А К А Д Е М И Я Н А У К
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

ТРУДЫ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
PUBLICATIONS DE L'INSTITUT SÉISMOLOGIQUE

№ 6

С. Л. СОБОЛЕВ

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

•

S. SOBOLEV

L'ÉQUATION D'ONDE POUR UN MILIEU HÉTÉROGÈNE

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК • PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES
ЛЕНИНГРАД • 1930 • LENINGRAD

С. Л. СОБОЛЕВ

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

ГЛАВА I

1°. В настоящей работе мы докажем и разовьем некоторые из положений, высказанных нами в заметке, напечатанной в Докладах Академии Наук СССР.[1]

Оставляя пока в стороне обобщение решения Hertz'a, мы разовьем предложенный нами метод интегрирования волнового ур-ния для заданных начальных условий.

Наметим еще раз основные черты нашей работы.

Задача о распространении волны в неоднородной среде может быть поставлена математически как задача интегрирования ур-ния

$$\nabla^2 \Phi(M, t) = \frac{1}{c^2(M)} \frac{\partial^2 \Phi(M, t)}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где функция $c(M)$ является произвольной функцией точки и меняется по определенному закону непрерывно или скачками.

Если эту функцию $c(M)$ предположить постоянной на некотором участке пространства, то можно получить так называемую формулу Kirchhoff'a, дающую значение этой функции в точке M_0, если известны значения ее и ее производных на некоторой поверхности, заключающей эту точку и лежащей целиком внутри области постоянства $c(M)$, для моментов времени, более ранних, чем рассматриваемый. Именно, эти моменты таковы, что возмущение, идущее от некоторой точки M этой поверхности по прямой линии со скоростью c, достигает точки M_0 в рассматриваемый нами момент.

Формула Kirchhoff'a дает математическую формулировку так называемому принципу Huygens'a, известному в волновых явлениях.

[1] Докл. Акад. Наук, 1930, № 7.

Известно, что когда среда перестает быть однородной, картина явления усложняется, и знание значений Φ и ее производных на поверхности не может, как прежде, определить поведение ее в M_0.

Задачей нашего исследования является распространение метода Kirchhoff'а на неоднородную среду.

Существенным элементом нашей работы является построение функции σ, обобщающей на случай неоднородного пространства обычный Ньютоновский потенциал $\frac{1}{r}$.

Мы даем формулу, представляющую собою распространенную формулу Kirchhoff'а и отличающуюся от этой последней лишь наличием некоторого слагаемого в виде объемного интеграла, обращающегося в ноль при постоянном c. Эта формула позволяет сделать некоторые заключения о характере распространяющегося возмущения и дает возможность сравнительно просто применить метод последовательных приближений к ур-нию (1).

В гл. I, носящей, преимущественно, физический характер, мы вводим упомянутую функцию σ и излагаем основные преобразования, позволяющие построить нашу формулу. Чтобы не прерывать изложения, мы принимаем в гл. I некоторые предложения без доказательства, относя эти доказательства к двум другим главам.

После вывода нашей формулы, обобщающей формулу Kirchhoff'а, мы показываем, каким образом с ее помощью можно решить задачу интегрирования ур-ния (1) с заданными начальными условиями.

Формула наша в этом случае представляет собою некоторое интегральное ур-ние, разрешимое методом последовательных приближений, сходимость которого мы устанавливаем.

Глава II целиком посвящена исследованию свойств функции σ и подведению фундамента, выясняющего законность всех операций гл. I.

Наконец, гл. III содержит прямое доказательство существования решения волнового ур-ния, удовлетворяющего поставленным начальным условиям.

Между прочим в ней мы доказываем основное свойство обобщенных запаздывающих потенциалов Lorenz'а, представляющее само по себе известный интерес и позволяющее дать необходимое и достаточное условие существования решения у ур-ния (1).

2°. Согласно общему ходу идей о распространении возмущения, сразу же, вместе с задачей о распространении волны, встает задача вариационного исчисления о minimum'е интеграла

$$\int \frac{ds}{c(x, y, z)}. \tag{2}$$

Рассмотрим траектории лучей, т. е. линии, являющиеся экстремальными для поставленной вариационной задачи.

Взяв какую-нибудь поверхность, мы можем, как известно, провести через каждую ее точку экстремаль, ортогональную к ней.

На каждой такой экстремали отложим некоторый отрезок, выбранный так, что величина интеграла (2), взятого по этому отрезку, равна некоторому фиксированному числу τ.

Геометрическое место концов таких отрезков образует так называемую эквидистантную поверхность по отношению к исходной. Система эквидистантных поверхностей, построенных таким образом, вместе с системой своих ортогональных траекторий, которыми будут являться экстремали или лучи, образуют поле вариационной задачи для интеграла (2).

Поверхности $\tau = \text{const}$, или эквидистантные поверхности, называются иногда поверхностями уровня. Величина интеграла (2), равная τ, может быть, очевидно, рассматриваема как функция точки M конца отрезка экстремали. Иногда мы будем называть ее функцией поля. Из вариационного исчисления известно, что такая функция удовлетворяет ур-нию в частных производных Якоби Гамильтона

$$\left[\operatorname{grad} \tau(M)\right]^2 = \frac{1}{c^2(M)} = n^2(M), \tag{3}$$

где

$$n(M) = \frac{1}{c(M)}.$$

Система экстремалей тоже удовлетворяет известным ур-ниям Эйлера

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{\partial \lg n}{\partial x} - x'\frac{d \lg n}{ds}, \\ y'' &= \frac{\partial \lg n}{\partial y} - y'\frac{d \lg n}{ds}, \\ x'^2 &+ y'^2 + z'^2 = 1, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

где за независимую переменную s взята длина дуги экстремали.

Если взять за s не величину длины дуги, а переменную, которая отличается от нее произвольным постоянным множителем, то система эта будет иметь вид

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{\partial \lg n}{\partial x} - x'\frac{d \lg n}{ds}, \\ y'' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{\partial \lg n}{\partial y} - y'\frac{d \lg n}{ds}, \\ z'' &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{\partial \lg n}{\partial z} - z'\frac{d \lg n}{ds}, \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

Этим представлением нам впоследствии придется воспользоваться.

В дальнейшем мы будем пользоваться некоторым частным выбором поля, в котором, вместо исходной поверхности, взята некоторая фиксированная точка M_0, из которой во все стороны проведены экстремали. Такое поле мы назовем центральным.

Функцию τ для этого случая мы будем записывать так:

$$\tau(M;\, M_0),$$

где M — переменная точка пространства, а M_0 — узловая точка взятого пучка экстремалей. Мы не будем писать аргументов у τ там, где это не может вызвать неясностей.

Известно, что такая функция

$$\tau(M;\, M_0)$$

будет симметричной относительно обоих аргументов M и M_0. Отсюда, между прочим, вытекает, что она будет удовлетворять ур-нию

$$[\mathrm{grad}_0\, \tau(M;\, M_0)]^2 = n^2(M_0). \tag{3'}$$

Для случая, когда c — постоянная, функция $\tau(M;\, M_0)$ обращается в $\frac{r}{c}$, где r есть расстояние от M_0 до M.

Во всем дальнейшем мы будем, обобщая явления, происходящие в однородной среде, подставлять $\tau(M;\, M_0)$ вместо $\frac{r}{c}$.

3°. Рассмотрим какое-нибудь поле вариационной задачи для интеграла (2). Пусть в этом поле задана некоторая функция

$$\Phi(M,\, t).$$

Условимся обозначать символом

$$[\Phi(M,\, t)]$$

результат подстановки в функцию $\Phi(M,\, t)$, вместо t, разности $t - \tau$:

$$[\Phi(M, t)] = \Phi(M,\, t - \tau).$$

Пусть функция

$$\Phi(M,\, t)$$

удовлетворяет волновому ур-нию и пусть

$$[\Phi(M,\, t)] = \Psi(M,\, t).$$

Возьмем произвольную пока функцию $\sigma(M)$ и попытаемся преобразовать произведение

$$\sigma(M)\nabla^2\Psi(M, t)$$

в расходимость некоторого вектора подобно тому, как

$$\frac{1}{r}\nabla^2\left\{\Phi\left(M, t-\frac{r}{c}\right)\right\}$$

преобразуется в

$$\operatorname{div}\left\{-\frac{2\vec{r}}{cr}\frac{\partial\left\{\Phi\left(M, t-\frac{r}{c}\right)\right\}}{\partial t}\right\}$$

для случая постоянного c.

Функцию σ мы определим из условия возможности такого преобразования. Производя несложные выкладки, имеем:

$$\operatorname{grad}\Psi=[\operatorname{grad}\Phi]-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\operatorname{grad}\tau,$$

$$\nabla^2\Psi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\Psi=[\nabla^2\Phi]-2\left[\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\cdot\operatorname{grad}\tau-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\nabla^2\tau+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right](\operatorname{grad}\tau)^2$$

и затем, на основании ур-ний (1) и (3):

$$\nabla^2\Psi=2(\operatorname{grad}\tau)^2\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right]-2\operatorname{grad}\tau\cdot\left[\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]-\nabla^2\tau\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right].$$

Обратив внимание на то, что

$$\left[\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]-\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right]\operatorname{grad}\tau=\operatorname{grad}\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

будем иметь:

$$\nabla^2\Psi=-2\operatorname{grad}\tau\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\nabla^2\tau\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

$$\sigma\nabla^2\Psi=-2\sigma\operatorname{grad}\tau\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\sigma\nabla^2\tau\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Предполагая, что

$$\sigma\nabla^2\Psi=\operatorname{div}\left(-\vec{u}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right),$$

где $\vec{u}$ — неопределенный пока вектор, мы получим, раскрывая правую часть:

$$\sigma\nabla^2\Psi=-\vec{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\operatorname{div}\vec{u}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Отожествляя это с полученным нами выражением для $\sigma \nabla^2 \Psi$, мы будем иметь два соотношения:

$$2\sigma \operatorname{grad} \tau = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = \sigma \nabla^2 \tau.$$

Как мы видим, эти условия определяют $\vec{u}$, если известно σ. Подставляя значение $\vec{u}$ из первого соотношения во второе, мы получим условие, которому должна удовлетворять функция σ:

$$\operatorname{div}(2\sigma \operatorname{grad} \tau) = \sigma \nabla^2 \tau$$

или

$$2 \operatorname{grad} \sigma(M) \cdot \operatorname{grad} \tau(M) + \sigma(M) \nabla^2 \tau(M) = 0. \tag{5}$$

Пусть это ур-ние удовлетворено. Тогда

$$\sigma \nabla^2 \Psi = \operatorname{div}\left(-2\sigma \operatorname{grad} \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \cdot$$

Применим теперь, как это обычно делается, формулу Green'а к интегралу

$$\iiint\limits_P (\sigma \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \sigma)\, dv,$$

где P — произвольный объем, внутри которого ур-ния (3) и (5) выполнены, и функции $\sigma(M)$ и $\Psi(M, t)$ считаются непрерывными со своими производными до второго порядка. Обозначая через S поверхность, ограничивающую P, а через ν — направление внутренней нормали, будем иметь:

$$\iiint\limits_P (\sigma \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \sigma)\, dv = \iint\limits_S \left(\Psi \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} - \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right) df = -\iiint\limits_P \Psi \nabla^2 \sigma\, dv +$$

$$+ \iiint\limits_P \operatorname{div}\left(-2\sigma \operatorname{grad} \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) dv = -\iiint\limits_P \Psi \nabla^2 \sigma\, dv + \iint\limits_S 2\sigma \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\, df$$

и, наконец:

$$\iint\limits_S \left(\Psi \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} - \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - 2\sigma \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) df + \iiint\limits_P \Psi \nabla^2 \sigma\, dv = 0.$$

Теперь, возвращаясь опять к функции Φ и вспоминая, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] - \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right],$$

получим основную формулу

$$\iint\limits_S \left\{[\Phi]\frac{\partial\sigma}{\partial\nu} - \sigma\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right] - \sigma\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\} df + \iiint\limits_P [\Phi]\nabla^2\sigma\, dv = 0, \tag{6}$$

на которой построена вся дальнейшая теория.

4°. Остановимся несколько ближе на свойствах центрального поля, важных нам для дальнейшего изложения.

Для изучения этого поля нам придется в дальнейшем иметь дело с особыми координатами, связанными с вариационной задачей. Будем положение точки M этого поля определять величиной $\tau(M; M_0)$ и полярными углами, которые составляет касательная в точке M_0 к экстремали, соединяющей M_0 с M. Углы эти мы будем называть ϑ_0 и φ_0.

Мы докажем в гл. II, что определитель преобразования от Декартовых координат пространства к экстремальным удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)} \leq N[\tau(M; M_0)]^2, \tag{7}$$

где N — некоторая постоянная, зависящая, вообще говоря, только от свойств всего поля в целом.

Там же мы установим, что величина эквидистантной поверхности

$$\tau(M; M_0) = t$$

не превосходит Rt^2, где R — опять некоторая постоянная.

Вводим центральное поле с центром M_0 и рассмотрим область вида

$$\tau(M; M_0) \leq T.$$

Допустим, что внутри этой области существует функция

$$\sigma(M; M_0),$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) Функция

$$\sigma(M; M_0),$$

как функция M, непрерывна со своими производными двух первых порядков во всей рассматриваемой области, кроме точки M_0.

2) В этой области функция σ удовлетворяет ур-нию

$$2\,\mathrm{grad}\,\sigma(M; M_0)\cdot \mathrm{grad}\,\tau(M; M_0) + \sigma(M; M_0)\nabla^2\tau(M; M_0) = 0.$$

3) Произведение

$$\sigma(M;\ M_0)\,\tau(M;\ M_0),$$

как функция M, непрерывно, вместе со своими производными двух первых порядков, во всей нашей области, включая M_0, причем

$$\lim_{M\to M_0}\sigma(M;\ M_0)\,\tau(M;\ M_0)=n(M_0). \tag{8}$$

4) Если рассматривать другое поле с центром в M и если можно построить для него аналогично

$$\sigma(M_0;\ M),$$

то

$$\sigma(M;\ M_0)=\sigma(M_0;\ M). \tag{9}$$

5) Оператор Лапласа от σ удовлетворяет неравенству

$$|\nabla^2\sigma(M;\ M_0)|=\left|\frac{1}{\tau(M;\ M_0)}\nabla^2[\sigma(M;M_0)\,\tau(M;M_0)]\right|\le\frac{K}{\tau(M;\ M_0)}, \tag{10}$$

где K — некоторая постоянная, независящая от M.

6) Если S_1 — некоторая замкнутая поверхность, содержащая M_0 внутри себя, и ν — направление внутренней нормали к этой поверхности, то при беспредельном сжимании S_1 к точке M_0 будем иметь:

$$\lim_{S_1\to M_0}\iint\limits_{S_1}\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\,df=4\pi.$$

Во всем дальнейшем, говоря о центральном поле, мы будем предполагать функцию

$$\sigma(M;\ M_0)$$

для него существующей. Предположение это не является произвольным или искусственным. Нетрудно видеть, что в случае $c=\text{const}$ функция

$$\sigma(M;\ M_0)$$

существует. Действительно, при этом

$$\tau(M;\ M_0)$$

обращается в $\frac{r}{c}$ и функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет всем шести условиям. В гл. II мы покажем, что, например, в случае аналитичности функци $c(M)$, функция

$$\sigma(M;\ M_0)$$

будет существовать, причем постоянную K в неравенстве (10) можно считать независящей от M_0 в некоторой области изменения M_0. Существование ее можно установить и при более широких условиях, на которых мы пока не будем останавливаться.

5°. В связи с точкой M_0 рассмотрим область D, заключающую эту точку внутри себя, и притом такую, что внутри нее можно построить центральное поле.

Выделим в этой области объем P, содержащий M_0 и ограниченный поверхностью S. Затем малой замкнутой поверхностью S_1 вырежем вокруг M_0 малый объем. Оставшийся объем мы назовем P_1. В объеме P_1 функции

$$\tau(M;\, M_0)$$

$$\sigma(M;\, M_0)$$

удовлетворяют ур-ниям (3) и (5), и, следовательно, к этому объему можно применить формулу (6), взяв за Φ любую функцию, удовлетворяющую волновому ур-нию (1). Тогда

$$\iint\left\{[\Phi]\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}-\sigma\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]-\sigma\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\}df+\iint\limits_{S_1}\left\{[\Phi]\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}-\sigma\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]-\sigma\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\}df+$$

$$+\iiint\limits_{P_1}[\Phi]\,\nabla^2\sigma\,dv=0.$$

Будем теперь сжимать поверхность S_1 в точку и посмотрим, к чему будет стремиться второй член этой формулы. Легко проверить, что предел его будет

$$-4\pi\,\Phi(M_0,\, t).$$

Действительно,

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]$$

и

$$\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right],$$

как легко видеть, будут, вообще говоря, ограничены.

Интеграл

$$\iint\limits_{S_1}\sigma\,df$$

стремится к нолю на основании (8), ибо порядок малости

$$\tau(M;\, M_0),$$

очевидно, совпадает с r.

Если так, то интегралы

$$\iint\limits_{S_1} \sigma \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right] df$$

и

$$\iint\limits_{S_1} \sigma \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] df,$$

очевидно, стремятся к нолю по теореме о среднем.

Остается еще одно слагаемое

$$\iint\limits_{S_1} [\Phi] \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} df = \iint\limits_{S_1} [\Phi]_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} df + \iint\limits_{S_1} \eta \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} df,$$

где

$$[\Phi]_0 = \Phi(M_0, t)$$

и

$$\max|\eta| \to 0 \quad \text{при} \quad S_1 \to M_0.$$

Вспомнив, что при нашем выборе внутренняя нормаль направлена вовне поверхности S_1, мы сразу получим наше утверждение, применив ко второму слагаемому теорему о среднем.

При таком сжимании S_1 в точку объемный интеграл по P_1 обратится, как нетрудно видеть, в интеграл по P, сходимость которого вытекает из (10).

Перенося в нашем равенстве

$$4\pi\, \Phi(M_0, t)$$

в правую часть и деля на 4π, получим:

$$(11) \quad \Phi(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \left\{ [\Phi(M, t)] \frac{\partial \sigma(M; M_0)}{\partial \nu} - \sigma(M; M_0) \left[\frac{\partial \Phi(M, t)}{\partial \nu}\right] - \right.$$

$$\left. - \sigma(M; M_0) \frac{\partial \tau(M; M_0)}{\partial \nu} \left[\frac{\partial \Phi(M, t)}{\partial t}\right] \right\} df + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{P} \nabla^2 \sigma(M; M_0) [\Phi(M, t)]\, dv,$$

где интегрирование совершается по переменной точке M.

Эта формула решает первую из поставленных нами задач, являясь искомым нами обобщением формулы Kirchhoff'a. Как мы уже указывали, существенным добавлением, проистекающим от неоднородности среды, является наличие слагаемого в виде объемного интеграла. Это слагаемое содержит $\nabla^2 \sigma$, который для случая $c = \text{const}$ обращается в ноль. То обстоятельство, что для неоднородной среды функция σ не является, вообще говоря, гармонической, представляется нам не лишенным известного интереса, так как, обычно, функции, обобщающие $\frac{1}{r}$, по своим свойствам, как, например, функция Green'a, существенно предполагаются гармоническими, и использование в формуле Green'a функции не гармонической, как нам кажется, встречается впервые.

Переходя к физическому истолкованию формулы (11), мы заметим, что, с точки зрения принципа Huygens'a, объемный интеграл представляет собою тот факт, что не только поверхность S оказывается посылающей волну, но во все время движения этой волны каждая точка объема P прибавляет добавочные возмущения, пропорциональные оператору Лапласа от функции σ, взятому в этой точке. Для пояснения сказанного мы попробуем выяснить, какие математические следствия вытекают из такого толкования.

6°. Предположим, что некоторое решение у ур-ния (1) существует, и нам даны начальные значения самой функции

$$\Phi(M,\ t)$$

и ее производной по времени:

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi(x,\ y,\ z,\ 0)=\Phi(M,\ 0)=F(M),\\ &\left(\frac{\partial\Phi(M,\ t)}{\partial t}\right)_{t=0}=f(M). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Покажем, что при этих предположениях для функции

$$\Phi(M,\ t)$$

можно составить некоторое интегральное ур-ние, разрешимое методом последовательных приближений.

Остановимся теперь несколько подробнее на свойствах самой среды. Не считая среду обязательно безграничной или ограниченной, мы в соответствие каждой точке M_0 будем приводить некоторую область D:

$$\tau(M;\ M_0)\leq T(M_0),$$

обладающую некоторыми регулярными вариационными свойствами. Мы будем предполагать, что из каждой точки этого объема Q можно построить центральное поле по крайней мере вплоть до эквидистантной поверхности

$$\tau(M;\ Q)=T-\tau(Q;\ M_0)$$

и что, следовательно, существует функция $\sigma(M_1;\ M_2)$ для любых двух точек M_1 и M_2, удовлетворяющих одному из двух неравенств

$$\tau(M_1;\ M_2) \leq T - \tau(M_0;\ M_1),$$
$$\tau(M_1;\ M_2) \leq T - \tau(M_0;\ M_2).$$

Конечно, $\tau(M_1;\ M_2)$ должно иметь при этом определенный смысл. Кроме того, потребуем, чтобы для всякой такой точки M_2 неравенство (10) имело место равномерно.

В соответствие точке M_0, от которой зависит $\Phi(M_0,\ t)$ в левой части формулы (11), и моменту времени t приведем поверхность S, на которой $\tau(M;\ M_0) = t$ и объем P, ограниченный этой поверхностью: $\tau(M;\ M_0) \overline{<} t$, и применим формулу (11) к этому объему. При этом мы будем существенно предполагать, что время t таково, что поверхность S не выходит за пределы области D, упомянутой выше.

В правой части (11) значения функций

$$[\Phi],\ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right] \text{ и } \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]$$

по определению взяты в момент времени

$$t - \tau(M;\ M_0) = t - t = 0.$$

Но при $t = 0$, в силу ур-ний (12), они обращаются в F, $\frac{\partial F}{\partial \nu}$ и f.

Заметив это, мы преобразуем ур-ние (11), написав его в виде

$$\Phi(M_0,\ t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{F(M) \frac{\partial \sigma(M;\ M_0)}{\partial \nu} - \sigma(M;\ M_0) \frac{\partial F(M)}{\partial \nu} - \right. \tag{13}$$

$$\left. - \sigma(M;\ M_0)\ \frac{\partial \tau(M;\ M_0)}{\partial \nu} f(M)\right\} df + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_P [\Phi(M,\ t)]\, \nabla^2 \sigma(M;\ M_0)\, dv.$$

Это интегральное ур-ние имеет определенный смысл при $t \leq T(M_0)$, т. е. пока не начнут сказываться отступления от регулярности у вариационной задачи, обусловленные, быть может, подходом возмущений от точек на границе среды или от точек с фокусом лучей, лежащим внутри охваченной области.

Мы применим к ур-нию (13) метод последовательных приближений, докажем его сходимость и установим, что это ур-ние имеет единственное решение.

7°. Для сокращения письма положим

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{F(M) \frac{\partial \sigma(M;\ M_0)}{\partial \nu} - \sigma(M;\ M_0) \frac{\partial F(M)}{\partial \nu} - \sigma(M;\ M_0) \frac{\partial \tau(M;\ M_0)}{\partial \nu} f(M)\right\} df =$$
$$= \Phi_0(M_0,\ t).$$

Ур-ние (13) перепишется

$$\Phi(M_0, t) = \Phi_0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P [\Phi(M, t)]\, \nabla^2 \sigma(M; M_0)\, dv. \tag{13}$$

Метод последовательных приближений мы применим самым обычным образом. Полагаем

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_1(M_0, t) = \Phi_0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P [\Phi_0(M, t)]\, \nabla^2 \sigma(M; M_0)\, dv, \\ \Phi_2(M_0, t) = \Phi_0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P [\Phi_1(M, t)]\, \nabla^2 \sigma(M; M_0)\, dv, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{n+1}(M_0, t) = \Phi_0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P [\Phi_n(M, t)]\, \nabla^2 \sigma(M; M_0)\, dv. \end{array}\right. \tag{14}$$

Отметим, что определенные таким образом функции Φ_n имеют смысл, так как все функции, стоящие под знаком интеграла, абсолютно интегрируемы и значения какой-либо из них в тот момент t, который стоит в ее аргументе, вполне определены предыдущими формулами (13). Докажем это. Сначала проверим формальную законность операций. Покажем, что значения функции $\Phi_1(M_0, t)$ определены вплоть до $t = T(M_0)$.

Действительно, значения функции $\Phi_0(M, t)$ под интегралом в первой из формул (14) взяты в момент времени $t - \tau(M; M_0)$, и, следовательно, для вычисления этих значений нужно было в выражении для $\Phi_0(M, t)$ выбрать эквидистантную поверхность с центром M и радиусом

$$t - \tau(M; M_0).$$

Но такая эквидистантная поверхность, благодаря единственности сильного экстремума, должна лежать целиком внутри P и только в одной точке касаться границы P изнутри. Следовательно, это значение определено по крайней мере до того времени, когда P коснется границы D, т. е. до $t = T(M_0)$. Совершенно так же можно проверить, что и все последующие определения имеют смысл. Абсолютную интегрируемость произведений $\nabla^2\sigma(M_1; M_0)$ $[\Phi_n(M, t)]$ мы проверим одновременно с доказательством сходимости приближений. Докажем, что функция $\Phi_0(M_0, t)$ ограничена.

Очевидно, сомнение может возбуждать лишь момент времени $t = 0$, ибо в другие моменты она конечна, так как интегралы, которыми она выражается, — собственные.

Ограниченность ее вблизи $t=0$, однако, устанавливается совершенно таким же рассуждением, которое мы применяли, доказывая формулу (11) и сжимая поверхностный интеграл по S_1 в точку M_0. Повторять это рассуждение мы здесь не будем.

Заменяя в первой из формул (12) декартовы координаты на экстремальные координаты § 4, мы можем привести ее к виду

$$\Phi_1(M_0, t) - \Phi_0(M, t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\nabla^2\sigma}\,[\overline{\Phi_0}]\,\frac{D(x, y, z)}{D(\tau, \vartheta_0, \varphi_0)}\,d\vartheta_0\,d\varphi_0,$$

где символом $^{-}$ обозначается результат замены декартовых координат под знаком некоторой функции на координаты экстремальные.

Но теперь, в силу неравенств (7) и (10):

$$|\Phi_1(M_0, t) - \Phi_0(M, t)| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau\, 2\pi^2 R\frac{K}{\tau}N\tau^2 = \frac{\pi}{2}RKN\int_0^t \tau d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{2}RKN\frac{t^2}{2},$$

где

$$|\Phi_0(M, t)| \leq R,$$

и, более сжато:

$$|\Phi_1(M_0, t) - \Phi_0(M_0, t)| < R\,\frac{L^2 t^2}{2!},$$

где L — постоянная, большая чем

$$\sqrt{\frac{KN\pi}{2}}.$$

После этого из формул (14) получим:

$$\Phi_{n+1}(M_0, t) - \Phi_n(M_0, t) = \frac{1}{4\pi}\iiint_P \nabla^2\sigma(M; M_0)\,[\Phi_n(M, t) - \Phi_{n-1}(M, t)]\,dv. \tag{15}$$

Если мы установим, что

$$|\Phi_{n+1}(M, t) - \Phi_n(M, t)| \leq R\,\frac{L^{2n+2}t^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

то отсюда будет вытекать как сходимость нашего алгорифма, так и абсолютная интегрируемость.

Мы докажем это методом математической индукции.

Предположим, что это неравенство верно для чисел, меньших n. Перейдем в формуле (15) от Декартовых координат к экстремальным. Тогда

$$\Phi_{n+1}(M_0, t) - \Phi_n(M_0, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{\nabla^2 \sigma(M; M_0)}\, \overline{[\Phi_n(M, t) - \Phi_{n-1}(M, t)]}\, \frac{D(x, y, z)}{D(\tau, \vartheta_0, \varphi_0)}\, d\vartheta_0\, d\varphi_0,$$

и так как по предположению

$$|[\Phi_n(M, t) - \Phi_{n-1}(M, t)]| < R\,\frac{L^{2n}(t-\tau)^{2n}}{(2n)!},$$

то

$$|\Phi_{n+1}(M_0, t) - \Phi_n(M_0, t)| < \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{K}{\tau} R\,\frac{L^{2n}(t-\tau)^{2n}}{(2n)!}\, N\tau^2\, d\vartheta_0\, d\varphi_0 =$$

$$= \frac{\pi}{2} R\,\frac{KNL^{2n}}{(2n)!}\int_0^t \tau(t-\tau)^{2n}\, d\tau < R\,\frac{L^{2n+2}}{(2n)!}\left\{\frac{-(t-\tau)^{2n+1}\,\tau}{2n+1}\Bigg|_0^t + \int_0^t \frac{(t-\tau)\,2n^{+1}}{2n+1}\, d\tau\right\} =$$

$$= R\,\frac{L^{2n+2}\, t^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

что и требовалось доказать.

Обозначим теперь сумму ряда

$$\Phi_0(M, t) + \sum_{n=1}^{\infty}\{\Phi_n(M, t) - \Phi_{n-1}(M, t)\}$$

через $\Phi(M, t)$.

Переходя к пределу в формулах (14), получим:

$$\Phi(M_0, t) = \Phi_0(M_0, t) + \frac{1}{4\pi}\iiint_P [\Phi(M, t)]\, \nabla^2 \sigma(M; M_0)\, dv.$$

Таким образом, функция, полученная нами, удовлетворяет ур-нию (13).

Покажем теперь, что это ур-ние имеет единственное непрерывное решение. Предположим, что существует еще одно решение Φ'. Функция $\Phi - \Phi' = U$ удовлетворяет однородному интегральному ур-нию

$$U(M_0, t) = \frac{1}{4\pi}\iiint_P [U(M, t)]\, \nabla^2 \sigma(M; M_0)\, dv.$$

В силу свойства (5) функции $\sigma(M; M_0)$ произведение

$$\nabla^2 \sigma(M; M_0)\,[U(M, t)]$$

будет абсолютно интегрируемо в окрестности M_0. Введем положительное число R_1:

$$|U| < R_1.$$

Подставляя эту оценку в правую часть однородного интегрального ур-ния, получим:

$$|U(M_0, t)| < \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{K}{\tau} N\tau^2 R_1\, d\vartheta_0\, d\varphi_0 < R_1 \frac{L^2 t^2}{2!}.$$

Повторяя слово в слово предыдущие рассуждения, мы докажем, что если

$$|U| < R_1 \frac{L^{2n} t^{2n}}{(2n)!},$$

то

$$|U| < R_1 \frac{L^{2n+2} t^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Действительно,

$$|[U(M, t)]| < R_1 \frac{L^{2n}(t-\tau)^{2n}}{(2n)!},$$

$$|U(M_0, t)| < \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{K}{\tau^2} R \frac{L^{2n}(t-\tau)^{2n}}{(2n)!} N\tau^2\, d\vartheta_0\, d\varphi_0 < R \frac{L^{2n+2} t^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Следовательно, разность двух решений меньше общего члена сходящегося ряда и, следовательно, равна тождественно нолю.

Тем самым единственность решения ур-ния (13) установлена. Отсюда следует, что если какое-нибудь решение у волнового ур-ния с начальными условиями (12) существует, то наш алгорифм последовательных приближений дает именно это решение.

В гл. III мы используем этот алгорифм для доказательства существования упомянутого решения.

8°. Дадим теперь пример вычисления функции $\sigma(M; M_0)$ в некотором частном случае.

Пример. Представим себе среду, симметричную относительно некоторой точки A.

Если за координаты переменной точки пространства M мы возьмем полярные координаты с началом в A, то коэффициент $c(M)$ волнового ур-ния будет функцией от расстояния $r = |\overline{MA}|$:

$$c(M) = f(r). \tag{16}$$

Хотя вычисление функции τ и нахождение системы экстремалей в этом случае общеизвестно, но мы все же повторим вкратце основные пункты. Так как все экстремали будут, очевидно, плоскими кривыми, то достаточно найти семейство экстремалей в некоторой плоскости, проходящей через начало. Введем в этой плоскости полярные координаты.

Задача о минимуме интеграла

$$\int \frac{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\, d\varphi^2}}{f(\varrho)} \tag{17}$$

приводит нас к ур-нию Эйлера, которое для этого случая, благодаря независимости подинтегральной функции от φ, дает

$$\frac{\varrho^2 \varphi'}{f(\varrho)\sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2 \varphi'^2}} = a,$$

где a — произвольная постоянная.

Если мы хотим, чтобы независимым переменным служила величина интеграла (17), то к этому условию нужно присоединить

$$\varrho'^2 + \varrho^2 \varphi'^2 = f^2(\varrho).$$

Из этих ур-ний вытекает очевидное следствие:

$$\varphi' = \frac{af^2(\varrho)}{\varrho^2}$$

и

$$\varrho' = f(\varrho)\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}.$$

Последнее из этих двух ур-ний представляет собою ур-ние с отделяющимися переменными. Из него:

$$d\tau = \frac{d\varrho}{f(\varrho)\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}},$$

или

$$\tau(M;\, M_0) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{f(\varrho)\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}},$$

и затем:

$$\varphi = \int_0^{\tau} \varphi'\, d\tau = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{af(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}.$$

Переходя к пространственной задаче, мы заменим ϱ на r, а полярный угол φ — на

$$\alpha = \arccos\left[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right].$$

Тогда окончательно получим систему двух ур-ний:

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tau(r,\vartheta,\varphi;\, r_0,\vartheta_0,\varphi_0) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{f(\varrho)\sqrt{1-\dfrac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}},\\ &\alpha = \arccos\left[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\right] =\\ &\qquad = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{a f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2\sqrt{1-\dfrac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Выражая из второго ур-ния a через $r, \vartheta, \varphi;\ r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ и подставляя в первое, получим явное выражение

$$\tau(r,\vartheta,\varphi;\, r_0,\vartheta_0,\varphi_0).$$

Переходя к отысканию функции $\sigma(M;\, M_0)$, мы выберем полярную ось так, чтобы она проходила через A и M_0.

Принимая во внимание, что при этом τ и σ можно считать независящими от φ, мы получим основное ур-ние для σ в виде

$$2\frac{\partial\tau}{\partial r}\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta} + \sigma\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Вычисляем это фактически, пользуясь формулами (18):

$$\frac{\partial a}{\partial r} = -\frac{a f(r)}{r^2\sqrt{1-\dfrac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)}{\varrho^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}}} +\right.$$

$$\left. + \frac{a\dfrac{a f^2(\varrho)}{\varrho^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}\right\} d\varrho = -\frac{a f(r)}{r^2\sqrt{1-\dfrac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\dfrac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}} =$$

$$= \frac{-1}{r^2\sqrt{\dfrac{1}{a^2 f^2(\varrho)}-\dfrac{1}{r^2}}} : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\dfrac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}},$$

$$\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = 1 : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right) + \frac{\partial \tau}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial r} = \frac{1}{f(r)\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} - \frac{a^2 f(r)}{r^2 \sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} =$$

$$= \frac{1}{f(r)}\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}} = \sqrt{\frac{1}{f^2(r)} - \frac{a^2}{r^2}},$$

где $\left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)$ — это производная, вычисленная в предположении, что a не зависит от r.

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} = \frac{\frac{-f'(r)}{f^3(r)} + \frac{a^2}{r^3} - \frac{a}{r^2}\frac{\partial a}{\partial r}}{\sqrt{\frac{1}{f^2(r)} - \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{-f'(r)}{f^2(r)\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} + \frac{a^2 f(r)}{r^3 \sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} +$$

$$+ \frac{a^2 f^2(r)}{r^4\left(1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}\right)} : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \tau}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \vartheta} = a,$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial a}{\partial \vartheta} = 1 : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}},$$

откуда

$$\nabla^2 \tau = -\frac{f'(r)}{f^2(r)\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} + \frac{a^2 f(r)}{r^3 \sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}} + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}\right\} : \int\limits_{r_0}^{r} \frac{f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}} + \frac{2}{r f(r)}\sqrt{1 - \frac{a^2 f^2(r)}{r^2}} + \frac{a}{r^2 \operatorname{tg} \vartheta}.$$

После этого мы можем отыскать функцию σ с помощью квадратур, причем новых квадратур, как мы увидим, нам при этом производить не придется. То, что это обстоятельство не случайно, мы выясним в гл. II.

Ур-ние для σ примет вид

$$\frac{1}{2f(r)}\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}\,\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\frac{2a}{r^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}+\sigma\left\{\frac{-a^2 f'(r)}{r^2 f^2(r)\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}}+\right.$$

$$+\frac{a^2 f(r)}{r^3\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}}+1:\left[r^2\left(1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}\right)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}\right]+$$

$$\left.+\frac{2}{rf(r)}\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}+\frac{a}{r^2\operatorname{tg}\vartheta}\right\}=0.$$

Ур-ния характеристик будут

$$\frac{dr}{2\frac{1}{f(r)}\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}}=\frac{d\vartheta}{\frac{2a}{r^2}}=\frac{-d\sigma}{\sigma\left\{\frac{-a^2 f'(r)}{r^2 f^2(r)\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}}+\frac{a^2 f(r)}{r^3\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}}+\frac{2}{rf(r)}\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}+\right.}$$

$$\left.+1:\left[r^2\left(1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}\right)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}\right]+\frac{a}{r^2\operatorname{tg}\vartheta}\right\}.$$

При нашем выборе осей величина a во втором из ур-ний (18) равна ϑ, и равенство первых двух из написанных отношений совпадает с дифференциальным ур-нием экстремали, откуда видно, что $a=\text{const}$ есть интеграл ур-ний характеристик. Отсюда нетрудно получить:

$$\lg C_1=\lg\sigma+\int\limits_{r_0}^{r}\left\{\frac{-f'(r)}{2f(r)\left(1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}\right)}+\frac{a^2 f^2(r)}{2r^3\left(1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}\right)}+\right.$$

$$+f(\mathrm{r}):\left\{2r^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}\right)^3}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}\right\}+\frac{1}{r}+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{a f(r)}{r^2\sqrt{1-\frac{a^2 f^2(r)}{r^2}}}\operatorname{ctg}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{a f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)}}\right\}dr=\lg\sigma+$$

$$+\int_{r_0}^{r}\left\{\frac{1}{2}\,d\lg\int_{r_0}^{r}\frac{f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}+d\lg r+\frac{1}{2}\,d\lg\sin\int_{r_0}^{r}\frac{a\,f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\,d\lg\left(\frac{1}{f^2(r)}-\frac{a^2}{r^2}\right)\right\},$$

или, наконец:

$$\sigma=\sqrt{f(r)}\,\Psi(a):\left\{r\sqrt{\sin\vartheta}\,\sqrt[4]{1-\frac{a^2f^2(r)}{r^2}}\sqrt{\int_{r_0}^{r}\frac{f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}}\right\},$$

где Ψ — произвольная функция, и a определяется из ур-ния

$$\vartheta=\int_{r_0}^{r}\frac{a\,f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}.$$

Выберем теперь Ψ так, чтобы

$$\lim\sigma\tau=\frac{1}{f(r_0)}.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы предел $\sigma\tau$ по всем экстремальным кривым был бы равен этому числу.

Дадим a постоянное значение и будем исследовать предел $\sigma\tau$ при $r\to r_0$. Имеем:

$$\sigma\tau=\frac{\sqrt{f(r)}}{r\sqrt[4]{1-\frac{a^2f^2(r)}{r^2}}}\sqrt{\int_{r_0}^{r}\frac{d\varrho}{f(\varrho)\sqrt{1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}:\sin\int_{r_0}^{r}\frac{a\,f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}}\times$$

$$\times\sqrt{\int_{r_0}^{r}\frac{d\varrho}{f(\varrho)\sqrt{1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}}}:\int_{r_0}^{r}\frac{a\,f(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\left(1-\frac{a^2f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}}\cdot\Psi(a).$$

Если определить пределы двух отношений, стоящих под радикалами по правилу Лопиталя, то мы получим:

$$\lim_{\tau\to 0}\sigma\tau=\Psi(a)\cdot\frac{1}{f(r_0)}\left\{\frac{1}{\sqrt{f(r_0)}}\,r_0\sqrt[4]{1-\frac{a^2f^2(r_0)}{r_0{}^2}}\right\},$$

и условие

$$\lim_{\tau \to 0} \sigma\tau = \frac{1}{f(r_0)}$$

даст

$$\Psi(a) = \frac{\sqrt{f(r_0)}}{r_0 \sqrt[4]{1 - \frac{a^2 f^2(r_0)}{r_0^2}}}.$$

Подставляя это выражение в формулу для σ, будем иметь, заменяя опять ϑ на α:

$$(19)\quad \sigma = 1 : \left\{ r r_0 \sqrt{\sin\alpha} \sqrt[4]{\left(\frac{1}{a^2 f^2(r)} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{a^2 f^2(r_0)} - \frac{1}{r_0^2}\right)} \sqrt{\int_{r_0}^{r} \frac{a f(\varrho)\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 f^2(\varrho)}{\varrho^2}\right)^3}}} \right\}.$$

Функция σ оказалась симметричной относительно M и M_0, и можно проверить, что, вообще говоря, все шесть свойств ее имеют место. Для иллюстрации сказанного мы выберем частный случай $f(r) = r$.

Тогда мы получим после несложных выкладок:

$$\tau = \sqrt{\lg^2 \frac{r}{r_0} + \alpha^2}, \qquad a = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\lg^2 \frac{r}{r_0} + \alpha^2}}$$

или

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \left| \lg\left(\frac{r}{r_0}\right) \right|,$$

экстремальные кривые в этом случае представляют собою семейство логарифмических спиралей.

Для этого случая формула (19) дает

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{r r_0 \sin\alpha \left(\lg^2 \frac{r}{r_0} + \alpha^2\right)}}.$$

Для вычисления $\nabla^2\sigma$ заметим, что

$$\nabla^2 \sigma = \frac{1}{\tau} \nabla^2 (\sigma\tau).$$

Тогда

$$\nabla^2 \sigma = \frac{1}{\sqrt{\lg^2 \frac{r}{r_0} + \alpha^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r r_0}} \sqrt{\frac{\alpha}{\sin\alpha}} \frac{1}{4r^2} \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Как мы видим, наша оценка имеет место всюду, кроме точки $A\,(r = 0)$, в которой

$$n(M) = \frac{1}{r}$$

обращается в бесконечность.

ГЛАВА II

1°. В этой главе мы займемся доказательством существования функции σ, которую мы определили в гл. I, и исследованием ее свойств. При этом мы сделаем предположение, что функция $c(M)$ является аналитической функцией точки M, не обращающейся в ноль. Предположение это не вытекает из существа задачи и могло бы быть заменено требованием существования и непрерывности нескольких производных, но мы ограничимся этим более простым случаем, чтобы не вводить излишних трудностей в изложение.

Предварительно напомним одно известное предложение из теории систем обыкновенных дифференциальных ур-ний первого порядка.[1]

Теорема I. Если дана некоторая система ур-ний первого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= X_1\,(t,\ x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
\frac{dx_2}{dt} &= X_2\,(t,\ x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_m}{dt} &= X_m\,(t,\ x_1, x_2, \ldots, x_m)
\end{aligned}$$

и известен какой-нибудь общий интеграл такой системы, зависящий от m произвольных постоянных

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1\,(t,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_m),\\
x_2 &= x_2\,(t,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &= x_m\,(t,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_m),
\end{aligned}$$

то имеет место формула

$$\frac{d \lg \dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_m)}}{dt} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_m}{\partial x_m}. \tag{20}$$

Рассмотрим некоторое семейство кривых, зависящее от двух параметров, и применим эту теорему к исследованию расходимости единичного вектора касательной нашего семейства.

[1] См. Poincaré. Leçons sur la Mécanique céleste.

Мы докажем следующую теорему:

Теорема II. Если $\vec{T}$ — единичный вектор касательной к некоторому семейству кривых, зависящих от двух параметров, то

$$\operatorname{div}\vec{T}=\frac{\partial \lg \Delta}{\partial s},$$

где s — длина дуги этих кривых, а Δ — определитель преобразования от Декартовых координат пространства к криволинейным, содержащим наше семейство линий в качестве координатных, если за третью координату взять длину дуги s, отсчитанную от произвольной поверхности, пересекающей их все.

Для доказательства мы составим систему дифференциальных ур-ний, которым будут удовлетворять кривые семейства, если взять длину дуги за независимое переменное.

Если составляющие вектора $\vec{T}$ будут X, Y и Z, то, очевидно, эти ур-ния можно написать в виде

$$\frac{dx}{ds}=X,\quad \frac{dy}{ds}=Y,\quad \frac{dz}{ds}=Z.$$

Так как правые части не содержат s явно, то одна из произвольных постоянных входит в общий интеграл системы аддитивно, и этот интеграл будет иметь вид

$$x=x(s+s_0,\ a_1,\ a_2),$$
$$y=y(s+s_0,\ a_1,\ a_2),$$
$$z=z(s+s_0,\ a_1,\ a_2).$$

Заметив это, мы получим, применяя теорему I:

$$\frac{\partial \lg \dfrac{D(x,y,z)}{D(s_0,a_1,a_2)}}{\partial s}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{T},$$

и так как

$$\frac{\partial x}{\partial s_0}=\frac{\partial x}{\partial s},\quad \frac{\partial y}{\partial s_0}=\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial s_0}=\frac{\partial z}{\partial s},$$

то

(21) $$\operatorname{div}\vec{T}=\frac{\partial \lg \Delta}{\partial s},$$

что и требовалось доказать.

2°. Вернемся теперь опять к задаче вариационного исчисления и рассмотрим некоторое поле, которое мы пока не считаем центральным. Мы покажем, что функцию $\sigma(M)$ можно определить с помощью чисто алгебраических операций, если известны ур-ния экстремалей.

Как мы видели в гл. I, функция $\sigma(M)$ определялась условием

$$2 \operatorname{grad} \sigma(M) \cdot \operatorname{grad} \tau(M) + \sigma(M) \nabla^2 \tau(M) = 0. \tag{5}$$

Если s есть длина дуги экстремальной кривой, то, принимая во внимание, что $\operatorname{grad} \tau$ касается экстремали, причем $\frac{\partial \tau}{\partial s} = n(M)$, можем переписать ур-ние для σ в виде

$$2 \frac{\partial \sigma(M)}{\partial s} n(M) + \sigma(M) \nabla^2 \tau(M) = 0.$$

Для вычисления $\nabla^2 \tau$ мы используем вторую теорему прошлого параграфа. Очевидно

$$\operatorname{grad} \tau = n(M) \vec{T},$$

где $\vec{T}$ — единичный вектор касательной к экстремали. Отсюда

$$\nabla^2 \tau = \vec{T} \cdot \operatorname{grad} n(M) + n(M) \operatorname{div} \vec{T}.$$

Первое слагаемое есть производная от $n(M)$ по направлению касательному к экстремали поля, или, что то же,

$$\vec{T} \cdot \operatorname{grad} n(M) = \frac{\partial n}{\partial s}.$$

На основании § 1 второе слагаемое равно

$$n(M) \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s},$$

и окончательно получим:

$$2 \frac{\partial \sigma}{\partial s} n(M) + \sigma \left[\frac{\partial n(M)}{\partial s} + n(M) \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s} \right] = 0, \tag{22}$$

или

$$2 \frac{\partial \lg \sigma}{\partial s} = - \frac{\partial \lg n}{\partial s} - \frac{\partial \lg \Delta}{\partial s},$$

откуда, интегрируя:

$$\sigma = \frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M) \Delta}} = \frac{\Psi(\vartheta_0, \varphi_0)}{\sqrt{n(M) \dfrac{D(x, y, z,)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}}, \tag{23}$$

где ϑ_0 и φ_0 — некоторые параметры, определяющие экстремаль, и Ψ — произвольная функция этих параметров.

Формула (23) представляет собою общее выражение для функции σ в любом поле.

3°. Займемся более детальным анализом центрального поля в предположении, что $c(M)$ — аналитическая функция.

В гл. I мы уже вводили экстремальные координаты точки поля: τ, ϑ_0 и φ_0. Введем теперь несколько другие координаты, заменяя τ через s — длину дуги экстремали, отсчитанную от M_0.

Положим теперь

$$\begin{aligned} X &= s\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, & & X = s_1 x'_0, \\ Y &= s\sin\vartheta_0\sin\varphi_0, & \text{или} \quad & Y = s_1 y'_0, \\ Z &= s\cos\vartheta_0 & & Z = s_1 z'_0, \end{aligned} \tag{24}$$

где s_1 — переменная, отличающаяся от s произвольным постоянным множителем.

Переменные X, Y и Z мы будем рассматривать опять как систему координат нашего пространства.

Мы докажем, что если функция $n(M) = n(x, y, z)$ не имеет нолей в окрестности $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то переменные x, y, z связаны с X, Y, Z вблизи x_0, y_0, z_0 и $0, 0, 0$ взаимно однозначно, причем одни из этих переменных являются голоморфными функциями других, и имеет место предельное равенство

$$\lim_{M\to M_0} \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)} = 1. \tag{25}$$

В дальнейшем мы используем это свойство координат X, Y и Z для аналитических представлений функций, зависящих от экстремальных координат s, ϑ_0 и φ_0. Регулярность некоторой функции как функции от X, Y и Z позволяет, очевидно, сделать заключение о регулярности ее как функции x, y и z.

Лемма. Если рассматривать направляющие коэффициенты касательной к экстремали x', y' и z' как функции поля, то результат дифференцирования по s некоторого однородного полинома измерения k относительно x', y' и z', коэффициенты которого суть аналитические функции x, y и z, регулярные в окрестности x_0, y_0 и z_0, представляет собой однородный полином измерения $k+1$ относительно x', y' и z', коэффициенты которого опять будут регулярными функциями x, y и z вблизи x_0, y_0 и z_0.

Лемма эта совершенно очевидна в силу правила дифференцирования сложных функций, если вспомнить ур-ния Эйлера в виде (4'), приведенные нами в гл. I.

Очевидно, что x, y, z, как функции от переменной s_1, пропорциональной s, $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, представляют собою то решение системы (4'), в котором при $s_1 = 0$

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0; \quad x' = x'_0,\ y' = y'_0,\ z' = z'_0.$$

Но благодаря тому, что правые части ур-ний (4′) — аналитические функции своих аргументов, мы можем утверждать, что решение системы представляется сходящимися рядами Маклорена

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^n x}{ds^n}\right)_0 \frac{s^n}{n!}, \quad y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^n y}{ds^n}\right)_0 \frac{s^n}{n!},$$

(26)

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^n z}{ds^n}\right)_0 \frac{s^n}{n!}.$$

Нетрудно показать, что ряды эти будут равномерно сходящимися по отношению к x'_0, y'_0, z'_0 для любых комплексных значений этих аргументов, удовлетворяющих условиям

(27) $$|x'_0| \leq 1, \quad |y'_0| \leq 1 \quad \text{и} \quad |z'_0| \leq 1,$$

причем значения s должны удовлетворять условию вида

$$|s| < \varrho.$$

Доказать это можно обычными оценками, встречающимися в методе превосходящих функций.

Для этого достаточно построить обычную превосходящую функцию для правых частей ур-ний (4′) и убедиться в том, что все коэффициенты, служащие для вычисления начальных значений последовательных производных от наших неизвестных, имеют максимум при

$$x'_0 = 1, \quad y'_0 = 1, \quad z'_0 = 1.$$

Так как при этом ряды (26) останутся сходящимися, то отсюда вытекает и их равномерная сходимость при условиях (27).

Применяя лемму, мы можем убедиться, что ряды (26) могут быть перестроены в ряды, расположенные по переменным X, Y и Z.

Для этого заметим, что, в силу леммы, начальное значение n-й производной от x, y или z является однородным полиномом степени n относительио x'_0, y'_0, z'_0.

Произведение этого полинома на s_1^n, очевидно, представляет собою такой же полином относительно переменных (24), и, следовательно, ряды (26) суть ряды по однородным полиномам от X, Y и Z.

Так как в преобразовании (24) x'_0, y'_0 и z'_0 могут быть любыми комплексными числами, удовлетворяющими условиям (27), и $(s) < \varrho$, то, в силу вышеуказанного, ряды (26) по однородным полиномам X, Y, Z будут равномерно сходящимися при всех X, Y, Z по модулю меньших ϱ. Отсюда непосредственно следует, что x, y и z суть аналитические функции от X, Y и Z и вышеупомянутые ряды суть сгруппированные по однородным полиномам ряды Маклорена. Заслуживает внимания то обстоятельство, что члены первого измерения в (26) суть просто X, Y и Z, откуда и вытекает непосредственно формула (25).

Мы установили сейчас свойства преобразования координат x, y, z в X, Y, Z с помощью аналитичности функции $c(M)$. Это обстоятельство не является, как мы уже указывали, необходимым, и непрерывность любого числа производных от x, y, z по X, Y, Z и обратно можно было бы установить, пользуясь непрерывностью соответствующего числа производных от $c(M)$.

Чтобы покончить с вопросами, касающимися центрального поля, отметим еще несколько простых аналитических результатов.

Прежде всего докажем, что отношение $\frac{\tau}{s}$ есть аналитическая функция X, Y и Z, регулярная вблизи ноля, а следовательно, на основании свойства преобразования координат, — такая же функция от x, y, z, регулярная вблизи x_0, y_0, z_0.

Для этого достаточно принять во внимание, что $n(M)$ есть аналитическая функция от x, y и z, а следовательно, и от X, Y и Z.

Так как

$$\tau(M; M_0) = \int_0^S n(M)\, ds$$

и так как интегрирование по s с последующим делением на s ряда полиномов от X, Y и Z равносильно одновременной замене всех одночленов

$$A X^k Y^l Z^m$$

на

$$\frac{A X^k Y^l Z^m}{(k+l+m)},$$

то отсюда убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Наконец, займемся исследованием некоторых свойств функции

$$r^2(M; M_0) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$

как функции от X, Y и Z.

Именно, мы докажем, что эта функция может быть представлена как произведение $X^2 + Y^2 + Z^2$ на некоторую регулярную функцию от X, Y, Z.

Сначала установим, что все коэффициенты в представлении $r^2(M; M_0)$ рядом Маклорена по s_1 представляют собою полиномы от x_0', y_0' и z_0', делящиеся на $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$.

Для доказательства мы применим метод полной индукции. Очевидно, что коэффициенты при первой и нолевой степенях в этом разложении просто равны нолю и, следовательно, на $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$ делятся.

Для сокращения письма положим

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d(r^2)}{ds} = 2(xx' + yy' + zz')$$

и

$$\frac{d^2(r^2)}{ds^2} = 2(xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Тогда с помощью ур-ний (4′) получим:

$$\frac{d^2(r^2)}{ds^2} = 2\left\{\frac{\partial \lg n}{\partial x}[(y'^2 + z'^2)x - x'(yy' + zz')] + \right.$$

$$+ \frac{\partial \lg n}{\partial y}[(x'^2 + y'^2)y - y'(xx' + zz')] + \frac{\partial \lg n}{\partial y}[(x'^2 + y'^2)z - z'(xx' + yy')] +$$

$$\left. + (x'^2 + y'^2 + z'^2)\right\},$$

или

$$\frac{d^2(r^2)}{ds^2} = 2\left(\frac{\partial \lg n}{\partial x}x + \frac{\partial \lg n}{\partial y}y + \frac{\partial \lg n}{\partial z}z + 1\right)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \tag{28}$$

$$- \frac{d(r^2)}{ds}\left(x'\frac{\partial \lg n}{\partial x} + y'\frac{\partial \lg n}{\partial y} + z'\frac{\partial \lg n}{\partial z}\right).$$

Предположим теперь, что начальные значения всех производных от r^2 по s до $(n-1)$ порядка включительно представляют собою полиномы от x_0', y_0' и z_0', делящиеся на $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$.

Докажем, что тогда начальное значение производной порядка n также будет делиться на этот множитель.

Продифференцируем соотношение (28) $(n-2)$ раза по s и подставим $s=0$. Производная от первого слагаемого правой части будет, как нетрудно видеть, равна

$$2\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\left(\frac{\partial \lg n}{\partial x}x + \frac{\partial \lg n}{\partial y}y + \frac{\partial \lg n'}{\partial z}z\right)\cdot(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

ибо все производные от $x'^2 + y'^2 + z'^2$ обращаются в тождественный ноль в силу ур-ний (4′). Начальное значение этой функции, очевидно, делится на $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$.

Производная же от второго слагаемого будет линейной комбинацией производных от r^2 порядка ниже n, и ее начальное значение также делится на этого множителя согласно предположению.

Следовательно, начальное значение производной порядка n будет делиться на $x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$, и наше утверждение тем самым доказано.

Отсюда вытекает, что ряд, которым представляется r^2 как функция от X, Y, Z, имеет вид

$$r^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (X^2 + Y^2 + Z^2)\, Q_n(X, Y, Z),$$

где $Q_n(X, Y, Z)$ — однородный полином степени n от своих аргументов, причем $Q_0 = 1$.

Это позволяет вынести за скобки $X^2 + Y^2 + Z^2$ и получить искомое нами представление

$$r^2 = (X^2 + Y^2 + Z^2) \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(X, Y, Z).$$

При этом ряд, оставшийся под знаком суммы, как нетрудно видеть, представляет собою регулярную функцию от X, Y, Z, не обращающуюся в ноль в окрестности нолевых значений X, Y, Z.

Благодаря этому мы можем извлечь квадратный корень из обеих частей равенства, применив к этому ряду формулу бинома Ньютона. Вспоминая, что

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = s^2,$$

мы получим:

$$r(M; M_0) = s(M; M_0)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{a_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\right).$$

Затем, пользуясь тем, что функция

$$\frac{1}{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{\alpha+\beta+\gamma=n} \dfrac{a_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}}$$

будет, очевидно, регулярна в окрестности нолевых значений X, Y и Z и, следовательно, в окрестности x_0 и y_0 и z_0, получим, возвращаясь к каким угодно x_0, y_0, z_0:

$$(29)\quad s(M; M_0) = r(M; M_0)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{a_{\alpha\beta\gamma} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\right).$$

Из этого условия, пользуясь регулярностью $\frac{\tau}{s}$, можно получить аналитическое представление $\tau(M; M_0)$:

$$\tau(M;\ M_0) = r(M;\ M_0)\,\varphi(M;\ M_0), \tag{30}$$

где $\varphi(M;\ M_0)$, очевидно, симметричная функция от M и M_0, регулярная по M вблизи M_0, начальное значение которой равно $n(M_0)$.

4°. При помощи этих соображений можно дать оценку определителя преобразования от Декартовых координат пространства к криволинейным и доказать формулу (7).

Действительно,

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\tau,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)} = \frac{D(x,\ y,\ z)}{D(s,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)} \cdot \frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{D(x,\ y,\ z)}{D(X,\ Y,\ Z)} \cdot \frac{D(X,\ Y,\ Z)\cdot 1}{D(s,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)\,n(M)} = \tag{31}$$

$$= \frac{D(x,\ y,\ z)}{D(X,\ Y,\ Z)} \cdot \frac{s^2 \sin\vartheta_0}{n(M)},$$

откуда и вытекает неравенство (7).

Формула (30) позволяет доказать единственность функции $\sigma(M;\ M_0)$, удовлетворяющей условиям § 4 гл. I.

Подставляя в общее выражение для $\sigma(M)$ (23) значение определителя

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(s,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)},$$

для случая центрального поля мы получим:

$$\sigma(M;\ M_0) = \frac{1}{s}\,\frac{\Psi(\vartheta_0,\ \varphi_0)}{\sqrt{n(M)\sin\vartheta_0\,\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(X,\ Y,\ Z)}}}.$$

Отсюда

$$\sigma(M;\ M_0)\,\tau(M;\ M_0) = \frac{\tau}{s}\,\frac{\Psi(\vartheta_0,\ \varphi_0)}{\sqrt{n(M)\sin\vartheta_0\,\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(X,\ Y,\ Z)}}}.$$

Так как

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau}{s} = n(M_0),$$

то легко получить из условия

$$\lim \sigma\tau = n(M_0)$$

значение функции $\Psi(\vartheta_0,\ \varphi_0)$.

Таким образом

$$\Psi(\vartheta_0,\ \varphi_0) = \sqrt{n(M_0)\cdot\sin\vartheta_0},$$

и, как окончательный результат,

$$\sigma(M;\,M_0)=\sqrt{\frac{n(M_0)\sin\vartheta_0}{n(M)\dfrac{D(x,\,y,\,z)}{D(s,\,\vartheta_0,\,\varphi_0)}}}=\frac{1}{s}\sqrt{\frac{n(M_0)}{n(M)\dfrac{D(x,\,y,\,z)}{D(X,\,Y,\,Z)}}}. \tag{32}$$

Из формулы (32) сразу вытекает справедливость третьего свойства функции $\sigma(M;\,M_0)$ относительно существования производных у

$$\sigma(M;\,M_0)\,\tau(M;\,M_0).$$

Действительно,

$$\sigma(M;\,M_0)\,\tau(M;\,M_0)=\frac{\tau(M;\,M_0)}{s}\cdot\sqrt{\frac{n(M_0)}{n(M)}}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{D(x,\,y,\,z)}{D(X,\,Y,\,Z)}}},$$

и очевидно, что все три множителя представляют собою просто голоморфные функции координат.

Так как произведение $\sigma\tau$ — аналитическая функция, регулярная вблизи x_0, y_0, z_0, то, принимая во внимание формулу (30), мы получим аналитическое представление для σ в виде

$$\sigma(M;\,M_0)=\frac{1}{r(M;\,M_0)}\,\psi_1(M;\,M_0), \tag{33}$$

где ψ_1 есть аналитическая функция точки M, регулярная вблизи M_0, начальное значение которой равно единице.

Пятое свойство функции σ, сводящееся к оценке $\nabla^2\sigma$ при малых τ, совершенно очевидно. Действительно,

$$\nabla^2(\sigma\tau)=\sigma\,\nabla^2\,\tau+2\operatorname{grad}\sigma\cdot\operatorname{grad}\tau+\tau\,\nabla^2\,\sigma,$$

или, в силу ур-ния (5),

$$\nabla^2(\sigma\tau)=\tau\,\nabla^2\,\sigma,$$

откуда

$$\nabla^2\,\sigma=\frac{1}{\tau}\,\nabla^2(\sigma\tau).$$

Так как $\nabla^2(\sigma\tau)$, очевидно, голоморфная функция, то отсюда сразу вытекает оценка

$$|\nabla^2\,\sigma|\le\frac{K}{\tau(M;\,M_0)}. \tag{10}$$

Кроме того, отметим, что произведение $r\nabla^2\sigma$ будет, очевидно, голоморфной функцией.

Из формулы (33) получим:

$$r^2 \nabla\sigma = \nabla^2 \psi_1 - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}(z-z_0)\right).$$

Это выражение может быть регулярной функцией лишь в том случае, если

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}(z-z_0)$$

делится на r^2.

Но тогда все полиномы, из которых составляется ряд Маклорена, сгруппированный по одинаковым степеням и представляющий это выражение, также должны делиться на r^2. Но по теореме Эйлера об однородных функциях эти полиномы отличаются от полиномов, по которым группируется ряд Маклорена от ψ_1, кроме, конечно, свободного члена, лишь постоянными множителями. Следовательно, функция

$$\psi_1(M;\, M_0) - 1$$

делится на r^2, и ψ_1 может быть представлена в виде

$$\psi_1(M;\, M_0) = 1 + r^2 \psi(M;\, M_0),$$

где ψ — некоторая функция от M и M_0, регулярная как функция M вблизи M_0.

Возвращаясь к функции σ, получим из (33):

$$\sigma(M;\, M_0) = \frac{1}{r(M;\, M_0)}\Big(1 + r^2(M;\, M_0)\,\psi(M;\, M_0)\Big) \tag{34}$$

Формула (34) окажется весьма полезной для нас в гл. III. Кроме того, мы используем ее немедленно для доказательства шестого свойства функции σ.

Пользуясь абсолютной интегрируемостью $\nabla^2\sigma$, мы докажем сначала, что при беспредельном сжимании замкнутой поверхности S_1 к точке M_0 интеграл

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\partial\sigma(M;\, M_0)}{\partial\nu}\, df$$

имеет определенный предел.

Для этого фиксируем некоторую поверхность S, заключающую S_1 внутри себя, и применим формулу Green'а к объему P_1, заключенному между S и S_1:

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu'}\, df = \iiint\limits_{P_1} \nabla^2\sigma\, dv - \iint\limits_{S} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu'}\, df,$$

где ν' — нормаль к поверхности S или S_1, направленная во вне объема P_1.

Меняя S_1, мы видим, что правая часть стремится ко вполне определенному пределу

$$\iiint\limits_P \nabla^2 \sigma\, dv - \iint\limits_S \frac{\partial \sigma}{\partial \nu'}\, df,$$

где P — весь объем, заключенный в S.

Следовательно, и левая часть, которая равна как раз

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \nu'}\, df,$$

имеет определенный предел, не зависящий от способа изменения S_1.

Затем, возьмем за S_1 сферу. Из формулы (37) сразу видно, что нормальная производная от $\left(\sigma - \frac{1}{r}\right)$ ограничена, откуда

$$\lim \iint \frac{\partial \sigma}{\partial \nu}\, df = \lim \iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, df + \lim \iint \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sigma - \frac{1}{r}\right) df = 4\pi,$$

что и требовалось доказать.

5°. Чтобы покончить со всеми вопросами, затронутыми в гл. I, докажем еще симметричность функции

$$\sigma(M;\, M_0).$$

Для этого используем еще раз теорему I § 1.

Предварительно мы перепишем ур-ния Эйлера (4), преобразовав их для удобства в систему ур-ний первого порядка.

Для этого мы введем две новые неизвестные функции ϑ и φ, где ϑ и φ будут полярными углами, которые образует касательная в какой-нибудь точке экстремали. Тогда к системе первых двух ур-ний (4) нужно будет присоединить еще три новых:

$$x' = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y' = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z' = \cos\vartheta.$$

Заменим теперь независимую переменную s на t и присоединим к системе еще ур-ние

$$\frac{ds}{dt} = 1.$$

После исключения вторых производных, ур-ния наши примут вид

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin\vartheta \cos\varphi, & \dfrac{d\vartheta}{dt} = \cos\vartheta \cos\varphi \dfrac{\partial \lg n}{\partial x} + \cos\vartheta \sin\varphi \dfrac{\partial \lg n}{\partial y} - \sin\vartheta \dfrac{\partial \lg n}{\partial z}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin\vartheta \sin\varphi, & \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\left(\sin\varphi \dfrac{\partial \lg n}{\partial x} - \cos\varphi \dfrac{\partial \lg n}{\partial y}\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = \cos\vartheta, & \dfrac{ds}{dt} = 1. \end{cases}$$

Положим, что нами найдено решение системы (35), удовлетворяющее условию: $t=0$

$$x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0,\ \vartheta=\vartheta_0,\ \varphi=\varphi_0,\ s=s_0$$

в виде

$$(36)\quad \begin{cases} x=x(t+s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0), & \vartheta=\vartheta(t+s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0,\ x_0\ y_0,\ z_0), \\ y=y(t+s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0,\ x_0,\ y_0\ z_0), & \varphi=\varphi(t+s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0), \\ z=z(t+s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0), & s=t+s_0. \end{cases}$$

По теореме I § 1:

$$\frac{D(x,\ y,\ z,\ s,\ \vartheta,\ \varphi)}{D(x_0,\ y_0,\ z_0,\ s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)}=Ce^{\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}+\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta}+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}+\frac{\partial S}{\partial s}\right)dt}.$$

Вычислим это выражение фактически:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial s}=0,$$

$$\frac{\Theta\partial}{\partial\vartheta}=-\left(\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial x}+\sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial y}+\cos\vartheta\frac{\partial\lg n}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=-\frac{1}{\sin\vartheta}\left(\cos\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial y}\right),$$

или

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}+\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta}+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}+\frac{\partial S}{\partial s}=-\left(\frac{1+\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1+\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial y}+\cos\vartheta\frac{\partial\lg n}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\cos^2\vartheta+2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\vartheta+2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial y}+(2\cos\vartheta-\cos\vartheta)\frac{\partial\lg n}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\left(\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial x}-\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{\partial\lg n}{\partial y}-\sin\vartheta\frac{\partial\lg n}{\partial z}\right)-$$

$$-2\left(\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial x}+\sin\vartheta\sin\varphi\frac{\partial\lg n}{\partial y}+\cos\vartheta\frac{\partial\lg n}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-2\frac{d\lg n}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\lg\sin\vartheta\,(n^2)\right).$$

Отсюда без труда:

$$\frac{D(x,\ y,\ z,\ s,\ \vartheta,\ \varphi)}{D(x_0,\ y_0,\ z_0,\ s_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)}=\frac{C}{n^2(M)\sin\vartheta},$$

где C — некоторая постоянная.

Так как начальное значение этого определителя равно единице, то окончательно:

$$\frac{D(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0, s_0, \vartheta_0, \varphi_0)} = \frac{n^2(M_0)\sin\vartheta_0}{n^2(M)\sin\vartheta}. \tag{37}$$

Симметричность функции $\sigma(M; M_0)$ сразу получается применением этой формулы.

Действительно, в наших обозначениях

$$\frac{\sigma^2(M_0; M)}{\sigma^2(M; M_0)} = \frac{n^2(M)\sin\vartheta}{n^2(M_0)\sin\vartheta_0} \frac{\dfrac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}}{\dfrac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(s, \vartheta, \varphi)}},$$

где определитель, стоящий в знаменателе, есть функциональный определитель от x_0, y_0 и z_0 по s, ϑ и φ, взятый в предположении, что x, y, z сохраняют постоянные значения. Мы докажем, что частное этих определителей в точности равно

$$\frac{D(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0, s_0, \vartheta_0, \varphi_0)}.$$

С этой целью перепишем его в виде

$$\frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)} \cdot \frac{D(s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0)}.$$

Вычислим теперь значение

$$\frac{D(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0, s_0, \vartheta_0, \varphi_0)},$$

производя замену переменных в два приема. Рассмотрим шесть вспомогательных функций

$$x,\ y,\ z,\ x_0,\ y_0,\ z_0.$$

По теореме о произведении определителей получим:

$$\frac{D(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0, s_0, \vartheta_0, \varphi_0)} = \frac{D(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)}{D(x, y, z, x_0, y_0, z_0)} \cdot \frac{D(x_0, y_0, z_0, x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0, s_0, \vartheta_0, \varphi_0)}. \tag{38}$$

Для того, чтобы изучить оба множителя первой части (38), используем ур-ние (36).

Функции x, y, z, x_0, y_0, z_0 выражаются через s_0, ϑ_0, φ_0, x_0, y_0, z_0 с помощью первых трех из ур-ний (36). Прибавляя сюда еще три очевидных соотношения, мы получим для перехода от одних переменных к другим равенства

$$
\begin{aligned}
x &= x(t+s_0, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0, z_0), \quad x_0 = x_0,\\
y &= y(t+s_0, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0, z_0), \quad y_0 = y_0,\\
z &= z(t+s_0, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0, z_0), \quad z_0 = z_0.
\end{aligned}
$$

Вычисляя теперь второй из множителей правой части (38), мы видим что он равен в точности

$$\frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}.$$

Для вычисления первого множителя необходимо подставить в выражение для s, ϑ и φ их значения как функций от x, y, z, x_0, y_0, z_0, полученных путем исключения $t+s_0$, ϑ_0, φ_0 из первых трех ур-ний (36).

В результате мы получим систему равенств

$$
\begin{aligned}
x &= x, \quad s = s(x, y, z, x_0, y_0, z_0),\\
y &= y, \quad \vartheta = \vartheta(x, y, z, x_0, y_0, z_0),\\
z &= z, \quad \varphi = \varphi(x, y, z, x_0, y_0, z_0).
\end{aligned}
$$

Теперь уже нетрудно проверить, что первый множитель правой части (38) равен

$$\frac{D(s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0)},$$

где этот определитель вычислен в предположении что x, y, z — постоянные.

Собирая сказанное, получим:

$$\frac{\sigma^2(M_0; M)}{\sigma^2(M; M_0)} = \frac{n^2 \sin\vartheta}{n_0{}^2 \sin\vartheta_0} \frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)} \frac{D(s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z)_0} = \frac{n^2(M) \sin\vartheta}{n^2(M_0) \sin\vartheta_0} \frac{D(x, y, z, s, \vartheta, \varphi)}{D(x_0, y_0, z_0, s_0, \vartheta_0, \varphi_0)} =$$

$$= \frac{n^2(M) \sin\vartheta}{n^2(M_0) \sin\vartheta_0} \frac{n^2(M_0) \sin\vartheta_0}{n^2(M) \sin\vartheta} = 1.$$

Так как $\sigma(M; M_0)$ — функция положительная, то тем самым утверждение наше доказано, и

$$\sigma(M; M_0) = \sigma(M_0; M). \tag{8}$$

Обращаясь к формуле (34), мы видим, что функция $\psi(M; M_0)$ должна, очевидно, быть симметричной функцией от M и M_0 и тем самым представляет собою голоморфную функцию от M_0.

Это замечание будет нам полезно в дальнейшем.

ГЛАВА III

1°. Глава III нашего исследования будет посвящена доказательству существования решения у волнового ур-ния при заданных начальных условиях (12).

Доказательство это естественно разбито на две части. Сначала мы установим, что если $F(M)$ и $f(M)$ удовлетворяют некоторым условиям непрерывности, алгорифм последовательных приближений, изложенный в гл. I, приводит нас к функции, удовлетворяющей условиям (12). После этого мы получим некоторое необходимое и достаточное условие того, чтобы решение интегрального ур-ния (13) удовлетворяло волновому ур-нию (1). Условие это соблюдено, например, если функции $F(M)$ и $f(M)$ имеют некоторое число непрерывных производных.

В качестве предварительного замечания мы напомним две общеизвестные формулы, касающиеся дифференцирования интегралов, взятых по переменной области, зависящей от параметра.

Рассмотрим интеграл по замкнутой поверхности, ур-ние которой $S(x, y, z, \lambda)=0$:

$$\iint\limits_{S(x,y,z,\lambda)} F(x, y, z)\,df, \tag{39}$$

где для простоты мы считаем, что подинтегральная функция не зависит от λ, и попробуем отыскать производную от этого интеграла по λ.

Вводим единичный вектор внутренней нормали к поверхности $\vec{\nu}$ и преобразуем наш интеграл к новым координатам.

Пусть наша поверхность для некоторого фиксированного λ может быть задана с помощью параметров u и v:

$$x=x(u, v),$$
$$y=y(u, v),$$
$$z=z(u, v).$$

Положим

$$\left|\begin{aligned} x&=x(u, v)+w\nu_x,\\ y&=y(u, v)+w\nu_y,\\ z&=z(u, v)+w\nu_z,\end{aligned}\right. \tag{40}$$

и пусть $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ обозначает результат замены в некоторой функции от $F(x, y, z)$ их выражения из формул (40).

Интеграл (39) мы сможем переписать в виде

$$\iint\limits_{S(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\lambda)} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\iint\limits_{w=0} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Если мы дадим λ какое-нибудь приращение, то, очевидно, значения координат x, y, и z на соседней поверхности мы можем считать заданными с помощью тех же параметров u и v.

Считая, что измененное значение λ равно λ_1, мы видим, что интеграл по соседней поверхности будет

$$\iint\limits_{w=w(\lambda_1,u,v)} F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,du\,dv.$$

Этот интеграл, очевидно, зависит от λ_1 только через посредство ω, и, следовательно, производная от него по λ_1 при $\lambda_1 = \lambda$ будет равна

$$\iint\limits_{w=0}\left[\frac{\partial F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}{\partial w}\sqrt{EG-F^2} + F(x,y,z)\left(\frac{\partial\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\partial w}\right)_{w=0}\right]\frac{\partial w}{\partial\lambda}\,du\,dv.$$

Производная по w от некоторой функции равна, очевидно, просто нормальной ее производной.

Кроме того, из дифференциальной геометрии известно,[1] что при изменении поверхности по формулам (40) приращенное значение $\sqrt{EG-F^2}$, которое мы обозначим $\overline{\sqrt{EG-F^2}}$, выражается как

$$\overline{\sqrt{EG-F^2}} = \sqrt{EG-F^2}\,(1-2wH)$$

с точностью до членов более высокого порядка по ω.

Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial w}\right)_{w=0} = -2H\sqrt{EG-F^2}, \tag{41}$$

где буквой H для сокращения обозначена средняя кривизна поверхности.

Обращая внимание на то, что производная $\frac{\partial w}{\partial\lambda}$ выражается как

$$\frac{\partial w}{\partial\lambda} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial\lambda}}{\frac{\partial S}{\partial\nu}},$$

мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\iint\limits_{S(x,y,z,\lambda)=0} F(x,y,z)\,df = \iint\limits_{w=0}\left(\frac{\partial F}{\partial\nu} - 2H\cdot F\right)\left(\frac{\frac{\partial S}{\partial\lambda}}{\frac{\partial S}{\partial\nu}}\right)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

[1] См. W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie, I, S. 165, § 89.

или, окончательно возвращаясь к старым переменным,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\iint\limits_{S(x,y,z,\lambda)=0} F(x,y,z)\,df = -\iint\limits_{S(x,y,z,\lambda)=0}\left(\frac{\partial F}{\partial\nu}-2HF\right)\frac{\frac{\partial S}{\partial\lambda}}{\frac{\partial S}{\partial\nu}}\,df.$$

Наконец, если перейти с общему случаю

$$(42)\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\iint\limits_{S(x,y,z,\lambda)=0} F(x,y,z,\lambda)\,df =$$

$$=\iint\limits_{S(x,y,z,\lambda)=0}\left(\frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial\lambda}+\left(2HF(x,y,z,\lambda)-\frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial\nu}\right)\frac{\frac{\partial S}{\partial\lambda}}{\frac{\partial S}{\partial\nu}}\right)df.$$

Гораздо проще выражается производная от объемного интеграла. Не останавливаясь на ее выводе, приведем окончательный результат:

$$(43)\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\iiint\limits_{S(x,y,z,\lambda)<0} F(x,y,z,\lambda)\,dv = \iiint\limits_{S(x,y,z,\lambda)<0}\frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial\lambda}\,dv + \iint F(x,y,z,\lambda)\frac{\frac{\partial S}{\partial\lambda}}{\frac{\partial S}{\partial\nu}}\,df.$$

Для того, чтобы покончить с предварительной частью нашей главы мы докажем, что если за поверхность S взята некоторая эквидистантная поверхность центрального поля

$$\tau(M;\,M_0)=\tau_1,$$

то кривизна ее выражается как

$$(44)\qquad H=\frac{1}{r(M;\,M_0)}\zeta(x,y,z;x_0,y_0,z_0),$$

где функция ζ есть регулярная функция своих аргументов, начальное значение которой равно единице.

Это представление может быть легко получено из формулы (41).

Действительно,

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lg\sqrt{E_1G_1-F_1{}^2}}{\partial w}\right)_{w=0}.$$

Теперь нетрудно установить, что $\sqrt{EG-F^2}$ на эквидистантной поверхности совпадает с

$$\frac{D(x,y,z)}{D(s,\vartheta_0,\varphi_0)},$$

благодаря тому, что линии постоянства ϑ_0 и φ_0 перпендикулярны к этой поверхности и s — длина дуги.

Отметив еще, что

$$\frac{\partial}{\partial w}=\frac{\partial}{\partial v}=-\frac{\partial}{\partial s},$$

получим формулу

$$H=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\lg\frac{D(x,y,z)}{D(s,\vartheta_0,\varphi_0)}.$$

На основании теоремы II § 1 гл. II мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial s}\lg\frac{D(x,y,z)}{D(s,\vartheta_0\varphi_0)}=\operatorname{div}\vec{T},$$

где $\vec{T}$ есть единичный вектор касательной к экстремальной линии поля.

В гл. II нами была указана формула

$$\nabla^2\tau=n(M)\operatorname{div}\vec{T}+\operatorname{grad}n(M)\cdot\operatorname{grad}\tau.$$

Подставляя отсюда выражения для $\operatorname{div}\vec{T}$ в выражение для кривизны, мы получим:

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{\nabla^2\tau}{n(M)}-\frac{\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial\tau}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\frac{\partial\tau}{\partial z}}{n(M)}\right).$$

Если теперь вернуться к аналитическому представлению функции τ, то легко видеть, что

$$\frac{\nabla^2\tau}{n(M)}=\frac{2}{r}\zeta_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0),$$

где начальное значение ζ_1 равно единице.

Так как

$$\frac{r\left(\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial\tau}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)}{n(M)}$$

есть, очевидно, регулярная функция, начальное значение которой равно нолю, то отсюда сразу вытекает формула (44).

2°. Рассмотрим в нашем пространстве произвольную интегрируемую функцию

$$\psi(M,t) \tag{45}$$

и назовем ее плотностью.

Введем функцию

$$U(M_0,t)=\iiint_P\sigma(M_0;M)[\psi(M,t)]\,dv, \tag{46}$$

где P — эквидистантный объем, ограниченный поверхностью

$$\tau(M;\ M_0) = t \quad \text{и} \quad [\psi(M,\ t)] = \psi\bigl((M,\ t - \tau(M;\ M_0)\bigr).$$

Функцию $U(M_0,\ t)$ мы будем называть запаздывающим потенциалом функции ψ в неоднородной среде.

Мы будем говорить, что для плотности ψ имеет место основное свойство запаздывающих потенциалов, если функция $U(M_0,\ t)$ имеет вторые производные по координатам x_0, y_0, z_0 и по времени τ, удовлетворяющие соотношению

$$\text{(47)} \qquad \nabla_0^2 U(M_0, t) - \frac{1}{c^2(M_0)} \frac{\partial^2 U(M_0, t)}{\partial t^2} = -4\psi(M_0, t) +$$

$$+ \iiint\limits_P \nabla_0^2 \sigma(M_0; M)[\psi(M, t)]\, dv,$$

где знаком ∇_0^2 обозначен оператор Лапласа, взятый по точке M_0.

Это свойство является обобщением классических свойств запаздывающих потенциалов на случай неоднородного пространства и дальнейшим распространением аналогии между σ и $\frac{1}{r}$. Для того, чтобы пояснить, что это свойство не носит характера случайности, мы докажем теорему.

Теорема III. Если плотность $\psi(M,\ t)$ имеет непрерывные производные по координатам и ограниченную вторую производную по времени, то для нее имеет место основное свойство запаздывающих потенциалов.

Доказательство этой теоремы тривиально.

Функцию (46) мы можем при нашем предположении дифференцировать по параметру обычным способом, так как интегралы от ее первых производных равномерно сходятся. Ур-ние поверхности S, ограничивающей P, мы можем написать в виде

$$S(x,\ y,\ z;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ t) = \tau(x,\ y,\ z;\ x_0,\ y_0,\ z_0) - t = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial S}{\partial \nu} = -n(M).$$

Применяя теперь формулу (43) и обратив внимание, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{\partial \tau}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_0} = \frac{\partial \tau}{\partial y_0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial z_0} = \frac{\partial \tau}{\partial z_0},$$

получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x_0}=\iiint\limits_P \frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial x_0}\,dv-\iint\limits_S \sigma[\psi]\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x_0}}{n(M)}\,df,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\iiint\limits_P \frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial t}\,dv+\iint\limits_S \sigma[\psi]\frac{1}{n(M)}\,df.$$

Для второго дифференцирования разобьем объем P на два другие объема, вырезав малой эквидистантной постоянной сферой

$$\tau(M;\,M_0)=\delta,$$

независящей от x_0, y_0, z_0, небольшую часть около M_0. Обозначим P_1 объем $\tau(M;\,M_0)\leqslant\delta$ и P_2 — объем $\delta\leqslant\tau(M;\,M_0)\leqslant t$. Тогда $\frac{\partial U}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial U}{\partial t}$ представляется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x_0}=\iiint\limits_{P_1} \frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial x_0}\,dv+\iiint\limits_{P_2} \frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial x_0}\,dv-\iint\limits_S \sigma[\psi]\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x_0}}{n(M)}\,df,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\iiint\limits_{P_1} \frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial t}\,dv+\iiint\limits_{P_2} \frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial t}\,dv+\iint\limits_S \sigma[\psi]\frac{1}{n(M)}\,df.$$

Обозначим первые слагаемые правых частей соответственно через X_1 и T_1, а сумму двух оставшихся членов — через X_2 и T_2.

Мы будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial x_0}=X_1+X_2,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=T_1+T_2.$$

Очевидно, что X_2 и T_2 можно дифференцировать по параметру на основании общих правил. Применяя (42) и (43), мы получим:

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0}=\iiint\limits_{P_2} \frac{\partial^2\{\sigma[\psi]\}}{\partial x_0^2}\,dv-\iint\limits_S\left\{\frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial x_0}\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x_0}}{n(M)}+\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sigma[\psi]\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x_0}}{n(M)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\sigma[\psi]\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x_0}}{n(M)}\right)\frac{\frac{\partial\tau}{\partial x_0}}{n(M)}-2H\frac{\sigma[\psi]\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2}{n^2(M)}\right\}df,$$

где H — кривизна поверхности, которую мы ближе вычислять не будем.

Если ввести совершенно аналогичные обозначения для производных от U по y_0 и z_0, то легко вычислить

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_2}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_2}{\partial z_0}=\iiint\limits_{P_2}\nabla_0{}^2\{\sigma[\psi]\}\,dv-$$

$$-\iint\limits_S\left\{\frac{1}{n(M)}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}\frac{\partial\tau}{\partial x_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial y_0}\frac{\partial\tau}{\partial y_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial z_0}\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)[\psi]-\right.$$

$$-\frac{\sigma}{n(M)}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right)\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]+\frac{1}{n(M)}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}\frac{\partial\tau}{\partial x_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial y_0}\frac{\partial\tau}{\partial y_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial z_0}\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)[\psi]+$$

$$+\frac{\sigma}{n(M)}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x_0{}^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y_0{}^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial z_0{}^2}\right)[\psi]-\frac{\sigma}{n(M)}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right)\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]+$$

$$+\frac{1}{n^2(M)}\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}[\psi]\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\sigma}{n^2(M)}\left\{\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]-\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\right\}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\sigma}{n^2(M)}[\psi]\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right)\right\}+$$

$$+\sigma[\psi]\left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right\}\frac{1}{n(M)}\frac{\partial\frac{1}{n(M)}}{\partial\nu}-$$

$$\left.-2H\frac{\sigma[\psi]}{n^2(M)}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2\right)\right\}df.$$

Применяя теперь формулы (3′), (5) и (9) гл. I, легко видим, что

$$2\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}\frac{\partial\tau}{\partial x_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial y_0}\frac{\partial\tau}{\partial y_0}+\frac{\partial\sigma}{\partial z_0}\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)+\sigma\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x_0{}^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y_0{}^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial z_0{}^2}\right)=0$$

и

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z_0}\right)^2=n^2(M_0).$$

Обратив внимание на то, что $n^2(M_0)$ от точки M не зависит, получим, вспоминая, что $\frac{\partial\tau}{\partial\nu}=-n(M)$:

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_2}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_2}{\partial z_0}=\iiint\limits_{P_2}\nabla_0{}^2\{\sigma[\psi]\}\,dv+$$

$$+\iint\limits_S n^2(M_0)\left\{\frac{\sigma}{n(M)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\frac{\sigma}{n^2(M)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]-\right.$$

$$\left.-[\psi]\left(\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}}{n^2(M)}+\frac{\sigma}{n(M)}\frac{\partial\frac{1}{n(M)}}{\partial\nu}-2H\frac{\sigma}{n^2(M)}\right)\right\}df.$$

Аналогично дифференцируя T_2 по t, получим:

$$n^2(M_0)\frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2}=\iiint\limits_{P_2} n^2(M_0)\frac{\partial^2\{\sigma[\psi]\}}{\partial t^2}+$$

$$+\iint\limits_S n^2(M_0)\left\{\frac{\partial\{\sigma[\psi]\}}{\partial t}\cdot\frac{1}{n(M)}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sigma[\psi]\frac{1}{n(M)}\right\}-\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\sigma[\psi]\frac{1}{n(M)}\right\}\frac{1}{n(M)}+\right.$$

$$\left.+2H\sigma[\psi]\frac{1}{n^2(M)}\right\}df=\iiint\limits_{P_2} n^2(M_0)\frac{\partial^2\{\sigma[\psi]\}}{\partial t^2}+\iint\limits_S n^2(M_0)\left\{\frac{\sigma}{n(M)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma}{n^2(M)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right]-[\psi]\left(\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}}{n^2(M)}+\frac{\sigma}{n(M)}\frac{\partial\frac{1}{n(M)}}{\partial\nu}-2H\frac{\sigma}{n^2(M)}\right)\right\}df.$$

Принимая во внимание равенства

$$\left(\nabla_0^2-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U_0=\left[\frac{\partial X_1}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_1}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_1}{\partial z_0}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial T_1}{\partial t}\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial X_2}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_2}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_2}{\partial z_0}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial T_2}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_2}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_2}{\partial z_0}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial T_2}{\partial t_0}=\iiint\limits_{P_2}\left(\nabla_0^2-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\{\sigma[\psi]\}=\iiint\limits_{P_2}\nabla_0^2\sigma[\psi]\,dv,$$

будем иметь

$$\nabla_0^2 U-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\iiint\limits_{P_2}\nabla_0^2\sigma[\psi]\,dv+\left[\frac{\partial X_1}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_1}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_1}{\partial z_0}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial T_1}{\partial t}\right]. \tag{48}$$

Переходим теперь к пределу, сжимая поверхность S, ограничивающую P_1, в точку.

При этом интеграл по P_2 превратился в интеграл по P благодаря абсолютной сходимости, и, следовательно, нашей задачей будет показать, что предел выражения, стоящего в квадратной скобке, будет равен

$$-4\pi\,\psi(M_0, t).$$

Доказательство это будет основано на сравнении нашего запаздывающего потенциала с потенциалом Beltrami.

В малом объеме функции σ и τ будут приближаться к $\frac{1}{r}$ и $\frac{r}{c(M_0)}$ и запаздывание на τ будет мало отличаться от запаздывания в теории обыкновенных запаздывающих потенциалов. Отсюда уже нетрудно будет получить, что предел нашей скобки совпадает с таким же пределом для потенциалов Beltrami и равен $4\pi\,\psi\,(M, t)$.

Проделаем это доказательство более подробно.

Условимся обозначать символом $\{\psi\}$ результат замены в $\psi\,(M, t)$ аргумента t через $t - \frac{r}{c\,(M_0)}$ и представим X_1 в виде

$$X_1 = \iiint\limits_{P_1} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\{\psi\}\right)}{\partial x_0}\, dv + \iiint\limits_{P_1} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sigma\,[\psi] - \frac{1}{r}\{\psi\}\right) dv = X^* + X^{**}.$$

Аналогично вводим

$$Y^*,\ Y^{**},\ Z^* \text{ и } Z^{**}.$$

Тогда

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_0} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_0} + \frac{\partial Z_1}{\partial z_0} = \left(\frac{\partial X^*}{\partial x_0} + \frac{\partial Y^*}{\partial y_0} + \frac{\partial Z^*}{\partial z^0}\right) + \left(\frac{\partial X^{**}}{\partial x_0} + \frac{\partial Y^{**}}{\partial y_0} + \frac{\partial Z^{**}}{\partial z_0}\right).$$

Как известно из теории запаздывающих потенциалов, предел первой скобки равен $-4\pi\,\psi\,(M_0, t)$.

Что касается до второй скобки, то мы покажем, что предел каждого слагаемого будет нолем.

Установим для этого, например, что функцию X^{**} можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.

Действительно,

$$X^{**} = \iiint\limits_{P_1} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\sigma\,[\psi] - \frac{1}{r}\{\psi\}\right) dv = \iiint\limits_{P_1} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\left(\sigma - \frac{1}{r}\right)[\psi]\right) dv +$$

$$+ \iiint\limits_{P_1} \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{r}\left([\psi] - \{\psi\}\right)\right) dv = X_1^{**} + X_2^{**}.$$

Рассмотрим теперь отдельно X_1^* и X_2^*.

Как показано в гл. II,

$$\left(\sigma - \frac{1}{r}\right) = r\varphi\,(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0),$$

где f — регулярная функция.

Следовательно, интеграл

$$\frac{\partial X_1^{**}}{\partial x_0} = \iiint\limits_{P_1} \left(\frac{\partial^2 rf}{\partial x_0^2}[\Psi] - 2\,\frac{\partial rf}{\partial x_0}\,\frac{\partial \tau}{\partial x_0}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] + rf\left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] - \frac{\partial^2\tau}{\partial x_0^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\right\}\right) dv$$

будет равномерно сходящимся.

Кроме того, можно показать, что если функция ψ и ее производные по времени удовлетворяют условию Коши Липшица, как функции координат, то

$$\left|[\psi]-\{\psi\}\right|<N_1 r^2,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_0}([\psi]-\{\psi\})\right|<N_2 r,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}([\psi]-\{\psi\})\right|<N_3.$$

Это обстоятельство вытекает из равенств

$$\frac{\partial}{\partial x_0}([\psi]-\{\psi\})=-\left(\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}\right)\frac{\partial\tau}{\partial x_0}-\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}-\frac{\partial\frac{r}{c_0}}{\partial x_0}\right)\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}([\psi]-\{\psi\})=-\frac{\partial^2\tau}{\partial x_0^2}\left(\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}\right)-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}-\frac{\partial\frac{r}{c_0}}{\partial x_0}\right)\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}+$$
$$+2\left(\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]-\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2+2\left\{\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]\right\}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_0}\right)^2-\left(\frac{\partial\frac{r}{c}}{\partial x_0}\right)^2\right),$$

если вспомнить, что τ выражается как

$$\tau(M;M_0)=\frac{1}{r(M;M_0)}\psi(M;M_0),$$

где начальное значение

$$\psi(M;M_0)=\frac{1}{c(M_0)}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\frac{\partial X_2^{**}}{\partial x_0}\iiint\limits_P\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x_0^2}([\psi]-\{\psi\})+2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}([\psi]-\{\psi\})+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}([\psi]-\{\psi\})\right\}dv.$$

Так как предел равномерно сходящихся интегралов при стремлении объема P_1 к нолю есть, очевидно, ноль, то, очевидно, что предел

$$\lim\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_0}+\frac{\partial Y_1}{\partial y_0}+\frac{\partial Z_1}{\partial x_0}\right)=$$
$$=\lim\left(\frac{\partial X^*}{\partial x_0}+\frac{\partial Y^*}{\partial y_0}+\frac{\partial Z^*}{\partial z_0}\right)+\lim\left(\frac{\partial X^{**}}{\partial x_0}+\frac{\partial Y^{**}}{\partial y_0}+\frac{\partial Z^{**}}{\partial z_0}\right)=-4\pi\psi.$$

Отметив, что производная $\frac{\partial T_1}{\partial t}$ также представляется равномерно сходящимся интегралом, получим:

$$\nabla_0^2 U(M_0, t) - \frac{1}{c^2(M_0)} \frac{\partial^2 U(M_0, t)}{\partial t^2} = \tag{47}$$

$$= -4\pi \overset{*}{\psi}(M_0, t) + \iiint\limits_P \nabla_0^2 \sigma(M; M_0)\, [\psi(M, t)]\, dv,$$

что и доказывает нашу теорему.

3°. Перейдем теперь к эквивалентности нашего интегрального ур-ния (13) с волновым ур-нием (1).

Предварительно мы установим необходимое и достаточное условие эквивалентности однородного интегрального ур-ния (11) с волновым ур-нием, а затем перейдем к эквивалентности (13) и (11).

При этом мы предполагаем что в (11) за поверхность S взята эквидистантная поверхность $\tau = t$.

Преобразуем правую часть ур-ния (11), считая, что функция Φ имеет вторые производные.

Для этого положим, как в гл. I,

$$[\Phi] = \Psi.$$

Тогда эта правая часть будет

$$\iint\limits_S \left\{ [\Phi] \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} - \sigma \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right] - \sigma \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] \right\} df + \iiint\limits_P [\Phi]\, \nabla^2 \sigma dv =$$

$$= \iint\limits_S \left(\Psi \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} - \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - 2\sigma \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) df + \iiint\limits_P \Psi\, \nabla^2 \sigma d\vartheta.$$

Преобразуя

$$\iint -2\sigma \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \frac{\partial \Psi}{\partial t} df$$

по формуле Гаусса в объемный интеграл от

$$\operatorname{div} \left[2\sigma \operatorname{grad} \tau \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right],$$

получим:

$$\operatorname{div} \left(2\sigma \operatorname{grad} \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = 2\sigma \nabla^2 \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t} + 2 \operatorname{grad} \sigma \cdot \operatorname{grad} \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t} +$$

$$+ 2\sigma \operatorname{grad} \tau . \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sigma \nabla^2 \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t} + 2\sigma \operatorname{grad} \tau . \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} =$$

$$= \sigma \left(\nabla^2 \tau \frac{\partial \Psi}{\partial t} + 2 \operatorname{grad} \tau . \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right).$$

Заметив, что

$$\nabla^2 \Psi = [\nabla^2 \Phi] - 2\left[\operatorname{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]\cdot \operatorname{grad}\tau - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]\nabla^2\tau + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right](\operatorname{grad}\tau)^2 =$$

$$= \left[\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2(M)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right] - 2\left[\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\cdot\operatorname{grad}\tau +$$

$$+ 2\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right](\operatorname{grad}\tau)^2 - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\nabla^2\tau = \left[\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2(M)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right] -$$

$$-\left[2\operatorname{grad}\tau\,.\operatorname{grad}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\cdot\nabla^2\tau\right],$$

мы можем представить это в виде

$$\operatorname{div}\left[2\sigma\operatorname{grad}\tau\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right] = -\sigma\left\{\nabla^2\Psi - \left[\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2(M)}\right]\right\}.$$

Подставляя это выражение, мы приведем правую часть формулы (11) к виду

$$\iint\limits_S\left(\Psi\frac{\partial\sigma}{\partial\nu} - \sigma\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)df - \iiint\limits_P\left\{\sigma\left(\nabla^2\Psi - \left[\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right]\right) - \Psi\nabla^2\sigma\right\}dv =$$

$$= \left[\iint\limits_S\left(\Psi\frac{\partial\sigma}{\partial\nu} - \sigma\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)df - \iiint\limits_P(\sigma\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\sigma)\,dv\right] +$$

$$+ \iiint\limits_P\sigma\left[\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right]dv.$$

Слагаемое, стоящее в скобке, равно, как нетрудно видеть, пределу, к которому стремится

$$\lim_{S_1\to M_0}\iint\limits_{S_1}\left(\sigma\frac{\partial\Psi}{\partial\nu} - \Psi\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\right)df,$$

когда поверхность S_1 сжимается в точку. Как нами было выяснено, этот предел равен $4\pi\,\Phi(M_0, t)$.

Из ур-ния (11), таким образом, непосредственно следует:

$$\iiint\limits_P\sigma(M; M_0)\left[\nabla^2\Phi(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(M,t)}{\partial t^2}\right]dv = 0 \tag{49}$$

для любого объема P, ограниченного эквидистантной поверхностью $\tau = t$.

Нетрудно видеть, что интеграл, стоящий в левой части (49), есть не что иное, как запаздывающий потенциал с плотностью

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

в неоднородном пространстве. Это позволяет доказать теорему:

Теорема IV. Для того, чтобы решение интегрального ур-ния (11) служило решением волнового ур-ния (1), достаточно, чтобы для оператора Лоренца от Φ

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

как для плотности, имело место основное свойство запаздывающих потенциалов.

Так как потенциал от этого оператора Лоренца равен нолю в силу (49), то

$$\nabla^2 U(M_0, t) - \frac{1}{c^2(M_0)} \frac{\partial^2 U(M_0, t)}{\partial t^2} = 0,$$

где U — левая часть ур-ния (49).

Если обозначим

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \psi,$$

то наше достаточное условие примет вид

$$\psi(M_0, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_P \nabla^2{}_0\, \sigma(M_0; M)\, [\psi[M, t)]\, dv. \tag{50}$$

Достаточность его вытекает, например, с помощью последовательных оценок, примененных к этой формуле.

Так как эти оценки буквально совпадают с теми, которые мы применяем для доказательства единственности решения ур-ния (13) в гл. I, то повторять их мы здесь не будем. Тем самым теорему можно считать доказанной.

Отметим, что здесь мы использовали свойство запаздывающих потенциалов не в полной мере, так как существование вторых производных, о котором шла речь при формулировке этого свойства, несомненно, ибо $U = 0$.

В дальнейшем мы установим, что при некоторых предположениях относительно F и f функция, удовлетворяющая ур-нию (13), будет удовлетворять и (11) и иметь несколько непрерывных производных.

Тогда из теоремы (III) будет вытекать то обстоятельство, что основное свойство запаздывающих потенциалов будет иметь место, и в силу только что доказанного оно будет удовлетворять волновому ур-нию.

4°. Займемся теперь исследованием некоторых свойств полученного нами решения интегрального ур-ния (13).

Мы покажем именно, что в некоторых предположениях относительно функций F и f ряд

$$\Phi_0 + (\Phi_1 - \Phi_0) + \cdots + (\Phi_n - \Phi_{n-1}) + \cdots$$

можно несколько раз почленно дифференцировать.

Допустим, что функция $F(M)$ допускает $k+1$ производную, а функция $f(M)$ допускает k производных по координатам.

Тогда функция Φ_0 и все разности $(\Phi_n - \Phi_{n-1})$ будут иметь k производных по координатам и по времени, и ряды, составленные из этих производных, будут равномерно сходящимися.

Докажем это сначала для Φ_0. С этой целью мы преобразуем интеграл, дающий явное выражение этой функции, в интеграл с постоянными пределами.

Для этого мы вводим экстремальные координаты пространства, связанные с точкой x_0, y_0, z_0. Тогда переменные x, y и z будут выражаться некоторыми определенными функциями от

$$\tau, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0 \text{ и } z_0.$$

Мы условимся обозначать x, y и z как функции этих переменных символами x_τ, y_τ и z_τ. Соответственно x_t y_t и z_t будут обозначать, очевидно, результат замены в этих функциях τ на t.

Выражение

$$\sqrt{EG - F^2},$$

входящее в элемент поверхности, можно легко аналитически представить.

Если вспомнить, что раньше он выражался как

$$s^2 \sin \vartheta_0 \, \chi_1 (x, y, z; x_0, y_0, z_0),$$

где χ_1 — регулярная функция своих аргументов, то легко видеть, что он будет выглядеть как

$$\tau^2 \chi_2 (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0),$$

где χ_2 будет регулярной функцией. Значение же

$$(\sqrt{EG - F^2})_t$$

будет представляться в виде

$$t^2 \chi_2 (t, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0).$$

Совершенно аналогично функция σ будет представляться в виде

$$\frac{1}{\tau} \chi_3 (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0\, y_0\, z_0)$$

и

$$\sigma_t = \frac{1}{t} \chi_3 (t, \vartheta_0\, \varphi_0; x_0\, y_0\, z_0).$$

Нормальная производная от σ, очевидно, равна производной от σ по s и, на основании гл. II, равна

$$-\frac{1}{2} \frac{\sigma \nabla^2 \tau}{n (M)}.$$

В силу аналитического выражения функций σ и τ эта величина может быть представлена как

$$\frac{1}{r^2 (M; M_0)} \chi_4^1 (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0\, y_0\, z_0),$$

и если вспомнить, что отношение $\frac{\tau}{r}$ есть регулярная функция, то окончательно:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = \frac{1}{\tau^2} \chi_4 (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0\, z_0),$$

где χ_4 регулярна. Отсюда

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}\right)_t = \frac{1}{t^2} \chi_4 (t, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0).$$

Нормальная производная от τ, очевидно, есть регулярная функция x, y, z, x_0, y_0, z_0 и, следовательно, регулярная функция $\tau, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0, z_0$, равная $n (\vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0)$. Наконец, нормальная производная от $F(M)$ есть сумма произведений

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial z} \text{ на } \frac{\frac{\partial \tau}{\partial x}}{n}, \frac{\frac{\partial \tau}{\partial y}}{n} \text{ и } \frac{\frac{\partial \tau}{\partial z}}{n},$$

а эти последние функции, очевидно, выражаются как

$$\frac{1}{\tau} \chi_x (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0), \quad \frac{1}{\tau} \chi_y (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0),$$

$$\frac{1}{\tau} \chi_z (\tau, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0),$$

где $\chi_x\, \chi_y$ и χ_z — регулярные функции.

Отсюда

$$\Phi_0(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{t^2}\chi_4(t, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0)F - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t^2}\sum\frac{\partial F}{\partial x}\chi_x - \frac{1}{t}\chi_3(\ )\,n(\ )\,f\right\} t^2\chi_1(\ )\,d\vartheta_0\,d\varphi_0.$$

Как мы видим, функция Φ_0 представляется собственным интегралом, который можно диффенцировать по параметру столько же раз, сколько производных имеют $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ и f. Из полученной формулы вытекает непрерывность всех таких производных вплоть до $t = 0$ включительно. Тем самым наше утверждение для Φ_0 доказано.

Переходим теперь к почленному дифференцированию всего остального ряда.

Покажем, что разность $\Phi_{n+1} - \Phi_n$ имеет, по крайней мере, столько же производных, сколько $\Phi_n - \Phi_{n-1}$.

При этом Φ_{-1} условно считаем равным нолю.

Мы имеем:

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P \nabla^2\sigma\,(\Phi_n - \Phi_{n-1})\,dv.$$

С помощью введения экстремальных координат преобразуем этот интеграл в интеграл с постоянными пределами. Из аналитических выражений $\nabla^2\sigma$ и $\frac{D(x, y, z)}{D(\tau, \vartheta_0, \varphi_0)}$ нетрудно видеть, что

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{t}\zeta_1(\tau, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0, z_0)\,[\Phi_n - \Phi_{n-1}]_\tau\, t^2\zeta_2(\ )\,d\vartheta_0\,d\varphi_0,$$

где ζ_1 и ζ_2 — регулярные функции своих аргументов.

Заменяем теперь переменную интегрирования τ на другую, полагая

$$\tau = tt_2.$$

Тогда мы будем иметь, полагая $\zeta_1(\ ).\zeta_2(\ ) = \zeta_1(\ )$:

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 dt_2\int_0^{\pi} d\vartheta_0\int_0^{2\pi} d\varphi_0\,\{t^2.t_2\,\zeta(t, t_2, \vartheta_0, \varphi_0, x_0, y_0, z_0)\,[\Phi_n - \Phi_{n-1}]_{tt_2}\}.$$

Отсюда сразу очевидно, что разность $\Phi_{n+1} - \Phi_n$ можно дифференцировать по параметру столько же раз, сколько $\Phi_n - \Phi_{n-1}$.

Так как Φ_0 имеет k производных, то очевидно, что и все разности имеют также k производных.

Переходя к сходимости ряда из производных, обозначим для краткости

$$\omega_n = \Phi_n - \Phi_{n-1}.$$

Тогда мы будем имет формулу

$$\omega_{n+1}(t, x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} t^2 t_2 \zeta(t, t_2, \vartheta_0, \varphi_0; x_0, y_0, z_0)\,\omega_n(t(1-t_2), x_{tt_2}, y_{tt_2}, z_{tt_2})\,dt_2\,d\vartheta_0\,d\varphi_0,$$

или если условиться обозначать

$$\omega_n(t(1-t_2), x_{tt_2}, y_{tt_2}, z_{tt_2}) = \{\omega_n\},$$

то

$$\omega_{n+1} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} t^2 t_2 \zeta\{\omega_n\}\,dt_2\,d\vartheta_0\,d\varphi_0. \tag{51}$$

В гл. I нами было установлено, что существует такое L, что

$$|\omega_n| < \frac{L^{2n} t^{2n}}{(2n)!},$$

и, следовательно,

$$|\{\omega_n\}| < \frac{L^{2n} t^{2n}(1-t_2)^{2n}}{(2n)!}.$$

Совершенно аналогично можно установить неравенство

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^\alpha \omega_n}{\partial t^\mu \partial x_0 \ldots}\right| < \frac{L^{2n} t^{2n-\mu}}{(2n-\mu)!}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots l-1, \ \mu \leqslant \alpha, \ n \geqslant \frac{\mu}{2}, \\ &\left|\frac{\partial^\alpha \omega_n}{\partial t^\mu \partial x_0 \ldots}\right| < L^{2n}, \quad n < \frac{\mu}{2}, \end{aligned}\right. \tag{52}$$

которое доказывает равномерную сходимость всех рядов из производных и тем самым существование и непрерывность стольких производных от Φ, сколько непрерывных производных имеет Φ_0.

Доказательство это принципиально не представляет ничего интересного, и проводить его до конца мы не будем. Докажем это только для первых производных

$$\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial x_0}=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t^2\,t_2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_0}\{\omega_n\}+\zeta\left\{\frac{\partial\omega_n}{\partial x_{tt_2}}\frac{\partial x_{tt_2}}{\partial x_0}+\frac{\partial\omega_n}{\partial y_{tt_2}}\frac{\partial y_{tt_2}}{\partial x_0}+\frac{\partial\omega_n}{\partial z_{tt_2}}\frac{\partial z_{tt_2}}{\partial x_0}\right\}\right)dt_2\,d\vartheta_0\,d\varphi_0,$$

$$\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial y_0}=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t^2\,t_2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y_0}\{\omega_n\}+\zeta\left\{\frac{\partial\omega_n}{\partial x_{tt_2}}\frac{\partial x_{tt_2}}{\partial y_0}+\frac{\partial\omega_n}{\partial y_{tt_2}}\frac{\partial y_{tt_2}}{\partial y_0}+\frac{\partial\omega_n}{\partial z_{tt_2}}\frac{\partial z_{tt_2}}{\partial y_0}\right\}\right)dt_2\,d\vartheta_0\,d\varphi_0,$$

$$\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial z_0}=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t^2\,t_2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z_0}\{\omega_n\}+\zeta\left\{\frac{\partial\omega_n}{\partial x_{tt_2}}\frac{\partial x_{tt_2}}{\partial z_0}+\frac{\partial\omega_n}{\partial y_{tt_2}}\frac{\partial y_{tt_2}}{\partial z_0}+\frac{\partial\omega_n}{\partial z_{tt_2}}\frac{\partial z_{tt_2}}{\partial z_0}\right\}\right)dt_2\,d\vartheta_0\,d\varphi_0.$$

Теперь будем применять метод полной индукции.

Для ω_0, очевидно, неравенство (52) справедливо. Докажем, что если наше неравенство имело место для производных порядка n, то при этом то же неравенство будет иметь место и для $(n+1)$-й производной.

Действительно, в силу (52) подинтегральная функция не превосходит

$$Kt^2\,t_2\,\frac{L^{2n}\,t^{2n}\,(1-t_2)^{2n}}{(2n)!},$$

где K — постоянное число, и если

$$L>\sqrt{\frac{\pi}{2}K},$$

$$\left|\frac{\partial\omega_n}{\partial x_0}\right|<\int_0^1 L^{2n+2}\,\frac{t^{2n+2}\,(1-t_2)^{2n}\,t_2}{(2n)!}\,dt_2=\frac{L^{2n+2}\,t^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

что и требовалось доказать.

Для производной по времени получим:

$$\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Bigg(2t\,\zeta\,\{\omega_n\}+$$

$$+t^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\{\omega_n\}+\zeta\,(1-t_2)\left\{\frac{\partial\omega_n}{\partial t}\right\}+\sum\left\{\frac{\partial\omega_n}{\partial_{tt_2}}\right\}\frac{\partial x_{tt_2}}{\partial t}\right)\Bigg)\,t_2\,dt_2\,d\vartheta_0\,d\varphi_0.$$

Подинтегральная функция легко оценивается, если предположить, что для производных порядка ниже n оценка (52) установлена. После этого чисто формально получим нужный результат. Эта оценка принципиальных трудностей не содержит, и поэтому проводить ее подробно мы не будем.

Формулу (52) можно считать доказанной.

Таким образом, мы видим, что наш алгорифм последовательных приближений привел нас к функции, имеющей на единицу меньше производных, чем начальные условия, причем все эти производные непрерывны вплоть до $t=0$.

Из сказанного, между прочим, вытекает, что начальные значения первых производных от Φ совпадают с начальными значениями производных от Φ_0, так как эти производные представляются рядами

$$\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0}-\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}\right)+\cdots,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}-\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)+\cdots,$$

сходящимися равномерно, причем начальные значения всех членов, кроме первого, обращаются в ноль в силу (52).

5°. Чтобы закончить наше исследование, остается показать, что

$$(\Phi_0)_{t=0}=F(M) \text{ и } \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)_{t=0}=f(M). \tag{12}$$

Тогда, благодаря непрерывности производных от Φ_0, можно будет перейти от неоднородного интегрального ур-ния (13) к однородному (11), эквивалентность которого с волновым ур-нием уже установлена.

Мы имеем:

$$\Phi_0=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}F-\sigma\frac{\partial \tau}{\partial \nu}-\sigma\frac{\partial \tau}{\partial \nu}f\right)df$$

и, как нетрудно видеть,

$$\Phi_0=F+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_P(\nabla^2\sigma F-\sigma\nabla^2 F)\,dv-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\sigma\frac{\partial \tau}{\partial \nu}f\,df. \tag{53}$$

Здесь очевидно, что при стремлении t к нолю второе и третье слагаемые идут к нолю, и, следовательно:

$$[\Phi_0]_{t=0}=F(M).$$

Для того, чтобы доказать второе утверждение, дифференцируем формулу (53) по времени.

Первое слагаемое от времени не зависит. Производная от второго слагаемого в силу (43) равна

$$-\iint\limits_S(\nabla^2\sigma F-\sigma\nabla^2 F)\frac{\frac{\partial f}{\partial \tau}}{\frac{\partial \tau}{\partial \nu}}.$$

Нетрудно видеть, что при $t=0$ она обращается в ноль, так как порядок величины, стоящей в скобках, будет $\frac{1}{t}$, а порядок величины поверхности равен t^2.

Производная от последнего слагаемого приводится к виду

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}f+\sigma\frac{\partial^2\tau}{\partial\nu^2}f+\sigma\frac{\partial\tau}{\partial\nu}\frac{\partial f}{\partial\nu}-2\sigma\frac{\partial\tau}{\partial\nu}fH\right)\frac{\frac{\partial f}{\partial\tau}}{\frac{\partial\tau}{\partial\nu}}.$$

Так как $\frac{\partial\tau}{\partial\nu}$ — величина конечная, то второе и третье слагаемые в скобке имеют порядок $\frac{1}{t}$, и, следовательно, интеграл от них стремится к нолю, 1-е и 4-е слагаемые стремятся, как нетрудно видеть, к $f(M_0)$ и $2f(M_0)$. Это легко вытекает из аналитического представления $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}$, H и $\sqrt{EG-F^2}$, данного ранее.

Тем самым утверждение наше доказано.

Таким образом, мы видим, что если только функции F и f имеют нужное число производных, то полученное нами решение ур-ния (13) Φ будет удовлетворять волновому ур-нию. Так как решение у интегрального ур-ния существует, то тем самым нами доказано существование решения у волнового ур-ния (1) при таких начальных условиях.

В заключение считаем своим долгом выразить глубокую признательность заведывающему теоретическим отделом Сейсмологического института Академии Наук СССР проф. Владимиру Ивановичу Смирнову за необыкновенно внимательное отношение и большую помощь при выполнении этой работы.

Ленинград
Сейсмологический институт
Академии Наук СССР.
29 марта 1930 г.

Цена 75 коп.

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Сентябрь 1930 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания П. М. Никифоров

Представлено в ОФМ 4 IV 30

Начато набором в июне 1930 г. — Окончено печатанием в сентябре 1930 г.

57 стр.

Статформат $Б_5$

Ленинградский Областлит № 64336. — $3^9/_{16}$ печ. л. — Тираж 1000

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия 12