Подобие теорий предметных областей

А.Р. Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,
Караганда, Казахстан
modth1705@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты, связанные с вопросом построения теорий предметных областей. Основная цель данной заметки заключается в дальнейшей разработке логической формализации онтологий предметных областей, начатой в [1],[2]. При этом при рассмотрении и определении каких-либо теорий фиксированной сигнатуры, мы будем придерживаться некоторых принципов. В рамках перечисленных 6 принципов, мы имеем, что при некоторых условиях связанных с полнотой аналитических йонсоновских теорий и их совершенности, синтаксическое подобие полных аналитических теорий достаточно рассматривать относительно экзистенциальных формул.

Главным результатом данной работы является следующий результат:

Теорема 1.[4] Пусть T_1 и T_2 $\exists$ - полные совершенные аналитические йонсоновские теории.

Тогда следующие условия эквивалентны

- 1) T_1 и T_2 -J- синтаксически подобны (в смысле [4]),
- 2) T_1^* и T_2^* -синтаксически подобны (в смысле [3]).

Ключевые слова: онтология предметной области, аналитические йонсоновские теории, синтаксическое подобие теорий.

1 Введение

В данном докладе будут представлены результаты, связанные с вопросом построения теорий предметных областей. Основная цель данной заметки заключается в дальнейшей разработке логической формализации онтологий предметных областей, начатой в [1,2]. Все определения теоретико-модельных понятий связанных с онтологией предметных областей считаются известными, определенными как в [1]. В случае, если в [1] они неопределены, то будем считать, что мы это можем сделать на базе [1]. При этом при рассмотрении и определении каких-либо теорий фиксированной сигнатуры, мы будем придерживаться следующих принципов:

1. Тезис Мальцева - Тарского [1].
2. Сигнатура - это есть множество логических символов, которые кодируют ключевые понятия, рассматриваемых предметных областей.
3. Язык - это множество формул сигнатуры в обычном теоретико-модельном смысле, если в конкретных случаях онтологии предметных областей будет возможность определить лишь предложения, то формулы и соответственно типы, будут строиться на базе обогащенной сигнатуры. Обогащение будет происходить за счет символов исчисления предикатов логики первого порядка.
4. Описание общих свойств предметной области - это некоторое подмножество языка сигнатуры, не зависящей от ее конкретных реализаций, т.е. онтология предметной области должна содержать информацию, которая является верной для каждого конкретного примера данной предметной области.

5. В рассмотрении онтологии предметных областей должны присутствовать наборы ключевых понятий предметной области, а в описании только множества аналитических предложений (как в [2]), дающие полное описание значений этих ключевых понятий.

6. Мы всегда будем иметь возможность дать идеальную экспертную оценку об аналитичности рассматриваемого предложения. Как следствие, рассматриваемые теории будут только аналитическими.

Все эти принципы нужны для максимально возможных применений формальных знаний теоретико-модельного характера. Понятно, что абсолютно все ситуации полноты логического характера избежать невозможно хотя бы из того, что Тезис Мальцева - Тарского, являющийся отправной точкой [1], не является теоремой, но и не имеет опровержения. Суть выше указанного эмпирического тезиса заключается в том, что всякое формальное описание может быть дано в теоретико-модельных терминах. В связи с тем, что основные знания (онтологии) о предметных областях в реальном времени не полны, то, формализуя эти знания в виде аналитических предложений фиксированной сигнатуры, как правило, мы будем иметь дело с неполной аналитической теорией. Но в этом есть свой положительный момент, так как полная аналитическая теория не может иметь больше одной конечной модели с точностью до изоморфизма, хотя конечные реализации, по сути, и есть интересующая нас семантика. Среди неполных теорий конкретной сигнатуры в силу их необъятности было бы логично ограничиться индуктивными теориями, в связи с тем, что основные алгебраические объекты, как правило, имеют в качестве аксиом $\forall\exists$ -предложения. Обращение к алгебраическим примерам (алгебраическим системам фиксированной сигнатуры) естественным образом еще раз связывает нас с выше указанным тезисом Мальцева-Тарского. Среди индуктивных теорий особое место занимают йонсоновские теории. К примеру, йонсоновскими являются теории групп, абелевых групп, полей фиксированной характеристики, линейных порядков, булевых алгебр, унарных и полигонов. Йонсоновские теории, вообще говоря, не полны. Таким образом, было бы интересно изучать свойства йонсоновских теорий в рамках построения теорий предметных областей. Одной из классических проблем науки является вопрос классификации объектов изучения по каким-либо общим признакам. В математике роль таких объектов играют множества с заданными на них отношениями. С помощью математической логики эти объекты были связаны с некоторыми множествами формул языка исчисления предикатов. Эта связь между синтаксисом и семантикой фиксированного языка собственно и есть суть теории моделей. Поэтому понятно, что нахождение синтаксических и семантических признаков подобия может быть полезно в классификации теорий предметных областей.

2. О подобиях в йонсоновских теориях

В этом разделе мы рассмотрим некоторые синтаксические свойства йонсоновских теорий. По договоренности из раздела 1, в силу принципа 6 мы опускаем в дальнейшем в контексте понятие «аналитичности», так как рассматриваемые теории только аналитические, т.е. дедуктивно замкнутые множества аналитических предложений.

Пусть L - язык первого порядка. Определим понятие йонсоновской теории языка L .

Определение 1.1. Теория T языка L называется йонсоновской, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) T имеет бесконечную модель;
- 2) T индуктивна;
- 3) T обладает свойством совместного вложения (JEP);
- 4) T обладает свойством амальгамы (AP).

В данном определении 3) и 4) условия являются семантическими. Существуют их синтаксические аналоги на языке экзистенциальных формул.

Все неопределенные теоретико-модельные понятия связанные с йонсоновством можно найти в [4]. Аналогично определению йонсоновости, многие семантические теоретико-модельные понятия имеют свои синтаксические йонсоновские аналоги. Это говорится для того, что бы в дальнейшем свободно использовать семантические определения. Т.Г. Мустафин в работе [3] определил точное понятие синтаксического [3,Def.1] и семантического подобия [3,Def.4] полных теорий. Причем на языке этих определений и соответствующих понятий (например, оболочка теории [3,Def.12], семантическое свойство (теории, модели, элемента) [3,Def.8]) он доказал, что для произвольной полной теории существует синтаксически подобная ей некоторая теория полигонов [3,Th.4,Th.5]. В классе йонсоновских теорий данный подход к классификации соответствующих объектов приемлем, но требует определенных изменений в определениях соответствующих подобий теорий. Это связано, во-первых, с тем, что, вообще говоря, йонсоновские теории не полны, и, во-вторых, что в классе моделей йонсоновской теории однородные-универсальные модели, вообще говоря, не насыщены. Данный

параграф связан с различными понятиями подобия между йонсоновскими теориями. С помощью обобщения некоторых определений из работы [3] и техники работы с йонсоновскими теориями получено, что в классе совершенных $\exists$ -полных йонсоновских теорий понятия введенных подобий йонсоновских теорий совпадают с соответствующими понятиями в полных теориях в смысле [3]. Дадим следующие определения. Пусть T

полная теория, тогда $F(T) = \bigcup_{n < \omega} F_n(T)$, где $F_n(T)$ -- есть булева алгебра формул с n свободными переменными.

Определение 1. [3, Def.1]. Пусть T_1 и T_2 -- полные теории.

Мы будем говорить, что T_1 и T_2 -- синтаксически подобны, если существует биекция $f : F(T_1) \rightarrow F(T_2)$ такая, что

- 1) ограничение f до $F_n(T_1)$ есть изоморфизм булевых алгебр $F_n(T_1)$ и $F_n(T_2)$, $n < \omega$,
- 2) $f(\exists v_{n+1} \varphi) = \exists \varphi_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in F_{n+1}(T)$, $n < \omega$
- 3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Пусть T произвольная йонсоновская теория, тогда $E(T) = \bigcup_{n < \omega} E_n(T)$, где $E_n(T)$ -- есть решетка $\exists$ -формул с n свободными переменными, T^* -- центр йонсоновской теории T , т.е. $T^* = Th(C)$, где C -- семантическая модель йонсоновской теории T в смысле [4].

Определение 2. Пусть T_1 и T_2 - йонсоновские теории.

Мы будем говорить, что T_1 и T_2 - J -синтаксически подобны, если существует биекция $f : E(T_1) \rightarrow E(T_2)$ такая, что

- 1) ограничение f до $E_n(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$, $n < \omega$,
- 2) $f(\exists v_{n+1} \varphi) = \exists \varphi_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}(T)$, $n < \omega$
- 3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Определение 3 Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^* .

Главным результатом данной работы является следующий результат, связанный с выше указанными определениями.

Теорема 1. Пусть T_1 и T_2 -- $\exists$ -полные совершенные йонсоновские теории.

Тогда следующие условия эквивалентны

- 1) T_1 и T_2 -- J -синтаксически подобны,
- 2) T_1^* и T_2^* -- синтаксически подобны (в смысле [3]).

Доказательство: Для доказательства необходимы следующие два факта.

Факт 1. Для любой йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

- 1) T совершенна;
- 2) T^* модельно полна.

Доказательство: следует из того факта, что совершенность йонсоновской теории T эквивалентно тому, что T^* является модельным компаньоном теории T .

Факт 2. Для любой полной для $\exists$ -предложений йонсоновской теории T следующие условия эквивалентны:

1) T^* модельно полна;

2) для каждого $n < \omega$ $E_n(T)$ - булева алгебра, где $E_n(T)$ -- есть решетка $\exists$ -формул с n свободными переменными.

Доказательство: 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть T^* модельно полна $\Rightarrow E_n(T^*)$ - булева алгебра, т.к. T^* полная теория (элементарная теория семантической модели), но $E_n(T) \subseteq E_n(T^*)$, т.к. $T \subseteq T^*$.

Имеем 2 случая:

1) T -- полная, тогда $T = T^* \Rightarrow T$ - модельно полна $\Rightarrow E_n(T)$ - булева алгебра.

2) Так как $T \subset T^* \Leftrightarrow T^* = Th(C)$, где C семантическая модель T , то $\forall \varphi \in T \Rightarrow \varphi \in T^*$. Так как T полна для $\exists$ -предложений, то все $\exists$ -предложения, выводимые из T , принадлежат и T^* . Других в T^* $\exists$ -предложений нет, так как T полна для $\exists$ -предложений и T^* - полная теория. Так как $E_n(T^*)$ -булева алгебра, то в ней есть дополнения для любого φ - $\exists$ -предложения. В общем случае это φ не будет $\exists$ -предложением, так как если $\varphi \in \Sigma$, то $\neg\varphi \in \Pi$ (Σ -- множество $\exists$ -предложений, а Π - множество $\forall$ -предложений), но T^* модельно полна $\Leftrightarrow \forall \psi \in T, \exists \theta \in T^* : \psi \equiv \theta, \theta \in \Sigma$. Но мы знаем, что $\theta \in T^* \Leftrightarrow \theta \in T$ из этого следует, что 1) $1, 0 \in E_n(T)$; 2) $\varphi \in E_n(T)$ поэтому $\neg\varphi \in E_n(T)$; 3) $\forall \varphi \in E_n(T) \neg\neg\varphi = \varphi$ из этого следует, что $E_n(T)$ -- булева алгебра.

2) $\Rightarrow$ 1) $E_n(T)$ -- булева алгебра, поэтому T - модельно полна, но $T \subset T^* = Th(C)$. Пусть $A \in ModT$, поэтому A изоморфно вкладывается в C , т.к. C - семантическая модель. В силу того, что T - модельно полна это вложение элементарно.

Пусть C не насыщена, тогда $\exists X \subset C, |X| < |C|, \exists p \in S_1(X)$: не верно, что $(C, x)_{x \in X} \models p$, но $p \cup T$ -- совместно, $p \cup T^*$ -- совместно, значит $\exists m \notin C : m$ реализует p , тогда $\exists M \models T^*$, что $m \in M$, M - элементарное расширение C той мощности $\Rightarrow \exists$ семантическая модель C' , которая является $|M|^+$ - насыщенной и элементарным расширением M мощности $2^{|M|}$. Но любые две семантические модели элементарно эквивалентны между собой, в частности $C \equiv C'$. Получили противоречие, т.к. в C' реализуется p . Следовательно, наше предположение, что C -- не насыщена, не верно отсюда следует, что T совершенна $\curvearrowright T^*$ модельно полна.

Теперь приступим непосредственно к доказательству утверждения теоремы.

Покажем 1) $\Rightarrow$ 2). Мы имеем, что для каждого $n < \omega$ $E_n(T_1)$ изоморфно $E_n(T_2)$. Пусть этот изоморфизм осуществляется по f_{1n} . В силу условия теоремы и фактов 1 и 2 для каждого $n < \omega$ $E_n(T_1)$ и $E_n(T_2)$ являются булевыми алгебрами. Но в силу совершенности T_1 и $T_2 \Rightarrow T_1^*$ и T_2^* модельно полны в силу факта 1, а поэтому для каждого $n < \omega$, для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ из $F_n(T_1^*)$ найдется формула $\psi(\bar{x})$ из $E_n(T_1^*)$ так, что в $T_1^* \models \varphi \leftrightarrow \psi$. В силу того, что теория T_1 -- $\exists$ -полна и $E_n(T_1) \subseteq E_n(T_1^*)$ (т.к. $T_1 \subseteq T_1^*$), следует, что $E_n(T_1) = E_n(T_1^*)$. В силу того, что теория T_2 -- $\exists$ -полна и $E_n(T_2) \subseteq E_n(T_2^*)$ (т.к. $T_2 \subseteq T_2^*$), следует, что $E_n(T_2) = E_n(T_2^*)$. Для каждого $n < \omega$, для каждого $\varphi_1(\bar{x})$ из $F_n(T_1^*)$ зададим следующее отображение между $F_n(T_1^*)$ и $F_n(T_2^*)$: $f_{2n}(\varphi_1(\bar{x})) = f_{1n}(\psi_1(\bar{x}))$, где в $T_1^* \models \psi_1 \leftrightarrow \varphi_1, \psi_1 \in E_n(T_1)$. Легко понять, что в силу свойств f_{1n} и выше сказанного f_{2n} является биекцией, задающей изоморфизм между $F_n(T_1^*)$ и $F_n(T_2^*)$. Следовательно, T_1^* и T_2^* -- синтаксически подобны. Покажем 2) $\Rightarrow$ 1). Тривиально, так как $F_n(T_1^*)$ изоморфно $F_n(T_2^*)$ для каждого $n < \omega$, и в силу условия теоремы и фактов 1 и 2 этот изоморфизм продолжается на все подалгебры.

Определение 1.7.2.[3,Def.2].

1) Чистой тройкой назовем $\langle A, \Gamma, \mathbf{M} \rangle$, где A не пусто, Γ -- группа перестановок A , и $\mathbf{M}$ -- семейство подмножеств A , таких что $M \in \mathbf{M} \Rightarrow g(M) \in \mathbf{M}$ для каждого $g \in \Gamma$.

2) Если $\langle A_1, \Gamma_1, \mathbf{M}_1 \rangle$ и $\langle A_2, \Gamma_2, \mathbf{M}_2 \rangle$ чистые тройки, и $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ -- биекция, то ψ есть изоморфизм, если

(i) $\Gamma_2 = \{\psi g \psi^{-1} : g \in \Gamma_1\}$;

(ii) $\mathbf{M}_2 = \{\psi(E) : E \in \mathbf{M}_1\}$.

Определение 4. [3,Def.3]. Чистая тройка $\langle |C|, G, \mathbf{N} \rangle$ называется семантической тройкой полной теории T , где $|C|$ - носитель монстр-модели C теории T , $G = \text{Aut}(C)$, $\mathbf{N}$ - класс всех подмножеств $|C|$, каждое из которых является носителем соответствующей элементарной подмодели C .

Определение 5. [3,Def.4]. Полные теории T_1 и T_2 называются семантически подобными, если их семантические тройки изоморфны между собой.

Из [3] известен следующий результат.

Предложение 1 [3,Prop 3.1] Если теории T_1 и T_2 синтаксически подобны, тогда T_1 и T_2 семантически подобны, обратное не верно.

Пусть T - йонсоновская теория ,удовлетворяющая условию теоремы 1.

Определение 6 Чистая тройка $\langle C, \text{Aut}C, \text{Sub}C \rangle$ называется J -семантической тройкой, где C -- семантическая модель T , $\text{Aut}C$ - группа автоморфизмов C , $\text{Sub}C$ - класс всех подмножеств носителя C , которые являются носителями соответствующих подмоделей C .

Определение 1.7.7. Две йонсоновские теории T_1 и T_2 называются J -семантически подобными, если их J -семантические тройки изоморфны как чистые тройки.

Корректность такого определения следует из того ,что у совершенной йонсоновской теории семантическая модель единственна с точностью до изоморфизма. В противном случае все семантические модели лишь элементарно эквивалентны между собой.

Две йонсоновские теории косемантически между собой ,если они имеют одну семантическую модель.

В связи с этим можно сформулировать следующее:

Лемма 1. Любые две косемантические йонсоновские теории J -семантически подобны.

Доказательство: следует из определения.

Лемма 2. Если две совершенные $\exists$ -полные йонсоновские теории J -синтаксически подобны, то они J -семантически подобны.

Доказательство: следует из выше сказанного .

3 Заключение

В связи с тем, что синтаксическое подобие теорий более сильное понятие, чем семантическое подобие теорий [3, Prop3.1], а также семантическое подобие теорий сохраняет целый ряд полезных свойств [3, Prop 4.2], мы можем сделать следующие выводы:

1. Рассмотренный выше результат (теорема 1) о подобии в йонсоновском смысле позволяет перенести эти полезные факты о соответствующих центрах йонсоновских теорий на них самих .

2. Так как основным результатом [3] является подобие произвольной полной теории некоторой теории полигонов, то мы можем надеяться на аналогичный результат и с йонсоновскими теориями. В этом случае мы

можем также говорить о некой универсальной интерпретации -полигонах. А это уже относится к вопросу о логической семантике естественного языка.

3. Переход к йонсоновским теориям даёт ещё одно преимущество в том смысле ,что мы имеем дело в основном с формулами у которых длина перемен кванторов не более двух , а семантический аспект ограничивается как правило классом экзистенциально-замкнутых моделей.

Литература

[1] Пальчунов Д.Е. Моделирование мышления и формализация рефлексии: I. Теоретико-модельная формализация онтологии и рефлексии.// ФИЛОСОФИЯ НАУКИ, № 4 (31), 2006.-С.86-114.

[2] Пальчунов Д.Е., Сидорова Е.С. Виртуальный каталог.// Знание-Онтологии-Теории, том1, Новосибирск, 2007.- С.166-175.

[3] Mustafin T.G. On similarities of complete theories.//Logic Colloquium'90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Helsinki, Finland, July 15-22, 1990, – P. 259 -265.

[4] Ешкеев А.Р. О подобиях в йонсоновских теориях.// Материалы 10-ой Межвузовской конференции по математике и механике. -Т.1. -Алматы: 2005.-С.182 -184.