УДК 519.95

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ТАККЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

В.И.ХОХЛЮК

В работе [I] Таккер сводит обобщенную задачу коммивояжера к некоторой целочисленной задаче линейного программирования. Однако в изложении имеются небольшие неточности. Ниже дается полное доказательство эквивалентности этих задач и приводятся результаты вычислительного эксперимента.

I. Обобщенная задача коммивояжера.

Пусть имеется $n+1$ пунктов $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Через d_{ij} будем обозначать расстояние (время, стоимость и т.п.) между пунктами P_i и P_j ($0 \le i \ne j \le n$). Бродячий торговец (коммивояжер), выезжая из пункта P_0, посещает не более чем p пунктов, побывав в каждом ровно один раз, и возвращается в пункт P_0. Такой объезд будем называть туром, обозначая его через $(\tau_1, \ldots, \tau_s; 1 \le s \le p)$, где $P_{\tau_1}, \ldots, P_{\tau_s}$ – последовательность пунктов, которые посещает коммивояжер в течение одного тура, исключая P_0.

Задача I. Выбрать маршрут, состоящий из нескольких туров (число t которых заранее не фиксируется), так, чтобы посетить все пункты $P_1, \ldots, P_n$ ровно по одному разу и при этом проехать наименьшее расстояние (если t зафиксировано, то должно быть $tp \ge n$).

При $t=1$ и $p \ge n$ эта задача превращается в обычную задачу о бродячем торговце.

Задача 2. Найти минимум линейной функции $L(x) = \sum_{0 \le i \ne j \le n} d_{ij} x_{ij}$ при условиях:

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i=1, \ldots, n); \tag{I}$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \ne j}}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j=1, \ldots, n); \tag{2}$$

$$u_i - u_j + p x_{ij} \le p-1 \quad (1 \le i \ne j \le n), \qquad (3)$$

где переменные x_{ij} ($0 \le i \ne j \le n$) принимают неотрицательные целые значения (дальше будет показано, что на переменные u_i $(i=1,\dots,n)$ можно наложить требование неотрицательности и целочисленности). Если t зафиксировано, то необходимо добавить ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} = t. \qquad (4)$$

Неравенства, связывающие переменные u_i, служат для исключения недопустимых маршрутов.

Установим связь между допустимыми решениями задачи 2 и допустимыми маршрутами задачи I. Бродячий торговец выезжает из пункта P_i в пункт P_j (звено $P_i P_j$ принадлежит некоторому туру) тогда и только тогда, когда $x_{ij} = 1$.

ТЕОРЕМА. Задачи I и 2 эквивалентны, т.е. оптимальное решение задачи 2 определяет оптимальный маршрут задачи I и, наоборот, оптимальный маршрут задачи I определяет оптимальное решение задачи 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При указанном выше соответствии между переменными x_{ij} и звеньями $P_i P_j$ значение целевой функции задачи 2 выражает длину всего маршрута. Таким образом, достаточно показать, что допустимое решение (x, u) задачи 2 имеет значения переменных x_{ij}, определяющие допустимый маршрут задачи I и, наоборот, допустимый маршрут задачи I определяет значения переменных x_{ij}, которые с соответствующими значениями переменных u_i удовлетворяют условиям (I) - (4).

Рассмотрим допустимое решение (x, u) задачи 2. Число возвращений в пункт P_0 задается величиной $\sum_{i=1}^{n} x_{i0}$. Треоования неотрицательности и целочисленности переменных x_{ij} вместе с ограничениями (I), (2) выражают тот факт, что каждый пункт, отличный от P_0, посещается ровно один раз.

Пусть какая-нибудь переменная $x_{\tau_0 \tau_1} = 1$. Покажем, что звено $P_{\tau_0} P_{\tau_1}$ принадлежит некоторому туру, то есть замкнутому маршруту, проходящему через пункт P_0. Рассмотрим случай, когда τ_0 и τ_1 не равны нулю. Тогда существует единственное τ_2 такое, что $x_{\tau_1 \tau_2} = 1$. Если $\tau_2 \ne 0$, то найдется единственное τ_3 такое, что $x_{\tau_2 \tau_3} = 1$. .

Докажем, что построенная последовательность τ_0, τ_1, τ_2, τ_3, ... должна закончиться нулем. Предположим, что это не так. Тогда найдется такое k ($k > 1$), что $\tau_0 = \tau_k$. Так как $\tau_i \ne 0$, то имеем $u_{\tau_i} - u_{\tau_{i+1}} + p x_{\tau_i \tau_{i+1}} \le p-1$,

откуда $\quad u_{r_i} - u_{r_{i+1}} \leq -1.$

Суммируя эти неравенства для $i=0,1,\ldots,k-1$, мы получаем $u_{r_0}-u_{r_k}=0\leq -k$, что приводит к противоречию.

Аналогично показывается, что существует последовательность $r_0, r_{-1}, r_{-2}, \ldots$, начинающаяся с нуля. Если $r_0=0$ или $r_1=0$, то рассуждение только упрощается.

Теперь покажем, что любой тур содержит не более p пунктов. Если существует тур ($r_1, r_2, \ldots, r_p, r_{p+1}, \ldots$), для которого $x_{0r_1}=x_{r_1r_2}=\cdots=x_{r_pr_{p+1}}=\cdots=1$, то, суммируя неравенства, соответствующие его звеньям $P_{r_1} P_{r_2}, \ldots, P_{r_p} P_{r_{p+1}}$, мы получаем $u_{r_1}-u_{r_{p+1}}\leq -p$, откуда $u_{r_{p+1}}-u_{r_1}\geq p$, что противоречит неравенству $u_{r_{p+1}}-u_{r_1}\leq p-1$, вытекающему из соотношения

$$u_{r_{p+1}}-u_{r_1}+px_{r_{p+1},r_1}\leq p-1.$$

Пусть имеется допустимый маршрут задачи I. Тогда $x_{ij}=1$, если звено $P_i P_j$ принадлежит некоторому туру. Положим $x_{ij}=0$, если звено $P_i P_j$ не входит в маршрут, $u_i=\ell$, если P_i есть ℓ - й по порядку пункт в каком-нибудь туре $(1\leq \ell \leq s \leq p)$. Тогда соотношение $u_i-u_j+px_{ij}\leq p-1$ при $x_{ij}=1$ превращается в равенство, а при $x_{ij}=0$ оно справедливо, так как в силу определения u_i всегда выполняется $u_i-u_j\leq p-1$ $(1\leq i\neq j\leq n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество допустимых решений задачи 2 не является ограниченным. Если $(x, u_1, \ldots, u_n)$ - какое-нибудь допустимое решение, то решение $(x, u_1+c, \ldots, u_n+c)$ при любом постоянном c также является допустимым. При работе некоторых алгоритмов целочисленного программирования часто желательно иметь ограниченную область. Этого легко добиться, наложив на переменные u_i ($i=1,\ldots,n$) требование неотрицательности и целочисленности и вводя при этом, например, ограничение $\sum_{i=1}^{n} u_i \leq np$. Исключая переменные x_{i0} и x_{0j} $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n)$, мы получаем полностью целочисленную задачу линейного программирования, содержащую (n^2+n+2) ограничений и n^2 переменных.

2. Предварительные результаты вычислительного эксперимента.

Был решен ряд обычных задач о бродячем торговце с использованием программы, реализующей алгоритм I Гомори с модификацией Мартина. Кроме того, В.В.Титовым [2] для этих задач вручную было найдено приближенное решение, которое во всех случаях совпало с точным. В отдельной таблице приведены параметры наблюдения за счетом, характеризующие точный алгоритм.

Таблица

B_1	B_2	B_3	B_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
I	3	8	4	I	34	5	I6	I6	55	5	I	0,26
2	4	I4	9	I	78	6	6,3	7	II0	8	2	0,7
3	5	22	I6	I	I4I	I8	I4,5	I5	342	22	2	4,4
4	4	I4	9	I	78	I3	29	29	I28	I3	I	I,2
5	5	22	I6	I	I42	27	30	32	300	30	2	5,7
6	6	32	25	I	225	24	I4,4	I8	626	46	3	I6,5
7	6	32	25	I	226	35	56,2	63	753	80	5	32,4
8	I0	92	8I	I	762	84	I40,8	I46	553I	I55	4	376
9	I0	92	8I	0	758	56	24	-	5555	I00	4	258

<u>Обозначения</u>. B_1 -номер задачи; B_2- число пунктов; B_3-число ограничений ; B_4- число переменных; C_1 - вид останова (если $C_1=1$ -целочисленная задача решена; если $C_1=0$ -вынужденный останов при заданном числе итераций); C_2 - число ненулевых элементов в исходной симплексной таблице; C_3 - число итераций (преобразований с центральным элементом) для решения задачи линейного программирования; C_4 -оптимальное значение целевой функции задачи линейного программирования; C_5 - оптимальное значение целевой функции для целочисленной задачи; C_6 - максимальное число ненулевых элементов в симплексной таблице по всем итерациям; C_7 - число итераций (преобразований с центральным элементом)для решения целочисленном задачи; C_8 -число решенных задач линейного программирования; C_9 - время счета на "БЭСМ-6", сек.

Небольшой вычислительный эксперимент показывает, что целочисленная формулировка Таккера для обобщенной задачи коммивояжера является удобной для решения методом отсечения, так как при этом вводится небольшое число сечений, а вычислительные трудности (большое число итераций и ненулевых элементов в симплексной таблице) относятся только к способу решения задач линейного программирования.

Литература

1. C.E.Miller,A.W.Tucker and Zemlin R.A.Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. J.Assoc. Comput.Machinery,1960,7,№4,326-329.

2.В.В.Титов. Об одном алгоритме решения задачи о коммивояжере.- Оптимальное планирование. Новосибирск,1967, № 7, стр. I07-III.

Поступила в редакцию
20 мая 1968 г.