УДК 512.25/26+ 519.3 :330.115

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В.В. ТИТОВ

Будем рассматривать основную задачу оптимального производственного планирования.

Найти
$$\min(\max) L(x) \tag{1}$$
при условиях:
$$\sum_{i=1}^{M} t_{ij} x_i \le T_j \quad (j=1,2,\dots,n), \tag{2}$$

$$\underline{b}_i \le x_i \le \overline{b}_i \quad (i=1,2,\dots,M), \tag{3}$$

$$x_i \geqslant 0, \tag{4}$$

где t_{ij} - нормативные затраты времени на обработку i-го изделия на оборудовании j-го вида;

T_j - допустимая загрузка оборудования j-го вида;

$\underline{b}_i$ - обязательный выпуск i-го изделия в данном плановом периоде;

$\overline{b}_i$ - максимально допустимое количество выпуска i-го изделия;

x_i - выпуск изделия " i " в данном периоде.

В настоящее время для данной задачи нет единого критерия оптимальности, который удовлетворял бы всем условиям планирования производства. В данной заметке делается попытка найти некоторый единый критерий оптимальности.

Основой для построения линейной формы $L(x)$, соответствующей единому критерию оптимальности, послужили следующие рассуждения. Каждое промышленное предприятие должно работать с максимальным использованием тех производственных мощностей, которыми располагает предприятие. Результатом такой эффективной работы предприятия будет максимальный экономический эффект

производства.

Как определить этот экономический эффект ? Обычно экономический эффект нового способа производства или новой производственной программы рассчитывается для уже существующего способа производства и запланированной на данный плановый период производственной программы. Пусть такая программа $B=(b_i)$, где b_i –выпуск (плановый) i-го ($=1,2,\dots,M$) изделия , имеется. Этой производственной программе соответствуют следующие технико-экономические показатели: $\sum_{i=1}^{M} Ц_i b_i$ –товарный выпуск продукции, где $Ц_i$ – оптовая цена изделия " i "; c_i – себестоимость изделия " i " ; $c_{пост.}$ – условно-постоянные накладные расходы; β – затраты на рубль товарной продукции ; $T_j^o=\sum_{i=1}^{M} t_{ij} b_i$ – загрузка оборудования вида j $(j=1,2,\dots,n)$.

Будем сравнивать некоторый новый производственный план $X=(x_i)$ с программой $B=(b_i)$. Какой экономический эффект даст замена одного производственного плана другим ? Во-первых, изменение выпуска товарной продукции определит экономию (убыток) на условно-постоянных затратах, а именно :

$$Э_1=C_{пост.}\left(\frac{\sum_{i=1}^{M} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{M} c_i b_i}-1\right). \qquad (5)$$

Если положить $\alpha=\frac{1}{\sum c_i b_i}$, а $c_i'=\alpha\cdot C_{пост.}\cdot c_i$, то формула (5) перепишется так :

$$Э_1=\sum_{i=1}^{M} c_i' x_i - Q_1 , \qquad (6)$$

где $Q_1=\alpha C_{пост.}\sum_{i=1}^{M} c_i b_i$.

Далее, увеличение (уменьшение) загрузки оборудования приведет к снижению (увеличению) себестоимости продукции (в результате изменения доли амортизационных отчислений производственного оборудования на единицу продукции) на величину

$$Э_2=\sum_{j=1}^{n} A_j\left(\frac{\sum_{i=1}^{M} t_{ij} x_i}{T_j^o}-1\right), \qquad (7)$$

где A_j – величина амортизации j -й группы оборудования , $\sum_{i=1}^{M} t_{ij} x_i$ – загрузка j – й группы оборудования по новому плану производства $X=(x_i)$.

Пусть $y_{M+j}=T_j-\sum_{i=1}^{M} t_{ij} x_i$, $y_{M+j}^o=T_j-\sum_{i=1}^{M} t_{ij} b_i$, $\gamma_j=\frac{1}{T_j^o}$, тогда формулу (7) заменим такой:

$$Э_2=\sum_{j=1}^{n} A_j \gamma_j\left(y_{M+j}^o-y_{M+j}\right). \qquad (8)$$

Положим $\delta_{j,M}=A_j\gamma_j$ и $Q_2=\sum_{j=1}^{n}A_j\gamma_j Y^{\circ}_{M+j}$. Формула (8) перепишется так:

$$Э_2=Q_2-\sum_{j=1}^{n}\delta_{M+j}Y_{M+j}\,. \qquad (9)$$

Снова возвращаемся к плану $B=(b_i)$. Он предусматривал получение прибыли в размере $\sum_{i=1}^{M}(Ц_i-c_i)b_i$. Новый план $X=(x_i)$ обеспечивает получение прибыли в размере $\sum_{i=1}^{M}(Ц_i-c_i)x_i$, причем сверхплановая прибыль будет определена так:

$$Э_3=\sum_{i=1}^{M}(\beta Ц_i-c_i)x_i\,. \qquad (10)$$

Если перед новой производственной программой ставилось условие обязательного выполнения плана по себестоимости, что соответствует выполнению соотношения

$$\sum_{i=1}^{M}(\beta Ц_i-c_i)x_i=0\,, \qquad (11)$$

то $Э_3$ будет равно нулю.

Таким образом, значение

$$Э_1+Э_2+Э_3=\sum_{i=1}^{M}(\beta Ц_i+c_i'-c_i)x_i-\sum_{j=1}^{n}\delta_{M+j}Y_{M+j}+Q_2-Q_1 \qquad (12)$$

будет соответствовать тому экономическому эффекту, который может быть получен при реализации некоторого плана производства $X=(x_i)$ относительно другой программы выпуска $B=(b_i)$.

Отсюда мы можем записать следующую задачу линейного программирования.

Максимизировать

$$L(x)=\sum_{i=1}^{M}(\beta Ц_i+c_i'-c_i)x_i-\sum_{j=1}^{n}\delta_{M+j}Y_{M+j}+Q_2-Q_1 \qquad (13)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{M}t_{ij}x_i+Y_{M+j}=T_j\,, \qquad (14)$$

$$\underline{b}_i\le x_i\le\overline{b}_i\,, \qquad (15)$$

$$x_i\ge 0\,. \qquad (16)$$

Линейный функционал (13) представляет совокупность трех линейных форм (6), (9), (10), которые можно было бы использовать в задаче (1)–(4) при решении её, соответственно, на максимум выпуска товарной продукции ($L_1(x)=\sum_{i=1}^{M}Ц_i x_i\to max$), на минимум недогрузки производственного оборудования с учётом его стоимости ($L_2(x)=\sum_{j=1}^{n}\delta_{M+j}Y_{M+j}\to min$), на мак-

симум прибыли ($L_1(x)=\sum_{i=1}^{M}(u_i-c_i)x_i \to max$).

Если в задаче (13)-(16) представлены не все группы производственного оборудования, а только лимитирующие, то в этом случае нет полной информации об амортизационных отчислениях. Однако учесть загрузку оборудования по всем группам можно, а следовательно, может быть определена и величина экономии за счет лучшего использования всего парка оборудования предприятия.

Пусть предприятие имеет S групп оборудования, которое занято в основном производстве. Каждой группе оборудования поставим в соответствие индекс $s=1,2,\dots,S$ так, чтобы первые n индексов соответствовали тем лимитирующим группам оборудования, которые уже представлены в модели оптимального планирования производства.

Согласно (7), по остальным группам оборудования экономический эффект при выполнении производственного плана $X=(x_i)$ составит следующую величину:

$$Э_4=\sum_{s=n+1}^{S}A_s\left(\frac{\sum_{i=1}^{M}t_{is}x_i}{\sum_{i=1}^{M}t_{is}b_i}-1\right). \tag{17}$$

В линейном функционале (13) этот экономический эффект может быть отражен следующим образом.

Пусть ψ_s^{ℓ} - доля загрузки s - й группы оборудования изделием " ℓ " при его выпуске в размере b_ℓ , т.е.

$$\psi_s^{\ell}=\frac{t_{\ell s}b_\ell}{\sum_{i=1}^{M}t_{is}b_i} \qquad (\ell=1,2,\dots,M;\ s=n+1,\dots,S).$$

Производственный план X предусматривает выпуск изделия " ℓ " в количестве x_ℓ . В этом случае экономия (убыток, если $x_\ell<b_\ell$) только по одному ℓ - му изделию на амортизационных отчислениях по s - й группе оборудования составит

$$A_s\left(\frac{x_\ell}{b_\ell}\psi_s^{\ell}-\psi_s^{\ell}\right), \tag{18}$$

а по всем изделиям и на всех группах оборудования экономический эффект составит следующую величину:

$$\sum_{s=n+1}^{S}A_s\sum_{\ell=1}^{M}\left(\frac{x_\ell}{b_\ell}\psi_s^{\ell}-\psi_s^{\ell}\right)=\sum_{s=n+1}^{S}A_s\left(\sum_{\ell=1}^{M}x_\ell\frac{\psi_s^{\ell}}{b_\ell}-\sum_{\ell=1}^{M}\psi_s^{\ell}\right)=$$
$$=\sum_{s=n+1}^{S}A_s\left(\sum_{\ell=1}^{M}x_\ell\frac{\psi_s^{\ell}}{b_\ell}-1\right). \tag{19}$$

Покажем, что расчеты по формулам (19) и (17) приведут к одному и тому же результату.

$$\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s\left(\sum_{\ell=1}^{M} x_\ell \frac{\psi_s^\ell}{b_\ell}-1\right)=\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s\left(\sum_{\ell=1}^{M} x_\ell \frac{t_{\ell s} b_\ell}{b_\ell \sum_{i=1}^{M} t_{is} b_i}-1\right)=$$

$$=\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s\left(\frac{\sum_{\ell=1}^{M} t_{\ell s} x_\ell}{\sum_{i=1}^{M} t_{is} b_i}-1\right),$$

,что и требовалось доказать.

Формулу (I9) перепишем так:

$$\sum_{\ell=1}^{M}\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s\left(x_\ell \frac{\psi_s^\ell}{b_\ell}-\psi_s^\ell\right)=\sum_{\ell=1}^{M}\left(x_\ell \sum_{s=n+1}^{\ell} A_s \frac{\psi_s^\ell}{b_\ell}-\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s \psi_s^\ell\right)=$$

$$=\sum_{\ell=1}^{M}\left(x_\ell \sum_{s=n+1}^{\ell} A_s \frac{t_{\ell s} b_\ell}{b_\ell \sum_{i=1}^{M} t_{is} b_i}-\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s \frac{t_{\ell s} b_\ell}{\sum_{i=1}^{M} t_{is} b_i}\right)=$$

$$=\sum_{\ell=1}^{M} x_\ell \sum_{s=n+1}^{\ell} A_s \frac{t_{\ell s}}{\sum_{i=1}^{M} t_{is} b_i}-\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s \frac{\sum_{\ell=1}^{M} t_{\ell s} b_\ell}{\sum_{i=1}^{M} t_{is} b_i}=$$

$$=\sum_{\ell=1}^{M} c''_\ell x_\ell - A, \qquad (20)$$

где $c''_\ell=\sum_{s=n+1}^{\ell}\frac{A_s t_{\ell s}}{T_j^0}$; $A=\sum_{s=n+1}^{\ell} A_s$.

Теперь изменяем линейный функционал (I3) следующим образом:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{M}\left(\beta u_i + c'_i + c''_i - c_i\right)x_i-\sum_{j=1}^{n}\delta_{r+j}\, y_{r+j}+Q_2-Q_1-A. \qquad (21)$$

Линейный функционал (2I) позволяет определить полный экономический эффект от реализации оптимального (и не оптимального) плана производства $X=(x_i)$ по сравнению с другой программой выпуска товарной продукции.

Поступила в редакцию
28.УI.1968 г.