

Секвенциальное построение логико-математических теорий

Кузичев Александр

МГУ им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119992, Россия

askuzichev@rambler.ru

Аннотация. В данной работе занимаемся теоретико-множественным построением, формализацией и исследованием (прежде всего на непротиворечивость) известных логико-математических теорий. Новый путь открывается благодаря нелогическому алгоритмическому неразрешимому (с законом “исключённого третьего”) секвенциальному исчислению Ламбда-конверсии Чёрча и используемых дедуктивных секвенциальных конструкций Генцена без постулируемого правила логического сечения (но с постулируемыми двумя правилами Ламбда-сечения).

Ключевые слова: формализация логико-математических теорий, секвенциальное исчисление, генценовская логика предикатов, Ламбда-сечение

1 Несколько слов из истории секвенциальных логик

Секвенциальные (выводимостные) *неформульные* построения в науке начинаются с работ Герхарда Генцена (1909–1945) по логике предикатов (первого порядка), положившим начало теории логического вывода, связанной с развитием «машинной логики» и давшей толчок к появлению работ, посвящённых машинному доказательству математических теорем.

Генцен пишет (в 1935 году): «формализация (*формульная* – КАС) логических выводов, проведённая, в частности, Фреге, Расселом и Гильбертом, очень далека от тех способов рассуждений, которые применяются в действительности при математических доказательствах. Этим достигаются значительные формальные преимущества. (*Абзац мой* – КАС). Я же хотел прежде всего построить такой формализм, который был бы как можно ближе к применяющимся в действительности рассуждениям. Так возникло “исчисление натуральных выводов”...» ([1, с.9–10]).

В основной теореме Генцен утверждает (доказывает), что каждое чисто логическое доказательство может быть приведено к некоторой определённой, хотя и не однозначно, нормальной форме. Существенным свойством такого нормального доказательства является то, что в него не вводятся никаких понятий, кроме тех, которые содержатся в конечном результате и поэтому с необходимостью должны быть использованы для получения этого результата. Это важный и нужный во многом результат XX века. Он имеет математическое, философское, историко-методологическое и для Computer Science значение.

Чтобы сформулировать и доказать основную теорему, Генцену пришлось ввести особое, подходящее для этих целей формальное исчисление, которое он назвал секвенциальным.

В этой же работе [1] Генцен построил всю логику (предикатов) секвенциально. В секвенциальном аксиоматическом формализме Генцена Н каждая логическая аксиома А представляется выводимой (дедуктивной) секвенцией $\Rightarrow A$, вывод которой получается в силу

основной секвенции Генцена: единственной аксиомы $(B \Rightarrow B)$, где B – любая формула логики, $\Rightarrow$ – знак (дедуктивной) секвенции (выводимости), применением постулируемых секвенциальных правил вывода Генцена. Эти правила характеризуют, в частности, каждый логический оператор его соответствующим введением в левую и правую части секвенций. Выделяются так называемые структурные правила вывода, характеризующие структуру (строение) каждого математического рассуждения: его посылок и заключений, а также и работу (действия) с ними. Среди структурных генценовских отметим правило (логического) сечения (транзитивности выводимости)

$$\text{cut: } \frac{(\Delta \Rightarrow \Lambda, a) (a, \Gamma \Rightarrow \Theta)}{(\Delta, \Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta)}$$

(где Δ , Γ , Λ и Θ – наборы (возможно, пустые) формул рассматриваемой теории, a – “высекаемая” формула этой теории). Не уменьшая общности, в основной секвенции Генцена формулу B можно считать атомарной.

Секвенциальный логический формализм Генцена, не касающийся собственных (математических) аксиом современных теорий, широко изложен в литературе (как в научной, так и в педагогической), часто с формулировкой и даже с доказательством фундаментальной теоремы об исключении из соответствующего формализма правила сечения cut. Я подчеркну: сначала формализм даётся с правилом cut (и это есть первый фундаментальный результат Генцена), потом, следуя за Генценом, формулируется предложение об исключении cut и далее оно доказывается, также следуя за Генценом.

Естественно, можно поступать симметричным образом: сначала задавать формализм без правила cut, получая многие его интересные свойства, потом формулировать и доказывать фундаментальную теорему о допустимости правила cut.

Второе дыхание получают секвенциальные формализмы в связи с созданием и развитием принципиально нового, *ступенчатого*, метода (наряду с традиционным аристотелевским аксиоматическим) математической формализации, разработанного в Московской математической школе Колмогорова–Маркова трудами первого заведующего кафедрой математической логики МГУ Андрея Андреевича Маркова (знаменитая ступенчатая $\omega+1$ -уровневая марковская башня языков конструктивной математической логики), его учеников, последователей и соратников по теории алгоритмов (алгорифмов), конструктивной математической логике и конструктивной математике. Согласно этому методу автор строит (перестраивает) логико-математические теории не аксиоматически, а *ступенчато* по Колмогорову–Маркову каждую в виде одного, но *двухъярусного* секвенциального исчисления. Существенно, что в таких двухуровневых секвенциальных системах уже при их построении используются фундаментальные результаты Генцена, а также Гильберта, Шейнфинкеля, Карри, Чёрча, Барендрегта и их последователей.

2 Исчисления КЧГ и КЧГА

Таково, например, исчисление КЧГ (Кантора–Чёрча–Генцена): первый ярус задаёт неограниченное теоретико-множественное свёртывание Кантора по Карри и Чёрчу в алгоритмической (вычислительной) форме доказуемо неразрешимого, комбинаторно полного (λ -полного) бестипового, например, секвенциального нелогического исчисления λ -конверсии Чёрча с λ -секвенциями (и это принципиально ново); второй ярус задаёт классическую логику (предикатов 1-го порядка) в секвенциальной (без постулируемого правила логического сечения) форме Генцена; связь между ярусами обеспечивают правила λ -сечения $\ast\lambda$ и $\lambda\ast$, введённые автором и названные *канторовскими*, причём в правилах $\lambda\ast$ и $\ast\lambda$ одна посылка обязательно является λ -секвенцией, в правиле подъёма $\ast$ единственная посылка является λ -секвенцией, а все остальные секвенции 2-го яруса дедуктивные. Одновременно рассматриваются на основе λ -конверсии Чёрча все семантические и синтаксические особенности этого исчисления.

Форма представления и задания алгоритмов в виде нелогических исчислений известна автору только для указанных алгоритмов (алгорифмов) Шейнфинкеля–Карри–Чёрча. Это один из фундаментальных результатов школы Гильберта–Шейнфинкеля–Карри–Чёрча. Для других теорий алгоритмов (в частности, для упомянутых выше (нормальных) алгорифмов Маркова) такой результат не широко известен и всегда нуждается в специальных доказательствах и построениях.

Заметим, что каждый из постулатов исчисления КЧГ не кончается “пустой” дедуктивной секвенцией ($\Rightarrow$), что позволяет получить интересные результаты: существуют дедуктивные секвенции, невыводимые в КЧГ.

В КЧГ нет постулируемого (логического) правила сечения cut (представляющего транзитивность выводимости естественных языков), но есть два правила λ -сечения.

Для КЧГ формулируется и доказывается (также в целом по Генцену) теорема о допустимости правила сечения cut. Результат вытекает из фундаментальных логических результатов Генцена и связи, устанавливаемой двумя авторскими правилами λ -сечения между алгоритмической и логической частями двухъярусного КЧГ.

Доказательство Теоремы Cut непосредственно следует из леммы о смешении в КЧГ, по формулировке и доказательству являющейся обобщением генценовской леммы о смешении в логике предикатов 1-го порядка.

Доказательство леммы о смешении проводится аналогично (хотя и значительно проще, особенно благодаря правилам λ *) тому, как оно осуществлено автором для предшествующих его систем, опубликованных подробно в [2] по представлению А.А. Маркова и А.Г. Драгалкина и в [3] – по представлению А.Н. Колмогорова. Вообще, при использовании ступенчатого метода (в данном случае – его двухъярусного секвенциального варианта) доказательства часто осуществляются проще, чем хорошо известным традиционным формульным аксиоматическим способом.

В качестве примера покажем, что *известная* (то есть формализующая определённый раздел современной (классической формульной) математики) теория А (1-го порядка), построенная теоретико-множественно, доказуемо непротиворечива. При этом А задаётся по учебнику Мендельсона [4]. Приводятся все детали таких построения и формализации, для понимания и изучения которых необходимо обладать как минимум базовыми знаниями в объёме учебника [4], хотя он и написан формульно, а не секвенциально [1]. Предлагаемая работа является новой и весьма неожиданной.

Для построения, формализации и исследования А используем новый *ступенчатый* метод Колмогорова–Маркова, существующий в науке наряду с хорошо известным аристотелевским *аксиоматическим*. При этом теория А выступает как часть канторовской теории множеств.

Ступенчатая формализация по Колмогорову–Маркову мною строится теоретико-множественно в виде одного, но двухъярусного неформульного, а *секвенциального* исчисления КЧГА (Кантора–Чёрча–Генцена, А), охватывающего в итоге доказуемо непротиворечивым образом всю теорию А.

Все построения и доказательства для А и КЧГА осуществляются точно так, как это ниже в работе детально делается для канторовской теории множеств и её множества М (мы их даже не будем повторять для А и КЧГА).

3 Построение исчисления λ -конверсии (Ламбда-конверсии А. Чёрча (1903–1995) в секвенциальной форме Г. Генцена (1909–1945))

3.1. Алфавит:

$\forall \supset \top \square \mid () \rightarrow \Rightarrow \lambda$ [из десяти букв].

3.2. Если α – непустое слово в однобуквенном алфавите $\square$, то слово $\mid \alpha \mid$ считается (по А.А. Маркову) переменной. Переменные обозначаются буквами x, y, z, t , возможно, с индексами.

3.3. 1) Буквы $\forall, \supset, \top$ и переменные считаются объектами [обами] (слово “об” введено аспирантом Гильберта Х.Б. Карри). 2) Если a и b – обы, то слово (ab) (аппликация обов a и b) считается обом. 3) Если a – об, то слово $(\lambda x a)$ (“навешивание” оператора абстракции λ с переменной x на об a) считается обом. Для обозначения обов используются первые восемь букв латинского алфавита, возможно, с индексами; Γ, Δ, Θ и Λ – наборы (списки, возможно, пустые) обов.

3.4. λ – оператор абстракции, связывающий вхождения переменных в обы. Если набор переменных и обов $x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_m$ ($n, m \geq 1$) таков, что среди них найдутся об a_i и переменная x_j , имеющая свободные вхождения в a_i , то будем писать $x_1, x_2, \dots, x_n \in a_1, a_2, \dots, a_m$; в противном случае пишем $x_1, x_2, \dots, x_n \notin a_1, a_2, \dots, a_m$. Результат подстановки об b вместо переменной x в об a определяем по Карри и Чёрчу и обозначаем через $[b/x]a$.

3.5. Слова вида $(a \rightarrow b)$ и $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ считаем секвенциями, называя их λ -секвенцией и дедуктивной секвенцией соответственно. Некоторые скобки в об a и секвенциях часто будем опускать при условии, что они легко могут быть восстановлены по ассоциации (группировкой) влево.

3.6. Постулаты (секвенциальные схемы аксиом и правил вывода) исчисления λ -конверсии Чёрча

(α): $\lambda x a \rightarrow \lambda y [y/x] a$, где $y \notin a$;

(β): $(\lambda x a) b \rightarrow [b/x] a$;

(μ): $\frac{a \rightarrow b}{ca \rightarrow cb}$;

(ν): $\frac{a \rightarrow b}{ac \rightarrow bc}$;

(ξ): $\frac{a \rightarrow b}{\lambda x a \rightarrow \lambda x b}$;

(τ): $\frac{(a \rightarrow b) (b \rightarrow c)}{a \rightarrow c}$;

(σ): $\frac{a \rightarrow b}{b \rightarrow a}$.

Построение исчисления λ -конверсии закончено.

3.7. Выражение $a \leftrightarrow b$ (a конвертируется в b) означает, что секвенция $a \rightarrow b$ выводима (доказуема) в исчислении λ -конверсии Чёрча.

4 Формализация канторовской теории множеств

4.1. Определение формул теории множеств

Каждую переменную считаем термом (теории множеств). Если a и b – термы, то об (ab) называем (атомарной) формулой (используя символ принадлежности ϵ , иногда вместо ab пишем $b \epsilon a$). Остальные формулы (теории множеств) порождаем из атомарных обычным образом как обы при помощи четырёх букв $\supset$ (импликация), $\neg$ (отрицание), $\forall$ (квантор общности) и λ : если A и B – формулы, то обы $((\supset A)B)$, $(\neg A)$ и $(\forall (\lambda x A))$ считаем формулами.

В п. 8 введены термы и формулы языка теории множеств, записанные как обы.

В п. 9 предлагаются изменения этих понятий, отражающие хорошо известные в литературе выделенные два принципа теории множеств Георга Кантора (1845–1918):

1) классическая логика предикатов 1-го порядка (применяемая Кантором без каких-либо ограничений) и

2) канторовское неограниченное свёртывание как задание “нового” множества (терма) по каждому свойству. При этом в соответствующих исчислениях свойства записывают в виде формул (ниже в работе: М-формулы) – специально выделенных слов языка каждого исчисления.

4.2. Термы и формулы называем соответственно М-термами и М-формулами. Если $b \leftrightarrow a$ и a есть М-терм или М-формула, то об b считаем соответственно М-термом и М-формулой.

Если c есть М-формула, то об $\lambda x c$ (результат свёртывания c по x) называем М-термом. В атомарной формуле ab (см. п. 8) допускаем случай, когда a и b суть М-термы – тем самым в п. 8 получаем новые формулы и опять переходим к п. 9 и т.д. строим последовательно всё новые и новые М-формулы и М-термы. Определение М-термов и М-формул закончено.

4.3. (Секвенциальные) постулаты (схемы правил вывода) М-расширения

Постулатами М-расширения являются следующие правила вывода, дедуктивные секвенции которых состоят только из М-формул, в правиле $\forall^*$ переменная y такова, что $y \notin a, \Gamma, \Theta$, в правиле $\exists^*$ об c является М-термом.

$$\begin{array}{lll} *I: \frac{a \rightarrow b}{a \Rightarrow b} ; & K*: \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Theta, a} ; & *K: \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta}{a, \Gamma \Rightarrow \Theta} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} W*: \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, a, a}{\Gamma \Rightarrow \Theta, a} ; & *W: \frac{a, a, \Gamma \Rightarrow \Theta}{a, \Gamma \Rightarrow \Theta} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C*: \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, a, b, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, b, a, \Theta} ; & *C: \frac{\Lambda, a, b, \Gamma \Rightarrow \Theta}{\Lambda, b, a, \Gamma \Rightarrow \Theta} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \forall*: \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, ay}{\Gamma \Rightarrow \Theta, \forall \lambda x a} ; & *\forall: \frac{ac, \Gamma \Rightarrow \Theta}{\forall \lambda x a, \Gamma \Rightarrow \Theta} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \supset*: \frac{a, \Gamma \Rightarrow \Theta, b}{\Gamma \Rightarrow \Theta, \supset ab} ; & *\supset: \frac{(\Delta \Rightarrow \Lambda, a) (b, \Gamma \Rightarrow \Theta)}{\supset ab, \Delta, \Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \ulcorner*: \frac{a, \Gamma \Rightarrow \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Theta, \ulcorner a} ; & *\ulcorner: \frac{\Gamma \Rightarrow \Theta, a}{\ulcorner a, \Gamma \Rightarrow \Theta} ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda*: \frac{(\Delta \Rightarrow \Lambda, a) (a \rightarrow b)}{\Delta \Rightarrow \Lambda, b} ; & *\lambda: \frac{(b \rightarrow a) (a, \Gamma \Rightarrow \Theta)}{b, \Gamma \Rightarrow \Theta} . \end{array}$$

Построение секвенциального исчисления М канторовской теории множеств закончено. Оно имеет два яруса: 1-ый (вычислительный, вспомогательный), задаваемый постулатами λ -конверсии (п. 6), и 2-ой (дедуктивный, основной), задаваемый постулатами М-расширения (п. 10).

Для краткости вместо $*\lambda$, λ^* (см. обозначения двух последних правил М-расширения) иногда пишем λ^* , аналогичные сокращения принимаем и для других правил вывода.

Дедуктивная секвенция $(B_1, \dots, B_n \Rightarrow A)$, где $B_1, \dots, B_n, A$ суть формулы, $n \geq 0$, как цельный объект исследования означает (содержательно), что A “выводима” из $B_1, \dots, B_n$. Выделяется случай $n = 0$: $\Rightarrow A$. Формула A всегда в исчислении M рассматривается вместе с приписанной дедуктивной стрелкой $\Rightarrow$. Слово “ $\Rightarrow A$ ” как объект исследования означает, что “формула A доказуема”, но не в секвенциальном исчислении M .

Заметим, что каждый из постулатов исчисления M не кончается “пустой” дедуктивной секвенцией ($\Rightarrow$). Поэтому исчисление M доказуемо непротиворечиво: существуют дедуктивные секвенции, невыводимые в M .

Доказательство полноты M по отношению к (канторовской) теории множеств получаем прямо в силу выполнения в M двух принципов Кантора теории множеств, приведённых выше:

1) классическая логика предикатов, задаваемая в M секвенциально по Генцену структурными правилами $*K*$, $*W*$, $*C*$ и операционными правилами $*\forall*$, $*\exists*$, $*\neg*$ на основе правила подъёма $*$ (из алгоритмического вычислительного (1-го) яруса исчисления M в форме λ -конверсии), и

2) канторовское неограниченное свёртывание, задаваемое в M по Чёрчу на основе 1-го яруса секвенциальными правилами $*\lambda*$, эти правила $*\lambda*$ называем канторовскими, поскольку они (при выводимости $a \rightarrow b$ на 1-ом ярусе) позволяют заменять в дедуктивных секвенциях a на b прямо, т.е. по Кантору без привлечения каких-либо средств.

Таким образом, (двухъярусное секвенциальное) исчисление M является доказуемо полной и доказуемо непротиворечивой формализацией канторовской теории множеств. Этот результат получен непосредственно по построению исчисления M .

5 Заключение

В данной работе рассматривается новая, *ступенчатая*, (наряду с традиционной аристотелевской аксиоматической) формализация знаний, разработанная в Московской математической школе Колмогорова–Маркова.

Ступенчатая формализация по Колмогорову–Маркову в работе строится теоретико-множественно в виде одного, но *двухъярусного* не формульного, а секвенциального исчисления КЧГ (Кантора–Чёрча–Генцена), охватывающего доказуемо непротиворечивым образом всю канторовскую теоретико-множественную математику в её целостности.

КЧГ строится не аксиоматически формульно (что представляется невозможным, например, в силу парадокса Рассела 1902 г.), а ступенчато двухъярусно секвенциально по Колмогорову–Маркову и Генцену *без потери информации* (на основе неразрешимой Ламбда-конверсии (λ -конверсии) Чёрча, см. [5–11]).

– Первый ярус задаёт неограниченное теоретико-множественное свёртывание Кантора по Карри и Чёрчу в алгоритмической (вычислительной) форме доказуемо неразрешимого, комбинаторно полного (Ламбда-полного) бестипового, например, секвенциального нелогического исчисления Ламбда-конверсии Чёрча (и это принципиально ново);

– Второй ярус задаёт известную классическую логику (предикатов 1-го порядка), но в секвенциальной (без постулируемого правила логического сечения) форме Генцена;

– Связь между ярусами обеспечивают правила Ламбда-сечения $*\lambda$ и $\lambda*$, введённые в 1970 г. автором и названные *канторовскими*.

Ограничение на правило сечения: в КЧГ нет постулируемого логического правила сечения (представляющего транзитивность выводимости естественных языков), но есть два правила Ламбда-сечения. Ограничение вытекает из фундаментальных логических результатов Генцена и связи, устанавливаемой с помощью двух правил Ламбда-сечения между алгоритмической и логической частями двухъярусного секвенциального КЧГ.

Для КЧГ (теоретико-множественно) формулируется и доказывается (также в целом по Генцену) теорема о допустимости правила логического сечения *cut*.

Причём используемые в теории семантика и синтаксис вводятся, построения и конструкции даются (проводятся) по одному алгоритмическому бестиповому неразрешимому абсолютно (то

есть без логики) непротиворечивому исчислению Ламбда-конверсии Чёрча, образующему первый ярус секвенциальных систем. На основе чего вводятся и понимаются секвенциально (по Генцену, без постулируемого правила логического сечения, но с двумя правилами Ламбда-сечения) все логические, математические и компьютерные символы (операторы). Формулируется и доказывается (в целом по Генцену) теорема о допустимости правила логического сечения.

Существенной особенностью и новизной всех предлагаемых конструкций является их *непротиворечивость* как по построению, так и доказуемая непротиворечивость, в частности, и относительно оператора отрицания. При этом все построения и доказательства проводятся секвенциально обычными теоретико-множественными школьными методами и средствами.

Далее в фигурные скобки заключён материал, являющийся расширением настоящей работы, уточняющим её некоторые детали, понятные, по мнению автора, всем изучавшим логику предикатов 1-го порядка. Кроме правил $\ast\lambda\ast$, в доказательствах предложений используются длины выводов, данных по их условиям.

{Теорема Cut (о сечении) и доказательство как её следствие непротиворечивости (относительно отрицания) теории КЧГ (Кантора–Чёрча–Генцена)}

Формулировка Теоремы Cut

Если в КЧГ выводимы секвенции $(\Delta \Rightarrow \Lambda, A)$ и $(A, \Gamma \Rightarrow \Theta)$, то в КЧГ существует вывод секвенции $(\Delta, \Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta)$, где A есть М-формула; $\Delta, \Gamma, \Lambda, \Theta$ суть наборы М-формул.

Доказательство Теоремы Cut непосредственно следует из леммы о смешении в КЧГ, по формулировке и доказательству являющейся обобщением генценовской леммы о смешении в логике предикатов 1-го порядка.

Формулировка генценовской леммы о смешении в КЧГ

Если в КЧГ выводимы секвенции $\Delta \Rightarrow \Lambda$ и $\Gamma \Rightarrow \Theta$, то в КЧГ существует вывод секвенции $(\Delta, \Gamma[A] \Rightarrow \Lambda[A], \Theta)$, где A есть М-формула; $\Delta, \Gamma[A], \Lambda[A], \Theta$ суть наборы М-формул, причём из наборов $\Gamma[A]$ и $\Lambda[A]$ вычеркнуты все вхождения обов, конвертирующихся в A .

Доказательство леммы о смешении проводится аналогично (хотя и значительно проще, особенно благодаря правилам $\ast\lambda\ast$) тому, как оно осуществлено автором для предшествующих его систем, опубликованных подробно в 1979 и 1983 годах в его работах «Формальная арифметика в системе λ -конверсии с логическими операторами» (стр. 299–314) [2] и «Об одной арифметически непротиворечивой λ -теории» (стр. 385–416) [3], представленных в журнал «Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik», первая – А.А. Марковым и А.Г. Драгалиным, вторая – А.Н. Колмогоровым.

Доказательство непротиворечивости КЧГ относительно отрицания

Предположим, что КЧГ противоречива. Тогда по определению в КЧГ выводимы, в частности, секвенции $\Rightarrow B$ и $\Rightarrow (\neg B)$ для некоторой М-формулы B . Из секвенции $\Rightarrow B$ по правилу $\ast\neg$ следует секвенция $(\neg B) \Rightarrow \otimes$, где $\otimes$ – пустой набор. Применив к выводам секвенций $\Rightarrow (\neg B)$ и $(\neg B) \Rightarrow \otimes$ Теорему Cut, получим в КЧГ вывод “пустой” секвенции $\otimes \Rightarrow \otimes$, что невозможно – поскольку постулаты исчисления КЧГ не кончаются “пустыми” дедуктивными секвенциями.

Поэтому теория КЧГ доказуемо непротиворечива относительно отрицания, что и требовалось доказать.}

6 Благодарности

Благодарю Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку моей научной работы, грант 07-07-00416.

Литература

- [1] Генцен Г. Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., Наука, 1967, с. 9–76.
- [2] Кузичев А.С. Формальная арифметика в системе λ -конверсии с логическими операторами // *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1979, Bd. 25, H. 4, S. 299–314.
- [3] Кузичев А.С. Об одной арифметически непротиворечивой λ -теории // *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1983, Bd. 29, H. 5, S. 385–416.
- [4] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., Наука, 1984, 320 с.
- [5] Кузичев А.С. Вариант формализации канторовской теории множеств // *Доклады Академии наук*, 1999, т. 369, № 6, с. 740–742.
- [6] Кузичев А.С. Решение проблемы Гильберта по Колмогорову // *Доклады Академии наук*, 2000, т. 371, № 3, с. 303–306.
- [7] Kuzichev A.S. Proof of consistency of foundations of mathematics // *Abstracts of XXV International Congress of Mathematicians*, Madrid, 2006. European Mathematical Society Press, 2006, pp. 4–5.
- [8] Кузичев А.С. Из истории оснований современной математики // Сб. «Проблемы историко-научных исследований в математике и математическом образовании. Международная научная конференция. Пермь, 7-9 сентября 2007 г.». Пермь, ПГПУ, 2007, с. 72–79.
- [9] Кузичев А.С. Методы доказательства непротиворечивости по Гильберту и Колмогорову // *Труды пятых Колмогоровских чтений*. Ярославль, изд-во ЯГПУ, 2007, с. 9–18.
- [10] Кузичев А.С. Расширение среды вычислений информационных систем // *Аппликативные вычислительные системы: Труды конференции по аппликативным вычислительным системам (АВС'2008)*, Москва, 29-30 апреля 2008 г. /Под редакцией В.Э. Вольфенгагена. М, «ЮрИнфоР-МГУ», 2008, с. 153–190.
- [11] Кузичев А.С. Секвенциальные генценовские построения без правила логического сечения // *Философия математики: актуальные проблемы. Материалы Второй международной научной конференции*. М., МАКС Пресс, 2009, с. 95-98.