Оптимальное планирование, вып. 10 (1968), 61-68.

УДК 512.25/.26+519.3:330.115

В.Г.ТИТОВ

ПРОСТЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСТАВЩИКЕ

В практике производственного планирования часто приходится заранее составлять план хозяйственной деятельности предприятия (цеха, участка), обеспечивающий нормальный производственный процесс на данном предприятии. Этот план не может быть составлен обычными методами планирования так, чтобы предусмотреть все неувязки, которые возникнут при выполнении определенного объема работ. Поэтому в план включаются некоторые факторы производства в количестве, значительно превосходящем действительные потребности завода. Это увеличивает затраты, связанные с осуществлением того или иного производственного процесса.

Рассмотрим одну из таких задач, которая требует построения некоторого плана хозяйственной деятельности на определенный период - задачу о поставщике, причем будем полагать, что функцию поставщика осуществляет само предприятие, на котором рассматривается данный производственный процесс.

Постановка задачи

Пусть некоторый производственный процесс разбит на n периодов. Для нормального осуществления этого производственного процесса перед каждым периодом делается заявка на a_i (i =1,2,..., n) единиц оборудования соответствующего ви-

да, которое должно быть поставлено с наступлением i -го периода. Покупка единицы оборудования соответствует затратам в С единиц. Это оборудование, отработав один срок (период),поступает в ремонт. Пусть q - стоимость срочного ремонта единицы оборудования, который продолжается k периодов, d - стоимость нормального ремонта, который продолжается h периодов. Ясно, что $C>q>d$, а $h>$ К. Ставится задача, как должны планироваться закупки и ремонт оборудования, чтобы не сорвался производственный процесс и издержки при этом были бы минимальными ?

Математическая модель задачи

Пусть x_i - количество единиц оборудования,закупаемое для работы в i - й период. Обозначим через y_i и z_i количества единиц оборудования, отправляемых к концу i -го периода в срочный и нормальный ремонт соответственно. Пусть S_i -остаток использованного оборудования на i -й период,зафиксированный после того, как y_i+z_i единиц оборудования отправлено в ремонт. Ясно, что в первые (К + I) периоды

$$x_i = a_i \qquad (i = 1,2,\dots K + 1).$$

Далее, когда начнет поступать оборудование, бывшее в срочном ремонте, то потребности в оборудовании будут удовлетворяться вновь приобретенным и прибывшим из срочного ремонта, т.е.

$$x_i+y_{i-k-1}=a_i \qquad (i = K + 2,\ K + 3,\ \dots h + 1).$$

Через (h + I) период начнет поступать оборудование из нормального ремонта, тогда можно записать:

$$x_i+y_{i-k-1}+z_{i-h-1}=a_i \qquad (i = h + 2,\dots, n).$$

Количество оборудования, используемого на i -ом периоде , складывается из оборудования, отправленного к концу этого периода,и изменения (по сравнению с предыдущим периодом)в остатке изношенного оборудования S_i-S_{i-1} , а именно:

$$y_i+z_i+S_i-S_{i-1}=a_i \qquad (i = 1,2,\dots, n).$$

Общие затраты на оборудование можно представить следующей линейной формой:

$$L(X,Y,Z)=C\sum_{i=1}^{n}x_i+q\sum_{i=1}^{n-k-1}y_i+d\sum_{i=1}^{n-h-1}z_i .$$

Мы пришли к задаче линейного программирования.

Минимизировать $L(X, Y, Z)$

при условиях:

1. $x_i + y_{i-k-1} = a_i$ $\quad (i = K+2, \ldots, h+1)$;
2. $x_i + y_{i-k-1} + z_{i-h-1} = a_i$ $\quad (i = h+2, \ldots, n)$;
3. $y_i + z_i + S_i - S_{i-1} = a_i$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$;
4. $x_i \geq 0,\ y_i \geq 0,\ z_i \geq 0,\ S_i \geq 0$ (целые числа).

Данная задача содержит $4n - (2K + h + 3)$ переменных и $2n - K - 1$ условий.

Другое решение задачи о поставщике

Рассмотрим условия задачи более подробно. Очень большое значение имеет тот факт, что коэффициенты линейной формы C, q, d постоянны при соответствующих переменных x, y, z. Далее, форма записи условий задачи очень проста. Все это позволяет получить решение данной задачи значительно проще решения её как задачи линейного программирования.

Пусть b_i – количество оборудования, которое в i-й период можно получить из срочного и нормального ремонтов. Ясно, что $b_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, K+1$), кроме того, $b_i \leq a_i$, ($i = K+2, \ldots, n$), так как b_i не должно превышать спрос на оборудование в i-й период. При $i = K+2, \ldots, h+1$ b_i будет определяться количеством того оборудования, которое может вернуться к i-ому периоду из срочного ремонта. При $i = h+2, \ldots, n$ b_i будет определяться количеством оборудования, которое может вернуться из нормального и срочного ремонта к i-ому периоду.

Таким образом, решение данной задачи можно записать так:

$$x_i = a_i - b_i \qquad (i = k+2, \ldots, n).$$

Остановимся на определении значений b_i, $i = k+2, \ldots, h+1$.

$b_{k+2} = y_1^{k+2}$, где $y_1^{k+2} \leq a_1$, y_1^{k+2} – это количество оборудования, которое можно отправить в срочный ремонт из первого периода, а к $(K+2)$ периоду оно вернется. Далее, мож –

но записать

$$b_j = \sum_{m=1}^{j-k-1} y_m^j, \quad y_i^j \le a_i - \sum_{l=i+k+1}^{j-1} y_i^l,$$

$$j = k+2, \dots, h+1, \quad i = 1, 2, \dots, j-k-1,$$

где обозначению y_i^j соответствует количество оборудования, которое отправляется из i -го периода в срочный ремонт на j-м -шаге решения задачи и приходит из ремонта к j - ому периоду.

При $j = h+2, \dots, n$

$$b_j = \sum_{i=1}^{j-h-1} z_i^j + \sum_{i=j-h}^{j-k-1} y_i^j,$$

причем z_i^j, y_i^j удовлетворяют следующим неравенствам:

$$z_i^j \le a_i - \sum_{l=i+h+1}^{j-1} z_i^l - \sum_{l=i+k+1}^{j-1} y_i^l, \quad i = 1, 2, \dots, n-h-1$$

$$z_i^j = 0, \quad i = n-h, \dots, n.$$

$$y_i^j \le a_i - \sum_{l=i+h+1}^{j} z_i^l = \sum_{l=i+k+1}^{j-1} y_i^l, \quad i = 1, 2, \dots, n-k-1,$$

$$y_i^j = 0, \quad i = n-k, \dots, n,$$

где обозначению z_i^j соответствует количество оборудования, которое отправляется из i -го периода в нормальный ремонт на j-м -ом шаге решения задачи и возвращается из ремонта к j - ому периоду.

Таким образом, в любой период времени i мы можем сказать,сколько единиц оборудования нужно закупить,а остальные потребности будут удовлетворены отремонтированным оборудованием, если для предыдущих периодов (от I-го до (i - I)) известен план ремонта и закупок оборудования.

Пусть нам известно решение задачи на (i - I) период. Рассмотрим i - й ($i > h$ + 2) период. Потребность в оборудовании - a_i . Исходя из вышенаписанных соотношений, следует, что нужно поступить следующим образом: проверяем значения $S_R^j = a_R - \sum_{l=R+h+1}^{j} z_R^l - \sum_{l=R+k+1}^{j} y_R^l, j=i-1$, R = I,2,... i - h - I, т.е. остатки не отправленного в ремонт оборудования по

периодам (начиная с первого) после i - I шага решения. Если $S_k^j \neq 0$, то, начиная с первого периода, отправляем оборудование в нормальный ремонт.

Если наберем неотправленного оборудования в количестве a_i, то задача решена на i период, т.е. из периодов I,2, ..., $i-h$ - I оборудование посылается в нормальный ремонт и оно вернется к i -му периоду. Если требуемого количества не наберется, то проверяем значения S_k^j при $j = i-$ - I, $k = i-h$, $i-h+1$, ..., i - К - I. Из периодов ($i-h$),..., (i - К - I) мы можем послать оборудование только в срочный ремонт, причем начинаем посылать неотремонтированное оборудование сначала из (i - К - I) периода, затем из (i - К - 2) периода, и так до ($i-h$) периода, пока не наберем нужного количества оборудования.

Начинать посылать оборудование в срочный ремонт из ($i-h$) -го периода не имеет смысла, так как на i + I шаге решения из ($i-h$) -го периода мы можем послать оборудование уже в нормальный ремонт.

Если спрос a_i может быть удовлетворен отремонтированным оборудованием, то задача на i -й период решена, если нет, то остается единственное - закупить недостающее оборудование, а именно: $x_i = a_i - в_i$.

Таким образом, каждый последующий шаг решения задачи использует предыдущие, а за (n - к - I) шагов задача будет решена. Значения y_i, z_i, S_i легко определить:

$$z_i = \sum_{j=i+h+1}^{n} z_i^j, \quad y_i = \sum_{j=i+K+1}^{n} y_i^j; \quad S_i = a_i - z_i - y_i .$$

Теперь подойдем к данному алгоритму решения задачи с точки зрения оптимальности. Алгоритм "посылает" в нормальный ремонт максимально возможное количество оборудования. Но иногда будет выгоднее купить новую единицу оборудования, чем посылать её в срочный ремонт. Рассмотрим такой вопрос. При каких значениях С, q, α вышеизложенный алгоритм не дает оптимального решения ?

Будем рассматривать задачу с ($h-k$) = I. Положим, что на j = К + 2 шаге решения мы отправим единицу оборудования из первого периода не в срочный ремонт, а в нормальный. Тогда в (К + 2) периоде нам придется закупить единицу оборудования. Далее, так как из первого периода мы послали единицу оборудова -

ния в нормальный ремонт, то она придет к $(h+2)$ периоду отремонтированной, поэтому на $h+2$ шаге решения мы посылаем не в срочный ремонт единицу оборудования из $(h+2-(K+1))=(h-K+1)$ периода, а в нормальный. Эта единица придет из ремонта к $(h-K+1+h+1)=(2h-K+2)=(h+3)$ периоду, что позволит послать единицу оборудования из $(2h-K+2)-(K+1)=(2h-2K+1)$ периода не в срочный ремонт, а в нормальный и т.д. Таким образом, можно построить определенное количество циклов замены срочного ремонта нормальным. Каждый такой цикл уменьшает издержки на $q-d$ единиц. Количество таких циклов p легко определить:

$$p=\frac{n-h-1}{h-k}=n-h-1.$$

Следовательно, все p циклов уменьшат издержки на $p(q-d)$ единиц, а если учесть, что последний цикл неполный и уменьшает издержки на q единиц (т.к. нам не приходится посылать одну единицу оборудования в срочный ремонт из $(n-K-1)$ периода, потому что для n-го периода одна единица оборудования будет получена из нормального ремонта в результате замены срочного ремонта, а посылать из $(n-K-1)$ периода оборудование в нормальный ремонт уже не имеет смысла, так как оно не вернется из ремонта к n периоду), то общее уменьшение издержек может быть равно $q+p(q-d)$ только за счет того, что мы дополнительно закупили одну единицу оборудования на $K+2$ шаге решения.

Следовательно, если $c-q-p(q-d)\geq 0$, то вышеизложенный алгоритм решения задачи о поставщике даст оптимальное решение, если $h-K=1$.

Рассмотрим задачу с $h-k>1$. Для таких задач в общем виде нельзя написать формулу нахождения значения p, хотя можно сказать, что $p\leq n-h-1$.

Для любой конкретной задачи значение p легко определить. Пусть мы решили задачу вышеизложенным алгоритмом. Начинаем строить циклы замены срочного ремонта нормальным, причем нас интересует максимально возможное количество таких циклов.

В первом цикле мы закупаем единицу оборудования на $K+2$ шаге решения, что позволяет нам послать единицу оборудования из первого периода не в срочный ремонт, а в нормальный. Эта единица оборудования возвращается из ремонта к $(h+2)$ пе -

риоду, что дает нам возможность получить второй цикл и не посылать в срочный ремонт единицу оборудования в одном из периодов от второго до $(h + 2) - (k + 1) = (h - k + 1)$, но ту единицу оборудования, которая посылалась в срочный ремонт (согласно решению задачи) при условии, что она вернется из ремонта к $(h + 2)$ периоду. Полагаем, что мы послали в срочный ремонт оборудование, которое предназначалось для $(h+ 2)$ периода, из нескольких периодов. Выбираем тот период, который ближе к первому. Это обеспечивает получение наибольшего количества циклов. Пусть мы можем выбрать второй период. Тогда из второго периода мы посылаем единицу оборудования в нормальный ремонт и она возвращается к $h + 3$ периоду. На этом второй цикл закончен.

Дальнейшее построение циклов аналогично нахождению второго цикла.

Когда значение P будет определено, смотрим, выполняется ли неравенство $c - q - P(q - d) \geq 0$.

Если неравенство справедливо, то мы имеем оптимальное решение задачи о поставщике.

Практически решение задачи о поставщике легко осуществить с помощью таблицы, которая будет содержать данные конкретной задачи и её решение.

Пример решения небольшой задачи.

Пусть $C = 15$, $q = 4$, $d = 2$, $K = 1$, $h = 4$, $n = 10$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	22	18	15	10	10	18	15	16	20	15
b_i	0	0	15_1	10_2	10_3	$7_1+10_4+1_3=18$	$8_2+7_5=15$	$4_3+12_6=16$	$15_7+5_6=20$	$12_8+3_5=15$
y_i	15^3	10^4	10^5+1^6	10^6	7^7	12^8+9^9+5	15^9	12^{10}	0	0
z_i	7^6	8^7	4^8	0	3^{10}	0	0	0	0	0
S_i	0	0	0	0	0	1	0	4	20	15
x_i	22	18	0	0	0	0	0	0	0	0

Как видим, таблица представляет решение данной задачи со всеми необходимыми вычислениями. Так, для получения значения b_6 мы направили 7 единиц оборудования в нормальный ремонт в пер-

вом периоде, 10 единиц отправили в срочный ремонт в четвертом периоде и одну единицу-в третьем периоде. А значение, например, y_3 складывается из 10 единиц оборудования, предназначенных для пятого периода и одной единицы для шестого периода.

Для данной задачи $P = 2$. Таким образом, имеем следующее неравенство $15-4 - (4-2)\ 2 > 0$, т.е. $7 > 0$.

Литература

1. Р.Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования, М., "Наука", 1965, гл.3, § 30-38.

2. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования, М., "Советское радио", 1964, стр.167-168.

Поступила в редакцию
20.III.1967.