Оптимальное планирование.

1968г. Выпуск II

УДК 51.330.115

МЕТОД РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ НЕЙМАНА

В. И. ШМЫРЁВ

В работе излагаются итеративный метод, позволяющий находить экономический и технологический темпы роста, а также соответствующие им векторы интенсивностей и цен в модели Неймана. Показывается, что для регулярных моделей метод сходится со скоростью геометрической прогрессии. Исследуемый метод является некоторым развитием применительно к данному классу задач подхода, предложенного в [4] .

§ 1. Постановка задачи

Модель Неймана задается парой матриц:

$$A=\|a_{ij}\|,\ B=\|b_{ij}\| \qquad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$$

с неотрицательными элементами.

Технологическим темпом роста называется максимальное число $\bar{\alpha}$, при котором существует вектор интенсивностей $\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m)$, удовлетворяющий условиям:

$$1)\ \bar{x}B \geq \bar{\alpha}\,\bar{x}A\ ,\quad 2)\ \bar{x} > 0\ ^{*)}.$$

Экономическим темпом роста называется минимальное число $\bar{\beta}$, при котором существует вектор цен $\bar{\pi}=(\bar{\pi}_1,\bar{\pi}_2,\dots,\bar{\pi}_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$1)\ B\bar{\pi} \leq \bar{\beta}A\bar{\pi}\ ,\quad 2)\ \bar{\pi} > 0.$$

При этом векторы $\bar{x}$ и $\bar{\pi}$ называются соответственно опти -

*) Соотношение $\bar{x} > 0$ означает, что $\bar{x}_i \geq 0\ (i=1,2,\dots,m),\ \bar{x} \neq 0$.

мальным вектором интенсивностей и оптимальным вектором цен. В предположении, что

$$\max_{1\le j\le n} a_{ij}>0\ , i=1,\dots,m, \qquad (1)$$
$$\max_{1\le i\le m} b_{ij}>0\ , j=1,\dots,n\ ,$$

оптимальные векторы интенсивностей и цен существуют, причем

$$\bar\beta\le\bar\alpha\ . \qquad (2)$$

Необходимые и достаточные условия того, чтобы в (2) достигалось равенство, сформулированы в [3] . Ввиду сложности формулировки, мы не приводим здесь эти условия. Отметим лишь, что это имеет место, в частности, для регулярных моделей Неймана (см. [2]), характеризующихся тем свойством,что соотношение $B\bar x>0$ выполнено для каждого оптимального вектора интенсивностей $\bar x$.

Состояние равновесия определяется вектором цен равновесия $\pi\ge0$, вектором интенсивностей равновесия $x\ge0$ и темпом роста равновесия $\alpha>0$, которые удовлетворяют условиям:

$$(B-\alpha A)\pi\le0;\ x(B-\alpha A)\ge0;\ xA\pi>0.$$

На экономической интерпретации сформулированных задач останавливаться не будем.

§ 2. Описание метода

Рассмотрим более подробно задачу нахождения технологического темпа роста $\bar\alpha$ и оптимального вектора интенсивностей $\bar x$.

Ввиду однородности условий I) и 2), можно считать,что $\bar x$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{m} x_i=1\ .$$

Таким образом,рассматриваемая задача эквивалентна следующей задаче математического программирования:

Задача I. Определить вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ и максимальное число α , удовлетворяющее условиям:

I) $\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}-\alpha a_{ij})x_i\ge0\ ,\ j=1,2,\dots,n;$

2) $\sum_{i=1}^{m}x_i=1\ ;$

3) $x_i\ge0\ ,\ i=1,2,\dots,m.$

С задачей I свяжем пару двойственных задач линейного программирования, зависящих от параметра λ .

Задача II. Определить вектор $u=(z, x_1, \dots, x_m)$, минимизирующий функцию $V(u)=z$ и удовлетворяющий условиям:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad z+\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}-\lambda a_{ij})x_i \geq 0,\ j=1,2,\dots,n;\\
&2)\quad \sum_{i=1}^{m}x_i=1; \qquad\qquad (3)\\
&3)\quad x_i \geq 0,\ i=1,2,\dots,m.
\end{aligned}
$$

Задача III. Определить вектор $P=(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$, максимизирующий функцию $W(P)=\pi_0$ и удовлетворяющий условиям:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \pi_0+\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}-\lambda a_{ij})\pi_j \leq 0,\ i=1,2,\dots,m;\\
&2)\quad \sum_{j=1}^{n}\pi_j=1; \qquad\qquad (4)\\
&3)\quad \pi_j \geq 0,\ j=1,2,\dots,n.
\end{aligned}
$$

При фиксированном λ векторы u, удовлетворяющие условиям 1) - 3) задачи II, образуют некоторое множество $U(\lambda)$ допустимых векторов этой задачи.

Введем в рассмотрение функцию

$$L(\lambda)=\min_{u\in U(\lambda)} V(u)$$

Функция L определена на всей вещественной оси. Действительно, при любом λ допустимым будет, например, вектор u с компонентами:

$$x_{i_0}=1,\ x_i=0\ (i\neq i_0),\ z=-\min_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}-\lambda a_{ij})x_i,$$

где $1\leq i_0\leq m$. Следовательно, $U(\lambda)\neq\emptyset$. Кроме того, для любого $u\in U(\lambda)$ имеем:

$$
\begin{aligned}
V(u)=z &\geq -\min_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}-\lambda a_{ij})x_i \geq\\
&\geq -\min_j \max_i (b_{ij}-\lambda a_{ij})\sum_{i=1}^{m}x_i=-\min_j \max_i (b_{ij}-\lambda a_{ij}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, при любом λ множество допустимых векторов задачи II непусто, и минимизируемая функция ограничена снизу. Из общей теории линейного программирования следует, что при любом λ задачи II и III разрешимы.

Пусть u^1 - решение задачи II при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda_2<\lambda_1$. Из условий 1) - 3) задачи II легко видеть, что $u^1\in U(\lambda_2)$. Тогда

$$L(\lambda_2)\leqslant V(U^1)=L(\lambda_1).$$

Следовательно, L - неубывающая функция, и так как $L(\bar{\alpha})=L(\bar{\beta})=0$, то

$$L(\lambda)<0,\ \lambda\in(-\infty,\bar{\beta});\ L(\lambda)=0,\ \lambda\in[\bar{\beta},\bar{\alpha}];\ L(\lambda)>0,\ \lambda\in(\bar{\alpha},+\infty).$$

Покажем, например, последнее. Если $\lambda_0>\bar{\alpha}$, то, ввиду монотонности функции L,

$$L(\lambda_0)\geqslant L(\bar{\alpha})=0.$$

Равенство, однако, невозможно. Действительно, пусть u - решение задачи II при $\lambda=\lambda_0$ и $L(\lambda_0)=0$. Тогда $x=(x_1,\dots,x_m)$ и $\alpha=\lambda_0$ удовлетворяют условиям I) - 3) задачи I и, следовательно, $\lambda_0\leqslant\bar{\alpha}$, что неверно.

Предлагаемый метод нахождения $\bar{\alpha}$ состоит в построении последовательности λ_K такой, что

$$L(\lambda_K)>0,\quad \lim_{K\to\infty}L(\lambda_K)=0.$$

Тогда $\lim\limits_{K\to\infty}\lambda_K=\bar{\alpha}$. Аналогично, для того, чтобы $\lim\limits_{K\to\infty}\lambda_K=\bar{\beta}$ достаточно чтобы последовательность λ_K обладала свойством:

если $\quad L(\lambda_K)<0,\ \lim\limits_{K\to\infty}L(\lambda_K)=0,$

тогда $\lim\limits_{K\to\infty}\lambda_K=\bar{\beta}$.

ЛЕММА I. Если для некоторого вектора $\pi=(\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_n)$ и числа β выполнены условия:

$$\pi\geqslant 0,\ B\pi\leqslant\beta A\pi,\ \beta=\max_{(\pi,a^i)\neq 0}\frac{(\pi,b^i)}{(\pi,a^i)}<\bar{\alpha},$$

то $(\pi,a^i)=0$, если $\bar{x}_i>0$. Здесь

$$a^i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}),$$
$$b^i=(b_{i1},b_{i2},\dots,b_{in}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\bar{\alpha}$ и $\bar{x}$ имеем

$$\bar{\alpha}\sum_{i=1}^{m}a^i\bar{x}_i\leqslant\sum_{i=1}^{m}b^i\bar{x}_i.$$

Умножая приведенное неравенство скалярно на π, получаем:

$$\bar{\alpha}\left(\pi,\sum_{i=1}^{m}a^i\bar{x}_i\right)\leqslant\left(\pi,\sum_{i=1}^{m}b^i\bar{x}_i\right)\leqslant\beta\left(\pi,\sum_{i=1}^{m}a^i\bar{x}_i\right),$$

то есть

$$(\bar{\alpha}-\beta)\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i(\pi,a^i)\leqslant 0,$$

откуда и следует требуемое.

Перейдем к подробному изложению метода.

Для начала процесса необходимо иметь некоторое $\lambda_0 \geq \bar{\alpha}$. Можно, в частности, принять

$$\lambda_0 = \max_i \frac{(\pi, b^i)}{(\pi, a^i)},$$

при $\pi > 0$. Действительно, если бы было $\lambda_0 < \bar{\alpha}$, то в силу леммы I и условий (I) вектор π должен был бы иметь, по крайней мере, одну нулевую компоненту.

Опишем k-ый шаг процесса. Имея некоторое $\lambda_k > \bar{\alpha}$, находим оптимальные векторы:

$$u^k = (z^k, x_1^k, \ldots, x_m^k) \qquad \text{и} \qquad p^k = (\pi_0^k, \pi_1^k, \ldots, \pi_m^k)$$

задач II и III при $\lambda = \lambda_k$, то есть

$$z + \sum_{i=1}^{m} (b_{ij} - \lambda_k a_{ij}) x_i^k \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3'}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^k = 1,$$

$$x_i^k \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\pi_0^k + \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} - \lambda_k a_{ij}) \pi_j^k \leq 0, \tag{4'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j^k = 1, \quad \pi_j^k \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\pi_0^k = z^k. \tag{5}$$

Если $L(\lambda_k) = z^k = 0$, то $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)$ является оптимальным вектором интенсивностей и $\bar{\alpha} = \lambda_k$.

Если $L(\lambda_k) > 0$, то из условий ($4'$) следует

$$(\pi^k, a^i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

где $\pi^k = (\pi_1^k, \pi_2^k, \ldots, \pi_n^k)$, и величину λ_{k+1} определяем следующим образом:

$$\lambda_{k+1} = \max_i \frac{(\pi^k, b^i)}{(\pi^k, a^i)}. \tag{7}$$

Относительно последовательностей λ^k и $x^k = (x_1^k, \ldots, x_m^k)$ справедлива

ТЕОРЕМА I. Последовательность λ_k монотонно убывает и $\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \bar{\alpha}$; любая сходящаяся подпоследовательность последовательности x^k сходится к оптимальному вектору ин-

т е н с и в н о с т е й .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4′) и (6) следует

$$\lambda_k = \max_i \frac{\pi_0^k + (\pi^k, b^i)}{(\pi^k, a^i)} \geq$$

$$\geq \min_i \frac{\pi_0^k}{(\pi^k, a^i)} + \max_i \frac{(\pi^k, b^i)}{(\pi^k, a^i)} \geq \min_i \frac{\pi_0^k}{(\pi^k, a^i)} + \lambda_{k+1} \quad ,$$

то есть

$$\lambda_k \geq \min_i \frac{\pi_0^k}{(\pi^k, a^i)} + \lambda_{k+1} \;, \tag{8}$$

что, ввиду (5) и (6), доказывает, что последовательность λ_k строго убывает. Кроме того,

$$\lambda_{k+1} \geq \bar{\alpha} \;, \tag{9}$$

ибо в противном случае из леммы I следует $(\pi^k, a^i) = 0$ для некоторого i, что противоречит (6). Таким образом, λ_k сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \hat{\alpha}$. Из сходимости λ_k, (8) и (5) следует

$$\lim_{k\to\infty} z^k = \lim_{k\to\infty} \pi_0^k = 0.$$

Пусть x^{k_ℓ} - некоторая сходящаяся подпоследовательность последовательности x^k (существование таких подпоследовательностей следует из условий (3′)) и $\lim\limits_{\ell\to\infty} x^{k_\ell} = \hat{x}$. Рассматривая соотношения (3′) лишь для индексов k_ℓ и переходя к пределу, получаем, что $\hat{x}$ и $\hat{\alpha}$ удовлетворяют условиям задачи I и, следовательно, $\hat{\alpha} \leq \bar{\alpha}$, что вместе с (9) дает

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \bar{\alpha} \;.$$

Попутно доказано и второе утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Л ю б а я с х о д я щ а я с я п о д п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь п о с л е д о в а т е л ь н о с т и π^k с х о д и т с я к н е к о т о р о м у в е к т о р у р а в н о в е с н ы х ц е н, с о о т в е т с т в у ю щ е м у с о с т о я н и ю р а в н о в е с и я с т е м п о м р о с т а $\bar{\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты изложения будем считать, что сходится сама последовательность π^k, и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \pi^k = \hat{\pi}$. Надо показать, что

$$(B - \bar{\alpha} A)\hat{\pi} \leq 0 \,,\ \hat{\pi} \geq 0, \tag{10}$$

и существует $\hat{x}$ такой, что

$$\hat{x}(B - \bar{\alpha} A) \geq 0 \,,\ \hat{x} \geq 0, \tag{11}$$

и

$$\hat{x} A \hat{\pi} > 0 \,. \tag{12}$$

Так как π^k удовлетворяет условиям (4′), то предельным переходом убеждаемся в справедливости соотношений (10).

Остается показать существование вектора $\hat{x}$, удовлетво -

ряющего соотношениям (II) и (I2). Предположим противное – такого $\hat{x}$ не существует, т.е. для любого $\hat{x}$, удовлетворяющего (II), оказывается $\hat{x}A\hat{x}=0$. Тогда из теоремы Фаркаша теории линейных неравенств (см.[5], стр. 16) следует существование вектора $q=(q_1,q_2,\dots,q_n)$, удовлетворяющего условиям:

$$(B-\bar{\lambda}A)q\leq -A\hat{\pi},\quad q\geq 0. \tag{I3}$$

Если $\hat{\pi}_j>0$, то для достаточно больших значений K $\pi_j^K>0$ и, следовательно,

$$\sum_i b_{ij}x_i^K-\lambda_K\sum_i a_{ij}x_i^K=-z^K<0,$$

то есть $\hat{\pi}$ обладает свойством: если $\hat{\pi}_j>0$, то окончательно

$$\sum_i b_{ij}x_i^K-\lambda_K\sum_i a_{ij}x_i^K=-z^K<0. \tag{I4}$$

Пусть $\hat{\pi}_{j_0}>0$. Тогда из (I4) имеем:

$$\sum_i a_{ij_0}x_i^{\prime}\ 0 \qquad \text{для достаточно больших } K,$$

то есть существует i_K такой, что $x_{i_K}^K>0$ и $a_{i_K j_0}>0$, а так как $\hat{\pi}_{j_0}>0$, то $(\hat{\pi},a^{i_K})>0$. Среди i_K некоторое i_0 повторяется бесконечно много раз. Таким образом, существует подпоследовательность K_ℓ, такая, что

$$x_{i_0}^{K_\ell}>0 \qquad \text{и} \qquad (\hat{\pi},a^{i_0})>0.$$

Будем считать, что последовательность K_ℓ такова, что

$$x_i^{K_\ell}>0,\ i\in\mathcal{J}_1,\ \ell=1,2,\dots,$$
$$x_i^{K_\ell}=0,\ i\in\mathcal{J}_2,\ \ell=1,2,\dots,$$

где $\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2=\mathcal{J}=\{1,2,\dots,m\}$. Этого можно достичь, выбирая надлежащим образом подпоследовательность из K_ℓ. Но для простоты будем считать, что уже K_ℓ обладает требуемым свойством.

Так как, ввиду (I) и (I0), $\hat{\pi}A\neq 0$, то $q\neq 0$. Пусть

$$\bar{q}=\frac{1}{\sum_{j=1} q_j}\,q.$$

Тогда (I3) можно переписать так:

$$(\bar{q},b^i-\bar{\lambda}a^i)\leq -\frac{1}{\sum_{j=1} q_j}(\hat{\pi},a^i),\ i\in\mathcal{J}. \tag{I5}$$

Если $i\in\mathcal{J}_1$, то $(\pi^{K_\ell},b^i-\lambda_{K_\ell}a^i)=-\pi_0^{K_\ell}$ и, следовательно, $(\hat{\pi},b^i-\bar{\lambda}a^i)=0$, так что из (I5) имеем $(\bar{q},b^i-\bar{\lambda}a^i)\leq(\hat{\pi},b^i-\bar{\lambda}a^i)$, $i\in\mathcal{J}_1$.

Если $(\hat{\pi},a^i)=0$, то отсюда следует справедливость и такого неравенства: $(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)\leq(\hat{\pi},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)$.

Если же $(\hat{\pi},a^i)>0$ (как, например, для $i=i_0$), то из (15) имеем $(\bar{q},b^i-\bar{\lambda}a^i)<0$,

так что $(\bar{q},b^i-\bar{\lambda}a^i)<(\hat{\pi},b^i-\bar{\lambda}a^i)$.

Но тогда для достаточно больших ℓ справедливо неравенство:

$$(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)<(\hat{\pi},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i).$$

Итак, для $i\in\mathcal{J}_1$ и достаточно больших значений ℓ имеем:

$$(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)\leq(\hat{\pi},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i) \quad ,\text{если} \quad (\hat{\pi},a^i)=0,$$

$$(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)<(\hat{\pi},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i) \quad ,\text{если} \quad (\hat{\pi},a^i)>0,$$

причём множество $\mathcal{J}_1'=\{i/i\in\mathcal{J}_1,(\hat{\pi},a^i)>0\}$ непусто, ибо $i_0\in\mathcal{J}_1'$.

Следовательно, для достаточно больших значений ℓ верно неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}=\sum_{i\in\mathcal{J}_1}(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}< \tag{16}$$

$$<\sum_{i\in\mathcal{J}_1}(\hat{\pi},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}=\sum_{i=1}^{m}(\hat{\pi},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}.$$

Рассмотрим правую часть этого неравенства. Из (14) следует

$$\sum_{i=1}^{m}(b^i-\lambda_{k_\ell}a^i,\hat{\pi})x_i^{k_\ell}=-z^{k_\ell}\sum_{j=1}^{n}\hat{\pi}_j=-z^{k_\ell}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) имеем

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}<-z^{k_\ell}. \tag{18}$$

Но из $q\geq0$ и условий (3') следует

$$\sum_{i=1}^{m}(q,b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}+z^{k_\ell}\sum_{j=1}^{n}q_j>0$$

или

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{q},b^i-\lambda_{k_\ell}a^i)x_i^{k_\ell}\geq-z^{k_\ell},$$

что противоречит (18). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает пример I § 3, если даже x^k сходится и $\bar{x}=\lim_{k\to\infty}x^k$, то, вообще говоря, $\bar{x}$ не является равновесным вектором интенсивностей.

Обратимся теперь к регулярным моделям Неймана.

ЛЕММА 2. *Если рассматриваемая модель Неймана регулярна, то существует такое $\Delta>0$, что окончательно*

$$\sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_i^k>\Delta, \quad j=1,2,\dots,n. \tag{19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий задачи I следует, что множество оптимальных векторов интенсивностей X ограниченное и замкнутое. Так как для регулярных моделей Неймана из $x\in X$ следует $Bx>0$, то, ввиду ограниченности и замкнутости X, существует $\Delta>0$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_i>\Delta, \quad x\in X, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Из теоремы I и условий (3′) следует $\lim\limits_{K\to\infty}\rho(x^K,X)=0$, что, как легко показать, достаточно, чтобы окончательно выполнялось (19). Лемма доказана.

Для $\bar{\alpha}$, кроме оценки сверху λ_K, на каждом шаге процесса можно получать некоторую оценку снизу:

$$\gamma_K=\min_{j\in J_1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij}x_i^K}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^K},$$

где $J_1=\{j/\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^K>0\}$. Ясно, что $x=x^K$ и $\alpha=\gamma_K$ удовлетворяют условиям задачи I и, следовательно, $\gamma_K\le\bar{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 3. Для регулярной модели Неймана $\lim\limits_{K\to\infty}\gamma_K=\bar{\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_K=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij_K}x_i^K}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij_K}x_i^K}$. Так как по лемме 2 для достаточно больших K имеем

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij_K}x_i^K>\Delta,$$

то окончательно выполняется неравенство:

$$\gamma_K\geqslant\frac{\Delta}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij_K}x_i^K},$$

откуда следует существование такого $\delta>0$, что для достаточно больших значений K имеем

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij_K}x_i^K>\delta.$$

Далее, так как

$$\sum_{i=1}^{m}(b_{ij_K}-\lambda_K a_{ij_K})x_i^K+z^K\geqslant0,$$

то

$$\lambda_K-\gamma_K\le\frac{z^K}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij_K}x_i^K}\le\frac{z^K}{\delta}. \tag{20}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\lambda_K-\frac{z^K}{\delta}\le\gamma_K\le\bar{\alpha},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример 2 § 3 показывает, что требование регулярности здесь существенно.

ТЕОРЕМА 4. Для регулярной модели Неймана последовательности λ_K и γ_K сходятся не медленнее геометрической прогрессии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как π^k удовлетворяет условию:

$\pi_j^k = 0$, если $\sum_i (b_{ij} - \lambda_k a_{ij}) x_i^k > -z^k = \min_j \sum_i (b_{ij} - \lambda_k a_{ij}) x_i^k$,

то из ($3'$) следует :

$$(\pi^k, \sum_i x_i^k (b^i - \lambda_k a^i)) = -z^k \le (\bar{\pi}, \sum x_i^k (b^i - \lambda_k a^i)), \qquad (21)$$

где $\bar{\pi}$ - оптимальный вектор цен, удовлетворяющий условию

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\pi}_j = 1.$$

Из $(\bar{\pi}, b^i - \bar{\alpha} a^i) \le 0 \quad (i=1,2,\ldots,m)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^k (\bar{\pi}, b^i - \bar{\alpha} a^i) \le 0 \quad ,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^k (\bar{\pi}, b^i) \le \bar{\alpha} \sum_{i=1}^{m} x_i^k (\bar{\pi}, a^i) \ .$$

Таким ообразом,

$$(\bar{\pi}, \sum x_i^k (b^i - \lambda_k a^i)) \le (\bar{\alpha} - \lambda_k) \sum_{i=1}^{m} x_i^k (\bar{\pi}, a^i). \qquad (22)$$

Полученное неравенство (22) даёт оценку сверху для правой части (21). Оценим теперь снизу левую часть:

$$(\pi^k, b^{i_0} - \lambda_k a^{i_0}) \le -\pi_0^k = -z^k = (\pi^k, \sum x_i^k (b^i - \lambda_k a^i)), \qquad (23)$$

где i_0 таково, что

$$\frac{(\pi^k, b^{i_0})}{(\pi^k, a^{i_0})} = \max_i \frac{(\pi^k, b^i)}{(\pi^k, a^i)} = \lambda_{k+1} \ . \qquad (24)$$

Из (21) , (22) и (23) имеем

$$(\pi^k, b^{i_0} - \lambda_k a^{i_0}) \le (\bar{\alpha} - \lambda_k) \sum_{i=1}^{m} x_i^k (\bar{\pi}, a^i) \ . \qquad (25)$$

Но так как $(\bar{\pi}, \sum x_i^k (b^i - \lambda_k a^i)) \le 0$, то окончательно

$$(\bar{\pi}, \sum_{i=1}^{m} x_i^k a^i) \ge \frac{1}{\lambda_k} (\bar{\pi}, \sum_{i=1}^{m} x_i^k b^i) > \frac{\Delta}{\lambda_k} > 0, \qquad (26)$$

где Δ - из леммы 2. Таким образом, из (24),(25) и (26) следует:

$$\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\bar{\alpha} - \lambda_k} \ge \frac{\Delta}{\lambda_k (\pi^k, a^{i_0})} > \frac{\Delta}{\lambda_0 \max\limits_{ij} a_{ij}} \ .$$

Вычитая обе части полученного неравенства из единицы, получаем:

$$\frac{\bar{\alpha} - \lambda_{k+1}}{\bar{\alpha} - \lambda_k} = 1 - \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\bar{\alpha} - \lambda_k} < 1 - \frac{\Delta}{\lambda_0 \max\limits_{ij} a_{ij}} = d < 1 \ ,$$

что и доказывает утверждение теоремы относительно последовательности λ_k :

$$\lambda_k - \bar{\alpha} \le M d^k \ , \ M = \lambda_0 - \bar{\alpha} \ .$$

Оценим теперь скорость сходимости γ_k . Из (8) следует :

$$z^k = \pi_0^k \le (\lambda_k - \bar{\alpha} + \bar{\alpha} - \lambda_{k+1}) \max_i (\pi^k, a^i) < M d^k \max_{ij} a_{ij} .$$

Используя (20), окончательно получаем:

$$\bar{\alpha}-\gamma_K<(\lambda_K-\bar{\alpha})+(\bar{\alpha}-\gamma_K)=\lambda_K-\gamma_K\leq\frac{z^K}{\delta}<d^K\frac{M\max a_{ij}}{\delta}.$$

Теорема доказана полностью.

В заключение этого параграфа приведем без дальнейших пояснений схему метода для получения $\bar{\beta}$ и оптимального вектора цен $\bar{\pi}$. Процесс начинается с $\lambda_0\leq\bar{\beta}$. Имея некоторое $\lambda_K\leq\bar{\beta}$, находим решение задач II и III при $\lambda=\lambda_K$, а величину λ_{K+1} получаем по формуле:

$$\lambda_{K+1}=\min_j\frac{\sum_i b_{ij}x_i^K}{\sum_i a_{ij}x_i^K}.$$

Оценка сверху γ_K для $\bar{\beta}$ вычисляется так:

$$\gamma_K=\max_{(\pi^K,a^i)\neq 0}\frac{(\pi^K,b^i)}{(\pi^K,a^i)}.$$

Для приведенной схемы справедливы теоремы, аналогичные теоремам I –4.

§ 3. Примеры

Пример I. Рассмотрим модель Неймана, определяемую матрицами

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

Для этой модели $\bar{\alpha}=\bar{\beta}=1$, но модель не регулярна. Непосредственной проверкой легко убедиться, что при нахождении $\bar{\alpha}$ по описанному методу будем иметь:

$$x_1^K=1-\frac{1}{\lambda_K},\quad x_2^K=\frac{1}{\lambda_K},$$
$$\pi_1^K=\frac{1}{\lambda_K},\quad \pi_2^K=1-\frac{1}{\lambda_K},$$

так что

$$\lambda_{K+1}=\max\left\{2-\frac{1}{\lambda_K},1\right\}=2-\frac{1}{\lambda_K}.$$

Отсюда следует, что порядок сходимости последовательности равен лишь $\frac{1}{K}$. Это показывает, что требование регулярности в теореме 4 является существенным.

Интересно также отметить, что последовательность x^K сходится к вектору $\hat{x}=(0,1)$, который, как нетрудно проверить, не является равновесным вектором интенсивностей.

ПРИМЕР 2. Модель задается матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0\\12&1\\2&4\end{pmatrix}.$$

Здесь технологический темп роста $\bar{\alpha}=2$ и реализуется, например, на векторе $\bar{x}=(1,0,0)$. Экономический темп роста совпадает с технологическим и реализуется на векторе $\bar{\pi}=\left(\frac{1}{11},\frac{10}{11}\right)$, но модель не регулярна.

Легко получить, что при нахождении $\bar{\alpha}$ окончательно имеем:

$$x_1^k = \frac{11}{\lambda_k+9}, \quad x_2^k = \frac{\lambda_k - 2}{\lambda_k + 9}, \quad x_3^k = 0$$

и, следовательно,

$$\gamma_k = \min\left\{\frac{2x_1^k + 12x_2^k}{x_1^k - x_2^k}, 1\right\} = 1,$$

так что $\qquad \gamma_k \neq \bar{\alpha} \qquad \gamma_k \neq \bar{\beta}.$

Литература

1. Д. Г е й л. Теория линейных экономических моделей, М., ИЛ, 1963.
2. Д. Г е й л. Замкнутая линейная модель производства. "Линейные неравенства и смежные вопросы". М., ИЛ, (1959), стр. 382-400.
3. В.Л. М а к а р о в. Об условии равновесия в модели Неймана. Сиб. мат. журнал, том Ш, № 3 (1962), стр. 476-478.
4. Н.Е. К и р и н. Об одном численном методе в общей задаче математического программирования. — "Прикладные задачи технической кибернетики". М., Изд-во "Советское радио", (1966), стр. 369-374.
5. Г. З о й т е н д е й к. Методы возможных направлений. М., ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию
I марта 1968 г.