учитывается эффект сцепления между телами, а краевые условия содержат числовой параметр, характеризующий силы сцепления.

Докладываемые результаты относятся к вопросам изучения разрешимости задачи и исследования зависимости решения от параметра сцепления. Доказано, что задача имеет единственное вариационное решение. Установлено, что вариационное решение непрерывно зависит от параметра сцепления. Исследован предельный переход при стремлении параметра к бесконечности, в частности, проанализирована соответствующая предельному случаю задача.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Хазова Ю. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; hazova.yuliya@hotmail.com

На круге рассматривается смешанная краевая задача для нелинейного параболического уравнения

$$u_t(r,\varphi,t) + u(r,\varphi,t) = D\triangle u(r,\varphi,t) + K(1+\gamma\cos Qu(r,\varphi,t)),$$

$$0 < r < r_1,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ t > 0,$$

с преобразованием отражения пространственной переменной

$$Qu(r,\varphi,t) = u(r,\pi-\varphi,t),$$

условием Неймана

$$\frac{\partial u(r_1,\varphi,t)}{\partial r} = 0,$$

условием периодичности

$$u(r,\varphi+2\pi,t) = u(r,\varphi,t),$$

ограниченности по r в нуле

$$|u(0,\varphi,t)| \le c < \infty$$

и начальным условием

$$u(r,\varphi,0) = q_0(r,\varphi),$$

где $\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, параметр $D > 0$, K — положительный коэффициент, $0 < \gamma < 1$.

Доказывается существование и единственность решения начально-краевой задачи параболического уравнения по следующей схеме. Исходная задача записывается в виде задачи Коши для нелинейного операторного параболического уравнения в соответствующем функциональном пространстве с учетом граничных условий. Далее используются результаты по разрешимости операторных дифференциальных уравнений [1–3]. Сводим задачу к операторному уравнению, для которого выполняются условия теоремы Лерэ – Шаудера о разрешимости нелинейных операторных уравнений [4]. Эти результаты при фиксированных параметрах позволяют установить единственность и непрерывную зависимость решения от начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J. L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et applications. Paris: Dunod, 1968.
2. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
3. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1997.
4. *Лерэ Ж., Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1, № 3–4. С. 71–95.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КРУГЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛЕНКОЙ

Холодовский С. Е.

Забайкальский государственный университет, Чита, Россия;
hol47@yandex.ru

Для функции $u(r,\alpha)$ в круге $r<1$ рассмотрена краевая задача

$$\Delta u \equiv r^{-1}(ru_r)_r + r^{-2}u_{\alpha\alpha} = 0, \quad u + Bu_r + AB(ru_r)_r|_{r=1-0} = \varphi(\alpha), \tag{1}$$

где (r,α) — полярные координаты, постоянные $A,B>0$, $\varphi(\alpha)\in L[0,2\pi)$. Граничное условие (1) соответствует условию на двухслойной пленке, состоящей из сильнопроницаемой прослойки $r=1-0$ с параметром A и слабопроницаемой прослойки $r=1+0$ с параметром B, $\varphi(\alpha)$ — значения искомой функции $u(1+0,\alpha)$ на внешней стороне пленки [1].

Теорема. *Решение задачи* (1) *существует, единственно и в случаях* $T=B(B-4A)\neq 0$ *и* $T=0$ *строится соответственно по формулам*

$$u(r,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int\limits_0^\infty f(re^{-z},\alpha)\left(e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_2 z}\right)dz, \quad \gamma_i = \frac{B+(-1)^i\sqrt{T}}{2AB}, \tag{2}$$

и

$$u(r,\alpha) = \frac{1}{AB}\int\limits_0^\infty f(re^{-z},\alpha)e^{-\gamma z}z\,dz, \quad \gamma = \frac{1}{2A}, \tag{3}$$

где $f(r,\alpha)$ *— решение классической задачи Дирихле в круге:* $\Delta f = 0$, $r<1$, $f|_{r=1}=\varphi(\alpha)$, *которое строится по формуле Пуассона.*

Выражения для u (2), (3) являются операторами, действующими на функцию f по одной переменной r. Обратный оператор имеет вид $f = u + Bru_r + ABr(ru_r)_r$.

Если $f(r,\alpha)$ — решение краевой задачи в секторе $G=(0<r<1)\times(0<\alpha<p)$ вида $\Delta f=0$, $f|_{r=1}=\varphi(\alpha)$, $N_1 f|_{\alpha=0}=0$, $N_2 f|_{\alpha=p}=0$, то функции (2), (3) являются решениями задачи (1) в секторе G с аналогичными граничными условиями $N_1 u|_{\alpha=0}=0$, $N_2 u|_{\alpha=p}=0$, где N_i — операторы граничных условий первого, или второго, или третьего рода по переменной α в произвольном сочетании.

Решения рассмотренных задач с уравнением Пуассона и неоднородными граничными условиями на ∂G имеют вид $u=v+w$, где v — решение аналогичной задачи без пленки (при $A=B=\varphi=0$), w — решение рассмотренной соответствующей задачи с пленкой для граничной функции (1) вида $\varphi - Bv_r - AB(rv_r)_r|_{r=1}$.

Работа выполнена в рамках гранта Совета по НиИД Забайкальского государственного университета (проект № 250-ГР).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холодовский С. Е.* О многослойных пленках на границе полупространства // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 3. С. 421–427.

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА

Хубиев К. У.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khubiev_math@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = 0, \quad y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda_2 u(x_2, y) = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_1, BB_1, A_1B_1 прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T > 0$ соответственно при $y > 0$, характеристиками $AA_2 : x - y = 0$, $BB_2 : x - y = r$ уравнения (1) и отрезком A_2B_2 прямой $y = x_2 - r$ при $y < 0$, $x_1, x_2 \in [0, r)$, $\lambda_1, \lambda_2, c = \mathrm{const}$.

Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2_x(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) с непрерывной вплоть до отрезка BB_1 производной первого порядка по переменной x, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad 0 \le y \le T, \tag{2}$$

$$[\alpha_0(y)u_x + \beta_0(y)u]|_{x=x_0} = [\alpha_r(y)u_x + \beta_r(y)u]|_{x=r} + \varphi_r(y), \tag{3}$$

где $\alpha_i(y)$, $\beta_i(y)$, $\varphi_i(y)$ — заданные непрерывные функции, $i = 0, r$.

Замечание. Когда $\lambda_2 = 0$, т. е. в гиперболической части области задается ненагруженное уравнение, или же нагруженное слагаемое имеет вид $\lambda_2 u(x, 0)$, решение можно найти в полуполосе, ограниченной характеристиками AA_2, BB_2 уравнения (1) и отрезком прямой $y = 0$. А в случае уравнения (1) область будет ограничиваться еще и отрезком прямой $y = x_2 - r$.

Внутреннекраевая задача (2)–(3) является аналогом задачи Бицадзе – Самарского для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа. Для модельного уравнения гиперболо-параболического типа второго порядка задача (2)–(3) была исследована в работе [1], в работе [2] эти результаты были обобщены для нагруженного гиперболо-параболического уравнения. В работе [3] была рассмотрена задача (1)–(3) при $\alpha_0(y) = \alpha_r(y) = \beta_0(y) \equiv 0$, $\beta_r(y) = -1$. В данной работе при определенных условиях на заданные коэффициенты доказывается однозначная разрешимость задачи (1)–(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Напсо А. Ф.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 185–186.
2. *Хубиев К. У.* Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2008. № 6 (148). С. 23–25.
3. *Хубиев К. У.* Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. С. 113–117.

К ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Хуштова Ф. Г.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khushtova@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка α, определяемый равенствами [1, 2]: $D_{0y}^{\alpha}\, g(y) = dg/dy$, если $\alpha = 1$ и $D_{0y}^{\alpha}\, g(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int\limits_0^y \frac{g(t)}{(y-t)^{\alpha}} dt$, если $0 < \alpha < 1$; $B_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{d}{dx}$ — оператор Бесселя, $|b| < 1$.

Пусть $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x < 0\}$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$, и такую, что $y^{1-\alpha} u \in C(\bar{\Omega})$, $|x|^b u_x \in C(\Omega)$, u_{xx}, $D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$.

Задача Коши. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

В работе [3] доказана следующая теорема единственности.

Теорема. *Существует не более одного регулярного решения задачи Коши (1)–(2) в классе функций, удовлетворяющих для некоторой положительной постоянной k условию*

$$\lim_{|x| \to \infty} y^{1-\alpha}\, u(x,y) \exp\left(-k\,|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0. \tag{3}$$

В данной работе показано, что показатель $\frac{2}{2-\alpha}$ в условии (3) нельзя увеличить. Примером служит функция $y^{\mu-1}\, T_{\mu}\left(\frac{x^2}{4y^{\alpha}}, \frac{1}{y^{\rho}}\right)$, где

$$T_{\mu}(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{\beta+n}}{n!\,\Gamma(1+\beta+n)}\, \phi\left(-\rho, \mu - \alpha\beta - \alpha n; -\zeta\right), \quad \alpha < \rho < 1,$$

$\phi\left(-\rho, \delta; -\zeta\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^n}{n!\,\Gamma(\delta - \rho\, n)}$ — функция Райта [2], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
3. *Хуштова Ф. Г.* Задача Коши для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана – Лиувилля // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 1. С. 74–84.
4. *Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F.* Analytical properties and applications of the Wright function // Fract. Calc. Appl. Anal. 1999. V. 2, No. 4. P. 383–414.

УСРЕДНЕНИЕ ТРАЕКТОРНЫХ АТТРАКТОРОВ НЕАВТОНОМНЫХ 3D СИСТЕМ НАВЬЕ – СТОКСА СО СЛУЧАЙНЫМИ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

Чепыжов В. В.[1], **Чечкин Г. А.**[2]

[1] *Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия;* chep@iitp.ru

[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* chechkin@mech.math.msu.su

Асимптотический анализ и метод усреднения являются основными инструментами при изучении математических задач, моделирующих среды со сложной микроструктурой (см. [1–3]). Аттракторы описывают предельное поведение по времени решений диссипативных нелинейных УрЧП (см. [4, 5]).

В настоящем докладе изучается асимптотическое поведение траекторных аттракторов неавтономных 3D систем Навье – Стокса со случайными быстро осциллирующими внешними силами в ограниченной области $D \Subset \mathbb{R}^3$ с условиями прилипания на границе следующего вида:

$$\partial_t u_\varepsilon + \nu L u_\varepsilon + B(u_\varepsilon) = g\left(x, \tfrac{t}{\varepsilon}, \omega\right), \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \quad u_\varepsilon|_{\partial D} = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$, $g = (g^1, g^2, g^3)$, и $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, u_\varepsilon^3)$ — неизвестное векторное поле, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. В системе (1) L — оператор Стокса, $Lu = -P\Delta u$, и $B(u,u) := P(u,\nabla)\,u = P\sum_{i=1}^3 u_i\,\partial_{x_i} u$, P — ортопроектор Лерэ.

Предполагается, что известная внешняя сила $g_\varepsilon = g\left(x, \frac{t}{\varepsilon}, \omega\right)$ является случайной статистически однородной по времени функцией, удовлетворяющей условию эргодичности по случайному параметру ω, который является элементом стандартного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Наряду с системой (1) рассматривается соответствующая усредненная автономная 3D система Навье – Стокса с детерминированной внешней силой $g^{\mathrm{hom}}(x)$, которая является математическим ожиданием случайной функции $g_\varepsilon(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Доказано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ системы со случайной быстро осциллирующей силой сходится с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$ к траектороному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ усредненной системы в соответствующем энергетическом пространстве.

Отметим, что для рассматриваемых 3D систем Навье – Стокса теорема единственности решения задачи Коши не доказана и не используется, поскольку при асимптотическом анализе применяется метод траекторных аттракторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00515 и № 18-01-00046).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
2. *Bakhvalov N. S., Panasenko G. P.* Averaging processes in periodic media. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1989.
3. *Jikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A.* Homogenization of differential operators and integral functionals. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
4. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
5. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence: Amer. Math. Soc., 2002.

О ПРИЗНАКАХ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Чудинов К. М.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; cyril@list.ru

Исследуются неулучшаемые достаточные условия осцилляции решений дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с несколькими переменными запаздываниями, выраженные в виде явных оценок параметров уравнения. Рассматриваются несколько подходов к задаче и сравниваются достигаемые результаты. В частности, приведенные ниже условия осцилляции решений разностного уравнения

$$\Delta x(n) + \sum_{k=1}^{m} p_k(n) x(\tau_k(n)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $p_k(n) \geq 0$, $\tau_k(n) \leq n-1$, $\tau_k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, сопоставляются с другими наиболее сильными из известных условий.

Теорема [1]. *Положим* $E_k(n) = \{i \geq n \mid \tau_k(i) \leq n-1\}$. *Если*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in E_k(n)} p_k(i) > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Теорема [2]. *Если функции* $r_k(n) = n - \tau_k(n)$ *ограниченны и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} p_k(n) r_k(n) > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Теорема [3]. *Положим* $H_k(n) = \{i \geq n \mid \tau_k(i) \leq n\}$. *Для* $n, k \in \mathbb{Z}$ *положим*

$$a_1(n,k) = \prod_{i=k}^{n-1} \Big(1 - \sum_{j=1}^{m} p_j(i)\Big);$$

$$a_{r+1}(n,k) = \prod_{i=k}^{n-1} \Big(1 - \sum_{j=1}^{m} p_j(i) a_r^{-1}(i, \tau_j(i))\Big), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Если для некоторого $r \in \mathbb{N}$ *имеем* $\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in H_i(n)} p_i(j) a_r^{-1}(n, \tau_i(j)) > 1$, *то все решения уравнения* (1) *осциллируют.*

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chudinov K. M.* Sharp explicit oscillation conditions for difference equations with several delays // Georgian Math. J. 2018 (in print).
2. *Чудинов К. М.* О новых подходах к получению осцилляции решений разностных уравнений с последействием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Пермь: Изд-во Пермск. национальн. исслед. политехн. ун-та, 2018. С. 277–286.
3. *Чудинов К. М.* Эффективные условия осцилляции решений разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Динамические системы. 2018 (в печати).

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ РАЗРЕЖЕННОЙ КОНЕЧНОЙ МАССЫ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

Чуев Н. П.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия; n_chuev@mail.ru

Проблемы современной газодинамики связаны с исследованием законов движения (течений) газа, и наиболее важными являются задачи с переменной областью течения газа, ограниченной свободной границей. В работе исследуется эквивалентная системе газовой динамики система интегродифференциальных уравнений, что позволяет применить для решения системы метод последовательных приближений.

Пусть в момент $t = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана область Ω_0, заполненная идеальным разреженным политропным газом, частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. Замкнутая граница данной области Γ_0 является функцией класса C^∞. В начальный момент времени $t = 0$ в каждой точке $\boldsymbol{x} = \{x, y, z\}$ области Ω_0 известны распределения вектора скорости $\boldsymbol{u_0} = \{u_0, v_0, w_0\}$ частиц газа, плотности $\rho = \rho_0(\boldsymbol{x})$, которые также являются функциями класса C^∞. Течения газа будут определены решением интегродифференциальной системы трехмерных уравнений газовой динамики в форме Л. Эйлера [1]:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\Phi, \\ &\rho_t + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{u}) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Phi(\boldsymbol{x}, t) = G \iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x}'$ — ньютоновский потенциал, созданный всей массой газа, G — гравитационная постоянная, ∇ — оператор градиента, $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ — расстояние между точками переменной области Ω_t. Систему (1) часто в литературе называют "системой газовой динамики без давления". Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\Phi = -4\pi G\rho$, где Δ — оператор Лапласа по $\boldsymbol{x}$ [2].

Применяя лагранжевы координаты $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, получим эквивалентное системе (1) интегродифференциальное уравнение типа Вольтерра:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + t\,\boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{\xi}) + G\int\limits_0^t \left[(t-\tau)M^{*-1}\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \iiint\limits_{\Omega_0} \frac{\rho_0(\boldsymbol{\xi}')}{|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},\tau) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}',\tau)|} d\boldsymbol{\xi}'\right] d\tau, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{u_0}(\boldsymbol{\xi})$ — начальная скорость, ρ_0 — начальная плотность, $M = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)$ — матрица Якоби, M^* — транспонированная матрица, $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ — градиент по переменным $\boldsymbol{\xi}$, Ω_0 — начальная область газа. Решив (2), найдем газодинамические параметры как функции переменных Лагранжа: $\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}$, $\rho = \rho_0 J$, где $J = \det M$, а переменную область Ω_t — как образ Ω_0 при преобразовании (2).

Если при $t = 0$ координаты $\boldsymbol{\xi}$ заданы на границе, то формула (2) при $t > 0$ определяет закон движения свободной границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
2. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953.

ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Чуешев В. В.[1], **Чуешев А. В.**[2]

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
[1]vvchueshev@ngs.ru, [2]chueshev@ngs.ru

Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$. Обозначим через D открытый круг на плоскости $\mathbb{C}$, через Γ — фуксову группу первого рода, $F = D/\Gamma$. Рассмотрим возмущенное уравнение на D/Γ вида

$$u^{(3)}(z) + (Q_0(z) - \lambda q(z))u^{(1)}(z) + R_0(z)u(z) = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $Q_0(z) = Q_0(Lz)L'(z)^2$, $R_0(z) = R_0(Lz)L'(z)^3$, $q(z)$ — голоморфный дифференциал на D/Γ второго порядка, $L \in \Gamma$. Вектор-решение разложим в ряд Тейлора

$$U(z,\lambda) = U_0(z) + \lambda U_1(z) + \ldots + \lambda^k U_k(z) + \ldots, \quad |\lambda| < \epsilon, \quad z \in D.$$

Для $L \in \Gamma$, $z \in D$ верно равенство $U(Lz) = \chi(L)U(z)\xi_L^2(z)$, где $\xi_L(z) = \sqrt{L'(z)}$ [1–2].

Теорема. *Для уравнения* (1) *верны точные вариационные формулы для вектор-решения:*

$$U(z,\lambda) = [E + \lambda A_0(z) + \lambda^2 A_1(z) + \ldots + \lambda^n A_{n-1}(z) + \ldots]U_0(z),$$

где $z \in D$, $|\lambda| < \epsilon$ *и*

$$A_n(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \Big[A(x)D^n(x) + A_0(x)A(x)D^{n-1}(x) + A_1(x)A(x)D^{n-2}(x) + \ldots$$

$$\ldots + A_{n-2}(x)A(x)D(x) + A_{n-1}(x)A(x)\Big]dx,$$

$$A(x) = q(x)U_0^{(1)}(x)V(x), \quad D(x) = q(x)U_0(x)V(x), \quad A_0(z) = \int\limits_{z_0}^{z} A(x)dx,$$

$V(x)$ — *матричное решение двойственного уравнения к уравнению* (1) *при* $\lambda = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00420).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hejhal D. A.* Monodromy groups for higher-order differential equations // Bull. Am. Math. Soc. 1975. V. 81, No. 3. P. 590–592.
2. *Hejhal D. A.* The variational theory of linearly polymorphic functions // J. Anal. Math. 1976. V. 30. P. 215–264.

О ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Чуешева Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
chuesheva@ngs.ru

В работе [1] рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$u_{xxx}u_y^3 - 3u_{xxy}u_y^2u_x + 3u_{xyy}u_yu_x^2 - u_{yyy}u_x^3$$

$$+3\beta\sqrt{\left(u_x^2 + u_y^2\right)}\left(u_{xx}u_xu_y + u_{xy}\left(u_y^2 - u_x^2\right) - u_{yy}u_xu_y\right) = 0. \tag{1}$$

Пример 1. Пусть дана область $D = \left\{x^2 + y^2 < c^2\right\} \subset \mathbb{R}^2$ с границей Γ. Тогда функция $u = \left(x^2 + y^2 - c^2\right)^n$, $n \geq 4$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет следующим условиям на границе Γ : $u|_\Gamma = u_x|_\Gamma = u_y|_\Gamma = 0$, $u_{xx}|_\Gamma = u_{yy}|_\Gamma = u_{xy}|_\Gamma = u_{xxx}|_\Gamma = u_{yyy}|_\Gamma = u_{xxy}|_\Gamma = u_{xyy}|_\Gamma = 0$. При этом если n — чётное, то в области D и в области $\left\{x^2 + y^2 > c^2\right\}$ имеем $u > 0$. Если n — нечётное, то в области D имеем $u < 0$, а в области $\left\{x^2 + y^2 > c^2\right\}$ — $u > 0$.

Пример 2. Пусть в уравнении (1) коэффициент $\beta = 0$. Рассмотрим область $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$ с границей $\Gamma = \{y = 0\}$. В этой области с краевыми условиями $u|_{y=0} = e^{-x^2}/n^5$, $u_y|_{y=0} = e^{-x^2}/n^4$, $u_{yy}|_{y=0} = e^{-x^2}/n^3$ функция $u = e^{ny-x^2}/n^5$ будет неустойчивым решением уравнения (1).

Лемма. *Пусть дана область* $D = \left\{0 < x^2 + y^2 - c^2 < 2\pi/\sqrt{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ *с границей* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 - c^2 = 0\right\}$, $\Gamma_2 = \left\{x^2 + y^2 - c^2 = 2\pi/\sqrt{3}\right\}$. *Пусть функция* $u\left(x^2 + y^2 - c^2\right) \in C^3\left(\overline{D}\right)$ *и удовлетворяет следующим условиям на границе:*

$$u|_{\Gamma_1} = u_x|_\Gamma = u_y|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Тогда такая функция будет не единственным решением краевой задачи (2) *для уравнения* (1).

Замечание. Например, условия леммы выполняются для $u\left(x^2 + y^2 - c^2\right)$

$$= \sqrt{3} + e^{\left(x^2+y^2-c^2\right)/2}\left(\sin\left(\left(x^2 + y^2 - c^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\cos\left(\left(x^2 + y^2 - c^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

краевых условий (2) и области D с границей Γ.

В работе [2] приведено точное решение для уравнения Кортевега – де Фриза

$$P_2u \equiv u_t + u_{xxx} + 6u \cdot u_x = 0. \tag{3}$$

В области D с границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{x+8t = 0\}$, $\Gamma_2 = \left\{x + 8t = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}$, решением уравнения (3) является функция $u = -2\tanh^2(x + 8t)$, удовлетворяющая краевым условиям

$$u|_{\Gamma_1} = u_x|_{\Gamma_1} = u_t|_{\Gamma_1} = u_{xxx}|_{\Gamma_1} = u_{xx}|_{\Gamma_2} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bialy M., Mironov A. E.* Angular billiard and algebraic Birkhoff conjecture // Adv. Math. 2017. V. 313. P. 102–126.
2. *Чуешева Н. А.* Несколько уравнений с частными производными высокого порядка // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2016. Т. 16, № 3. С. 103–117.

К ВОПРОСУ О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Чуйко С. М.

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина; chujko-slav@inbox.ru

Исследована задача о построении решений [1]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_n[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^n$$

линейной дифференциально-алгебраической системы [2, 3]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad f(t) \in \mathbb{C}[a,b], \tag{1}$$

здесь

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

— непрерывные матрицы. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной.

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы. Получены достаточные условия приводимости дифференциально-алгебраического уравнения к последовательности систем, объединяющих обыкновенные дифференциальные и алгебраические уравнения без использования центральной канонической формы, совершенных пар и троек матриц [3]. Предложена классификация, а также единая схема построения решений дифференциально-алгебраических уравнений без использования центральной канонической формы, совершенных пар и троек матриц [4] для любых натуральных m и n. Предложенная в статье схема исследования дифференциально-алгебраических систем аналогично [3, 5–7] может быть перенесена на матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-nd edition). Berlin, Boston: De Gruyter, 2016.
2. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
3. *Chuiko S. M.* To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // J. Math. Sci., New York. 2017. V. 227, No. 1. P. 13–25.
4. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
5. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. 2015. V. 56, No. 4. P. 752–760.
6. *Чуйко С. М.* О разрешимости матричной краевой задачи // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 132. С. 139–143.
7. *Чуйко С. М.* О понижении порядка в дифференциально-алгебраической системе // Укр. мат. вестник. 2018. Т. 14, № 1. С. 76–90.

ГЛОБАЛЬНОЕ ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Шагалова Л. Г.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; shag@imm.uran.ru

Рассматривается полученное в [1] для модели Кроу – Кимуры молекулярной эволюции нелинейное уравнение Гамильтона – Якоби с заданным начальным условием и фазовыми ограничениями:

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [-1; 1], \tag{1}$$

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1]. \tag{3}$$

Функции $f(\cdot)$ и $u_0(\cdot)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

В [2] введено понятие обобщенного решения задачи (1)–(3), доказано его существование и неединственность. В [3] выделены достаточные условия существования и обоснована конструкция обобщенного решения заданной структуры такого, что в области, где определены выпущенные с начального многообразия классические характеристики уравнения (1), решение строится с их помощью. При этом решения рассматривались на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$, где момент $T > 0$ определяется из условия продолжимости на отрезок $[0, T]$ характеристик — решений следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p},$$

$$\dot{p} = -H_x(x,p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2,$$

$$\dot{z} = pH_p(x,p) - H(x,p).$$

Здесь $H_x(x,p) = \partial H(x,p)/\partial x$, $H_p(x,p) = \partial H(x,p)/\partial p$.

В данной работе выделяются достаточные условия, при которых существует глобальное (определенное на множестве $\overline{\Pi}_\infty = [0; \infty) \times [-1; 1]$) обобщенное решение заданной структуры задачи (1)–(3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00074) и УрО РАН (комплексная программа № 18-1-1-10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E (3). 2008. V. 78, No. 4. Article ID 041908.
2. *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 191–208.
3. *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 247–257.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

Шамолин М. В.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; shamolin@rambler.ru

Как известно, в задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3 и 4 см. [3–5]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

В качестве приложений изучаются динамические уравнения движения, возникающие в плоской и пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, а также возможное обобщение полученных методов исследования на общие системы, возникающие как в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, так и в теории колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Докл. АН. 2016. Т. 471, № 5. С. 547–551.
2. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 2. С. 177–181.
3. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Докл. АН. 2017. Т. 475, № 5. С. 519–523.
4. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Докл. АН. 2017. Т. 477, № 2. С. 168–172.
5. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Докл. АН. 2018. Т. 479, № 3. С. 270–276.

ФОРМУЛА РЕШЕТНЯКА И ОБОБЩЕННЫЕ СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Шарафутдинов В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; sharaf@math.nsc.ru

Формула Решетняка (известная также как формула Планшереля для преобразования Радона) утверждает, что преобразование Радона R является изометрией между $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $H^{(n-1)/2}_{(n-1)/2,e}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})$, где последнее есть гильбертово пространство четных функций на $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$, снабженное некоторой специальной нормой. Для произвольных $s\in\mathbb{R}$ и $t>-n/2$ мы вводим обобщенные соболевские пространства $H^s_t(\mathbb{R}^n)$ и доказываем, что R является изометрией между $H^s_t(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s+(n-1)/2}_{t+(n-1)/2,e}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R})$. Затем мы получаем аналогичные результаты для лучевого преобразования симметричных тензорных полей.

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУСВЯЗНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБЛАСТЬЮ

Шишканова А. А.

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина; shyshkan@gmail.com

Приведены результаты применения метода малого параметра к решению интегральных уравнений, являющихся математическими моделями пространственных задач контактного взаимодействия при внецентренном нагружении с учетом нелинейной зависимости деформационных перемещений шероховатости полупространства от давления.

Предлагается для вычисления двумерных интегралов со слабой особенностью типа потенциала простого слоя, распределенного по двусвязной области, разложение на внутреннюю точку этой области с использованием преобразования полюса ядра интегрального оператора. Предложенное разложение отличается от полученного ранее [1]. В работе показано, что двумерное интегральное уравнение, которое является основным в решении задач о вдавливании штампа в упругое шероховатое полупространство, после применений этих разложений приводится к одинаковой рекуррентной системе для области в форме кругового кольца. Получено преобразование двумерных интегральных уравнений для кругового кольца к одномерным. В случае нелинейной зависимости деформационных перемещений шероховатости от давления выполнено сведение одномерных интегральных уравнений типа Урысона к последовательности линейных уравнений в случае, когда границы интегрирования зависят от параметра.

Разработан численно-аналитический метод нахождения приближенных решений, использующий регуляризацию основного уравнения для задач с учетом нелинейного закона деформирования шероховатости при несимметричном контакте. При применении методов приближенного решения и методов регуляризации погрешность при замене интегрального оператора на дискретный влияет на результат. Еще Н. Н. Боголюбовым и Н. И. Крыловым был разработан эффективный метод замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений, использующий средние значения искомой функции, а также метод аналитического продолжения с помощью функции для замены параметра, которая в простейшем случае является линейной. Система интегральных уравнений приведена к алгебраической с применением квадратурных формул. Полученные в данной работе разложения потенциалов на внутреннюю точку значительно упрощают применение приближенных методов, кроме того, позволяют получать аналитические решения задач с неизвестной заранее областью контакта.

Решена конкретная задача о вдавливании внецентренной силой кольцевого штампа при нелинейном, а именно, степенном законе деформирования шероховатости. Решение получено преобразованием нелинейного интегрального уравнения к уравнению Гаммерштейна. При этом нормальные давления принимают конечные значения по всей области контакта, включая границы. В каждом приближении, кроме нулевого, задачи сведены к линейным. Коэффициент, характеризующий деформационные свойства шероховатости, может быть использован как параметр регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shyshkanova G., Zaytseva T., Frydman O.* The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically // Metallurgical and Mining Industry. 2015. No. 7. P. 352–357.

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛИРОВОК МНОГОФИЗИЧНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Шурина Э. П.[1,2], Добролюбова Д. В.[2], Иткина Н. Б.[1], Кутищева А. Ю.[1,2], Марков С. И.[1,2], Штанько Е. И.[2]

[1] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* shurina@online.sinor.ru

Математическое моделирование многофизичных процессов различной природы (тепломассоперенос, упругая деформация, электромагнетизм) является сложной проблемой, описываемой системой взаимосвязанных дифференциальных уравнений. При построении дискретного аналога для сопряженных процессов необходимо учитывать особенности функциональных пространств, которым принадлежат решения различных задач, и согласовывать вариационные формулировки для каждой конкретной задачи. Современные конечноэлементные методы характеризуются высокой степенью адаптивности под класс прикладных задач и одновременно наличием жестких требований к специальным стабилизирующим членам вариационных формулировок и выбору базиса. Эффективность предлагаемых дискретных аналогов определяется тремя факторами: выбор вариационной формулировки (тип конформных или неконформных МКЭ); выбор базиса; выбор и свойства решателя [1]. Предлагаемая идеология построения вариационных формулировок проиллюстрирована на примере задачи просачивания с учетом тепло и массопереноса флюида и деформации гетерогенной пористой трещиноватой среды при наличии электромагнитных воздействий, данная проблема обладает как геометрической, так и функциональной многомасштабностью. Для ее решения разработаны и реализованы вычислительные схемы неконформных конечноэлементных методов, имеющие следующие преимущества: возможность применения несогласованных конечноэлементных разбиений для учёта геометрической многомасштабности и использование функций формы (полиномиальных и неполиномиальных) на симплициальных и полиэдральных носителях для учёта функциональной многомасштабности [2]. Реализация данного подхода потребовала решение проблемы унисольвентности в конечномерных аналогах пространств Соболева и задачи построения проекторов в конечномерных подпространствах H^{div}, H^{curl}, H^{grad}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold D. N., Falk R. S., Winther R.* Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications // Acta Numerica. 2006. V. 15. P. 1–155.
2. *Brezzi F., Falk R. S., Marini L. D.* Basic principles of mixed virtual element methods // ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. 2014. V. 48, No. 4. P. 1227–1240.

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Щербаков А. И.[1], **Васкевич В. Л.**[1,2]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
Aishcherbakovn@yandex.ru, vask@math.nsc.ru

Рассматриваемые в докладе уравнения имеют вид, в котором производная по времени от неизвестной функции выражена двукратным интегралом по пространственным переменным от весового квадратичного выражения от искомой функции:

$$\frac{d}{dt}u(t,k) = \iint\limits_{P(k)} W(k,k_1,k_2)u(t,k_1)\Big(u(t,k_2) - u(t,k)\Big)dk_1dk_2.$$

Область интегрирования $P(k)$ не ограничена, от времени не зависит, но зависит от пространственной переменной:

$$P(k) = \left\{(k_1,k_2) \mid k_2 > k_1 - k, \quad k_2 < k_1 + k, \quad k_1 + k_2 \geq k\right\}.$$

Свойства множества решений уравнения в целом определяются ядром $W(k,k_1,k_2)$ его интегрального оператора, а также условиями на поведение решения $u(t,k)$ при $k \to +0$ и $k \to +\infty$.

Предполагается, что ядро $W(k,k_1,k_2)$ интегрального оператора — это непрерывная в первом октанте функция, для которой выполняется условие

$$\sup_{k\geq 0} \iint\limits_{P(k)} |W(k,k_1,k_2)|\, dk_1dk_2 \leq M < +\infty.$$

В сопутствующих уравнению функциональных классах исследована задача Коши с начальными данными на положительной полуоси. В применении к этой задаче обоснована сходимость метода последовательных приближений. Дана оценка качества приближения в зависимости от номера итерированного решения. Доказано, что на любом конечном временно́м интервале поставленная задача Коши в сопутствующем классе функций имеет не более одного решения. В этом же классе доказана теорема существования. Выведена соответствующая априорная оценка. Найдена длина гарантированного отрезка существования решения по времени.

О ТРАЕКТОРИЯХ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН В УПРУГИХ ТЕЛАХ

Щербаков В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
victor@hydro.nsc.ru

Один из наиболее распространенных подходов при моделировании квазистатического процесса роста трещин в упругих телах заключается в применении энергетического критерия Гриффитса. Если траектория трещины априори известна, то этот критерий может быть сформулирован в терминах скорости высвобождения энергии (взятая со знаком минус первая производная функционала энергии по длине трещины) и вязкости разрушения (материальный параметр). В докладе обсуждается вопрос о независимости скорости высвобождения энергии в вершине одиночной прямолинейной трещины, расположенной в неоднородном анизотропном линейно-упругом двумерном теле, от выбора траектории развития трещины (при условии H^3 регулярности всей траектории в целом). При этом предполагается, что на берегах трещины заданы нелинейные краевые условия типа Синьорини, не позволяющие противоположным берегам трещины проникать друг в друга. Доказательство основано на анализе явной формулы для скорости высвобождения энергии и применении результата о дополнительной регулярности поля перемещений в окрестности вершины трещины в пространствах Бесова [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-10171).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khludnev A. M., Shcherbakov V. V.* On crack propagation paths inside elastic bodies // Appl. Math. Lett. 2018. V. 79. P. 80–84.

К УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ыскак Т. К.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
istima92@mail.ru

В данной работе рассматривается следующая система нейтрального типа с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big)=A(t)y(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t,t-s)y(s)ds,\quad t>0, \tag{1}$$

где $\tau>0$ — запаздывание, D — квадратная матрица, $A(t)$ — квадратная матрица с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,\xi)$ — квадратная матрица с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной.

Цель работы заключается в исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения и получении оценки решений системы (1), которая характеризует скорость убывания при $t\to\infty$. При исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения использована модификация функционала Ляпунова – Красовского, введенная в [1, 2]:

$$V(t,y)=\langle H(t)\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big),\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds.$$

В работах [1, 2] исследован случай дифференциальных уравнений нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием. В [3] рассмотрена система (1) в случае $D=0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Новосибирской области в рамках научного проекта № 17-41-543365.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
2. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No. 3. P. 119–130.
3. *Yskak T.* Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Funct. Differ. Equ. 2018. V. 25, No. 1–2. P. 97–108.

АВТОКОЛЕБАНИЯ В КАСКАДЕ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ

Юрасова И. И.[1], **Лашина Е. А.**[2], **Чумакова Н. А.**[3]

Новосибирский государственный университет,
Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]i.iurasova@g.nsu.ru, [2]lashina@catalysis.ru, [3]chum@catalysis.ru

Исследуется каталитическая реакция окисления CO на палладиевом катализаторе, в которой участвуют вещества в газовой фазе и на поверхности катализатора. Исследуемый механизм реакции содержит шесть стадий, учитывающих изменение числа активных центров оксида палладия. Целью работы является изучение кинетической модели, описывающей динамику состояния поверхности катализатора, и модели реакции в проточном реакторе идеального смешения, исследование зависимости решений от управляющих параметров и выделение области автоколебаний.

Кинетическая модель, описывающая динамику концентраций на поверхности катализатора, представляет собой систему четырех нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что задача Коши с начальными данными из области определения разрешима в целом по времени, причем решение определяется единственным образом. Исследуется структура фазового пространства в зависимости от управляющих параметров. Решение системы получено численно при помощи вложенных методов Рунге – Кутты; выполнена программная реализация метода продолжения семейства стационарных точек по параметру; определены типы полученных стационарных точек; периодические решения уточняются при помощи одного из методов многоплощадной пристрелки. По результатам численных экспериментов выделена область множественности стационарных точек системы, обнаружены точки бифуркаций Андронова – Хопфа рождения устойчивых циклов, выделены интервалы существования периодических решений.

Система, описывающая динамику концентраций интермедиатов и активных центров, дополняется уравнениями массового баланса для газовой фазы. Полученная система является математической моделью процесса в проточном реакторе идеального смешения, это система шести автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Выделена область существования автоколебаний в зависимости от входных парциальных давлений и числа реакторов смешения в каскаде. Выполнено сравнение результатов, полученных для рассматриваемых моделей.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института катализа СО РАН (проекты 0303-2016-0003 и 0303-2016-0017).

О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Юсупов Г. А.

Таджикский национальный университет, Душанбе, Республика Таджикистан; G_7777`@mail.ru`

Напомним [1, 2], что функция $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$, $z=\rho e^{it}$, $0\le\rho<1$, аналитическая в $|z|<1$, принадлежит банахову пространству $B_{q,\gamma}$, $1\le q\le\infty$, если $\|f\|_{B_{q,\gamma}}=\big(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{K}_1}\gamma(|z|)|f(z)|^qd\sigma\big)^{1/q}<\infty$, где $\gamma(|z|)$ — неотрицательная измеримая весовая функция, $d\sigma$ — элемент площади, и интеграл понимается в смысле Лебега.

Через $B_{q,\gamma,R}$, $1\le q\le\infty$, $0\le R<1$, обозначим пространство аналитических в круге $\mathcal{K}_R=\{z:\ |z|<R\}$ функций $f(z)\in B_{q,\gamma}$, $1\le q\le\infty$, таких, для которых $\|f(z)\|_{B_{q,\gamma,R}}\overset{\text{def}}{=}\|f(Rz)\|_{B_{q,\gamma}}<\infty$. Сопоставим функции $f(z)$ посредством произвольной матрицы комплексных чисел $\Lambda=\{\lambda_{k,n}\}$ $(k=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots)$ последовательность алгебраических полиномов $\mathbf{V}_{\Lambda,n}(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}c_kz^k$. Множество всех треугольных матриц обозначим $\mathcal{L}=\{\Lambda\}$. Величина $\mathcal{E}_n(\mathfrak{M},\Lambda)_{B_{q,\gamma}}=\sup\{\|f(z)-\mathbf{V}_{\Lambda,n}(f,z)\|_{B_{q,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\}$ есть скорость приближения класса $\mathfrak{M}$ полиномами $\mathbf{V}_{\Lambda,n}(f;z)$. Наилучшим линейным методом приближения функции класса $\mathfrak{M}$ называется такая треугольная матрица $\{\Lambda^*\}=\{\lambda^*_{k,n}\}$, для которой

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M},\Lambda^*)_{B_{q,\gamma}}=\inf\left\{\mathcal{E}_n(\mathfrak{M},\Lambda)_{B_{q,\gamma}}:\ \Lambda\subset\mathcal{L}\right\}. \tag{1}$$

Величина (1) определяет наилучшее линейное приближение класса $\mathfrak{M}$ в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1\le q\le\infty$. Для любого $\alpha>0$ через $W^{(\alpha)}B_{q,\gamma,R}$, $1\le q\le\infty$, $0\le R<1$, обозначим класс функций $f(z)$, аналитических в круге $\mathcal{K}_R$, имеющих дробную производную порядка α в смысле Римана – Лиувилля, определяемую равенством

$$z^\alpha f^{(\alpha)}(z)=\sum_{k=[\alpha]}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}c_kz^k,$$

для которых $\left\|z^\alpha f^{(\alpha)}\right\|_{B_{q,\gamma}}\le1$, где $\Gamma(u)$ — гамма-функция Эйлера.

Теорема. *Треугольная матрица Λ^* с элементами*

$$\lambda^*_{k,n-1}=\begin{cases}1,\ k=0,1,2,\ldots,[\alpha]-1,\\ 1-\dfrac{n!}{(2n-k-1)!}\dfrac{\Gamma(2n-k-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}R^{2(n-k)},\ k=[\alpha],[\alpha]+1,\ldots,n-1,\end{cases}$$

определяет наилучший линейный метод для функции класса $W^{(\alpha)}B_{q,\gamma,R}$, $1\le q\le\infty$, $0\le R<1$. При этом для $n\ge[\alpha]$

$$\mathcal{E}_{n-1}(W^{(\alpha)}B_{q,\gamma,R},\Lambda^*)_{B_{q,\gamma}}=R^n\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юсупов Г. А.* О некоторых экстремальных задачах наилучшего приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2009. № 1 (134). С. 18–30.
2. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2009. № 4 (137). С. 7–17.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ВЛИЯНИЕ РЕАКЦИОННОЙ СРЕДЫ НА КАТАЛИЗАТОР

Ядрихинский Х. В.[1], **Чумаков Г. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
ngvru@yahoo.com, chumakov@math.nsc.ru

Трехмерная система быстро-медленных движений. Изучается динамика трехмерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами в правой части

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z),$$

у которой двумерная подсистема относительно переменных x и y не зависит от z.

Глобальная динамика двумерной подсистемы быстрых движений. Предположим, что $f(0, 0) = 0$ и $g(0, 0) = 0$, а в остальных точках $f^2(x, y) + g^2(x, y) \neq 0$. Пусть *вырожденная система* ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

имеет единственный устойчивый предельный цикл $p(t) = (x(t), y(t))$ с периодом T_0, который в $\mathbb{R}^3$ порождает цилиндр S при изменении параметра z из интервала (z_1, z_2).

Задача. Исследовать осциллирующие решения полной системы в окрестности S в $\mathbb{R}^3$ при варьировании функции $h(x, y, z)$.

Изучаются два случая: (1) автоколебания стабилизируются к периодическому решению трехмерной модели, которое близко к предельному циклу двумерной подсистемы; (2) автоколебания происходят с убыванием z-координаты из некоторого интервала (z_1, z_2).

Для решения этой задачи сначала в окрестности поверхности S строятся две поверхности без контакта: S^+ внутри S, состоящая из точек строгого выхода, и S^- снаружи S, состоящая из точек строгого входа. Далее рассматриваются два случая.

Случай 1. Пусть существует такое z_0, при котором выполнены условия теоремы Понтрягина – Родыгина. Тогда

1) при достаточно малых ε в полной системе существует периодическое решение $\gamma(t)$, топологическим пределом которого при $\varepsilon \to 0$ является множество $\{(p(t), z_0),\ t \in [0, T_0)\}$, лежащее на поверхности S;

2) предельный цикл $\gamma(t)$ имеет устойчивое инвариантное многообразие W^-, которое разделяет решения трехмерной системы в окрестности S на те, которые стремятся к $\gamma(t)$ сверху, и те, которые стремятся к $\gamma(t)$ снизу; при этом решения не проходят через инвариантное множество W^-.

Случай 2. Пусть $h(x, y, z) < 0$ в окрестности S. Тогда все траектории, близкие к поверхности S, остаются близи S при убывании z в интервале (z_1, z_2).

ГЕМОДИНАМИКА ВИЛЛИЗИЕВА КРУГА ПРИ САХАРНОМ ДИАБЕТЕ 1 ТИПА

Янькова Г. С.[1], Черевко А. А.[1], Акулов А. Е.[2], Тур Д. А.[2], Паршин Д. В.[1]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* galinayankova2703@gmail.com
[2]*Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск, Россия;* akulov_ae@ngs.ru

Одной из наиболее важных составляющих кровеносной системы головного мозга является Виллизиев круг, обеспечивающий равномерное кровоснабжение. В данной работе изучается вопрос о наличии влияния сахарного диабета 1 типа на Вилизиев круг и примыкающие к нему сонные и позвоночные артерии. Этот вопрос представляет интерес для более глубокого и более точного исследования этого тяжелого заболевания.

В данной работе использовалась генетическая линия высокочувствительных к диабету мышей NOD.CB17-Prkdcscid/J. Животные содержались в Центре генетических ресурсов лабораторных животных, ФИЦ ИЦиГ СО РАН (проект Минобрнауки России RFMEFI62117X0015). В работе использовались самцы и самки с сахарным диабетом продолжительностью 1 месяц, самцы с продолжительностью болезни 2 месяца и соответствующие им здоровые группы животных. Данные для построения сосудистых сетей головного мозга мышей были получены на сверхвысокопольном томографе Bruker BioSpec 117/16USR (ИЦиГ СО РАН). Для всех групп мышей были построены модели сосудистого русла, проведены CFD-расчеты гемодинамики. Выполнен статистический анализ геометрических и гемодинамических характеристик моделей с помощью t-критерия Стьюдента и метода PLS-DA.

Для группы животных с диабетом продолжительностью 1 месяц с помощью t-критерия Стьюдента были выявлены различия только у самок для значений максимальной скорости в сонных артериях, а самцы оказались устойчивыми к заболеванию такой продолжительности. Для самцов из группы с продолжительностью диабета 2 месяца были выявлены статистически значимые различия в гемодинамике и строении Виллизиева круга.

Для обработки данных самцов из обеих групп был применен метод PLS-DA. Показано, что по оси первой главной компоненты самцы разделились согласно наличию заболевания. В формирование первой главной компоненты наиболее значимый вклад внесли гидродинамические параметры сосудистых сетей исследуемых лабораторных животных. По оси второй главной компоненты животные разделились согласно продолжительности заболевания. В формирование второй главной компоненты наиболее существенный вклад вносят геометрические характеристики Виллизиева круга.

На основе проведенного исследования можно сделать вывод, что с увеличением продолжительности заболевания сахарный диабет 1 типа начинает влиять на гемодинамику и строение даже крупных сосудов головного мозга.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-75-10029 — моделирование диабета и МРТ исследования; проект № 17-11-01156 — математическое моделирование).

ON THE NONLOCAL PROBLEM FOR A SYSTEM OF LOADED SOBOLEV TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTI-POINT CONDITION

Assanova A. T.[1], Imanchiyev A. E.[2], Kadirbayeva Zh. M.[3]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Republic of Kazakhstan;* anarasanova@list.ru, assanova@math.kz

[2]*K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Republic of Kazakhstan;* imanchiev_ae@mail.ru

[3]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Republic of Kazakhstan;* apelman86pm@mail.ru

Consider the nonlocal problem for a system of loaded Sobolev type differential equations [1]

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + A_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + A_4(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + A_5(t,x)u$$

$$+\sum_{i=0}^{l}\Big\{B_i(t,x)\frac{\partial^2 u(\theta_i,x)}{\partial x^2} + C_i(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\Big|_{t=\theta_i} + K_i(t,x)\frac{\partial u(\theta_i,x)}{\partial x}$$

$$+L_i(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=\theta_i} + M_i(t,x)u(\theta_i,x)\Big\} + f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\Big\{D_j(x)\frac{\partial^2 u(t_j,x)}{\partial x^2} + E_j(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\Big|_{t=t_j} + P_j(x)\frac{\partial u(t_j,x)}{\partial x}$$

$$+Q_j(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=t_j} + S_j(x)u(t_j,x)\Big\} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

where $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_n)$, $\Omega = [0,T]\times[0,\omega]$, $(n\times n)$-matrices $A_s(t,x)$, $s = \overline{1,5}$, $B_i(t,x)$, $C_i(t,x)$, $K_i(t,x)$, $L_i(t,x)$, $M_i(t,x)$, $i = \overline{0,l}$, n-vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_l = T$, $(n\times n)$-matrices $D_j(x)$, $E_j(x)$, $P_j(x)$, $Q_j(x)$, $S_j(x)$, $j = \overline{0,m}$, n-vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T$, n-vector functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

In the present communication we investigate questions of the existence and uniqueness of a classical solution to the nonlocal problem for the system of loaded Sobolev type differential equations of the third order (1)–(4). By the method of introducing unknown functions [2] the considered problem is reduced to an equivalent problem consisting of a nonlocal multi-point problem for a system of loaded hyperbolic equations of the second order with functional parameters and integral relations. Algorithms for finding a solution to nonlocal problem (1)–(4) are proposed. Conditions of existence of unique solution to problem (1)–(4) are established in terms of initial data.

REFERENCES

1. *Sobolev S. L.*, “On a new problem of mathematical physics” [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **18**, No. 1, 3–50 (1954).
2. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.*, “Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations,” J. Math. Anal. Appl., **402**, No. 1, 167–178 (2013).

MULTIPLICITY RESULT FOR A QUASI-LINEAR EQUATION WITH SINGULAR NONLINEARITY

Bal K., Garain P.

Indian Institute of Technology, Kanpur, India; pgarain@iitk.ac.in

For an open bounded domain Ω in $\mathbb{R}^N$ which is strictly convex with C^2 boundary, we show that there exists $\Lambda > 0$ such that the quasi-linear singular problem

$$-\Delta_p u = \lambda u^{-\delta} + u^q \text{ in } \Omega,$$
$$u > 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

admits at least two distinct solutions u and v in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ for any $\delta \geq 1$ and $\lambda \in (0, \Lambda)$ provided $1 < p < N$ and $p - 1 < q < (Np)/(N-p) - 1$.

K. Bal was supported by DST-Inspire Faculty Award MA-2013029 and P. Garain was supported by NBHM Fellowship No: 2/39(2)/2014/NBHM/R&D-II/8020/June 26, 2014.

ON THE BOUSSINESQ APPROXIMATION FOR AQUEOUS POLYMER SOLUTIONS WITH TEMPERATURE-DEPENDENT HEAT CONDUCTIVITY

Baranovskii E. S.[1], **Artemov M. A.**[2]

Voronezh State University, Voronezh, Russia;
[1]esbaranovskii@gmail.com, [2]artemov_m_a@mail.ru

We consider the Boussinesq approximation for non-isothermal steady flows of low concentrated aqueous polymer solutions [1] in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ under the no-slip condition on $\partial\Omega$ and mixed boundary conditions for the temperature:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \mu \Delta \boldsymbol{v} - \varkappa \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \dfrac{\partial \Delta \boldsymbol{v}}{\partial x_i} + \nabla p = \beta \theta \boldsymbol{g} \ \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \dfrac{\partial \theta}{\partial x_i} - \operatorname{div}\{k(\theta)\nabla\theta\} = \omega \ \text{ in } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \ \text{ on } \partial\Omega, \\ k(\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \psi \ \text{ on } S, \\ \theta = 0 \ \text{ on } \partial\Omega \backslash S, \end{cases} \tag{A}$$

where $\boldsymbol{v}$ and p stand for the velocity and the pressure, respectively, θ is the deviation from the average temperature value, $\mu > 0$ is the viscosity, $\varkappa > 0$ is the relaxation viscosity, $\beta > 0$ is the temperature expansion coefficient, ω denotes a heat source, $\boldsymbol{g}$ is the gravitational acceleration, $k(\theta) > 0$ is the thermal conductivity, S is a fixed part of $\partial\Omega$, ψ represents the heat flux in the direction of the unit outward normal $\mathbf{n}$ to S.

In system (A), the unknowns are $\boldsymbol{v}$, θ, and p, while all other quantities are assumed to be given. We are interested in weak solutions to (A). Introduce the function spaces:

$\boldsymbol{V}^m(\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^m(\Omega) : \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\}$, $Y(\Omega) := \{\xi \in H^1(\Omega) : \xi|_{\partial\Omega\backslash S} = 0\}$.

Definition. One says that $(\boldsymbol{v}, \theta) \in \boldsymbol{V}^2(\Omega) \times Y(\Omega)$ is a *weak solution* to (A) if

$$-\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} - \mu \int_\Omega \Delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} + \varkappa \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \Delta \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} = \beta \int_\Omega \theta \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x},$$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \eta\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega k(\theta) \nabla\theta \cdot \nabla\eta\, d\boldsymbol{x} = \int_S \psi\eta\, dS + \int_\Omega \omega\eta\, d\boldsymbol{x}$$

hold for any $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}^1(\Omega)$ and $\eta \in Y(\Omega)$.

Theorem. *Assume that $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, meas$(\partial\Omega\backslash S) > 0$, $\omega \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(S)$, the function k is continuous, and $0 < k_0 \leq k(\tau) \leq k_1$, for any $\tau \in \mathbb{R}$. Then problem* (A) *has at least one weak solution.*

Remark. Our results provide an extension of the works [1, 2], in which the thermal convection is studied for a simplified version of the model of polymer solutions.

REFERENCES

1. *Oskolkov A. P.*, "Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids," J. Sov. Math., **10**, No. 2, 299–335 (1978).
2. *Sviridyuk G. A.*, "Solvability of a problem of the thermoconvection of a viscoelastic incompressible fluid," Sov. Math., **34**, No. 12, 80–86 (1990).

LOCAL SOLVABILITY OF THE PROBLEM FOR A REAL GAS FLOW ONTO A PLANAR INFINITE WEDGE

Blokhin A. M.[1], **Tkachev D. L.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]blokhin@math.nsc.ru, [2]tkachev@math.nsc.ru

As is well-known [1], on stationary supersonic gas flow over infinite plane wedge (angle σ at the point of the wedge is small enough, $\sigma < \sigma_{\mathrm{lim}}$) theoretically there are two possible stationary solutions: one of them corresponds to strong shock wave, when gas speed beyond the shock is less than the speed of sound, i.e. $u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$ (u_0, v_0 are components of the speed vector, c_0 is the speed of sound), and another corresponds to the weak shock wave, when, generally speaking, $u_0^2 + v_0^2 > c_0^2$.

However, in numerous physical and computational experiments if there is no additional information, for example about the value of the pressure down the flow, the case of weak shock wave is realized. As of today there is no strict mathematical explanation why this is happening. R. Courant and K. O. Friedrichs noticed in their monograph [1], that there is an opinion that strong shock wave is unstable by Lyapunov, while weak shock wave is on the contrary stable.

In this work, unlike papers [2–4], in which we studied stability of corresponding linear problems (with respect to each of two stationary solutions), local well-posedness in time of the original quasilinear problem has been proven.

REFERENCES

1. *Courant R., Friedrichs K. O.,* Supersonic Flow and Shock Waves, InterScience Inc., New York (1948).
2. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Baldan L. O.,* “Study of the stability in the problem on flowing around a wedge. The case of strong wave,” J. Math. Anal. Appl., **319**, No. 1, 248–277 (2006).
3. *Blokhin A. M., Tkachev D. L.,* “Stability of a supersonic flow about a wedge with weak shock wave,” Sb. Math., **200**, No. 2, 157–184 (2009).
4. *Blokhin A. M., Tkachev D. L.,* “Stability of a supersonic flow over a wedge containing a weak shock wave satisfying the Lopatinski condition,” J. Hyperbolic Differ. Equ., **11**, No. 2, 215–248 (2014).

EXAMPLES OF NONSMOOTH IN TIME STOKES FLOW WITH ARBITRARILY SMOOTH DATA

Bogovskii M. E.

Dorodnitsyn Computing Centre RAS, Federal Research Center “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russia; bogovskii@ccas.ru

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;

bogovskii.me@mipt.ru

Explicitly constructed finite time blowup examples [1] of the classically smooth Stokes and Navier–Stokes flows with intrinsically infinite kinetic energy are rooted in non-hypoelliptic nature of the linear Stokes operator along with its being a principal part of the nonlinear Navier–Stokes operator, while viscous forces and nonlinearity stay irrelevant. The present talk explains how examples [1] for the linear Stokes equations can be converted into examples of solutions being nonsmooth in time despite their data's being arbitrarily smooth. Of course, such examples necessarily imply non-uniqueness of the constructed solutions.

For an unbounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with non-compact boundary $\partial\Omega \in C^\infty$, or for a cylinder $\Omega = \omega \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3$ with an unbounded base $\omega \subset \mathbb{R}^2$ possessing non-compact boundary $\partial\omega \in C^\infty$, consider linear Stokes initial-boundary value problem (IBVP) in a space-time cylinder $Q_T = \Omega \times (0,T)$ with initial data $\mathbf{v}^0$ at its base:

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \nabla\psi = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0, \tag{1}$$

and with self-adjoint boundary conditions at its lateral side $\partial\Omega \times (0,T)$:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n} = 0. \tag{2}$$

Denote by $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ the subspace of all infinitely differentiable and divergence free in Ω vector fields $\mathbf{v}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, and let $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ be the closure in $\mathbf{L}_p(\Omega)$ of its subspace $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$. By $\mathbf{G}_p(\Omega)$ denote a closed subspace of all potential vector fields in $\mathbf{L}_p(\Omega)$. The $\mathbf{L}_p(\Omega)$-subspaces $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ and $\mathbf{G}_{p'}(\Omega)$ with conjugate to each other exponents $p \in (1,\infty)$ and $p' = p/(p-1)$ are known to represent the annihilators of each other, which explains why $\Delta\mathbf{v}(\cdot,t) \in \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ *a.e.* on $(0,T)$ for every strong $\mathbf{L}_p$-solution of IBVP (1)–(2). Hence for IBVP (1)–(2), the question of its unique solvability in the class of strong $\mathbf{L}_p$-solutions reduces to the question of the Lebesgue space $\mathbf{L}_p(\Omega)$ decomposition into a direct sum of its two closed subspaces $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ and $\mathbf{G}_p(\Omega)$.

For any $p > 2$, given any $\mathbf{v}^0 \in \mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ and $\mathbf{f}\colon (0,T) \to \mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$, an easy-to-prove existence of some partial strong $\mathbf{L}_p$-solution reduces IBVP (1)–(2) to its homogeneous version with zero data. This opens way to employing simple examples [1] of the form $\mathbf{v}(x,t) = a(t)\nabla\Phi(x)$, $\psi(x,t) = -a'(t)\Phi(x)$ with solutions Φ to the homogeneous Neumann BVPs in Ω possessing nontrivial gradients $\nabla\Phi \in \mathbf{L}_p(\Omega)$, and known to exist for 3D cones with rounded vertices and 3D wedges with rounded edges. In case of a 3D cylinder $\Omega = \omega \times (0,1)$, there is a wide choice [2] of its 2D base ω options to construct suitable 3D solutions Φ to the homogeneous Neumann BVPs. Hence, given any $a \in L_p(0,T)$, vector field $\mathbf{v}(x,t) = a(t)\nabla\Phi(x)$ proves to be a legitimate nontrivial weak $\mathbf{L}_p$-solution to the IBVP (1)–(2) with zero data, where $p \geqslant q$ with certain suitable $q > 2$. Meanwhile, the corresponding pressure ψ proves to be a singular distribution in t whenever $a \in L_p(0,T)$ proves weakly non-differentiable.

REFERENCES

1. *Bogovskii M. E.*, “Finite time blowup for a vanishing at infinity 3D Navier–Stokes flow with zero tangential vorticity at the non-compact boundary,” in: Modern Methods in Boundary Value Problems Theory. Pontryagin Readings – XXIX, MAX Press, Moscow, 2018, pp. 248–251.
2. *Maslennikova V. N., Bogovskii M. E.*, “Elliptic boundary value problems in unbounded domains with noncompact and nonsmooth boundaries,” Rend. Semin. Mat. Fis. Milano, **56**, 125–138 (1986).

SOLUTION OF THE DYNAMICAL PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR A HALF-SPACE WITH CAUCHY BOUNDARY CONDITIONS

Chanyshev A. I.[1,2], **Belousova O. E.**[1]

[1]*N. A. Chinakal Institute of Mining SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russia;*
a.i.chanyshev@gmail.com

The paper is devoted to the finite-difference solution of the dynamical problem of the theory of elasticity for a half-space, on the boundary of which both the Cauchy stress vector and the displacement vector [1–6] are given simultaneously as functions of the surface (plane) and time coordinates. The difference from other statements lies in the fact that the initial conditions are not required here. An algorithm and a numerical calculation program for this problem are constructed. As a test example, we consider the problem of the action of a spherical source in an infinite three-dimensional medium, in which on a predetermined plane traces from the action of the source in the form of the Cauchy stress vector in this plane and the displacement vector are fixed. These data on the plane were used to calculate the environmental media in space and time. The paper presents the results of numerical calculation, comparison of the analytical solution with the obtained finite-difference solution. The program is used to calculate other problems related to the search for defects in the medium, sources of dynamical events.

The work was carried out within the framework of the FNI project, registration AAAA-A17-117122090002-5.

REFERENCES

1. *Sobolev S. L.*, Equations of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
2. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems [in Russian], Siberian Scientific Publishing House, Novosibirsk (2009).
3. *Lavrentiev M. M., Romanov V. G., Shishatsky S. P.*, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
4. *Tikhonov A. N., Leonov A. S., Yagola A. G.*, Nonlinear Ill-Posed Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1995).
5. *Schwab A. A.*, “Ill-posed static problems in the theory of elasticity” [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tel., No. 6, 98–106 (1989).
6. *Chanyshev A. I.*, “A method to determine a body’s thermal state,” J. Min. Sci., **48**, No. 4, 660–668 (2012).

INVARIANT SUBMODELS OF THE GENERALIZATION OF LEITH’S MODEL OF THE WAVE TURBULENCE

Chirkunov Yu. A.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia; chr101@mail.ru

A generalization of the Leith’s model of the phenomenological theory of the wave turbulence is researched. With the methods of group analysis, the basic models possessing nontrivial symmetries are obtained [1]. For each model, all the invariant submodels are found. For nonlinear differential equations describing these models, formulas for the production of new solutions containing arbitrary constants are obtained. By virtue of these formulas each researched solution generates a family of the new solutions. In an explicit form some invariant solutions (not connected by point transformations) describing invariant submodels are found. The physical meaning of these solutions is obtained. In particular, with the help of these solutions the turbulent processes for which there are “destructive waves” both with fixed wave numbers and with varying wave numbers are described. On the example of an invariant solution of rank 1 it was shown that the search of the invariant solutions of rank 1 that cannot not be found explicitly can be reduced to solving the integral equations. For this solution turbulent processes are researched for which at the initial instant of time and for a fixed value of the wave number either the turbulence energy and rate of its change or the turbulence energy and its gradient are given. Under certain conditions, the existence and uniqueness of the solutions of the boundary value problems describing these processes are established.

The reported study was partially funded by Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) and RFBR according to the research project no. 16-01-00446 a.

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A.*, “Submodels of the generalization of the Leith model of the phenomenological theory of turbulence and of the model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous media without absorption,” J. Phys. A, Math. Theor., **48**, No. 39, Article ID 395501, 22 pages (2015).

INVARIANT SUBMODELS OF KHOHLOV–ZABOLOTSKAYA–KUZNETSOV MODEL OF NONLINEAR HYDROACOUSTICS WITH DISSIPATION

Chirkunov Yu. A.[1], **Belmetcev N. F.**[2]

[1] *Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru
[2] *Tyumen State University, Tyumen, Russia;* weqsmachine@gmail.com

We studied three-dimensional Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) model of the nonlinear hydroacoustics with dissipation. This model is described by third order quasilinear partial differential equation of the (KZK). We obtained that the (KZK) equation admits an infinite Lie group of the transformations, depending on the three arbitrary functions. We studied essentially distinct (not linked by means of the point transformations) invariant submodels, that are described by the invariant solutions of rank 0, 1, 2 and 3 of the (KZK) equation [1]. The invariant solutions of rank 0 and 1 are found either explicitly, or their search is reduced to the solution of the nonlinear integro-differential equations. For example, we obtained the invariant solutions that we called by "Ultrasonic knife" and "Ultrasonic destroyer". The submodel "Ultrasonic knife" have the following property: at each fixed moment of the time in the field of the existence of the solution near some plane the pressure increases indefinitely and becomes infinite on this plane. The submodel "Ultrasonic destroyer" contains a countable number of "Ultrasonic knives". The presence of the arbitrary constants in the integro-differential equations, that determine invariant solutions of rank 1 provides new opportunities for analytical and numerical study of the boundary value problems for the received submodels, and, thus, for the original (KZK) model. With the help of these invariant solutions we researched a propagation of the intensive acoustic waves (one-dimensional, axisymmetric and planar) for which the acoustic pressure, speed and acceleration of its change, or the acoustic pressure, speed and acceleration of its change in the radial direction, or the acoustic pressure, speed and acceleration of its change in the direction of one of the axes are specified at the initial moment of the time at a fixed point. With the certain conditions, we established the existence and the uniqueness of the solutions of boundary value problems, describing these wave processes.

The reported study was partially funded by Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) and RFBR according to the research project no. 16-01-00446 a.

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A., Belmetsev N. F.*, "Invariant submodels and exact solutions of Khohlov–Zabolotskaya–Kuznetsov model of nonlinear hydroacoustics with dissipation," Int. J. Non-Linear Mech., **95**, 216–223 (2017).

SUBMODELS AND EXACT SOLUTIONS OF THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR DIFFUSION MODEL OF POROUS MEDIUM IN THE PRESENCE OF NON-STATIONARY SOURCE OR ABSORPTION

Chirkunov Yu. A.[1], **Skolubovich Yu. L.**[2]

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia; [1]chr101@mail.ru, [2]skolubovich@sibstrin.ru

We study a general three-dimensional nonlinear diffusion model of porous medium with non-stationary source or absorption. We found nine basic models of the original model of the porous medium with non-stationary source or absorption, having different symmetry properties. For the model, admitting the widest group Lie of the transformations we found all invariant submodels. All essentially distinct invariant solutions of this model, describing invariant submodels of rank 0 are found explicitly. In particular, we obtained the solutions, which we called "a layered circular pie", "a layered spiral pie", "a layered plane pie" and "a layered spherical pie". The solution "a layered circular pie" describes the motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of time at all points of each circle from the family of concentric circles the pressure is the same. The solution "a layered spiral pie" describes the motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of time at all points of each logarithmic spiral from the family of logarithmic spirals the pressure is the same. The solution "a layered spherical pie" describes the motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of time at all points of each sphere from the family of concentric spheres the pressure is the same. A set of the solutions "a layered circular pie", "a layered spiral pie" and "a layered spherical pie" contains the solutions describing the distribution of the pressure in a porous medium after a point blast or a point hydraulic shock. Also, this set contains the solutions describing the stratified with respect to the pressure motion of liquid or gas in a porous medium with very high pressure at infinity in the presence of very strong absorption at a point. The solution "a layered plane pie" describes the motion of the liquid or gas in a porous medium, for which at each fixed moment of time at all points of each plane from the family of parallel planes the pressure is the same. A set of the solutions "a layered plane pie" contains the solutions describing the motion of the liquid or gas in a porous medium with very high pressure near a fixed plane in the presence of very strong absorption at infinity. Also, this set contains the solutions describing the motion of the liquid or gas in a porous medium with very high pressure at infinity in the presence of very strong absorption on a fixed plane. The obtained results can be used to study the description of the processes associated with underground fluid or gas flow, with water filtration, with the engineering surveys in the construction of the buildings, and also with shale oil and gas production.

The reported study was partially funded by Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) and RFBR according to the research project no. 16-01-00446 a.

ELLIPTIC PSEUDODIFFERENTIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND THE INVERSE PROBLEM OF MAGNETO-ELECTROENCEPHALOGRAPHY

Demidov A. S.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia;
demidov.alexandre@gmail.com

Contrary the already prevailing for several decades opinion about the incorrectness of the inverse-MEEG problems (see, for example: Sheltraw D., Coutsias E., Journal of Applied Physics, **94**, No. 8, 5307–5315 (2003)), the report will show that this problem is absolutely correct. Namely: under the condition of reconstruction electromagnetic field according to its measurement in the final set of points $\mathbf{x}_k$ on the head of the patient the inverse MEEG problem has the unique solution in a special class of functions (different from those considered by biophysicists). Moreover, the operator of this problem realizes an isomorphism of the corresponding function spaces. The solution has the form $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0\delta\big|_{\partial Y}$, where $\mathbf{q}_0$ is an ordinary function defined in the domain of the region Y occupied by the brain, and $\mathbf{p}_0\delta\big|_{\partial Y}$ is a δ-function on the boundary of the domain Y with a certain density $\mathbf{p}_0$. The functions $\mathbf{p}_0$ and $\mathbf{q}_0$ are interrelated and explicitly depend on the reconstructed electromagnetic field. Its reconstruction is reduced to a finite-dimensional problem of minimizing a quadratic functional and revealing “essentially” various minimizing elements. The latter question echoes the analogous problem for the inverse problem of an equilibrium plasma in a tokamak [1].

This result [2] was obtained due to the fact that: 1) Maxwell's equations are taken as a basis; 2) a transition was made to the equations for the potentials of the magnetic and electric fields; 3) the theory of boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators with an entire index of factorization is used. This allowed us to find the correct functional class of solutions of the corresponding integral equation of the first kind: the solution has a singular boundary layer in the form of a delta function (with some density) at the boundary of the domain.

The author was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00781, no. 17-01-00809).

REFERENCES

1. *Demidov A. S., Savelyev V. V.*, “Essentially different distributions of current in the inverse problem for the Grad–Shafranov equation,” Russ. J. Math. Phys., **17**, No. 1, 56–65 (2010).
2. *Demidov A. S.*, “Inverse problems in magneto-electroscanning (in encephalography, for magnetic microscopes, etc.),” J. Appl. Anal. Comput., **8**, No. 3, 915–927 (2018).

INHOMOGENEOUS DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE DIMENSIONAL NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS VIA FACTORIZATION TECHNIQUES

Esquivel L.[1], **Hayashi N.**[2], **Kaikina E. I.**[3]

[1] *Gran Sasso Science Institute, L'Aquila, Italy;* liliane.esquivel@gmail.com
[2] *Osaka University, Osaka, Japan;* nhayashi@math.sci.osaka-u.ac.jp
[3] *National Autonomous University of Mexico, Mexico City, Mexico;* ekaikina@matmor.unam.mx

We consider the inhomogeneous Dirichlet boundary value problem for the cubic nonlinear Schrödinger equations on the half line

$$\begin{cases} Lu = f(x,t), \ x \in \mathbb{R}^+, \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ u(t,0) = h(t), \quad t > 0, \end{cases}$$

where $L = i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta$, $\Delta = \partial_x^2$, $f(x,t)$ is the power nonlinearity such that

$$f(t,x) = \lambda |u|^{p-1}u, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

We present sufficient conditions for initial and boundary data which ensure asymptotic behavior of small solutions to equations by using the classical energy method and factorization technique. More precisely, we show that the operator $J = x + it\partial_x$ works well in inhomogeneous cases (it was not shown before). Our results recover the previous results obtained in [1] and the decay conditions on the boundary data are improved due to more regularity conditions on the boundary data. We note that there are also some results in one-dimensional case by using inverse scattering techniques [2, 3]. Our local result depends on the classical energy method.

REFERENCES

1. *Kaikina E. I.*, "Asymptotics for inhomogeneous Dirichlet initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation," J. Math. Phys., **54**, No. 11, Article ID 111504, 15 pages (2013).
2. *Fokas A. S., Its A. R., Sung L.-Y.*, "The nonlinear Schrödinger equation on the half-line," Nonlinearity, **18**, No. 4, 1771–1822 (2005).
3. *Fokas A. S., Lenells J.*, "An integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation on the half-line and solitons," Inverse Probl., **25**, No. 11, Article ID 115006, 32 pages (2009).

ON SOME METRIC PROPERTIES OF SPHERICAL HARMONICS

Gichev V. M.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk Branch, Omsk, Russia;
gichev@ofim.oscsbras.ru

The spherical harmonic is a homogeneous harmonic polynomial on an Euclidean space as well as its restriction onto the unit sphere in it. The space H_m^n of the real spherical harmonics of degree n on $\mathbb{R}^{m+1}$ is the eigenspace of the Laplace–Beltrami operator on S^m for the eigenvalue $\lambda_n = n(n+m-1)$. The set N_u of its zeroes is called the nodal set, the connected components of $S^m \setminus N_u$ are nodal domains. There are many metric quantities related to a spherical harmonic: the Riemannian volume of N_u, the number of nodal domains and critical points, the inner radius of $S^m \setminus N_u$, and others. Many papers are devoted to the estimation of these quantities, computation of their mean values for random harmonics, and bounds for their fluctuations. Similar questions may be posed for finite families of harmonics. The recent survey [1] contains a description of the current state of this area as well as useful references. The talk will concern extensions and generalizations of some results of the paper [2]. For example, it was proved that the volume of N_u for $u \in H_n^m$ does not exceed $n\varpi_{m-1}$, where $\varpi_{m-1} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ is the volume of the unit sphere S^{m-1}, where $m > 1$. This bound is attained if the set N_u is the union of a finite family of the spheres S^{m-1} embedded to S^m, for instant, if $u(x) = \mathrm{Re}\,(x_1 + ix_2)^n$. In the talk, the situation will be described in more details. Some results of [2] can be extended onto the case of compact symmetric spaces.

REFERENCES

1. *Zelditch S.*, Eigenfunctions of the Laplacian on a Riemannian Manifold, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 125, American Mathematical Society, Providence (2017).
2. *Gichev V. M.*, “Some remarks on spherical harmonics,” St. Petersbg. Math. J., **20**, No. 4, 553–567 (2009); transl. from Algebra Anal., **20**, No. 4, 64–86 (2008).

BLOW-UP PROBLEM FOR NONLOCAL PARABOLIC EQUATION WITH ABSORPTION AND NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

Gladkov A. L.[1], **Kavitova T. V.**[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus;* gladkoval@bsu.by
[2]*Vitebsk State University, Vitebsk, Republic of Belarus;* kavitovatv@tut.by

We consider the initial boundary value problem for nonlinear nonlocal parabolic equation

$$u_t = \Delta u + a(x,t)u^r \int_\Omega u^p(y,t)\,dy - b(x,t)u^q,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{2}$$

and initial datum

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

where r, p, q, l are positive constants, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with smooth boundary $\partial\Omega$.

With respect to the data of problem (1)–(3) the following assumptions are made:

$$a(x,t),\ b(x,t) \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)),\ 0 < \alpha < 1,\ a(x,t) \geq 0,\ b(x,t) \geq 0;$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)),\ k(x,y,t) \geq 0;$$

$$u_0(x) \in C(\overline{\Omega}),\ u_0(x) \geq 0,\ x \in \overline{\Omega},\ u_0(x) = \int_\Omega k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy,\ x \in \partial\Omega.$$

We prove the following results.

Theorem 1. *Let* $\max(r+p,l) \leq 1,\ l < (q+1)/2,\ r+p < q$ *and*

$$b(x,t) > 0,\ x \in \overline{\Omega},\ t \geq 0.$$

Then problem (1)–(3) *has global solutions for any initial data.*

Theorem 2. *Let* $l > \max(1,(q+1)/2)$ *and*

$$k(x,y,t) \geq k_0 > 0,\ x \in \partial\Omega,\ y \in \Omega,\ 0 < t < t_0,$$

for some positive constants k_0 *and* t_0 *or* $r+p > \max(q,1)$ *and*

$$a(x,t) \geq a_0 > 0,\ x \in \Omega,\ 0 < t < t_1,$$

for some positive constants a_0 *and* t_1. *Then problem* (1)–(3) *has blow-up solutions.*

The nonexistence of nontrivial solutions for (1)–(3) is analyzed also. The problem (1)–(3) with $a(x,t) \equiv 0$ has been considered in [1–2].

REFERENCES

1. *Gladkov A., Guedda M.*, “Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition,” Nonlinear Anal., **74**, 4573–4580 (2011).
2. *Gladkov A., Guedda M.*, “Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition,” Appl. Anal., **91**, 2267–2276 (2012).

MONOTONICITY OF SOME GENE NETWORK MODELS

Golubyatnikov V. P.[1], **Ivanov V. V.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
[1]`Vladimir.Golubyatnikov1@fulbrightmail.org`, [2]`iva@math.nsc.ru`

Let $f_j(w) = A_j > 0$ for $0 \leq w < 1$; $f_j(w) = 0$ for $1 \leq w$, $j = 1, 2, \ldots, 5$, and $a_j := A_j/k_j > 1$. We study nonlinear 5-dimensional dynamical systems

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_5) - k_1 x_1; \ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1) - k_2 x_2; \ \ldots \frac{dx_5}{dt} = f_5(x_4) - k_5 x_5. \tag{1}$$

All the variables and coefficients are assumed to be positive.

The systems of the type (1) appear in gene networks modeling, see [1–3]. Let $F_0 := \{1\} \times [0,1] \times [1, a_3] \times [0,1] \times [1, a_5]$, $Q := [0, a_1] \times [0, a_2] \times [0, a_3] \times [0, a_4] \times [0, a_5]$, and $E = (1,1,1,1,1) \in F_0$.

Lemma 1. *Q is an invariant domain of the system* (1). *Trajectories of the system* (1) *are piecewise smooth with the vertices on the planes $x_j = 1$.*

These smooth pieces of trajectories are called *the steps*.

Lemma 2. *Trajectories of the points of F_0 return to F_0 after 10 steps.*

Let $\Phi : F_0 \to F_0$ be the corresponding Poincaré map; $J(\Phi)$ be its Jacobian matrix calculated at the point E; $P = (1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\widetilde{P}(1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4, \widetilde{x}_5)$ be two points of F_0; $\Phi(P) := (1, y_2, y_3, y_4, y_5)$, and $\Phi(\widetilde{P}) := (1, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3, \widetilde{y}_4, \widetilde{y}_5)$. We say that P is less than $\widetilde{P}$, and write $P \prec \widetilde{P}$, if

$$\widetilde{x}_2 \leq x_2, \ \ \widetilde{x}_3 \geq x_3, \ \ \widetilde{x}_4 \leq x_4, \ \ \widetilde{x}_5 \geq x_5. \tag{2}$$

Lemma 3. *The map Φ is monotonic, i.e., if the inequalities* (2) *are satisfied then*

$$\widetilde{y}_2 \leq y_2, \ \ \widetilde{y}_3 \geq y_3, \ \ \widetilde{y}_4 \leq y_4, \ \ \widetilde{y}_5 \geq y_5. \tag{3}$$

If one of the inequalities (2) *is strict then all the inequalities* (3) *are strict.*

For any odd-dimensional dynamical system of the type (1), similar monotonicity holds as well.

Lemma 4. *If the point P is sufficiently close to E then $P \prec \Phi(P)$.*

Theorem. *If $A_j > k_j$ then the system* (1) *has at least one cycle which intersects F_0 and is contained in Q.*

More simple cases $k_j = k_1$, $f_j = f_1$ were considered in [1], where two piecewise linear cycles of the system (1) were discovered. One of them does not intersect F_0.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00057), and by the complex program of SB RAS II.1 (no. 0314-2018-0011).

REFERENCES

1. *Akinshin A. A., Golubyatnikov V. P., Golubyatnikov I. V.*, “On some multidimensional models of gene networks functioning,” J. Appl. Ind. Math., **7**, No. 3, 296–301 (2013).
2. *Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P.*, “On two classes of nonlinear dynamical systems: the four-dimensional case,” Sib. Math. J., **56**, No. 2, 231–236 (2015).
3. *Glass L., Pasternack J. S.*, “Stable oscillations in mathematical models of biological control systems,” J. Math. Biol., **6**, 207–223 (1978).

THE FOCUSING PROBLEM FOR A LEITH MODEL OF TURBULENCE

Grebenev V. N.[1], Nazarenko S. V.[2], Medvedev S. B.[3]

[1]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
`vngrevbenev@gmail.com`
[2]*Institut de Physique de Nice, Université de Nice Sophia Antipolis, Nice, France;*
`sergey.nazarenko@unice.fr`
[3]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
`serbormed@gmail.com`

The focusing problem for the inviscid Leith model [1] of the spectrum evolution $E(k,t)$ is considered that leads to a self-similarity of the second kind in general. We show that the so-called focusing time to the problem is infinite quantity. Therefore the corresponding self-similar anzats is broken and we demonstrate that the problem is reduced to the first kind similarity form. The phase-plane analysis is applied for the dynamical system generated by this type of similarity. Asymptotic behaviors of the self-similar spectrum are given both for the larger-k wavenumbers and large time t. We prove that the "final-time profile" of the spectrum scales as $E \sim k^2$ (the thermolised part) for $t \gg 1$ that coincides with Saffman's prediction [2].

REFERENCES

1. *Leith C.*, "Diffusion approximation to inertial energy transfer in isotropic turbulence," Phys. Fluids, **10**, No. 7, Article ID 1409 (1967).
2. *Saffman P. G.*, "Note on decay of homogeneous turbulence," Phys. Fluids, **10**, No. 6, Article ID 1349 (1967).

CONFORMAL MAPPINGS ON COMPLEXIFIED HEISENBERG GROUPS

Isangulova D. V.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; d.isangulova@g.nsu.ru

We describe the group of conformal mappings on the complexified Heisenberg group $\mathbb{CH}^n$, $n > 1$, with Carnot–Caratheodory metric. Complexified Heisenberg group is two-step Carnot group of H-type with the following left-invariant vector fields:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left((J_1x)_i\frac{\partial}{\partial z_1} + (J_2x)_i\frac{\partial}{\partial z_2}\right),\ i = 1,\dots,4n; \quad Z_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial z_2},$$

where $x \in \mathbb{R}^{4n}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, $J_1 = diag\{A,\dots,A\}$, $J_2 = diag\{B,\dots,B\}$ with

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vector fields $X_1,\dots,X_{4n}$ form an orthonormal basis of the horizontal subbundle $\mathcal{H} \subset T\mathbb{CH}^n$.

We describe the group of conformal mappings of $\mathbb{CH}^n$, $n > 1$, and its Lie algebra. The horizontal coordinate functions of the mappings from the Lie algebra are of the form $a + \lambda x + \mu Jx + Kx$, where $a \in \mathbb{R}^{4n}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $K + K^t = 0$, $K + J_1KJ_1 = 0$, $K + J_2KJ_2 = 0$, $J = J_1J_2$.

The group of conformal mappings is generated by the following subgroups:

1) Left translations: $a \cdot (x, z)$;

2) Rotation: (Ax, z), $A \in SO(4n)$, $A + J_1AJ_1 = 0$, $A + J_2AJ_2 = 0$;

3) Dilation: $(\alpha x, \alpha^2 z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z = z_1 + iz_2$.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00801).

ON THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM OF HEAT CONDITION IN A DEGENERATING DOMAIN

Jenaliyev M. T.[1], **Ramazanov M. I.**[2], **Yergaliyev M. G.**[1,3]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Republic of Kazakhstan;* muvasharkhan@gmail.com

[2] *E. A. Buketov Karaganda State University, Karaganda, Republic of Kazakhstan;* ramamut@mail.ru

[3] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan;* ergaliev.madi.g@gmail.com

In the domain $G_T = \{(x,t)|\ 0 < x < t, \quad 0 < t < T\}$, $T < +\infty$, we consider an inverse problem of finding a coefficient $\lambda(t)$ and a function $u(x,t)$ for the following boundary value problem for the heat equation:

$$u_t = u_{xx} - \lambda(t)u,\ u|_{x=0} = 0,\ \ u|_{x=t} = 0, \tag{1}$$

with

$$\int_0^t u(x,t)dx = E(t), \quad |E(t)| \geq \delta > 0,\ 0 < t < T, \tag{2}$$

where $E(t) \in L_\infty(0,T)$ is a given function.

The inverse problems of this kind were investigated in the papers [1, 2] (see also literature from these works). To prove the existence of a non-trivial solution for the problem (1) we use the methods and results of our earlier work [3].

The main result of the report is the following theorem.

Theorem. *The inverse problem* (1)–(2) *has a solution* $\{u(x,t),\lambda(t)\}$ *if and only if the following condition is satisfied*

$$\operatorname{sign}\{E(t)\} = \operatorname{sign}\{I[\varphi_0(t),t]\},\ \forall t \in (0,T),$$

where

$$I[\varphi_0(t),t] = \int_0^t \left[2E(\tau,t-\tau) - E(t+\tau,t-\tau) - E(t-\tau,1)\right]\varphi_0(\tau)d\tau,\ t \in (0,T),$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{4}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right],\ t \in (0,T),\ E(\theta,\mu) = \exp\left\{-\theta^2/4\mu\right\},$$

Moreover, the solution $\{u(x,t),\lambda(t)\}$ *belongs to classes*

$$t^{1/2}u(x,t) \in L_\infty(G_T),\ t\lambda(t) \in L_\infty((0,T)).$$

The authors were supported by the grant projects AP05130928 (2018–2020), AP05132262 (2018–2020) and by the target program BR05236693 (2018–2020) from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. *Li H., Zhou J.,* "Direct and inverse problem for the parabolic equation with initial value and time-dependent boundaries," Appl. Anal., **95**, No. 6, 1307–1326 (2016).
2. *Zhou J., Li H., Xu Y.,* "Ritz–Galerkin method for solving an inverse problem of parabolic equation with moving boundaries and integral condition," Appl. Anal., 1–15 (2018).
3. *Amangalieva M. M., Dzhenaliev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.,* "On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain," Sib. Math. J., **56**, No. 6, 982–995 (2015).

EXTREMAL SURFACES ON NON-HOLONOMIC STRUCTURES

Karmanova M. B.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

We consider graph mappings φ_Γ defined by mappings $\varphi : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ of classes of two-step Carnot groups. In particular, we discover specific properties of this case (e.g., necessary condition for correct formulation of the extremal area problem for their images $\varphi_\Gamma(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{G}$) and describe some characteristics of extremal surfaces.

The first result describes conditions for correct formulation of the problem.

Theorem. *For unlimited choice of variation of a mapping (as an argument of the area functional) it is necessary for commutators of horizontal vector fields to be linearly independent with other ones or to be equal to zero. In other words, each vector field of the degree two on $\mathbb{G}$ must be represented uniquely via commutators of horizontal fields.*

The next result describes minimal surfaces equations.

Theorem. *For the area functional*

$$S(\varphi) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{\det\bigl(E_n + \widehat{D}_H\varphi(x)^*\widehat{D}_H\varphi(x)\bigr)} \cdot \sqrt{1 + \langle \widehat{D}_{H^\perp}\varphi(x), \widehat{D}_{H^\perp}\varphi(x)\rangle}\, d\mathcal{H}^\nu(x)$$

describing area of a graph surface $\varphi_\Gamma(\Omega)$ defined by C^2-mapping φ and horizontal part of its sub-Riemannian differential $\widehat{D}\varphi$ to be minimal among mappings defined by some horizontal homomorphisms it is necessary for horizontal mean curvature $H^{SR}(x) = (H_1^{SR}(x), \dots, H_{\widetilde{n}}^{SR}(x))$ to be equal zero, where for $m = 1, \dots, \widetilde{n}$ we have

$$\begin{aligned}
H_m^{SR}(x) = {} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i\bigl\langle X_j\varphi_m(x)\bigl(E + \widehat{D}_H\varphi(x)^*\widehat{D}_H\varphi(x)\bigr)_{ij}\mathcal{F}(\varphi)\bigr\rangle \\
& + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i\bigl\langle X_j\varphi_m(x)\bigl(E + \widehat{D}_H\varphi(x)^*\widehat{D}_H\varphi(x)\bigr)_{ji}\mathcal{F}(\varphi)\bigr\rangle \\
& + 2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{1\le l<m} c_{lm\widetilde{n}+1} X_j\Bigl\langle X_i\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle \\
& - 2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{1\le l<m} c_{lm\widetilde{n}+1} X_i\Bigl\langle X_j\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle \\
& + 2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{m<l\le\widetilde{n}} c_{ml\widetilde{n}+1} X_i\Bigl\langle X_j\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle \\
& - 2\sum_{k=n+1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^k \sum_{m<l\le\widetilde{n}} c_{ml\widetilde{n}+1} X_j\Bigl\langle X_i\varphi_l(x)(\widehat{D}\varphi(x))_{\widetilde{n}+1,k}\mathcal{F}(\varphi)^{-1}\Bigr\rangle.
\end{aligned}$$

Similar result with obvious changes is true on sub-Lorentzian structures for maximal surfaces and corresponding area functional [1].

The work was supported by the program of fundamental scientific researches of the SB RAS no. I.1.2., project no. 0314-2016-0006 and by RFBR (project no. 17-01-00875).

REFERENCES

1. *Karmanova M. B.*, "Class of maximal graph surfaces on multi-dimensional two-step sub-Lorentzian structures," Dokl. Math., **97**, No. 3, 207–210 (2018).

POLYNOMIAL BASIS IN SOBOLEV SPACE $H_0^m(-1,1)$ AND THE GREEN'S FUNCTION FOR THE DIFFERENTIAL OPERATOR $(-1)^m(d/dx)^{2m}$

Kazantsev S. G.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; kazan@math.nsc.ru

In this article we consider the following $1d$-Dirichlet (clamped) boundary value problem for $2m$-th order differential equation, $m \geq 1$,

$$\begin{cases} (-1)^m u^{(2m)} = f(x) & (-1 < x < 1) \\ u^{(j)}(\pm 1) = 0 & (0 \leq j \leq m-1), \end{cases} \tag{1}$$

where $u(x)$ is a function on $[-1,1]$. It is known that the solution of this problem is expressed in terms of the Green's function G_{2m},

$$u(x) = \int_{-1}^{1} G_{2m}(x,y) f(y)\, dy\,.$$

In our work the Green function for (1) is given explicitly in terms of the polynomials $P_{m+n}^{[m]}(x)$ defined by the following relation

$$P_{m+n}^{[m]}(x) = \frac{(x-1)^m}{m!}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ m+1 \end{matrix} \,\Big|\, \frac{1-x}{2} \right), \ x \in [-1,1],$$

where the ${}_2F_1$ is the Gauss hypergeometric function, $\deg P_{m+n}^{[m]} = m+n$, $n \geq 0$. The properties of polynomials $P_{m+n}^{[m]}$ are studied and then polynomial bases for the Sobolev spaces $H^m(-1,1)$, $H_0^m(-1,1)$ are constructed.

Theorem. *The Green's function for the Dirichlet problem* (1) *is expressed by the formula*

$$G_{2m}(x,y) = K_{2m}(x,y) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2n+1}{2} P_{m+n}^{[m]}(x) P_{m+n}^{[m]}(y)\,, \tag{2}$$

where

$$K_m(x,y) = \frac{|x-y|^{2m-1}}{2^m (m-1)!} P_{2m-1}^{[m]}\left(\frac{2-x-y}{|x-y|} \right).$$

Dirichlet boundary value problem (1) has been considered in many papers and there are various forms of the Green's function for problem (1). We prove the equivalence of Green's functions given in [1]–[5] with our formula (2).

REFERENCES

1. *Das K. M., Vatsala A. S.*, “Green's function for n–n boundary value problem and an analogue of Hartman's result,” J. Math. Anal. Appl., **51**, No. 3, 670–677 (1975).
2. *Gustafson G. B.*, “A Green's function convergence principle, with applications to computation and norm estimates,” Rocky Mt. J. Math., **6**, No. 3, 457–492 (1976).
3. *Kong L., Wang J.*, “The Green's function for $(k, n-k)$ conjugate boundary value problems and its applications,” J. Math. Anal. Appl., **255**, No. 2, 404–422 (2001).
4. *Böttcher A.*, “The constants in the asymptotic formulas by Rambour and Seghier for inverses of Toeplitz matrices,” Integral Equations Oper. Theory, **50**, No. 1, 43–55 (2004).
5. *Watanabe K., Kametaka Y., Yamagishi H., Nagai A., Takemura K.*, “The best constant of Sobolev inequality corresponding to clamped boundary value problem,” Bound. Value Probl., **2011**, Article ID 875057, 17 pages (2011).

THE OPTIMAL CONTROL METHOD IN SOLVING THE INVERSE PROBLEM FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kondakova E. A.[1], **Krivorotko O. I.**[2], **Kabanikhin S. I.**[3]

Novosibirsk State University, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
[1]ekondak95@mail.ru, [2]olga.krivorotko@sscc.ru, [3]kabanikhin@sscc.ru

A lot of processes of mathematical physics can be described by stochastic differential equations (SDE). The randomness of the processes occurring is usually modelled by the Markov or Wiener processes. SDE allow us to describe real processes better than deterministic systems. The standard form of the SDE is [1]

$$dX(t) = a(X(t), u(t))dt + \sigma(X(t), u(t))dW.$$

Here $X(t)$ is the stationary process of the Markov structure, $u(t)$ is the control function, dW is the standard Wiener process. The definition of the optimal control function allows one to monitor various physical processes. To find the optimal control function it is necessary to minimize the cost functional of the form:

$$J = E\left[\int_t^T L(X(s), u(s))ds + G(X(T))\right].$$

Here $L(X(t), u(t))$ is the recurrent costs, $G(X(T))$ characterizes the final cost.

The dynamic programming [2] and solving the Hamilton–Jacobi–Bellman equation [3] were used as computational methods to find the optimal control $u(t)$. An example of the application of these methods was the Merton problem [4] for financial economics. The results of the numerical calculations are presented and discussed.

The authors were supported by the grant of the President of RF (no. MK-1214.2017.1), Ministry of Education and Science of Russian Federation and by the grant of the RSF (no. 18-71-10044).

REFERENCES

1. *Fleming W. H., Rishel R. W.*, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1975).
2. *Soner H. M.*, Stochastic Optimal Control in Finance, Scuola Normale Superiore, Pisa (2004).
3. *Björk T.*, Stochastic Optimal Control with Finance Applications, KTH (February 2010).
4. *Merton R. C.*, "Theory of rational option pricing," Bell Journal of Economics and Management Science, **4**, No. 1, 141–183 (1973).

GLOBAL OPTIMIZATION METHOD FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM FOR ONLINE SOCIAL NETWORKS

Krivorotko O. I.[1,2], **Kabanikhin S. I.**[1,2], **Zvonareva T. A.**[2]

[1]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
olga.krivorotko@sscc.ru, kabanikhin@sscc.ru,
zvonareva-tanyushka@mail.ru

Online social networks such as Twitter and Facebook have gained tremendous popularity for information exchange. The availability of unprecedented amounts of digital data has accelerated research on information diffusion in online social networks. However, the mechanism of information spreading in online social networks remains elusive due to the complexity of social interactions and rapid change of online social networks. Based on previous papers [1] the process of information propagation is described by partial differential equations (PDEs) that characterize temporal and spatial patterns of information diffusion over online social networks:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial t} = d\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} + r(t)I\left(1-\dfrac{I}{K}\right), & t \geqslant 1,\ x \in (l,L), \\ I(x,1) = q(x), & x \in (l,L), \\ \dfrac{\partial I}{\partial x}(l,t) = \dfrac{\partial I}{\partial x}(L,t) = 0, & t \geqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Here $I(x,t)$ represents the density of influenced users with a distance of x at time t, $q(x) \geqslant 0$ is the initial density function, which can constructed from history data of information spreading. Each information has its own unique initial function. Suppose that we have an additional information in the following form (from the statistical data):

$$I(x_i, t_k) = f_{ik}, \qquad i = 1,\dots,N,\ k = 1,\dots,K. \tag{2}$$

The inverse problem (1)–(2) consists in determination of initial condition $q(x)$ using additional data f_{ik} (2). Due to inverse problem (1)–(2) is ill-posed [2] the regularization approaches are used. Inverse problem (1)–(2) is reduced to the variational formulation problem of minimization of the misfit function:

$$J(q) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} |I(x_i, t_k; q) - f_{ik}|^2. \tag{3}$$

Since the minimization problem (3) is multi-parametric inverse problem the tensor train global optimization method is applied [3]. The results of numerical calculations is presented and discussed.

The authors were supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-71-10044) and by the President Scholarship of Russian Federation (no. MK-1214.2017.1).

REFERENCES

1. *Wang H., Wang F., Xu K.*, “Modeling information diffusion in online social networks with partial differential equations,” arXiv:1310.0505 [cs.SI] (2013).
2. *Kabanikhin S. I.*, “Definitions and examples of inverse and ill-posed problems,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **16**, No. 4, 317–357 (2008).
3. *Zheltkova V. V., Zheltkov D. A., Grossman Z., Bocharov G. A., Tyrtyshnikov E. E.*, “Tensor based approach to the numerical treatment of the parameter estimation problems in mathematical immunology,” J. Inverse Ill-Posed Probl., **26**, No. 1, 51–66 (2017).

NUMERICAL ANALYSIS OF NON-EQUILIBRIUM HEAT TRANSFER IN TISSUES DURING THERMAL THERAPY APPLICATIONS

Kumar P.[1], **Rai K. N.**[2]

[1]*Jai Prakash University, Chapra, India;* pkumar.rs.apm12@iitbhu.ac.in
[2]*Indian Institute of Technology (BHU) Varanasi, Varanasi, India;* knrai.apm@iitbhu.ac.in

This paper theoretically investigates the non-equilibrium heat transfer within living biological tissues during different thermal therapy applications. Numerical solution of the present problem has been done by Chebyshev wavelet Galerkin method. The use of Chebyshev wavelet is found to be accurate, simple and fast. Larger differences in the temperature prediction at the treatment position have been observed using different equilibrium and non-equilibrium based bioheat models. It is observed that the porosity and the convective heat transfer are the factors that contribute most to the non-equilibrium heat transfer within living biological tissues. The whole analysis is presented in dimensionless form.

ON ANALOGS OF WARING'S FORMULAS FOR ALGEBRAIC SYSTEMS OF EQUATIONS

Kytmanov A. A.[1], **Kytmanov A. M.**[2], **Myshkina E. K.**[3]

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia;
[1]aakytm@gmail.com, [2]akytmanov@sfu-kras.ru, [3]elfifenok@mail.ru

In this abstract, we present a particular result, obtained in [1], which is an essential part of the methodology for developing elimination methods for both algebraic and some classes of transcendental systems of equations.

For $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ and $i = 1, \dots, n$, consider a system of functions

$$f_i(z) = q_i(z) + Q_i(z), \tag{1}$$

where $Q_i(z) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \sum\limits_{|\alpha|\geq 0} C^i_\alpha z^\alpha$ are polynomials and

$$q_i(z_1, \dots, z_n) = (1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}}$$

with m_{ij} being positive integers and a_{ij} complex numbers, such that $a_{ij} \neq a_{kj}$ for $i \neq k$.

For $w_j = \frac{1}{z_j}$, $j = 1, \dots, n$, define $\widetilde{q}_i = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$, and $\widetilde{Q}_i = w_1^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_{in}} \cdot Q_i\left(\dfrac{1}{w_1}, \dots, \dfrac{1}{w_n}\right)$. Let $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(w,t)$ be the Jacobian of $\widetilde{F}_i = \widetilde{F}_i(w,t) = \widetilde{q}_i(w) + t \cdot \widetilde{Q}_i(w)$, $i = 1, \dots, n$, with respect to w_j.

Let $J = (j_1, \dots, j_n)$ be a multi-index, where $(j_1 \dots j_n)$ is a permutation of $(1 \dots n)$. Then by a_J we denote the vector $(a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n})$. Let $(-1)^{s(J)}$ be the sign of the permutation J, and $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ be a multi-index of length n. By $q^{\alpha+I}(J)$ we denote $q_1^{\alpha_1+1}[j_1] \cdot \ldots \cdot q_n^{\alpha_n+1}[j_n]$, where $q_s[j_s]$ is a product of all $(1 - a_{j1}z_1)^{m_{j1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{jn}z_n)^{m_{jn}}$ except $(1 - a_{sj_s}z_s)^{m_{sj_s}}$. By $\beta(\alpha, J)$ we denote the vector $\beta(\alpha, J) = \big(m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1) - 1, \dots, m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1) - 1\big)$, and, correspondingly,

$$\beta(\alpha, J)! = \textstyle\prod_p \big(m_{pj_p}(\alpha_{j_p}+1) - 1\big)!.$$

Finally, $a_J^{\beta+I}$ denotes $a_{1j_1}^{m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}^{m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)}$, and

$$\frac{\partial^{\|\beta(\alpha(J)\|}}{\partial z^{\beta(\alpha,J)}} = \frac{\partial^{m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)-1+\ldots+m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)-1}}{\partial z_1^{m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)-1} \ldots \partial z_n^{m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)-1}}.$$

Theorem (Waring's formulas [1]). *For the system $f_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, with functions f_j defined by (1), the following formulas are valid:*

$$\sigma_{\gamma+I} = \sum_{K\in\Re} (-1)^{\|K\|+n} \sum_J \frac{(-1)^{s(J)}}{\beta(K,J)!} \times \frac{\partial^{\|\beta(K,J)\|}}{\partial w^\beta(K,J)} \left[\widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^K}{\widetilde{q}^{K+I}(J)}\right]_{w=a_J}.$$

The first author was supported by the grant of the President of the Russian Federation for young scientists, project no. MD-197.2017.1.

REFERENCES

1. *Kytmanov A. A., Kytmanov A. M., Myshkina E. K.*, "Residue integrals and Waring's formulas for algebraic or even transcendental systems," Complex Var. Elliptic Equ., DOI: 10.1080/17476933.2017.1419210 (in press).

ON SOME BOUNDARY PROBLEMS FOR THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF DIFFUSION

Lyubanova A. Sh.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; lubanova@mail.ru

In this work we study the initial boundary problem for the linear pseudoparabolic diffusion equation with nonlinear mixed boundary condition. The problem is considered in the cylinder $Q_T = \{(t,x)\big| \, t \in (0,T), x \in \Omega\}$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with boundary $\partial\Omega$.

Problem 1. For given functions $k(t)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\sigma(x)$, $\gamma(r)$, $\beta(t,x)$ and a constant η find the pair of unknown functions $\{u(t,x), k(t)\}$ satisfying the equation

$$(u - \eta \operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u) + m(x)u)_t - k(t) \operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u) + m(x)u = f, \tag{1}$$

the initial data

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

and the boundary condition

$$\Big(\eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + k(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{N}} + \sigma(x)(\eta(\gamma(u))_t + k(t)\gamma(u))\Big)\Big|_{\partial\Omega} = \beta(t,x). \tag{3}$$

Here $\mathcal{M}(x) \equiv (m_{ij}(x))$ is a matrix of functions $m_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\dots,n$; $\frac{\partial}{\partial \overline{N}} = (\mathcal{M}(x)\nabla, \mathbf{n})$, $\mathbf{n}$ is the unit vector of the outward normal to the boundary $\partial\Omega$. The operator $M = -\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I$ is supposed to be elliptic and selfajoint.

The nonlinear mixed boundary conditions arise in the models taking into account the thermal conductivity of composites with orthogonal reinforcement with solid fibers, the heat transfer at the sacrifice of the radiation (of solids, gases), the diffusion in a melt at crystallization and others. The particular case is the boundary condition (3) with $\gamma(r) = r^p$ $(p > 1)$. When $p = 4$ this condition is an analog of the Stephan–Boltzmann law for solids, in the case of the carbonic acid $p = 3.5$, for the water vapor $p = 3$.

Under certain hypotheses on the input data the existence and uniqueness of the generalized solution to Problem 1 is proven. The regularity properties of the solution are investigated. The maximum principle for Problem 1 is established.

On the base of the results for Problem 1 the existence and uniqueness of the strong solution is proven for the inverse problem on recovering an unknown coefficient $k(t)$ in equation (1) under the initial data (2), boundary condition

$$\Big(\eta \frac{\partial u_t}{\partial \overline{N}} + k(t)\frac{\partial u}{\partial \overline{N}} + \sigma(x)(\eta u_t + k(t)u)\Big)\Big|_{\partial\Omega} + k(t)\beta_1(t,x) = \beta_2(t,x)$$

and the condition of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega} \Big\{\eta u_t + k(t)u\Big\}\omega(t,x)ds + k(t)\varphi_1(t) = \varphi_2(t),$$

where $\beta_i(t,x)$, $\varphi_i(t)$, $i = 1,2$, $\omega(t,x)$ are given functions. The existence is proven by reducing the inverse problem to an appropriate operator equation $k = Ak$ for the unknown coefficient k. It is shown that the operator of this equation is a contraction on a set constructed with the use of the maximum principle. The contractibility of the operator A provides the uniqueness and stability (continuous dependence on the input data) of the solution.

INVERSE PROBLEMS FOR THE EQUATIONS OF DIFFUSION

Lyubanova A. Sh.[1], **Velisevich A. V.**[2]

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia;
[1]lubanova@mail.ru, [2]velisevich94@mail.ru

In this paper we study the inverse problems of recovering unknown coefficients in the lower terms of the diffusion equations. The first one is the inverse problem for the pseudoparabolic equation of filtration.

Problem 1. For given functions $f(t,x)$, $U_0(x)$, $\beta(t,x)$, $\omega(t,x)$, $\varphi(t)$ and a constant η find the pair of unknown function $\{u(t,x),k(t)\}$ satisfying the equation

$$(u-\eta\,\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u)+m(x)u)_t-\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u)+m(x)u+k(t)u=f,$$

the initial data

$$(u-\eta\,\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u)+m(x)u)|_{t=0}=U_0(x),$$

the boundary condition

$$u|_{\partial\Omega}=\beta(t,x)$$

and the condition of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega}\Big\{\eta\frac{\partial u_t}{\partial\overline{N}}+\frac{\partial u}{\partial\overline{N}}\Big\}\omega(t,x)ds=\varphi(t).$$

Here $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ is a bounded domain with a boundary $\partial\Omega$, $t\in(0,T)$, $\mathcal{M}(x)\equiv(m_{ij}(x))$ is a matrix of functions $m_{ij}(x),\ i,j=1,2,\dots,n$; $\frac{\partial}{\partial\overline{N}}=(\mathcal{M}(x)\nabla,\mathbf{n})$, $\mathbf{n}$ is the unit vector of the outward normal to the boundary $\partial\Omega$. The operator $M=-\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla)+m(x)I$ is supposed to be elliptic and selfajoint.

The second inverse problem corresponds to Problem 1 in the case of the steady-state process.

Problem 2. For given functions $f(x)$, $\beta(x)$, $\omega(x)$ and a constant μ find the pair of function $u(t,x)$ and constant k satisfying the equation

$$-\mathrm{div}(\mathcal{M}(x)\nabla u)+m(x)u+ku=f,$$

the boundary condition

$$u|_{\partial\Omega}=\beta(x)$$

and the condition of overdetermination

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\overline{N}}\omega(x)ds=\mu.$$

Applications of such problems deal with the recovery of unknown parameters indicating physical properties of a medium. In particular, the lowest coefficient k specifies, for instance, the catabolism of contaminants due to chemical reactions or the absorption (also known as potential) in the diffusion and acoustics problems.

The existence of the strong solutions of Problems 1 and 2 is proven by reducing the inverse problems to an appropriate operator equation $k=Ak$ of the second type for the unknown coefficient k. It is shown that the operator of this equation is a contraction on a set constructed with the use of the comparison theorems for elliptic and pseudoparabolic equations. The contractibility of the operator A provides the uniqueness and stability (continuous dependence on the input data) of the solution.

ON CONVERGENCE OF GALERKIN APPROXIMATIONS IN PROBLEMS WITH $p(x)$-LAPLACIAN

Pastukhova S. E.

MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia; pas-se@yandex.ru

We consider Galerkin approximations of solutions to the Dirichlet problem

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}A(x)\nabla u\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded Lipschitz domain. Assume that the exponent $p(x)$ is an $L^\infty(\Omega)$ function satisfying the condition $1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty$ a.e. in Ω; $A = A(x)$ is a symmetric matrix with entries from $L^\infty(\Omega)$ such that $\nu I \leqslant A \leqslant \nu^{-1} I$ a.e. in Ω for some $\nu > 0$, where I is an identity matrix. The right-hand side f is a linear continuous functional on the Sobolev–Orlicz space $H \equiv H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, i.e., $f \in H'$, where H is the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in the Luxembourg norm

$$\|u\|_H = \|\nabla u\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(\lambda^{-1}u) \leqslant 1\right\}, \quad \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(u) := \int_\Omega |u|^p\,dx.$$

By a solution to the problem (1), we understand a function $u \in H$ such that

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}A(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H.$$

Let $H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$ be a sequence of expanding finite-dimensional subspaces of H such that their union $\bigcup_n H_n$ is dense in H. Galerkin approximations are defined as solutions to following problems

$$u_n \in H_n, \quad \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H_n. \tag{2}$$

Following [1], the unique solvability of problems (1) and (2) is established if $\operatorname{ess\,inf}\{p(x) - |p(x)-2|\mu(A(x))\} > 0$, where $\mu(A) = \sup_{|\xi|=1} \frac{|A\xi|}{A\xi\cdot\xi}$.

Theorem. *Let u, u_n be solutions to (1) and (2). Then under the above conditions the estimates hold:*

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega^+)}(\nabla u - \nabla u_n) \leqslant C\,\mathrm{dist}(u, H_n), \quad \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega^-)}(\nabla u - \nabla u_n) \leqslant C(\mathrm{dist}(u, H_n))^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\varrho_{L^{p'(\cdot)}(\Omega^+)}(\xi - \xi_n) \leqslant C(\mathrm{dist}(u, H_n))^{\frac{\beta'}{2}}, \quad \varrho_{L^{p'(\cdot)}(\Omega^-)}(\xi - \xi_n) \leqslant C\,\mathrm{dist}(u, H_n),$$

where $\xi = |\nabla u|^{p(\cdot)-2}A\nabla u$, $\xi_n = |\nabla u_n|^{p(\cdot)-2}A\nabla u_n$, $\Omega^+ = \{x \in \Omega : p(x) \geqslant 2\}$, $\Omega^- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\}$, $p'(x) = p(x)/(p(x)-1)$. The constants C depend only on p, A and $\|f\|_{H'}$, this dependence can be specified exactly.

This theorem, proved jointly with D. A. Yakubovich in [2], extends results of [3].

The author was supported by the Grant of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (no. 1.3270.2017/4.6).

REFERENCES

1. *Surnachev M. D., Zhikov V. V.*, “On existence and uniqueness classes for the Cauchy problem for parabolic equations of the p-Laplace type,” Commun. Pure Appl. Anal., **12**, No. 4, 1783–1812 (2013).
2. *Pastukhova S. E., Yakubovich D. A.*, “Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\cdot)$-Laplacian,” Appl. Anal., DOI 10.1080/00036811.2018.1451641 (2018).
3. *Zhikov V. V., Yakubovich D. A.*, “Galerkin approximations in problems with p-Laplacian,” J. Math. Sci., New York, **219**, No. 1, 99–111 (2016).

CONTROLLABILITY OF SINGULAR LINEAR HYBRID SYSTEMS

Petrenko P. S.

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia; petrenko_p@mail.ru

We consider a system with continuous-discrete time and not resolved with respect to the derivative of the continuous component of the unknown function

$$Ax'(t) = Bx(t) + C_k y_k + U_k u_k(t), \;\; t \in T_k = [t_k, t_{k+1}), \;\; k = \overline{0, m}, \tag{1}$$

$$y_k = D_{k-1}x(t_{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-1,i}y_i + V_{k-1}v_{k-1}, \;\; k = \overline{1, m+1}, \tag{2}$$

where $A, B, C_k, U_k, D_k, G_{k,i}, V_k$ are known real matrices of corresponding sizes; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a continuous component and $y_k \in \mathbb{R}^s$ is a discrete component of the unknown state function, $u_k(t) \in \mathbb{R}^l$ and $v_k \in \mathbb{R}^\lambda$ $(k = \overline{0, m})$ are continuous and discrete control functions respectively, $T = [t_0, t_{m+1})$. It is assumed that $\det A = 0$. We will call such system a singular linear hybrid.

Definition. Set of vectors $y_1, \dots, y_{m+1}$ and vector function $x(t) \in \mathbb{C}^1(T_k)$ $(k = \overline{0, m})$ are called solution of (1), (2), if they turn this system identically on T.

Define the initial conditions

$$x(t_0) = a_0, \quad y_0 = b_0.$$

From equations (1), (2) define vectors $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$:

$$y_k = S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i}x(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i}v_i, \quad k = \overline{1, m+1}, \tag{3}$$

where coefficients are determined by means of recurrence relations

$$S_0 = E_s, \;\; S_k = \sum_{j=0}^{k-1} G_{k-1,j}S_j, \;\; P_{k,k-1} = D_{k-1}, \;\; L_{k,k-1} = V_{k-1}, \quad k = \overline{1, m};$$

$$P_{k,i} = \sum_{j=i+1}^{k-1} G_{k-1,j}P_{j,i}, \;\; L_{k,i} = \sum_{j=i+1}^{k-1} G_{k-1,j}L_{j,i}, \quad k = \overline{2, m}, \;\; i = \overline{0, k-1}.$$

Let $x_k(t) = x(t), \;\; t \in T_k$ $(k = \overline{0, m})$. Then, by substituting expressions for y_k from (3) into (1) we obtain the family of differential-algebraic equations (DAE) [1]:

$$Ax_0'(t) = Bx_0(t) + C_0 y_0 + U_0 u_0(t), \quad t \in T_0; \tag{4}$$

$$Ax_k'(t) = Bx_k(t) + C_k\left(S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i}x_i(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i}v_i\right) + U_k u_k(t), \quad t \in T_k, \quad k = \overline{1, m}. \tag{5}$$

Investigation of hybrid system (1), (2) is based on the analysis of DAE systems (4), (5).

The necessary and sufficient R-controllability conditions for system (1), (2) are obtained.

REFERENCES

1. *Shcheglova A. A., Petrenko P. S.*, “The R-observability and R-controllability of linear differential-algebraic systems,” Russ. Math., **56**, No. 3, 66–82 (2012).

STABLE MANIFOLDS AND APPROXIMATION

Piskarev S. I.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; piskarev@gmail.com

We investigated the numerical analysis of a semilinear fractional problem

$$D_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u^0,$$

in the Banach space E, where the operator A generates an analytic C_0-semigroup, D_t^{α} is Caputo fractional derivative, and the function $f(\cdot)$ is sufficiently smooth. In the case of fractional derivatives, the resolution family of the problem does not decrease exponentially on any subspaces, which does not allow us to use the traditional analysis of the behavior of trajectories on manifolds. A general approach to establish a semidiscretization of stable manifolds is developed. The phase space in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point can be decomposed in such a way that the initial problem with the initial value reduces to a system of initial problems in invariant subspaces corresponding to positive and negative real parts of the spectrum. It is shown that such splitting of equation retains the same structure on the general approximation scheme. The basic assumption for our results is naturally satisfied, for example, for operators with compact resolvents, and can be verified for the finite element method, as well as for the method of finite differences.

The research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 15-01-00026_a, no. 16-01-00039_a, no. 17-51-53008_a).

A TWO-DIMENSIONAL INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM OF MAGNETOELASTICITY

Priimenko V. I.[1], **Vishnevskii M. P.**[1,2]

[1]*State University of Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Brazil;* slava@lenep.uenf.br
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* mikhail@uenf.br

Assume that an isotropic non-homogeneous conductive elastic medium is associated with the domain $\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with the smooth boundary $\partial\Omega$. We will assume that (in cartesian coordinates (x, y, z)) all physical quantities are independent of z, and the solid displacement and the magnetic field have a special form, namely, $(0, 0, h(\vec{x}, t))$ and $(u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), 0)$, $\vec{x} = (x, y)$. In this case, we can formulate the following 2D analogue of problem, studied in [1].

Problem. Determine the state $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ of the elastic conductive body Ω satisfying the following equations:

$$\begin{gathered}
\rho\vec{u}_{tt} = \nabla \cdot \tau(\vec{u}) - \mu_0 h \nabla h + \vec{f},\ (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\
h_t = \nabla \cdot (\nu \nabla h) - \nabla \cdot (h \vec{u}_t) + g,\ (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\
\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}),\ \vec{u}_t(\vec{x}, 0) = \vec{u}_1(\vec{x}),\ h(\vec{x}, 0) = h_0(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Omega, \\
\vec{u} = \vec{0},\ \vec{n} \cdot \nabla h = 0,\ (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T).
\end{gathered} \tag{1}$$

Here $\vec{u} = (u_1, u_2), \nabla = (\partial_x, \partial_y)$, $\tau(\vec{u}) = \lambda \nabla \cdot \vec{u} \cdot I + \mu(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^*)$ is the stress tensor, $T > 0$ is some fixed time; I is the 2×2 identity matrix, and $\vec{n} = (n_1, n_2)$ is the outer unit normal at $\vec{x} \in \partial\Omega$.

We shall suppose that μ_0 is a known positive constant, $\rho, \lambda, \mu, \nu : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\vec{f} : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^2$, $g : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$, $\vec{u}_0, \vec{u}_1 : \Omega \to \mathbb{R}^2, h_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ are given and smooth enough functions and

$$0 < m_0 \le \rho(\vec{x}), \lambda(\vec{x}), \mu(\vec{x}), \nu(\vec{x}) \le m_1 < \infty,\ \vec{x} \in \overline{\Omega}.$$

Suppose that

$$\begin{gathered}
\vec{f} \in L^2\big(0, T; \mathbb{H}^s(\Omega)\big),\ g \in L^2\big(0, T; H^s(\Omega)\big), \\
\vec{u}_0 \in \mathbb{H}_0^{1+s}(\Omega),\ \vec{u}_1 \in \mathbb{H}^s(\Omega),\ h_0 \in H^s(\Omega),\ 0 < s < 1/2.
\end{gathered} \tag{2}$$

There is valid the following theorem, see [2] for details.

Theorem. *Suppose functions $\vec{f}, g, \vec{u}_1, \vec{u}_0, h_0$ satisfy (2). Then there exists a unique weak solution $(\vec{u}, h)$ of problem (1) satisfying*

$$\begin{gathered}
\vec{u} \in L^\infty\big(0, T; \mathbb{H}_0^{1+s}(\Omega)\big), \vec{u}_t \in L^\infty\big(0, T; \mathbb{H}^s(\Omega)\big), \\
h \in L^2\big(0, T; H^{1+s}(\Omega)\big) \cap L^\infty\big(0, T; H^s(\Omega)\big).
\end{gathered}$$

REFERENCES

1. *Priimenko V., Vishnevskii M.*, "On an initial boundary value problem in nonlinear 3D-magnetoelasticity," Appl. Math. Lett., **50**, 23–28 (2015).
2. *Priimenko V., Vishnevskii M.*, "An evolution problem related to nonlinear 2d-magneto-elasticity," Appl. Math. Lett., **76**, 28–33 (2018).

INVERSE PROBLEMS FOR SOME CLASSES OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pyatkov S. G.

Yugra State University, Khanty-Mansiisk, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
pyatkov@math.nsc.ru

We consider the inverse problem on determining a solution $u(t)$ to the equation

$$L(t)u = u_t - A(t)u - B(t)u = f(t,u,p(t)), \tag{1}$$

where $f(t,u,p(t))$ is a nonlinear operator, and a function $p(t) \in L_q(0,T;Y_0)$ (Y_0 is a Banach space) satisfying the initial-boundary conditions

$$Q(t)u(t) = g(t), \ u(0) = u_0 \tag{2}$$

and the overdetermination condition

$$\Psi(t)(u(t)) = \psi(t) \in W_q^1(0,T;Y_0), \tag{3}$$

where $\Psi(t)$ is some family of operators depending on a parameter t. Here $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ is a family of closed linear operators in a Banach space X and the family of operators $B(t) : X \to X$, $t \in [0,T]$, is subordinate in a certain sense to the family $A(t)$. The main assumptions on the operators A, B are the following conditions: there exist Banach spaces $D \subset X$ and Y such that

(a) $A(t) \in C([0,T];L(D,X))$, $Q(t) \in C([0,T];L(D,Y))$;

(b) the operators $A_t = A(t)|_{\ker Q(t)} : X \to X$ are the generators of analytic semigroups for every $t \in [0,T]$;

(c) X is a UMD space and the family $\tau = \{\lambda(-A_t + \lambda I)^{-1} : \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}^+}\}$ is R bounded and $R(\tau) \le M$, where the constant M is independent of $t \in [0,T]$;

(d) $B(t) \in L_1(0,T;L(D,X))$ and there exists a continuous function $\beta(\xi) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ such that $\beta(0) = 0$ and $\|B(t)u(t)\|_{L_q(a,b;X)} \le \beta(b-a)\|u(t)\|_{H_q(a,b)}$ for all $u \in H_q(a,b)$ such that $u(a) = 0$ and $0 \le a < b \le T$, where $H_q(a,b) = L_q(a,b;D) \cap W_q^1(a,b;X)$.

These conditions are supplemented with the corresponding conditions on the nonlinear operator $f(t,u,p)$. Consider also the equation

$$L(t)u = u_t - A(t)u - B(t)u = f(t). \tag{4}$$

First, we consider the direct initial-boundary value problem (4), (2) and under some additional conditions prove the existence and uniqueness of solutions to this problem from the class $H_q(0,T)$. In contrast to the previous articles, the results are sharp in the sense that the conditions on the operators $A(t)$ and the data are minimal possible. The results obtained are applied to the study of the inverse problem (1)–(3). The existence and uniqueness theorem local in time for solutions to this inverse problem is established.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00620).

BEST CONSTANT FOR APPROXIMATIONS OF CONTINUOUS FUNCTIONS BY CESARO MEANS OF THE SECOND ORDER

Rovenska O. G.

Donbass State Machine-Building Academy, Kramatorsk, Ukraine;
rovenskaya.olga.math@gmail.com

Let $C_{2\pi}$ be the space of continuous and 2π-periodic functions with norm

$$\|f\| = \max_x |f(x)|.$$

The Cesaro means in the space $C_{2\pi}$ is defined by (see, for example, [1, p. 187])

$$F_n(f;x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right)^2 dt.$$

For approximations of functions of the Lipschitz class with index 1 and constant $K > 0$ the following estimate of S. N. Bernstein is well-known (see, for example, [2, p. 205])

$$\|f - F_n(f)\| \le CK \frac{\ln(n+1)}{n+1},$$

where C is a positive universal constant.

The smallest value of the constant $C > 0$ in this inequality is obtained in [3]:

$$\lambda := \inf C = \sup_{n=1,2,\dots} \sup_{f \in Lip_K 1} \frac{(n+1)\|f - F_n(f)\|}{\ln(n+1)} = \frac{\pi^2 - 4}{\pi \ln 2}.$$

In the class of functions satisfying Lipschitz condition, we obtain the best constant for the approximation by Cesaro means of the second order.

Denote $\lambda^{(2)} := \sup\limits_{n=1,2,\dots} \lambda_n^{(2)}$, where

$$\lambda_n^{(2)} = \sup_{f \in Lip_K 1} \frac{(n+1)\|f - F_n^2(f)\|}{\ln(n+1)}.$$

In this case we obtain

$$\lambda^{(2)} = \lambda_1^{(2)} = \frac{3\pi^2 - 8}{3\pi \ln 2}.$$

REFERENCES

1. *Korneichuk N. P.*, Best Constants in Theory of Approximations [in Russian], Nauka, Moscow (1987).
2. *Natanson E. P.*, Constructive Function Theory, Ungar, New York (1955).
3. *Martynyuk V. T.*, “Best constants for approximations of periodic functions by Fejer operators,” Ukr. Math. J., **42**, No. 1, 66–74 (1990).

DOMAIN DECOMPOSITION METHOD FOR MODELS OF FIBER REINFORCED BODIES DESCRIBED BY VARIATIONAL INEQUALITIES

Rudoy E. M.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
rem@hydro.nsc.ru

The progress in the development of many modern engineering industries, aerospace engineering, civil engineering, and other specialties is caused by using of composite materials. This is due to the fact that the composite materials increase the strength properties and carrying capacities of constructions elements while the weight of products decreases. A composite material is inhomogeneous continuous medium consisting of a few materials and bodies, the properties and behavior of which can be substantially different from each other. Therefore, adequate mathematical and numerical modeling of structures made of composite materials is an actual problem. Such modelling allows to predict the behavior of composite bodies, accurately describe the characteristics, consider nonlinear effects on fibers, formulate criteria of the occurrence and propagation of cracks.

We consider a boundary value problem describing an equilibrium of an elastic body with a thin elastic inclusion (fiber). We use a model of a fiber-reinforced composite material proposed in [1, 2]. It is supposed that the inclusion is modelled by a Bernoulli–Euler beam. It is located inside the body. Moreover, there exists a delamination crack between the inclusion and elastic matrix. The nonpenetration conditions are imposed on the cracks faces. The equilibrium problem is formulated as a minimization problem of the energy functional over the set of kinematically admissible displacements.

The main goal of the talk is to construct and test a numerical algorithm for solving the problem. Since the problem considered in the paper is in fact a problem of coupling of different models (model of an elastic body and model of the Bernoulli–Euler beam) and described by some variational inequality, to construct a numerical algorithm it is naturally to use the domain decomposition method based on Uzawa's method of solving variational inequalities [3, 4]. At each step of the iterative algorithm two problems are solved: an equilibrium problem of the elastic body without inclusions and an equilibrium problem of the Bernoulli–Euler beam. The solutions of such problems are "connected" with each other by Lagrange multipliers.

The suggested algorithm has advantages such as the simplicity of its realization, possibility of using non-matching meshes, parallelization of computing processes. Note that the manufacturing of a composite materials needs many inclusions. Due to the parallelization the algorithm allows to calculate deformation of each fiber without a significant increase in computational costs.

Various numerical examples illustrating the feasibility of the algorithm are presented.

REFERENCES

1. *Khludnev A. M., Negri M.,* "Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body," Z. Angew. Math. Mech., **92**, No. 5, 341–354 (2012).
2. *Khludnev A. M., Leugering G. R,* "Delaminated thin elastic inclusions inside elastic bodies," Math. Mech. Complex Syst., **2**, No. 1, 1–21 (2014).
3. *Rudoy E. M.,* "Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition," ESAIM, Math. Model. Numer. Anal., **50**, No. 4, 995–1009 (2016).
4. *Céa J.,* Optimisation, Theórie et Algorithms [in French], Dunod, Paris (1971).

IMPULSE CONTROLLABILITY OF DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Shcheglova A. A.

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia; shchegl@icc.ru

We examine the control linear system of ordinary differential equations

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I = (-\infty, +\infty), \tag{1}$$

where $A(t)$ and $B(t)$ are known $(n \times n)$ matrices, $x(t)$ is a desired n-dimensional vector function, $U(t)$ is a prescribed $(n \times l)$ matrix, and $u(t)$ is an l-dimensional vector function of control. Assume that $\det A(t) \equiv 0$ on I. The systems of this form are called *differential-algebraic equations* (DAEs). An integer r with $0 \leq r \leq n$, called the *index*, measures the unsolvability of DAEs with respect to the derivative.

This paper establishes the existence of a solution for (1) in the class of Sobolev–Schwarz distributions. Basing on the existence theorem, we obtain conditions for controllability with a jump of a regular component and controllability with a singular component of the solution in the class that we choose the control as a sum of a regular generalized function and a linear combination of Dirac δ-function and its derivatives.

For stationary DAEs, the concept of impulse controllability was introduced in [1] as the controllability with a singular part of the solution. Impulse controllability was studied in [2, 3] with the use the Kronecker–Weierstrass canonical form.

For systems of ordinary differential equations solved with respect to the derivative of the unknown vector function, the problem of controllability in the class of impulse effects was considered, in particular, in the book [4]. Impulse controllability was understood to be some controllability with a jump of a regular part of the solution generated by a piecewise function under a suitable choice of control as a linear combination of δ-function and its derivatives.

In this paper we obtain some constructive conditions for impulse controllability for DAEs of the form (1) with infinitely differentiable coefficients. The obtained criteria are compared with the corresponding criteria from [2–4].

REFERENCES

1. *Verghese G. C., Levy B., Kailath T.*, "A generalized state-space for singular systems," IEEE Trans. Autom. Control, **AC-26**, No. 4, 811–831 (1981).
2. *Cobb D.*, "Controllability, observability, and duality in singular systems," IEEE Trans. Autom. Control, **AC-29**, No. 12, 1076–1082 (1984).
3. *Dai L.*, Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 118, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1989).
4. *Gaishun I. V.*, Introduction to the Theory of Nonstationary Linear Systems [in Russian], Izdat. Inst. Mat. NAN Belarus, Minsk (1999).

ON THE CLOSURE OF SMOOTH FUNCTIONS WITH COMPACT SUPPORTS IN WEIGHTED HÖLDER SPACES

Shlapunov A. A.[1], **Sidorova K. V.**[2]

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia;
[1]ashlapunov@sfu-kras.ru, [2]ksenija.sidorova2017@yandex.ru

The Hölder spaces are well-known to be an important instrument to study (partial) differential equations and (initial) boundary problems for them. After many years of successful uses, surprisingly, S. Krantz [1] discovered that there are Hölder functions, which can not be approximated by smooth functions in the Hölder topology.

We provide a description of the closure of the set $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ of smooth functions with compact supports in the Hölder space $C^{s,\lambda}_\delta$ over $\mathbb{R}^n$ with $n \geq 1$, $0 < \lambda < 1$, $s \in \mathbb{Z}_+$, weighted at the infinity with the weight function w^δ where $w(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Let $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$ be the subset of $C^{s,\lambda}_\delta$, satisfying the following properties: for any $\varepsilon > 0$ there is $\gamma_\varepsilon > 0$ such that

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \langle \partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|,\mathbb{R}^n} < \varepsilon \text{ whenever } \frac{|x-y|}{w(x,y)} < \gamma_\varepsilon$$

with $w(x, y) = \max\{w(x), w(y)\}$, and, in addition,

$$\lim_{R\to\infty} \|u\|_{C^{s,\lambda}_\delta(\mathbb{R}^n\setminus B_R)} = 0,$$

where

$$\langle u\rangle_{\lambda,\delta,X} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{X},x\neq y\\ |x-y|\leq|x|/2}} w^{\delta+\lambda+|\alpha|}(x,y)\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

$$\|u\|_{C^{s,\lambda}_\delta(X)} = \sum_{|\alpha|\leq s} \sup_{x\in\overline{X}} |\partial^\alpha u(x)|w^{\delta+|\alpha|}(x) + \sum_{|\alpha|\leq s} \langle\partial^\alpha u\rangle_{\lambda,\delta+|\alpha|,X}.$$

Theorem. *Let $0 < \lambda < 1$, $s, s' \in \mathbb{Z}_+$ and $\delta' > \delta$. If $0 \leq \lambda' \leq 1$, $s \leq s'$ and $s + \lambda < s' + \lambda'$, then the closures of the spaces $C^{s',\lambda'}_{\delta'}$ and $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in the space $C^{s,\lambda}_\delta$ coincide with the space $C^{s+0,\lambda+0}_{\delta+0}$.*

As an application we consider the de Rham complex over both the weighted Hölder space and the closure of smooth functions with compact supports in it. Namely, using the approach of [2], we obtain a solvability criterion for the operator equations corresponding to the de Rham differentials in the Hölder spaces and the relevant subspaces for $n \geq 2$.

The authors were supported by the grant of the Russian Federation Government for scientific research under the supervision of leading scientist at the Siberian Federal University, contract no. 14.Y26.31.0006.

REFERENCES

1. *Krantz S.*, "Intrinsic Lipschitz classes on manifolds with applications to complex function theory and estimates for the $\overline{\partial}$ and $\overline{\partial}_b$ equations," Manuscr. Math., **24**, No. 4, 351–378 (1978).
2. *Mc Owen R.*, "Behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces," Commun. Pure Appl. Math., **32**, 783–795 (1979).

ANALYSIS OF DYNAMIC PULL-IN FOR A POWER-LAW BASED MEMS MODEL

Skrzypacz P. S.[1], **Wei D.**[2], **Nurakhmetov D. B.**[3]

[1]*Nazarbayev University, Astana, Republic of Kazakhstan;*
piotr.skrzypacz@nu.edu.kz
[2]*Nazarbayev University, Astana, Republic of Kazakhstan;*
dongming.wei@nu.edu.kz
[3]*S. Seifullin Kazakh Agrotechnical University,*
Nazarbayev University, Astana, Republic of Kazakhstan;
dauletkaznu@gmail.com

We consider the power-law based Micro-Electro-Mechanical System (MEMS) model for a parallel plate capacitor. The first mass-spring model for an electrostatically actuated device has been introduced by Nathanson et al [1]. The analysis of pull-in voltage of linear materials for MEMS have been thoroughly discussed in [2, 3]. An important phenomenon in MEMS is the so-called pull-in instability. Pull-in bifurcation analysis of a lumped mass model is presented. The analysis is performed on the resulting nonlinear spring-mass equation with initial conditions. The presented analysis is supported by the results from [4]. The sufficient conditions for the existence of periodic solutions of the model equation are proved analytically and verified numerically by ODE solvers.

This research was supported by the Nazarbayev University ORAU grant “Modeling and Simulation of Nonlinear Material Structures for Mechanical Pressure Sensing and Actuation Applications”.

REFERENCES

1. *Nathanson H. C., Newell W. E., Wickstrom R. A., Davis J. R.,* “The resonant gate transistor,” IEEE Trans. Electron Devices, **14**, No. 3, 117–133 (1967).
2. *Pelesko J. A., Bernstein D. H.,* Modeling MEMS and NEMS, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2003).
3. *Younis M. I.,* MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics, Springer, New York (2014).
4. *Omarov D., Nurakhmetov D., Wei D., Skrzypacz P.,* “On the application of Sturm's theorem to analysis of dynamic pull-in for a graphene-based MEMS model,” Appl. Comput. Mech., **12**, No. 1, 59–72 (2018).

ON SOLVABILITY OF ELLIPTIC QUASILINEAR EQUATION WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE TYPE OF BITSADZE–SAMARSKIY

Solonukha O. V.

Central Economics and Mathematics Institute RAS, Moscow, Russia;
solonukha@yandex.ru

Let $Q=(0,2)\times(0,1)$. Denote by $W^1_{p,\gamma}(Q)$, $p\in[2,\infty)$, $\gamma=\{\gamma_1,\gamma_2\}$, the subspace of functions from Sobolev space $W^1_p(Q)$ satisfying the following nonlocal boundary condition

$$\begin{cases} u(x_1,0)=u(x_1,1)=0 & (0\le x_1\le 2),\\ u(0,x_2)=\gamma_1 u(1,x_2), \quad u(2,x_2)=\gamma_2 u(1,x_2) & (0\le x_2\le 1). \end{cases}$$

We consider the sufficient conditions for solvability in $W^1_{p,\gamma}(Q)$ of elliptic quasilinear equation

$$\mathcal{A}u(x)=f \qquad (x\in Q),$$

where $f\in W^{-1}_q(Q)\,(1/q+1/p=1)$, $\mathcal{A}u(x)=-\sum\limits_{1\le i\le 2}\partial_i A_i(x,u,\nabla u)+A_0(x,u,\nabla u)$, and functional coefficients A_i satisfy the algebraic criteria of strong ellipticity.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00450).

NEW CLASSES OF INTEGRAL FUNCTIONALS FOR WHICH THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE LOWER SEMICONTINUOUS ENVELOPE IS VALID

Sychev M. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
masychev@math.nsc.ru

First, we isolate condition (M) on integrand which is together with p-quasiconvexity is both necessary and sufficient condition for lower semicontinuity of the integral functional. Then we study relaxation theory under validity of the condition (M). It turned out that rather general relaxation theorem holds in this case. Then we derive some applications for the case of strong materials.

ON THE SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE FILTRATION PROBLEMS IN POROELASTIC MEDIA

Tokareva M. A.

Altai State University, Barnaul, Russia; tma25@mail.ru

The process of filtration of a viscous fluid in a deformable porous medium with predominantly viscous properties is described by a system of equations that includes the equations of mass conservation for the liquid phase and the poroelastic skeleton, the law of conservation of momentum in the form of Darcy's law that takes into account the motion of the solid skeleton, and the equation for effective pressure and porosity in the form of a rheological law of the Maxwell type [1–3].

The local solvability of the initial-boundary value problem in the Holder classes in the absence of gravity is established in [4]. In the model case, the global solvability of the initial-boundary value problem in Holder classes is established in [5].

We consider the initial-boundary value problem for a system of equations for the one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable porous medium in a gravitational field in the case of a complete equation of the balance of the forces of the system. In the case of filtration of a compressible fluid, a local existence and uniqueness theorem for the solution of the problem is proved. In the case that the density of the liquid and the poroelastic skeleton are taken to be constant, the system is closed and in the one-dimensional case in Lagrange's variables reduces to one nonlinear equation for the porosity function. The global in time solvability in the Holder classes is proved.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-00291).

REFERENCES

1. *Fowler A.*, Mathematical Geoscience, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 36, Springer, Berlin (2011).
2. *Bear J.*, Dynamics of Fluids in Porous Media, Elsevier, New York (1972).
3. *Morency C., Huismans R. S., Beaumont C., Fullsack P.*, "A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability," J. Geophys. Res., **112**, Article ID B10407 (2007).
4. *Papin A. A., Tokareva M. A.*, "On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma," Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, **10**, No. 3, 385–395 (2017).
5. *Papin A. A., Tokareva M. A.*, "On global solvability of the initial-boundary value problem for a system of equations describing the motion of magma" [in Russian], Izvestiya Altayskogo Gosudarstvennogo Universiteta, No. 1 (93), 115–118 (2017).

BATTLE–LEMARIÉ SPLINE WAVELET SYSTEMS AND ENTROPY NUMBERS OF HARDY INTEGRAL OPERATOR ON NIKOLSKII–BESOV SPACES

Ushakova E. P.

Computing Center FEB RAS, Khabarovsk, Russia; elenau@inbox.ru

Fix $n \in \mathbb{N}$ and put $B_0 = \chi_{[0,1)}$. The n-th order B-spline is defined recursively by $B_n(x) := (B_{n-1} * B_0)(x)$. It is known that B_n generates spline spaces constituting multiresolution analysis of $L^2(\mathbb{R})$. Wavelet subspaces, related to B_n, are also generated by some basic functions (wavelets) in the same manner as that the spline spaces are generated by B_n. Battle–Lemarié scaling function ϕ_n and the related wavelet(s) ψ_n are polynomial splines obtained by orthogonalization process of the B-splines.

In [1] we give explicit formulae for a class of Battle–Lemarié scaling functions and wavelets of all positive integer orders. The class constructed satisfies a “localisation property”. We establish algorithms resulting compactly supported sums of translations of Battle–Lemarié wavelets ψ_n. Analogous result is given for the scaling function ϕ_n and the both are applied to equivalent norm characteristics in Besov type spaces.

Battle–Lemarié scaling functions and related wavelets play an important role in a number of fields. On the strength of the differentiation property $B_n'(x) = B_{n-1}(x) - B_{n-1}(x-1)$ this function class has appeared to be an effective tool for solving problems related to integration and differentiation operators in function spaces [2].

Let $B^s_{pq}(\mathbb{R}, w)$ be the weighted generalizations of Nikolskii–Besov $B^s_{pq}(\mathbb{R})$ spaces on $\mathbb{R}$ with parameters $0 < p, q \le \infty$, $-\infty < s < +\infty$ and an admissible weight function w. For $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ we consider the Hardy integral operator

$$Hf(x) := \chi_{(0,\infty)}(x) \int_0^x f(y)\, dy$$

and study behaviour of its entropy numbers $e_k(H)$, when the mapping $H : B^{s_1}_{p_1 q_1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2 q_2}(\mathbb{R}, w_\alpha^{-1})$ is compact with the polynomial weight $w_\alpha(x) = (1+|x|^2)^{\alpha/2}$, $\alpha \ge 0$. For $k \in \mathbb{N}$ and a continuous operator T between quasi-Banach spaces A_1 and A_2 the k-th entropy number $e_k(T\colon A_1 \hookrightarrow A_2)$ is the infimum of all numbers $\varepsilon > 0$ s.t. there exist 2^{k-1} balls in A_2 of radius ε which cover TU_1, where U_1 is the unit ball in A_1.

In [2] we find upper estimates on $e_k(H : B^{s_1}_{p_1 q_1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2 q_2}(\mathbb{R}, w_\alpha^{-1}))$ for all $k \in \mathbb{N}$. In particular, if $\alpha > 1+1/p_2$, $\delta := s_1 - 1/p_1 - (s_2 - 1 - 1/p_2)$, $\frac{1}{2} < p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $0 < q_1, q_2 \le \infty$, $1/p_1 < s_1 < 1 + \min\{1, 1/p_1\}$ and $-1 + 1/p_2 < s_2 < 1/p_2$, then

$$e_k(H\colon B^{s_1}_{p_1 q_1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B^{s_2}_{p_2 q_2}(\mathbb{R}, w_\alpha^{-1})) \lesssim \begin{cases} k^{-(s_1 - s_2 + 1)}, & \delta + 1 < \alpha, \\ k^{-(\alpha - 1 + 1/p_1 - 1/p_2)}, & \alpha < \delta + 1. \end{cases}$$

For obtaining our results we follow the well-developed concept of wavelet bases in $B^s_{pq}(\mathbb{R}, w)$ spaces and reduce the initial problem from the operator H in function spaces to a transformation in sequence spaces. This reduction is being done with choosing two particular Battle–Lemarié spline wavelet systems. At the end we come to the well-studied problem of estimates for the entropy numbers of embeddings.

REFERENCES

1. *Ushakova E. P., Ushakova K. E.,* “Localisation property of Battle–Lemarié wavelets’ sums,” J. Math. Anal. Appl., **461**, No. 1, 176–197 (2018).
2. *Nasyrova M. G., Ushakova E. P.,* “Wavelet bases and entropy numbers of Hardy operator,” Anal. Math., DOI 10.1007/s10476-017-0603-9, 34 pages (2017).

SPHERICAL POLYHARMONIC EQUATION

Vaskevich V. L.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
vask@math.nsc.ru

Let S be the sphere of unit radius in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. The projection of an arbitrary point x in $\mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, to S will be denoted by θ; i.e., we assume that $\theta = x/\rho$, where $\rho = |x|$. So θ is a point in S. In what follows, the integrals over $d\theta$ are surface integrals over dS. Let us consider the differential equation of the form

$$(-\mathfrak{D})^m u(\theta) = p(\theta), \tag{1}$$

where $\mathfrak{D}$ is the spherical Laplace operator, or the Laplace—Beltrami operator, m is a positive integer, and $p(\theta)$ is a continuous function on S which obey the condition

$$\int p(\theta)\, d\theta = 0.$$

The main results of the talk are about the solutions to (1). They are formulated in the following two theorems [1].

Theorem. *Let m be an integer and $m > (n-1)/2$. Then for every functional $l(\theta)$ in $C^*(S)$ with $(l, 1) = 0$, the problem*

$$(-\mathfrak{D})^m u(\theta) = l(\theta), \quad \int u(\theta)\, d\theta = 0, \tag{2}$$

has a unique solution $u(\theta)$ in the spherical Sobolev space H^m. For $m > n-1$ the solution to (2) belongs to the space $C^{(2m-2n+2)}(S)$.

Theorem. *Let $p(\theta)$ be a member of the spherical Sobolev space H^s for some $s > (n-1)/2$ and the equality $\int p(\theta)\, d\theta = 0$ holds. Then there is a unique solution to the spherical polyharmonic equation*

$$(-\mathfrak{D})^m u(\theta) = p(\theta)$$

such that it is orthogonal to the identically-one function and belongs to the space H^q for $q = s + 2m$. The function $u(\theta)$ can be written as follows

$$u(\theta) = \int G(\theta \cdot \theta') p(\theta')\, d\theta',$$

where the function $G(\theta \cdot \theta')$ is the Green's function of $(-\mathfrak{D})^m$.

Spherical polyharmonic equations with generalized functions in the right-hand side are very important in the theory of spherical cubature formulas [2–3].

REFERENCES

1. *Vaskevich V. L.*, "Spherical polyharmonic equation," Funct. Differ. Equ., **24**, No. 3–4, 157–166 (2017).
2. *Vaskevich V. L.*, "Spherical cubature formulas in Sobolev spaces," Sib. Math. J., **58**, No. 3, 408–418 (2017).
3. *Sobolev S. L., Vaskevich V. L.*, The Theory of Cubature Formulas, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).

ON NONLINEAR MODEL FOR A PLATE

Wei D.[1], **Aniyarov A. A.**[2]

[1]*Nazarbayev University, Astana, Republic of Kazakhstan;*
dongming.wei@nu.edu.kz
[2]*S. Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Astana, Republic of Kazakhstan;*
aniyarov.a@gmail.com

We consider a plate of circular shape for deriving the non-linear constitutive stress-strain equation for the industrial materials using a Ramberg–Osgood equation.

The following Ramberg–Osgood stress-strain relationship

$$\varepsilon(r) = A\sigma(r) + B|\sigma(r)|^{q-2}\sigma(r) \tag{1}$$

is accepted as the model for the material's constitutive equation in the stress analysis for a variety of industrial metals [1–2]. In equation (1), $\varepsilon(r)$ and $\sigma(r)$ represents the axial strain and axial stress, respectively, $0 < r < R$ (radius of the circular plate), $q \geq 2$ represents the material hardening index (where $q = 2$ describes the linear elastic material), the constants A, B and q are determined from the experimental values for the parameters E (the Young's modulus), σ_t, ε_t (the material's yeild stress and strain), σ_u, ε_u (the ultimate stress and strain) by the formula

$$A = \frac{1}{E}, \quad B = 0.002\left(\frac{1}{\sigma_t}\right)^{q-2}, \quad q = 1 + \frac{\ln 20}{\ln\left({}^{\sigma_u}\!/_{\sigma_t}\right)}.$$

The authors were supported by the research project "Modelling and Simulation of Non-linear Material Structures for Mechanical Pressure Sensing and Actuation Applications" at Nazarbayev University (project no. 064.01.01 SST 2016024).

REFERENCES

1. *Ramberg W., Osgood W. R.,* Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC (1943).
2. *Wei D., Elgindi M. B. M.,* "Finite element analysis of the Ramberg–Osgood bar," Am. J. Comput. Math., **3**, No. 3, 211–216 (2013).

AUTHOR INDEX

Научное издание

СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция,
посвященная 110-летию
со дня рождения С. Л. Соболева

Новосибирск, Россия, 10–16 декабря 2018 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Оригинал-макет: *М. А. Скворцова*

Подписано в печать 01.11.2018   Формат 70×108 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 15,5. Тираж 230 экз. Заказ № 264

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре НГУ,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия.