УДК 51.330.115

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НЕЙМАНА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.А. КРАСС

В данной работе рассматривается обобщенная модель Неймана $\mathfrak{N}$, задаваемая двумя линейными операторами, действующими из банахова пространства $\mathcal{U}$ в банахово пространство X. Как и в работе [4], для исследования такой модели развивается метод параметризации, позволяющий рассмотреть вместо данной другую модель, также неймановского типа, эквивалентную в некотором смысле данной. Эта новая модель определяется уже одним оператором R, действующим из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$, что позволяет во многих случаях облегчить исследования, связанные с моделью $\mathfrak{N}$ [4].

В отличие от работы [4] в данной статье метод параметризации развивается для бесконечномерного случая; кроме того, описывается весь класс операторов R, определяющих эквивалентную модель (в работе [4] был построен только один конкретный представитель этого класса); само понятие эквивалентности здесь формулируется более точно.

I. Пусть $\mathcal{U}$ и X -два банаховых пространства, A и B -два линейных оператора,[*)] действующих из $\mathcal{U}$ на X.

Так как вопрос о построении модели, эквивалентной данной, сводится к вопросу о построении непрерывного оператора R, действующего из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$ и удовлетворяющего равенству

$$A\circ R=B, \tag{1}$$

или линейного оператора Q, такого, что

$$B\circ Q=A, \tag{2}$$

то вначале мы исследуем возможность построения таких операторов. (Множество операторов R, действующих из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$ и удовлетворяющих (1), будем обозначать через $\mathcal{R}$, а множество операторов Q, удовлетворяющих (2)- через $\mathcal{Q}$).

*) Все операторы, рассматриваемые в данной работе, являются аддитивными.

В свою очередь, исследование класса $\mathcal{R}$ сводится к изучению факторизации пространства $\mathcal{U}$ по L_A (ядру оператора A) и построению квазиобратного к A оператора.

Следуя [I], будем говорить, что линейное множество M является дополнительным к L_A, если оно удовлетворяет равенствам:

$$M+L_A=\mathcal{U} \quad , \qquad M\cap L_A=\{0\}. \qquad (3)$$

Очевидно, существует взаимно однозначное соответствие между фактор-пространством $\mathcal{U}/L_A$ и M, и, следовательно, сужение оператора A на M есть взаимно однозначный оператор.

Как известно [I], дополнительные множества существуют. Множество всех дополнительных к L_A множеств будем обозначать через $\mathcal{M}_A$. Тогда, учитывая вышесказанное, при фиксированном дополнительном множестве $M\in\mathcal{M}_A$ пространство $\mathcal{U}/L_A$ может быть превращено в линейное нормированное пространство с нормой, индуцированной из $\mathcal{U}$ (такое пространство будем обозначать символом $\mathcal{U}/\!/L_A$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что пространство V разлагается дополнительным множеством $M\in\mathcal{M}_A$ по подпространству L_A, если множество M является подпространством (то есть замкнуто).

В этом случае $\mathcal{U}$ представимо в виде топологической суммы M и L_A.

Известны [I], [2], различные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы пространство $\mathcal{U}$ разлагалось множеством $M\in\mathcal{M}_A$. Например, для этого необходимо и достаточно [2] существование $m>0$ такого, что

$$\|Au\|\geq m\|u\| \qquad \text{для всех} \qquad u\in M.$$

Вопрос о том, разлагает ли множество $M\in\mathcal{M}_A$ пространство $\mathcal{U}$, может быть исследован в терминах операторов проектирования $\mathcal{U}$ на L_A [I], а также в терминах реализации факторизации (на чём мы немного остановимся).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть элемент $v\in\mathcal{U}/L_A$, рассматриваемый как класс элементов из $\mathcal{U}$, обозначается через P_v. Реализация факторизации $\mathcal{U}$ по L_A есть оператор φ, действующий из $\mathcal{U}/L_A$ в $\mathcal{U}$ и такой, что $\varphi(v)\in P_v$.

Нетрудно видеть, что $\varphi(\mathcal{U}/L_A)\in\mathcal{M}_A$ и, наоборот, если дано дополнительное множество $M\in\mathcal{M}_A$, то по нему может быть однозначно построена реализация φ. Тогда отыскание условий, при которых множество $M\in\mathcal{M}_A$ разлагает $\mathcal{U}$ по подпространству L_A, сводится к отысканию условий, при которых существует реализация φ такая, что множество $\varphi(\mathcal{U}/\!/L_A)$ замкнуто.

Заметим, что если $M \in \mathcal{M}_A$ разлагает U, то топология в $U/\!/L_A$ эквивалентна канонической фактор-топологии, вводимой в U/L_A [2]

Пусть $M \in \mathcal{M}_A$ – фиксированное дополнительное множество к L_A. Рассмотрим пространство $M \times L_A = \{\xi = (u_1, u_2)/u_1 \in M, u_2 \in L_A\}$, норму в котором введём так: $\|\xi\| = \|u_1\| + \|u_2\|$. Тогда можно определить оператор Φ_A из U в $M \times L_A$ следующим образом. Пусть $u \in U$; тогда $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in M$, $u_2 \in L_A$; определим:

$$\Phi_A(u) = (u_1, u_2) \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что Φ_A – взаимно однозначный, поэтому существует Φ_A^{-1}, который является непрерывным (ввиду того, что $\|u\| \le \|u_1\| + \|u_2\|$). Более того, если U разлагается множеством $M \in \mathcal{M}_A$, то $M \times L_A$ – банахово пространство, и потому сам Φ_A также непрерывен.

Пусть теперь A_1 есть фиксированный изоморфизм из L_A на L_A.x) Рассмотрим банахово пространство $X \times L_A = \{z = (x, \tilde{x})/x \in X, \tilde{x} \in L_A\}$, где $\|z\| = \|x\| + \|\tilde{x}\|$. Определим взаимно однозначный оператор $\tilde{A}$ из $M \times L_A$ в $X \times L_A$ формулой:

$$z = (x, \tilde{x}) = \tilde{A}_1 \xi = \tilde{A}_1(u_1, u_2) = (Au_1, A_1 u_2) \tag{5}$$

и взаимно однозначный оператор $\tilde{A}$ из U в $X \times L_A$ соотношением:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \circ \Phi_A \tag{6}$$

Относительно оператора $\tilde{A}^{-1}$ верна

ЛЕММА I. 1) Если $(x, \tilde{x}) \in X \times L_A$, то $A \circ \tilde{A}^{-1}(x, \tilde{x}) = x$
2) Оператор непрерывен тогда и только тогда, когда M замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\tilde{A}^{-1}(x, \tilde{x}) = (A_1 \circ \Phi_A)^{-1}(x, \tilde{x}) = \Phi_A^{-1} \circ \tilde{A}_1^{-1}(x, \tilde{x}) = \Phi_A^{-1}(u_1, u_2)$, где $u_1 \in M$, $u_2 \in L_A$. И по определению оператора $\tilde{A}_1$ имеем $Au = Au_1 = x$. 2) Необходимость. Рассмотрим подпространство $X \times \{0\}$ пространства $X \times L_A$; так как $\tilde{A}$ – изоморфизм, то $\tilde{A}^{-1}(X \times \{0\}) = M$ есть подпространство пространства U. Достаточность. Так как M разлагает U, то оператор Φ_A есть изоморфизм, $\tilde{A}_1$ – также изоморфизм, поэтому и $\tilde{A}$ – изоморфизм.

Имея фиксированное дополнительное множество, построим с помощью оператора B оператор $\tilde{B}$, действующий из U в $X \times L_A$. Пусть $u \in U$; тогда $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in M$, $u_2 \in L_A$. Определим:

$$\tilde{B}u = (Bu, u_2) \in X \times L_A \tag{7}$$

Имея оператор $\tilde{B}$ и фиксированный изоморфизм A_1 из L_A на L_A, рассмотрим оператор R, действующий из U в U:

$$R = \tilde{A}^{-1} \circ \tilde{B}$$

---

x) Оператор, действующий из банахова пространства U на U ... изоморфизм, если взаимно однозначный и непрерывный в обе стороны.

относительно которого верна

ТЕОРЕМА 1. 1) $A\circ R=B$, то есть $R\in\mathcal{R}$. 2) Для непрерывности R достаточно, чтобы M было замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $A\circ Ru=A\circ\widetilde{A}^{-1}\circ\widetilde{B}u=A\circ\widetilde{A}^{-1}(Bu,u_2)=Bu$, ввиду леммы 1. 2) Так как M замкнуто, то отображение $u\to u_2$ непрерывно, где $u\in\mathcal{U}$, $u_2\in L_A$, следовательно, оператор $\widetilde{B}$ - непрерывен. С другой стороны, из леммы 1 вытекает, что $\widetilde{A}^{-1}$ также непрерывен, поэтому и $R=\widetilde{A}^{-1}\circ\widetilde{B}$ -непрерывен.

Аналогично, имея фиксированное множество N, дополнительное к L_B (ядру оператора B), и изоморфизм B_1 из L_B на L_B, можно построить оператор $Q\in q$, непрерывный, если N замкнуто.

Заканчивая этот пункт, рассмотрим условие существования обратимого оператора $R\in\mathcal{R}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ядра L_B и L_A операторов B и A изоморфны; тогда существует обратимый оператор $R\in\mathcal{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{A}$ -оператор из $\mathcal{U}$ на $X\times L_A$, определяемый равенствами (5), (6), а $\widetilde{B}$ -оператор из $\mathcal{U}$ на $X\times L_B$, определяемый аналогичными соотношениями.

По условию существует изоморфизм C из L_B на L_A. Определим взаимно однозначный линейный оператор $\widetilde{C}$, действующий из $X\times L_B$ на $X\times L_A$, формулой:

$$\widetilde{C}z=\widetilde{C}(x,\widetilde{x})=(x,C\widetilde{x})=z_1,$$

где $z=(x,\widetilde{x})\in X\times L_B$, а $z_1\in X\times L_A$.

Тогда оператор $R=\widetilde{A}^{-1}\circ\widetilde{C}\circ\widetilde{B}$ - взаимно однозначный, линейный, действующий из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$, причем

$$A\circ Ru=A\circ\widetilde{A}^{-1}\circ\widetilde{C}\circ\widetilde{B}u=A\circ\widetilde{A}^{-1}\circ\widetilde{C}(Bu,B_1u_1)=A\circ\widetilde{A}^{-1}(Bu,C\circ B_1u_2)=Bu,$$

ввиду теоремы 1; здесь $u=u_1+u_2$; где $u_1\in N$; $u_2\in L_B$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $R\in\mathcal{R}$ обратим, то R^{-1} удовлетворяет условию $R^{-1}\in q$, что проверяется непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если дополнительно к условиям теоремы множества M и N разлагают пространство $\mathcal{U}$, то теоремы 1,2 позволяют построить линейный обратимый оператор $R\in\mathcal{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В конечномерном случае условие теоремы означает, что ранги матриц, отвечающие операторам A, B, равны.

2. В этом пункте мы построим модель, эквивалентную данной. Введем сначала некоторые определения.

Пусть X -банахово пространство, полуупорядоченное выпуклым замкнутым конусом K_X. Обобщенная модель производства $\mathfrak{M}$ задается выпуклым конусом $Z\subset K_X\times K_X$. Элемент $x\in K_X$ называется состоянием модели, $(x,y)\in Z$ -процессом; сам конус Z -кону-

сом технологий.

Пусть $\Xi=\{\xi\}$ –совокупность всех выпуклых подмножеств $\xi\subset K_X$. Определим оператор $\mathcal{O}\mathcal{L}$ (технологическое отображение), действующий из K_X в Ξ так:

$$\mathcal{O}\mathcal{L}x=\{y/(x,y)\in Z\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конечная последовательность $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$ состояний называется (x_0,T)– траекторией,если $x_{t+1}\in\mathcal{O}\mathcal{L}x_t$ для $t=0,1,\ldots,T-1$. По аналогии определяется и (x_0,∞) –траектория (иногда мы будем говорить, что $\{x_t\}_{t=0}^{t=\infty}$ есть траектория на конусом Z).

В данной работе изучается важный частный случай модели $\mathfrak{M}$, а именно обобщенная модель Неймана $\mathcal{N}$ (см. [3]), технологический конус которой задается следующим образом.

Пусть $\mathcal{U}$ –банахово пространство, полуупорядоченное конусом K_u, A и B– два оператора, действующие из $\mathcal{U}$ на X; тогда технологический конус Z

$$Z(A,B)=\{z=(x,y)\in K_X\times K_X/x=Au,\ y=Bu,\ u\in K_u\}.$$

Вектор $u\in K_u$,определяющий процесс (Au,Bu) (то есть являющийся его параметром) ,называется вектором интенсивностей.

Наряду с конусом $Z(A,B)$ рассмотрим еще конус $\mathcal{L}\subset K_u\times K_u$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Конусы $\mathcal{L}\subset K_u\times K_u$ и $Z(A,B)\subset K_X\times K_X$ называются A – эквивалентными,если для любой (x_0,T)–траектории $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$ над конусом $Z(A,B)$ существует (u_0,T) – траектория $\{u_t\}_{t=0}^{t=T}$ над конусом $\mathcal{L}$ такая, что $x_t=Au_t$ $(t=0,\ldots,T)$. И наоборот, для любой (u_0,T) –траектории $\{u_t\}_{t=0}^{t=T}$ над $\mathcal{L}$ найдется (x_0,T) –траектория $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$ над $Z(A,B)$,такая, что $x_t=Au_t$ $(t=0,1,\ldots,T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Конусы $\mathcal{L}\subset K_u\times K_u$ и $Z(A,B)\subset K_X\times K_X$ называются B –эквивалентными,если для любой (x_0,T) –траектории $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$ над $Z(A,B)$ существует (u_0,T) –траектория $\{u_t\}_{t=0}^{t=T}$ над $\mathcal{L}$ такая, что $x_t=Bu_{T-t}$ $(t=0,1,\ldots,T)$,и, наоборот, для любой (u_0,T) –траектории $\{u_t\}_{t=0}^{t=T}$ над конусом $\mathcal{L}$ найдется (x_0,T) –траектория $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$,такая, что $x_t=Bu_{T-t}$ $(t=0,1,\ldots,T)$.

Таким образом, если (u_0,T) –траектория над конусом $\mathcal{L}$, который A – эквивалентен $Z(A,B)$, определяет траекторию,выходящую из состояния $x_0=Au_0$, то эта же траектория над конусом, B –эквивалентным конусу $Z(A,B)$,определяет траекторию, приходящую в состояние $y_0=Bu_0$.

Модели, определяемые A (или B)-эквивалентными конусами, называются эквивалентными данной.

Пусть $R\in\mathcal{R}$; рассмотрим конус

$$\mathcal{Z}(R)=\{\xi=(u,v)\in K_u\times K_u / v=Au+z\,;\, z\in L_A\}\in K_u\times K_u .$$

ТЕОРЕМА 3. (теорема о параметризации). Конусы $\mathcal{Z}(R)$ и $Z(A,B)$ являются A -эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть последовательность $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$ есть (x_0,T) -траектория. Согласно определению 5, имеем $(x_t,x_{t+1})\in Z(A,B)$ $(t=0,1,\ldots,T-1)$, то есть существует последовательность $\{u_t\}_{t=0}^{t=T-1}$ векторов такая, что $x_t=Au_t$; $x_{t+1}=Bu_t$. Покажем, что последовательность $\{u_t\}_{t=0}^{t=T}$, где $u_T=Ru_{T-1}$ -искомая (u_0,T)-траектория.

Так как $(x_t,x_{t+1})\in Z(A,B)$, то $x_{t+1}=Bu_t=A(Ru_t)$, согласно определению R . С другой стороны, $(x_{t+1},x_{t+2})\in Z(A,B)$, поэтому $x_{t+1}=Au_{t+1}$,отсюда имеем $A(Ru_t)=Au_{t+1}$, то есть $u_{t+1}=Ru_t+z_t$, где $Az_t=0$, или $(u_t,u_{t+1})\in\mathcal{Z}(R)$.

Выполнение соотношения $x_t=Au_t$ для $t=0,1,\ldots,T-1$ следует непосредственно из построения последовательности $\{u_t\}_{t=0}^{t=T-1}$, а для $t=T$ это следует из равенства $x_T=Bu_{T-1}=ARu_{T-1}=Au_T$.

2) Пусть последовательность $\{u_t\}_{t=0}^{t=T}$ есть (u_0,T) - траектория, это означает, что $u_{t+1}=Ru_t+z_t$, где $Az_t=0$ для $t=0,1,\ldots,T-1$. Тогда если $x_t=Au_t$, а $x_{t+1}=Au_{t+1}$, то $x_{t+1}=Au_{t+1}=A(Ru_t+z_t)=Bu_t$,то есть $(x_t,x_{t+1})\in Z(A,B)$. Отсюда $\{x_t\}_{t=0}^{t=T}$ есть (x_0,T) -траектория над конусом $Z(A,B)$.

СЛЕДСТВИЕ .Конус $\mathcal{Z}(R)$ ненулевой.

Совершенно аналогично, рассматривая оператор $Q\in\mathcal{Q}$, можно доказать ,что конус

$$\mathcal{Z}(Q)=\{\xi=(u,v)\in K_u\times K_u / u=Qv+z\,;\, z\in L_B\}.$$

B эквивалентен конусу $Z(A,B)$.

Теперь становится понятен смысл следствия к теореме 2, ибо конус $\mathcal{Z}(Q)$ определяет траектории над конусом $Z(A,B)$, направленные по времени в другую сторону (обращает модель $\mathcal{N}$).

Рассмотрим некоторые свойства эквивалентных конусов.

Большую роль в теории макроэкономических моделей играет исследование траекторий, доставляющих на T -м шаге экстремум функционалу $f\in K_x^*$. Пусть функционал $\varphi\in K_u^*$ таков, что $\varphi=A^*f$, тогда

$$\sup_{x\in\mathcal{N}^T x_0} f(x)=\sup_{v\in A^T v_0} f(Bv)=\sup_{v\in A^{T-1} v_0} f(A\circ Rv)=\sup_{v\in A^{T-1} v_0} A^*f(Rv)=\sup_{v\in A^T v_0}\varphi(v),$$

где $x_0=Av_0$, а A есть технологическое, определяемое конусом $\mathcal{Z}(R)$. Мы видим, что задача о поиске (x_0, T) -траектории над конусом $\mathcal{Z}(A,B)$, доставляющей экстремум функционалу f на шаге T, переходит в задачу о поиске (u_0, T)-траектории над $\mathcal{Z}(R)$, доставляющей экстремум функционалу $\varphi=A^*f$ на шаге T.

Кроме того, из работы [4] следует, что при дополнительном ограничении $A(K_u)\subset K_x$ любое состояние равновесия над конусом $\mathcal{Z}(A,B)$ индуцирует состояние равновесия над конусом $\mathcal{Z}(R)$.

Отметим еще одно важное свойство эквивалентных представлений модели $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть процесс $(\bar{x},\lambda\bar{x})\in\mathcal{Z}(A,B)$, причем $\bar{x}=A\bar{v}$. Тогда существует оператор $R\in\mathcal{R}$ такой, что

$$R\bar{v}=\lambda\bar{v}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M\in\mathcal{M}_A$ - множество, дополнительное к L_A; тогда $\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2$, где $\bar{v}_1\in M$, $\bar{v}_2\in L_A$.

Пусть A_1 -изоморфизм из L_A на L_A, удовлетворяющий условию:

$$A_1\bar{v}_2=\frac{1}{\lambda}\bar{v}_2,$$

например $A_1=\frac{1}{\lambda}E$, где E - тождественный оператор.

Определим с помощью M и A_1 оператор $\widehat{A}$ из U в $X\times L_A$ формулами (5), (6). Тогда если $R=\widehat{A}^{-1}\circ\widehat{B}$, то

$$R\bar{v}=\widehat{A}^{-1}\circ\widehat{B}\bar{v}=\widehat{A}^{-1}(B\bar{v},\bar{v}_2)=\lambda\widehat{A}^{-1}(A\bar{v},A_1\bar{v}_2)=\lambda(\bar{v}_1+\bar{v}_2)=\lambda\bar{v},$$

ибо по условию теоремы $B\bar{v}=\lambda\bar{v}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если состояние равновесия над конусом $\mathcal{Z}(A,B)$ таково, что равновесный процесс имеет вид $(\bar{x},\lambda\bar{x})$, где $\bar{x}=A\bar{v}$, то путем надлежащего выбора $R\in\mathcal{R}$ можно добиться того, что соответствующее состояние равновесия над конусом $\mathcal{Z}(R)$ имело процесс $(\bar{v},\lambda\bar{v})$ в качестве равновесного, причем $\bar{v}$ будет собственным вектором оператора R, отвечающим числу λ.

Литература

1. Н.Бурбаки. Топологические векторные пространства, М.Физматгиз, 1959.

2. Л.В.Канторович и Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.

3. А.М.Рубинов. Бесконечномерные модели производства (в печати, Сибирский математический журнал).

4. И.А.Красс. Некоторые вопросы теории модели Неймана (в печати, сборник "Вопросы кибернетики" Москва).

Поступила в редакцию
20 мая 1968 г.