

УДК 512.25/26 + 519.3:330.115

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ  
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА

В.И. ШМЫРЁВ

В работе рассматривается обобщенная транспортная задача большой размерности. Для её решения предлагается эффективный алгоритм, который основан на одной особенности многоблочных задач линейного программирования и специфике обобщенной транспортной задачи. Приводится подробная запись наиболее важных частей алгоритма, рассчитанная на использование ЭВМ. Данный алгоритм был реализован на ЭВМ "М-20" и "Минск-22" для решения конкретного класса задач загрузки дефицитного оборудования, который описывается в § 4.

§ 1. Схема метода последовательного улучшения

Изложим схему последовательного улучшения для решения одной общей задачи линейного программирования.

При заданной матрице

$A = \|a_{ij}\|$ ,  $i=1,2,\dots,m$ ,  $j=1,2,\dots,n$ ,  
и векторах  $b=(b_1, b_2, \dots, b_m)$ ,  $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$

определить вектор  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , минимизирующий функцию  $\mu(x)=(c, x)$  и удовлетворяющий условиям:

$$Ax=b, x \geq 0. \quad (I)$$

Вектор, удовлетворяющий условиям (I), называется допустимым, а искомый вектор — оптимальным.

Имеет место следующий признак оптимальности: для оптимальности допустимого вектора  $x$  необходимо и достаточно существование вектора  $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , такого, что:

$$(y, A^j) = c_j, \quad j \in J^+ = \{j/x_j > 0\}, \quad (2)$$

$$(y, A^j) \leq c_j, \quad j \notin J^+, \quad (3)$$

где  $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ .

Схему метода будем описывать в предположении, что  $|J^+| = m^*$  для любого допустимого вектора  $x$  (условие невырожденности).

Процесс начинается с допустимого вектора  $x$ , такого, что  $|J^+| = m$ . Из условия невырожденности следует, что векторы  $A^j$ ,  $j \in J^+$  линейно независимы и, следовательно, образуют базис  $m$ -мерном арифметическом пространстве  $R_m$ .

Пусть

$$J^+ = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}.$$

1. Определяем вектор  $y$  из условия (2), то есть решаем систему линейных уравнений:

$$(y, A^{j_k}) = c_{j_k}, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

2. Если выполнены условия (3), то  $x$  оптимален. Если же

$$\Delta j_0 = (y, A^{j_0}) - c_{j_0} > 0,$$

то переходим к другому допустимому вектору  $x'$  следующим образом.

3. Определяем коэффициенты разложения  $g_1, g_2, \dots, g_m$  вектора  $A^{j_0}$  по векторам  $A^{j_k}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), то есть решаем систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^m A^{j_k} g_k = A^{j_0}. \quad (5)$$

4. Если  $K^+ = \{k/g_k > 0\} = \emptyset$ , то  $\mu(x)$  неограничена снизу на множестве допустимых векторов и задача не имеет решения. В противном случае находим

$$\varepsilon = \min_{k \in K^+} \frac{x_{j_k}}{g_k} = \frac{x_{j_{k_0}}}{g_{k_0}}.$$

5. Образует компоненты вектора  $x'$  по формулам:

$$x'_{j_k} = x_{j_k} - \varepsilon g_k, \quad k=1, 2, \dots, m;$$

$$x'_{j_0} = \varepsilon;$$

$$x'_j = 0, \quad j \notin J^+ \cup \{j_0\},$$

в результате чего значение функции  $\mu$  убывает на величину  $\varepsilon \Delta j_0$ . Заменяя во множестве  $J^+$  элемент  $j_{k_0}$  элементом  $j_0$ , возвращаемся к п.1.

Таким образом, на каждом шаге процесса нужно решать две системы линейных уравнений (4) и (5), причем матрицы коэффициентов этих систем различаются лишь транспонированием.

## § 2. Многоблочные задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, матрица ограничений которой имеет блочную структуру:

\*) Для произвольного множества  $P$  под  $|P|$  понимается число элементов этого множества.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_0} & & & \\ \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_R} \end{pmatrix},$$

где  $A_i$  ( $i=0,1,\dots,R$ ) - матрицы размерности  $m_i \times n_i$ ,  $n_0 = \sum_{i=1}^R n_i$ .

При реализации для такой задачи схемы метода последовательного улучшения размерность решаемых на каждом шаге процесса линейных систем (4) и (5) будет  $m = \sum_{i=0}^R m_i$ . В алгоритме [4] решение каждой из этих систем сводится к последовательному решению  $R+1$  систем размерности  $m_0, m_1, \dots, m_R$ . Предлагаемый в этом параграфе подход в меньшей степени использует специфику задачи, однако в ряде случаев позволяет получить более простые для реализации и в то же время достаточно эффективные алгоритмы.

Пусть  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n_i}^i)$  - вектор переменных  $i$ -го блока. В качестве введенного в предшествующем параграфе множества  $J^+$  в данном случае выступает множество пар  $(i,j)$ , таких, что  $x_j^i > 0$ . Положим

$J_i^+ = \{j/x_j^i > 0\}$ ,  $i=1,2,\dots,R$ ,  
и пусть  $A^{ij}$  - столбец матрицы  $A$ , соответствующий переменной  $x_j^i$ . Чтобы векторы  $A^{ij}$ ,  $(i,j) \in J^+$ , образовывали базис пространства  $R_m$ , необходимо, чтобы при всех  $i$  выполнялись неравенства

Пусть при  $i=i_1, i_2, \dots, i_Q$   $|J_i^+| > m_i$  выполняется строгое неравенство

Так как  $|J_i^+| > m_i$ ,  $|J^+| = \sum_{i=1}^R |J_i^+| = m$ , то  $Q \leq m_0$ . Таким

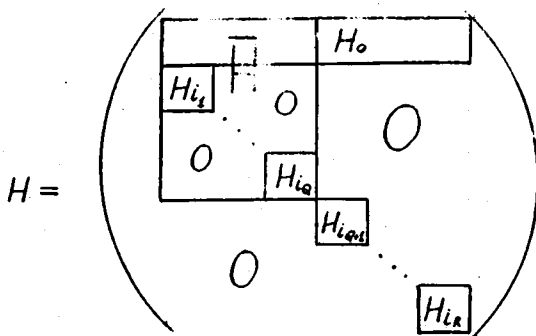
образом, если  $R \gg m_0$ , то для большинства блоков  $|J_i^+| = m_i$ . На этом и основан предлагаемый подход к решению систем (4) и (5) для многоблочных задач. Эти системы в данном случае имеют вид:

$$(y, A^{ij}) = c_j^i, \quad (i,j) \in J^+, \quad (4')$$

$$\sum_{(i,j) \in J^+} A^{ij} g_j^i = A^{i_0} y_0. \quad (5')$$

Здесь  $y = (y^0, y^1, \dots, y^R)$ ;  $y^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_{m_i}^i)$ ,  $i=0,1,\dots,R$ ;  $c_j^i$  - коэффициент минимизируемой функции при переменной  $x_j^i$ .

Перестановкой строк и столбцов матрицу системы (5') (транспонированную матрицу системы (4')) можно привести к виду:



причем матрицы  $H, H_{i_1}, \dots, H_{i_k}$  - квадратные.

Положим  $J^+ = \{(i, j) \in J^+ / |J^+| > m_i\}$ . В векторах  $A^j, (i, j) \in J^+$  будем говорить, что они образуют малый базис. Будем также говорить, что блоки  $i_1, i_2, \dots, i_k$  входят в малый базис.

Для решения системы (4') следует сначала решать ее подсистему, определяемую множеством  $J^+$  (то есть систему с матрицей  $H^+$ ). Получив таким образом векторы  $y^0, y^1, \dots, y^{i_k}$ , векторы  $y^{i_1}, \dots, y^{i_k}$ , находим решением систем с матрицами  $H_{i_1}, \dots, H_{i_k}$ . При этом целесообразно после определения каждого из этих векторов сразу переходить к проверке признака оптимальности соответствующего блока.

Обратимся теперь к решению системы (5'). Легко видеть, что если  $i \neq i_0$  и  $(i, j) \notin J^+$ , то  $x_{ij}^i = 0$ . Значит, если при определении коэффициентов разложения вектора  $A^{i_0}$  блок  $i_0$  входит в малый базис, то достаточно решить подсистему с матрицей  $H$ . Если же блок  $i_0$  не входит в малый базис, то предварительно нужно решить систему с матрицей  $H_{i_0}$ .

### § 3. Многоблочная обобщенная транспортная задача

1.0. Будем рассматривать обобщенную транспортную задачу в следующей формулировке:

При заданных числах  $c_{ij}, a_{ij}, T_j$  ( $i=0, 1, \dots, R, j=1, 2, \dots, n$ ) и  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, R$ ) найти элементы матрицы  $x = \|x_{ij}\|$  ( $i=0, 1, \dots, R, j=1, 2, \dots, n$ ), минимизирующие величину

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^R \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

и удовлетворяющие условиям:

$$1) \sum_{i=0}^R a_{ij} x_{ij} = T_j, \quad j=1, 2, \dots, n;$$

$$2) \sum_{j=1}^n x_{ij} = B_i, \quad i=1, 2, \dots, R;$$

$$3) \quad x_{ij} \geq 0, \quad i=0,1,\dots,R; j=1,2,\dots,n.$$

Аналогично векторам  $A^j$  § I рассмотрим  $n+R$  - мерный вектор  $A^0$  коэффициентов при неизвестном  $x_{ij}$ :

$$A^0 = (0, \dots, 0, a_{ij}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i \neq 0, \quad (6)$$

$$A^0 = (0, \dots, 0, a_{ij}, 0, \dots, 0).$$

Учитывая структуру векторов  $A^j$ , приведенный в § I признак оптимальности можно сформулировать следующим образом:

Для оптимальности допустимой матрицы  $x$ , т.е. матрицы, элементы которой удовлетворяют условиям 1) - 3), необходимо и достаточно существование чисел (потенциалов)  $u_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) и  $v_i$  ( $i=0,1,\dots,R$ ), удовлетворяющих условиям:

$$v_0 = 0, \quad v_i + a_{ij} u_j = c_{ij}, \quad (i,j) \in J^+ = \{(i,j) / x_{ij} > 0\}, \quad (7)$$

$$v_i + a_{ij} u_j \leq c_{ij}, \quad (i,j) \notin J^+.$$

Заметим, что каждое из ограничений 2) представляет собой блок. Целью настоящей работы является построение алгоритма метода последовательного улучшения для решения многоблочной обобщенной транспортной задачи, то есть при  $R \gg n$ . Для решения такой задачи может быть использован подход, предложенный в [3]. Однако при написании программы для специальных задач (пример одной такой задачи приводится в § 4) в том случае, когда это позволит объем оперативной памяти используемой ЭВМ, реализация алгоритма, излагаемого в настоящей работе, менее трудоёмка.

Рассмотрим конкретизацию схемы § 2 для данного случая.

Так как каждый блок рассматриваемой задачи состоит лишь из одного ограничения, то в данном случае матрицы  $H_{i_0,1}, \dots, H_{i_0,R}$  являются одноэлементными, а размерность матрицы  $\bar{H}$  не превосходит  $2n$ . С целью упрощения алгоритма считаем, что в малый базис входит ровно  $2n$  векторов  $A^j$ , то есть размерность матрицы  $\bar{H}$  равна  $2n$ . Если при определении коэффициентов разложения вводимого в базис вектора  $A^{i_0 j_0}$  ( $i_0 \neq 0$ ) блок  $i_0$  не входит в малый базис, то мы будем добавлять в малый базис соответствующий вектор, увеличивая при этом размерность матрицы  $\bar{H}$  на единицу. Однако после определения исключаемого вектора один из блоков будет представлен в малом базисе лишь одним вектором, и, следовательно, этот блок можно будет исключить из малого базиса. Целесообразность такого приема будет ясна из пос-

ледующего изложения.

Перечислим основные части алгоритма:

- 1) определение потенциалов  $u_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ );
- 2) проверка условий оптимальности:
  - а) определение потенциала  $u_i$ ;
  - б) проверка условия признака оптимальности для  $i$ -го блока;
- 3) подготовка к разложению (пополнение малого базиса);
- 4) разложение вводимого вектора  $A^{(i,j)}$  по векторам малого базиса;
- 5) сокращение малого базиса.

Уже простая реализация этой схемы с исправлением  $\delta$  шага к шагу матрицы  $\bar{H}$  (как это делается при решении общей задачи линейного программирования модифицированным симплекс-методом) позволяет получить алгоритм для решения на ЭВМ Минск-22 практически важных задач, например, задачи об оптимальной нагрузке трубных станов водогазопроводными трубами, которая сводится к обобщенной транспортной задаче (см. § 4) с  $n \approx 10$  и  $R \approx 2000$ .

С целью получения более эффективного алгоритма используем особенности структуры матрицы  $\bar{H}$  для данного класса задач.

2°. Векторы (6) имеют разве лишь по две отличные от нуля компоненты, вследствие чего матрица соответствующих систем (4) и (5) перестановкой строк и столбцов может быть приведена к кодиагональному виду (см. [8]):

$$H = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На этом и основаны алгоритмы решения систем линейных уравнений для определения потенциалов и коэффициентов разложения при реализации схемы метода последовательного улучшения для обобщенной транспортной задачи (см. [5 - 7]). Опишем кратко идею этих алгоритмов, используя следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим следующий граф. Каждому значению индексов  $j$  и  $i$  ( $i \neq 0$ ) ставим в соответствие вершины с номерами  $j$  и  $n+i$ ;  $i=0$  ставится в соответствие нулевая вершина; а каждой паре  $(i, j) \in J^*$  — звено, соединяющее соответствующие вершины. Полученный граф будем называть базисным. Условимся звенья графа обозначать через  $W$ , а множество всех звеньев через  $\Gamma$ . Каждой вершине графа соответствует некоторый потенциал  $u_k$  ( $k=0, 1, \dots, R$ ). Звену  $W$ , соединяющему вершины  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , соответствует одно из уравнений

(7), коэффициенты которого мы будем обозначать  $a_{l_i}^w$ ,  $a_{l_2}^w$  и  $c^w$ . Таким образом,

$$a_{l_i}^w u_{l_i} + a_{l_2}^w u_{l_2} = c^w, \quad w \in \Gamma. \quad (8)$$

Можно показать, что компонента связности описанного графа, содержащая нулевую вершину, является деревом (рис.1) и любая другая компонента связности содержит один и только один цикл (рис.2)

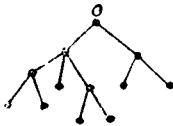


Рис.1.



Рис.2.

Рассмотрим задачу определения потенциалов. Заметим, что если известен потенциал одной из вершин звена  $W$ , то, используя соответствующее из уравнений (8), можно определить потенциал второй вершины. Таким образом, если известен потенциал хотя бы одной из вершин компоненты связности графа, то потенциалы остальных вершин этой компоненты связности определяются последовательным перебором смежных (то есть имеющих общую вершину) звеньев. Это позволяет легко определить потенциалы вершин компоненты связности, содержащей нулевую вершину, ибо  $u_0 = 0$ . Для компоненты связности, содержащей цикл, сначала определяется потенциал какой-либо вершины цикла следующим приемом.

Пусть цикл содержит  $\alpha$  вершин (рис. 3)

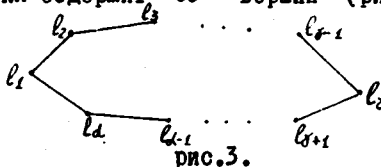


рис.3.

Будем рассматривать цикл, состоящий из двух цепочек звеньев, которые будем называть  $j$ -цепочка и  $K$ -цепочка:

$$j\text{-цепочка: } w_1 = (l_1, l_2), w_2 = (l_2, l_3), \dots, w_{\alpha-1} = (l_{\alpha-1}, l_{\alpha}), \quad (9)$$

$$K\text{-цепочка: } w_{\alpha} = (l_{\alpha}, l_{\alpha+1}), w_{\alpha+1} = (l_{\alpha+1}, l_{\alpha+2}), \dots, w_{\beta} = (l_{\beta-1}, l_{\beta}).$$

Обозначим потенциал вершины  $l_1$  через  $t$ . Тогда можно определить потенциал вершин  $l_2$  и  $l_{\alpha}$ , которые будут линейными функциями  $t$ :

$$u_{l_2} = (c^{w_1} - a_{l_1}^{w_1} t) / a_{l_2}^{w_1} = z_j' t + d_j',$$

$$u_{l_{\alpha}} = (c^{w_{\alpha}} - a_{l_{\alpha}}^{w_{\alpha}} t) / a_{l_1}^{w_{\alpha}} = z_K' t + d_K'.$$

Используя вторые звенья цепочек, потенциалы вершин  $\ell_2$  и  $\ell_{k+1}$  теперь можно получить как линейные функции переменной  $t$  и т.д. Перебрав все звенья цепочек, получим

$$u_{\ell_j} = z_j t + d_j,$$

$$u_{\ell_k} = z_k t + d_k.$$

Можно показать, что  $z_j \neq z_k$ , ввиду линейной независимости векторов  $A_{ij}^j, (\ell, j) \in J^+$ . Таким образом, получаем линейное уравнение для  $t$ :

$$z_j t + d_j = z_k t + d_k.$$

Откуда  $t = \frac{d_j - d_k}{z_j - z_k}$ .

Рассмотрим теперь задачу определения коэффициентов разложения произвольного вектора  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n+r})$  по базису из векторов  $A_{ij}^j, (\ell, j) \in J^+$ , которую можно интерпретировать следующим образом: заданы потребности в некотором продукте во всех пунктах, кроме нулевого; требуется определить интенсивности звеньев, если использование звена  $w = (\ell_1, \ell_2)$  с единичной интенсивностью дает  $\alpha_{\ell_1}^w$  единиц продукта в пункте  $\ell_1$  и  $\alpha_{\ell_2}^w$  единиц продукта в пункте  $\ell_2$ .

Под висячей вершиной в дальнейшем будем понимать вершину графа, к которой примыкает лишь одно звено. Это означает, что соответствующее уравнение системы для определения коэффициентов разложения содержит лишь одно неизвестное. Таким образом, интенсивность звена, содержащего висячую вершину, однозначно определяется потребностью в этой вершине. Пусть, например, вершина  $\ell_2$  звена  $w = (\ell_1, \ell_2)$  является висячей. Определяя интенсивность  $x^w$  этого звена  $x^w = b_{\ell_2} / \alpha_{\ell_2}^w$  и исправляя потребность в вершине  $\ell_1$  на  $b'_{\ell_1} = b_{\ell_1} - x^w \alpha_{\ell_1}^w$ ,

мы можем исключить это звено из дальнейшего рассмотрения. В результате такого процесса будут последовательно определены интенсивности всех звеньев, кроме звеньев, лежащих на циклах. Для определения интенсивностей звеньев цикла используем подход, аналогичный примененному при определении потенциалов.

Рассмотрим цикл, состоящий из цепочек (9) (рис. 3). Вершину  $\ell_i$  считаем висячей в обеих цепочках с потребностью  $t_j$  и  $t_k$  соответственно:

$$t_j + t_k = b_{\ell_i}. \quad (10)$$

Потребность в вершине  $\ell_i$  примем равной в обеих цепочках  $b_{\ell_i}$ . Исходя из вершины  $\ell_i$ , мы можем определить интенсивности звеньев  $w_1$  и  $w_2$ :

$$x^{w_1} = t_j / \alpha_{\ell_i}^{w_1}, \quad x^{w_2} = t_k / \alpha_{\ell_i}^{w_2}$$



Формируя потребности в вершинах  $l_2$  и  $l_k$ , видим, что они являются линейными функциями от  $t_j$  и  $t_k$  соответственно.

$$b'_{l_2} = b_{l_2} - x^{w_1} a_{l_2}^{w_1} = b_{l_2} - t_j a_{l_2}^{w_1} / a_{l_2}^{w_1} = \mu'_j + \rho'_j t_j,$$

$$b'_{l_k} = b_{l_k} - x^{w_k} a_{l_k}^{w_k} = b_{l_k} - t_k a_{l_k}^{w_k} / a_{l_k}^{w_k} = \mu'_k + \rho'_k t_k.$$

Продолжая этот процесс, получаем окончательно

$$b''_{l_j} = \rho_j t_j + \mu_j, \quad b''_{l_k} = \rho_k t_k + \mu_k,$$

при этом

$$\rho_j = 1/\tau_j, \quad \rho_k = 1/\tau_k$$

. Так как должно быть

$$b_{l_j} - b''_{l_j} = b_{l_k} - b''_{l_k}$$

, то получаем уравнение относительно

$$t_j \text{ и } t_k$$

:

$$\rho_j t_j + \mu_j + \rho_k t_k + \mu_k = b_{l_k}. \quad (II)$$

Определяя из (I) и (II)  $t_j$  и  $t_k$ , повторным просмотром звеньев цикла получаем их интенсивности.

Величины  $\rho_j$  и  $\rho_k$  не зависят от разлагаемого вектора  $b$ , и определяются лишь коэффициентами звеньев цепочек (9). Будем называть их характеристиками цепочек.

Отметим некоторые особенности определения коэффициентов разложения вектора  $b$ , имеющего лишь две ненулевые компоненты. Дело в том, что это свойство сохраняется при исправлении вектора  $b$  в течение всего процесса разложения. Значит, если ненулевыми компонентами будут

$$b_{l_\lambda} = g_\lambda, \quad b_{l_n} = g_n,$$

то в процессе вычислений достаточно исправить лишь четыре переменных:  $g_\lambda, g_n, N_\lambda, N_n$ . Поясним обозначения.

Нулевую вершину и циклы графа будем называть (следуя [5]) обобщенными резервами. При разложении вновь вводимого вектора (6) по базису коэффициенты разложения не равны нулю лишь для звеньев цепочек, соединяющих вершины вводимого звена с обобщенными резервами соответствующих компонент связности. Одну из цепочек будем называть "левой", другую - "правой". Этим и объясняются обозначения:  $N_\lambda, N_n$  - переменные вершины путей, определяемых соответственно левой и правой цепочками.

Определяя коэффициенты разложения вводимого звена по звеньям цикла, величины, аналогичные по смысловому содержанию величинам  $t_j, t_k, \mu_j, \mu_k$ , будем обозначать соответственно  $g_j, g_k, v_j, v_k$ . Если ни одна из цепочек - ни левая, ни правая - не принадлежит к рас-

смаатриваемому циклу, то  $v_j = v_k = 0$ . Если же, например, левая цепочка к цепочке  $j$  в вершине  $\ell_j$ , то, как легко проверить,

$$v_j = g_k \frac{\rho_i}{\rho_k},$$

где  $\rho_k$  - характеристика цепочки  $W_1, W_2, \dots, W_{k-1}$ . Столь же просто остальные случаи. Система уравнений для определения  $g_j$  и  $g_k$  будет иметь вид:

$$\rho_j g_j + \rho_k g_k = -v_j - v_k, \\ g_j + g_k = 0.$$

Вернемся теперь к рассмотрению многоблочной обобщенной транспортной задачи.

Если множество  $Z_i^+ = \{j/x_{ij} > 0\}$  состоит лишь из одного элемента, то  $n \cdot i$  - я вершина базисного графа является висячей.

Специфика многоблочной обобщенной транспортной задачи состоит в том, что большинство вершин базисного графа такой задачи являются висячими. Вводя в рассмотрение малый базис, мы выделяем из базисного графа некоторый подграф, содержащий все невисячие вершины. Пополнение малого базиса, которое осуществляется при подготовке к разложению, состоит в доавлении к этому подграфу одной вершины и одного звена. Сокращение же малого базиса равносильно исключению из упомянутого подграфа одной из висячих вершин.

Для многоблочной обобщенной транспортной задачи в [3] предложен способ, позволяющий на каждом шаге оперировать с графом, содержащим лишь  $n$  вершин и дуг. Однако получаемый при этом граф не является подграфом исходного, и при изменении базиса может потребоваться его существенная перестройка. Поскольку при разработке данного алгоритма предполагалось, что число  $n$  невелико, то предпочтение было отдано описанному в § 2 приему, в котором малому базису может соответствовать граф с  $2n$  звеньями, но логическая схема которого проще, чем схема способа описанного в [3].

3°. Перейдем к формальному описанию основных частей алгоритма. При этом будем пользоваться символикой "Алгола-60", то есть под  $\alpha := \beta$  понимается оператор присваивания, под  $\alpha[s] := s$  - я компонента массива  $\alpha$  и т.д. Однако в целях наглядности мы откажемся от линейной записи условных операторов и операторов цикла, свойственной "Алголу-60", и будем пользоваться блок-схемами.

Информация о малом базисе обрзует массивы звеньев, струк-

тура которых оудет описана ниже, и два массива целых переменных:  $D[n+1:2n+1]$  и  $E[n+1:2n+1]$ . В массив  $D$  сведены номера блоков, входящих в малый базис, то есть  $D[k]$  представляет собой номер блока, соответствующего  $k$ -той вершине графа малого базиса. Переменная  $E[k]$  указывает число звеньев, содержащих  $k$ -ю вершину графа малого базиса. Массив  $E$  введен для удобства реализации блока сокращения малого базиса, когда возникает необходимость в поиске висячей вершины.

Излагаемые здесь алгоритмы, реализующие описанные в 2<sup>о</sup> месте решения систем линейных уравнений для определения потенциалов и коэффициентов разложения, во многом близки к алгоритмам, изложенным в [8]. Основное отличие состоит в следующем. Прямое применение описанных выше приемов требует большого количества просмотров массива звеньев графа, если не предполагать какой-либо их упорядоченности. В [8] такая упорядоченность достигалась хранением для каждой вершины, не лежащей на цикле, номера первого звена цепочки, соединяющей эту вершину с обобщенным резервом, а для вершины на цикле - номера примыкающего к ней звена цикла (при фиксированном обходе этого цикла). Такая информация позволяет за один (при том не полный) проход списка звеньев определить коэффициенты разложения. Что касается потенциалов, то при изменении базиса довычислялись те из них, которые менялись при переходе к новому базису. Одновременно вносилась поправка в информацию об упорядочении и оформлялись новые циклы, если они возникали. Некоторым недостатком такой системы упорядочения является то, что при довычислении потенциалов все же приходится совершать несколько просмотров списка звеньев. Этого можно избежать, перейдя к заданию полного порядка звеньев, аналогично тому, как это сделано в [9] для транспортной задачи.

Будем говорить, что малый базис упорядочен, если информация о звеньях выписана в таком порядке, что :

а) не нарушается очередность звеньев в цепочках, соединяющих висячие вершины с соответствующими обобщенными резервами;

б) звенья цикла выписаны одним массивом, то есть если  $W_{S_1}$  и  $W_{S_2}$ ,  $S_1 < S_2$  - звенья какого-либо цикла, то  $W_{S_1}, S_1 < S_2$  - так же звенья этого цикла;

в) для каждого цикла не нарушается очередность звеньев в соответствующих цепочках (9);

г) массив звеньев цикла предшествует остальным звеньям соответствующей компоненты связности.

Такая упорядоченность массива звеньев малого базиса позволяет, как это будет показано, существенно сократить число просмотрных операций при определении потенциалов и коэффициентов разложения. Каким образом устраняются нарушения упорядоченности после выполнения очередной итерации метода последовательного улучшения, описывается ниже в блоке переупорядочения. Начальный базис будем предполагать упорядоченным.

Информация о блоках, не входящих в малый базис, содержится в массиве целых переменных  $G[1:R]$ , таком, что  $(i, G[i]) \in J^+$ . Переменную  $x_{i, G[i]}$  будем называть главной переменной  $i$ -го блока.

Определение потенциалов. Предполагаемая упорядоченность малого базиса позволяет использовать для определения потенциалов следующий алгоритм. Просматриваем последовательно, начиная с первого, звенья базиса. Если очередное звено не является звеном цикла, то к этому моменту потенциал одной из вершин звена (её мы будем называть верхней) уже определён и можно определить потенциал другой (нижней) вершины. Если же рассматриваемое звено является первым звеном цикла, то, полагая потенциал одной из его вершин равным  $t$ , за один просмотр массива звеньев цикла получаем уравнение для его определения. После этого определение потенциалов вершин цикла ничем не отличается от определения потенциалов вершин дерева. Таким образом, звенья циклов просматриваются дважды, остальные же лишь один раз.

Перейдем к формальному описанию алгоритма получения потенциалов, для чего опишем структуру массива звеньев малого базиса. Будем считать, что каждое звено  $W = (l_1, l_2)$  записано так, что  $\alpha_{l_2}^W = 1$ ; это позволяет  $s$ -е звено массива звеньев  $W^s = (l_1^s, l_2^s)$  характеризовать четверкой переменных:

$$c[s] = c^{W^s}, \quad a[s] = \alpha_{l_1^s}^{W^s}, \quad j[s] = l_1^s, \quad \kappa[s] = l_2^s.$$

Введем еще две переменных для характеристики звена, обусловленных описанной упорядоченностью массива звеньев:

$$\psi[s] = \begin{cases} 0 - \text{если верхней вершиной звена является } j[s]; \\ 1 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\chi[s] = \begin{cases} 1 - \text{если звено является первым или последним} \\ \text{звеном цикла;} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

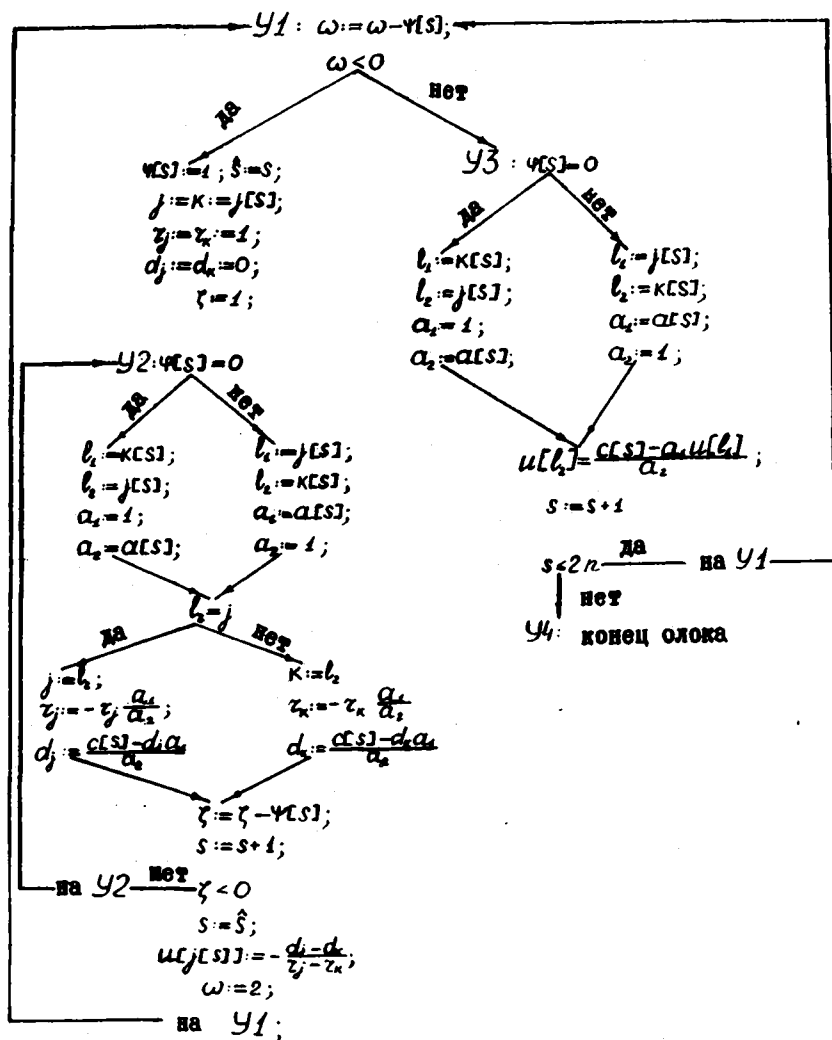
На основе упорядоченности массива звеньев цикла, можно показать, что  $\psi$  и  $\chi$  первого и последнего звеньев цикла имеют

# Схема блока определения потенциалов

У0:  $u[\alpha] := 0$

$\omega := 0$

$s := 1$



значение 1.

Потенциал вершин образуют массив  $u[0:2n]$ . Смысл других переменных этого блока достаточно ясен из самой схемы.

Проверка условий оптимальности. При проверке  $i$ -го блока потенциал блока  $u_i$  определяется из уравнения:

$$u_i + a_{i, G[i]} \cdot u[G[i]] = c_{i, G[i]}.$$

Согласно общепринятому приему, в базис следует вводить лишь звенья, для которых нарушение критерия оптимальности существенно:

$$u_i + a_{ij} u_j - c_{ij} > B,$$

где  $B$  — так называемый "барьер", который в процессе вычисления периодически уменьшается. Как показывает практика, время решения задачи во многом зависит от выбора алгоритма дробления барьера. Просмотр блоков целесообразно сделать циклическим, то есть если в блоке  $i_0$  обнаружено нарушение критерия оптимальности в упомянутом смысле, то на следующем шаге алгоритма просмотр следует начать с блока  $i_0$ , а не с начала. Подробную схему этого блока мы не приводим ввиду её простоты.

Подготовка к разложению. Пусть в малый базис нужно ввести переменную  $x_{i_0 j_0}$ . Если блок  $i_0$  входит в малый базис, то есть  $i_0 = D[k_0]$ , то можно сразу переходить к определению коэффициентов разложения звена  $W^0 = (j_0, k_0)$ :

$$c^{W^0} = c_{i_0 j_0}, \quad a_{j_0}^{W^0} = a_{i_0 j_0}, \quad a_{k_0}^{W^0} = 1.$$

В противном случае следует предварительно поставить в соответствие  $i_0$  — ому блоку  $2n+1$  — ю вершину и пополнить малый базис звеном  $W' = (j_0, 2n+1)$ :

$$c^{W'} = c_{i_0 j_0}, \quad a_{j_0}^{W'} = a_{i_0 j_0}, \quad a_{2n+1}^{W'} = 1,$$

где  $j_0 = G[i_0]$ .

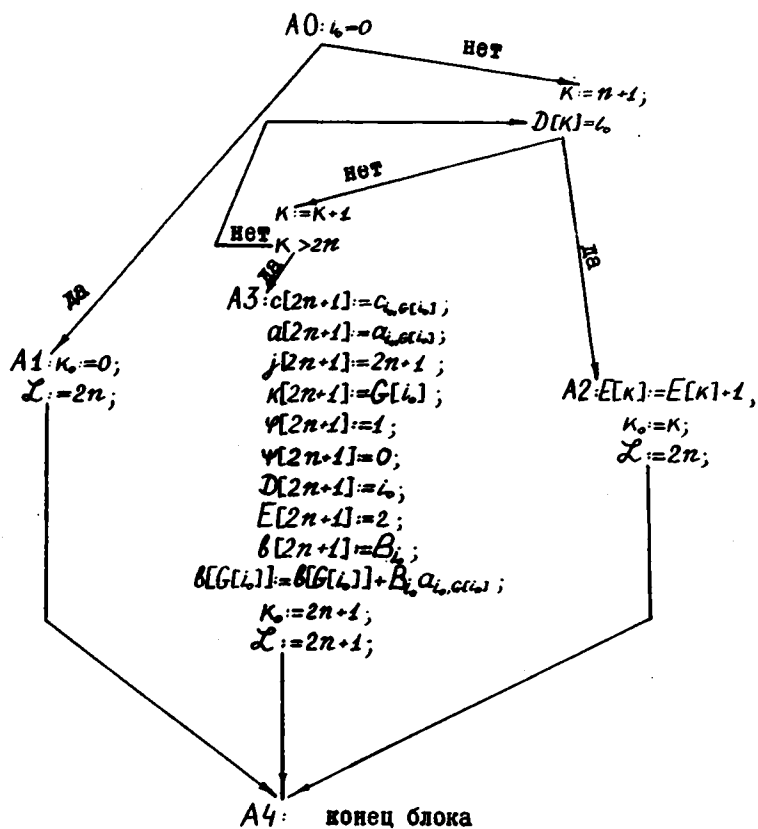
В приводимом ниже алгоритме определения коэффициентов разложения и исключения из базиса звена не предполагаются известные значения базисных переменных, а хранятся лишь правые части соответствующей линейной системы, которые образуют массив  $B$ :

$$b[k] = T_k - \sum_{(i,k) \in J \setminus J^*} a_{ik} B_i, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$b[k] = B_{D[k]}, \quad n+1 \leq k \leq 2n+1.$$

Значение  $b[0]$  не существенно. При определении исключаемого звена производится одновременное разложение по малому базису вводимого звена и вектора  $b$ .

# Схема блока подготовки к разложению



Таким образом, в случае пополнения малого базиса звеном  $W'$  надо исправить значения величин  $b[j_6]$  и  $b[2n+1]$ .

Блок разложения. Для определения исключаемого звена массив звеньев малого базиса просматривается в обратном порядке. Если звено не лежит на цикле, то его нижняя вершина является висячей и коэффициент разложения  $x$  вектора  $b$  определяется потербностью в этой вершине. Если при этом нижняя вершина звена совпадает с  $N_n(N_n)$ , то звено принадлежит левой (правой) цепочке и, определяя коэффициент разложения  $g$  вводимого звена, исправляем  $N_n(N_n)$ . При достижении левой и правой цепочками общей вершины (то есть  $N_n = N_n$ ) считаем, что левая цепочка окончена ( $N_n = 0$ ).

Если рассматриваемое звено является последним звеном цикла, то, отправляясь от его нижней вершины, последовательным просмотром звеньев цикла получаем величины  $\rho_j, \rho_k, \mu_j, \mu_k, \rho_n, \rho_n$ . Так как  $\varphi$  у первого и последнего звеньев цикла имеет значение 1, то вершинами  $\ell_j$  и  $\ell_k$  в цепочках (9) будут  $j[\hat{s}]$  и  $k[\hat{s}]$ , где  $\hat{s}, \hat{s}$  — номера первого и последнего звеньев цикла. Таким образом, система уравнений для определения  $t_j$  и  $t_k$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho_j t_j + \mu_j + \rho_k t_k + \mu_k &= b[j[\hat{s}]], \\ t_j + t_k &= b[k[\hat{s}]]. \end{aligned}$$

Определив величины  $t_j, t_k, g_j, g_k$ , повторным просмотром массива звеньев цикла определяем коэффициенты разложения.

Сделаем необходимые пояснения к приводимой ниже схеме этого блока. Операторы блока имеют следующее назначение.

Операторы  $L9-L10$  соответствуют разложению по нециклическим звеньям. Переменные этой части блока имеют следующее смысловое содержание:

$\ell_n, \ell_n$  — количество пройденных звеньев левой и правой цепочек;  
 $\lambda = \begin{cases} 0 & \text{— если звено принадлежит левой цепочке;} \\ 1 & \text{— если звено принадлежит правой цепочке;} \end{cases}$   
 $\ell_1, \ell_2$  — номера верхней и нижней вершин звена;  
 $\alpha_1, \alpha_2$  — соответствующие им коэффициенты звена.

Смысл остальных переменных будет пояснен ниже. Операторы  $L3-L4$  соответствуют первому просмотру звеньев цикла с целью получения величин  $\rho_j, \rho_k, \mu_j, \mu_k, \rho_n, \rho_n$ .  
 Здесь

$\lambda = 1$  — если левая цепочка примыкает к  $j$  — цепочке;  
 $\lambda = 0$  — если левая цепочка не примыкает к  $j$  — цепочке;

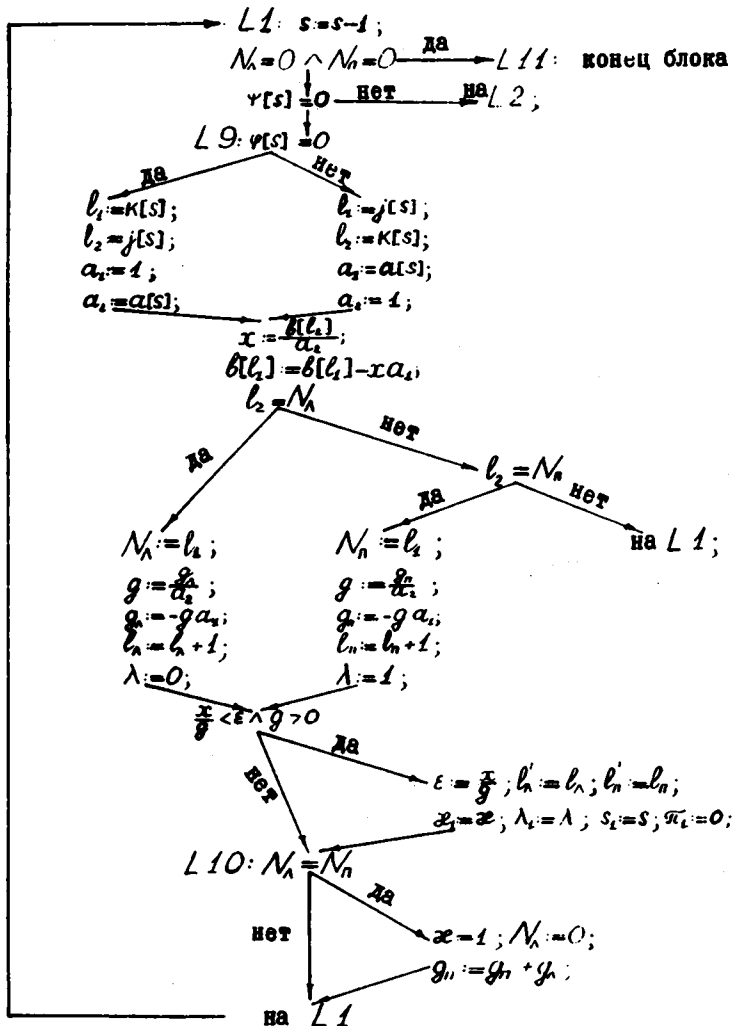


# Схема блока разложения

$g_i := a_{i,j_0}; g_n := 1; \epsilon := +\infty;$

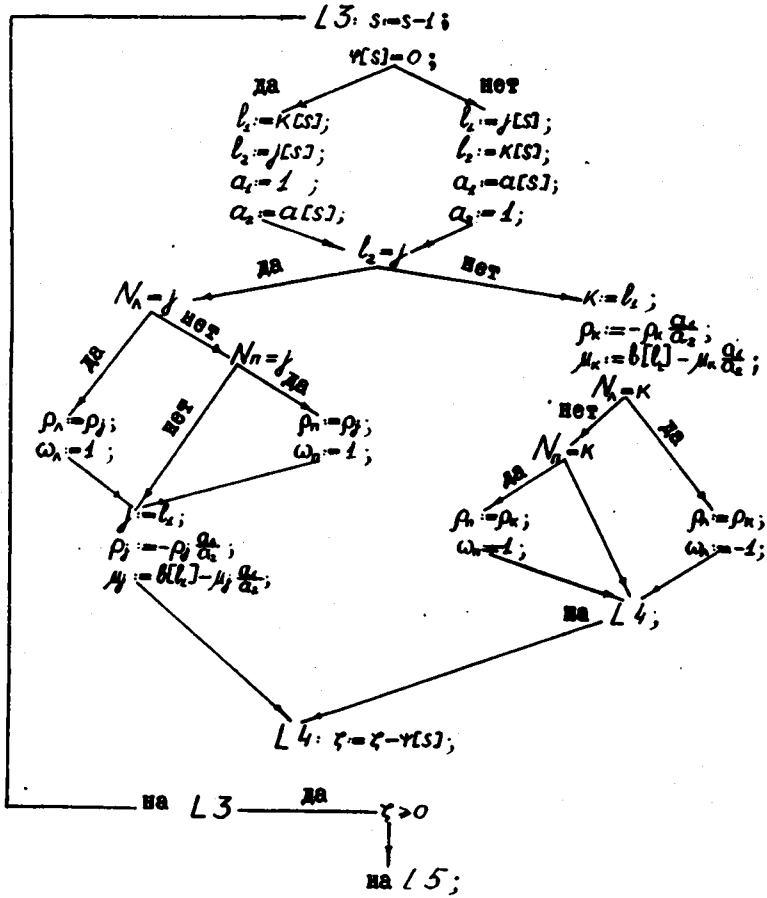
$N_i := j_0; N_n := K_0; x := 0;$

$l_1 := l_n := 0; s := L + 1;$

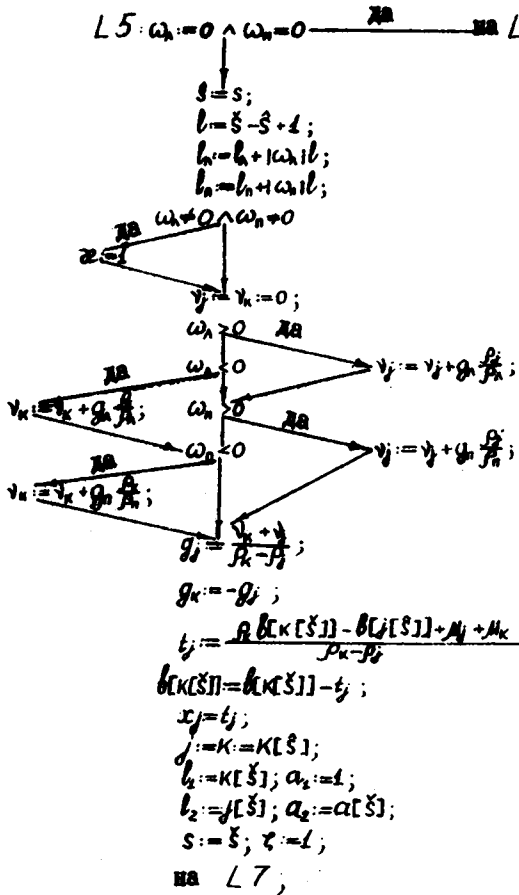


(Продолжение схемы)

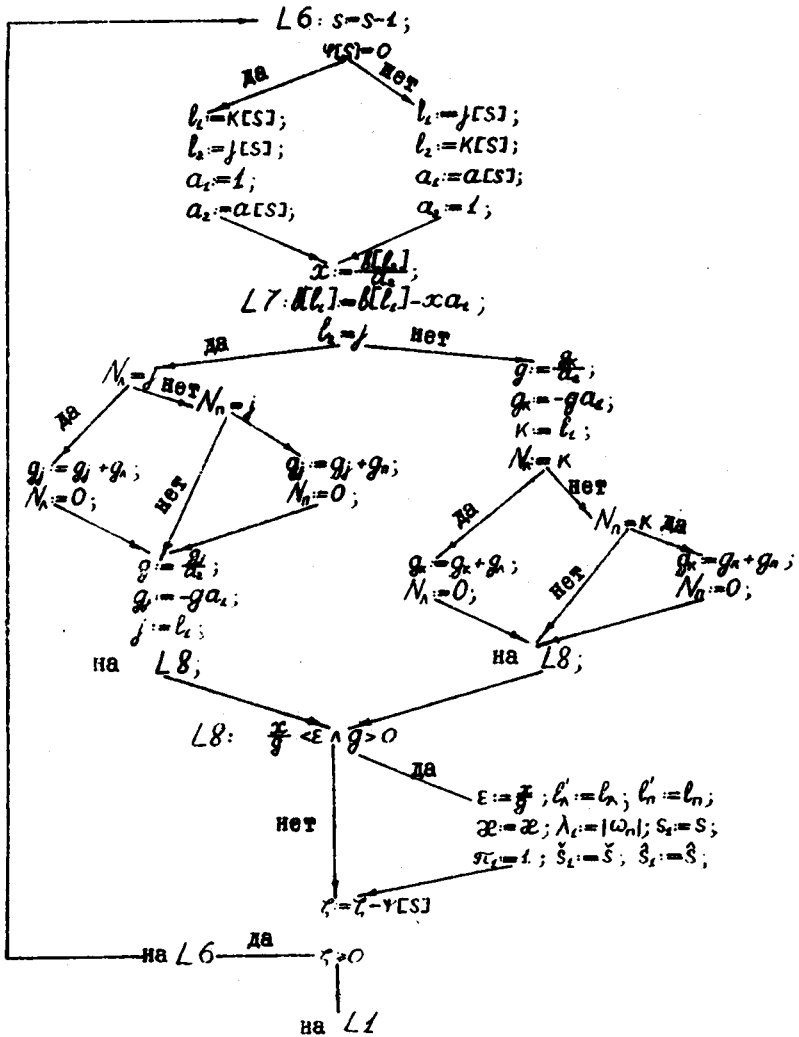
L2:  $\omega_n := \omega_n - 0$ ;  $j := K := K[S]$ ;  
 $\rho_j := \rho_n := 1$ ;  $\mu_j := \mu_n := 0$ ;  
 $\zeta := 1$ ;  $\forall[S] := 1$ ;  $S := S$ ;  $s := S + 1$ ;



(Продолжение схемы)



(Окончание схемы)



$\{-1$  - если левая цепочка примыкает к  $K$  - цепочке.

Аналогично

$$\omega_n = \begin{cases} 1 & \text{— если правая цепочка примыкает к } j \text{ - цепочке;} \\ 0 & \text{— если правая цепочка не примыкает к циклу;} \\ -1 & \text{— если правая цепочка примыкает к } K \text{ - цепочке.} \end{cases}$$

Операторы  $L6-L8$  соответствуют повторному просмотру звеньев цикла для определения коэффициентов разложения.

С целью переупорядочения нового базиса в блоке разложения вместе с номером  $S_i$  исключаемого звена определяются следующие данные:

$l'_n, l'_n$  - число звеньев правой и левой цепочек, стоящих в массиве звеньев после звена  $w_{S_i}$ .

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{— если } w_{S_i} \text{ принадлежит левой цепочке;} \\ 1 & \text{— если } w_{S_i} \text{ принадлежит правой цепочке;} \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{— если } w_{S_i} \text{ принадлежит общей части цепочек;} \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

$$\pi_i = \begin{cases} 0 & \text{— если } w_{S_i} \text{ не принадлежит циклу;} \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того, если  $\pi_i = 1$ , то запоминаются номера первого и последнего звеньев соответствующего цикла;  $\hat{S}_i$  и  $\check{S}_i$ .

Переупорядочение нового базиса. Если  $\pi_i = 0$ , то упорядочению подлежит лишь часть массива звеньев, расположенных после звена  $w_{S_i}$ . При этом главная задача состоит в переупорядочении звеньев левой и правой цепочек. Остальные же звенья достаточно поместить, не меняя их взаимного расположения после звеньев цепочек.

Если  $\alpha_i = 0$ , то порвана одна из цепочек; в случае  $\alpha_i = 1$  - порваны обе цепочки. Звенья каждой из порванных цепочек, следующие в массиве звеньев после звена  $w_{S_i}$ , должны располагаться теперь в обратном порядке (значение переменной  $\psi$  при этом меняется на противоположное) после вводимого звена и звеньев целой цепочки.

Если  $\alpha_i = 1$ , то звенья порванных цепочек образуют новый цикл.

Если звено  $w_{S_i}$  принадлежало некоторому циклу, то предварительно следует изменить взаимное расположение звеньев цикла так, чтобы звено  $w_{S_i}$  было первым в одной из цепочек(9). Выорасывая звено  $w_{S_i}$  и уплотняя массив остальных звеньев, считаем в дальнейшем, что исключаемое звено предшествует остальным звеньям цикла.

Для формального описания алгоритма переупорядочения введем вспомогательный массив звеньев, который в отличие от основного массива  $W$  будем обозначать  $\tilde{W}$ . При этом массивы  $\varphi, \psi, \varepsilon, \alpha, \tilde{j}, \tilde{\kappa}$  имеют смысловое содержание, аналогичное  $\varphi, \psi, \varepsilon, \alpha, j, \kappa$ .

Для переупорядочения базиса просматривается массив звеньев, начиная с последнего звена и кончая исключаемым звеном. При этом звенья левой и правой цепочек вместе с вводимым звеном формируют массив  $\tilde{W}$ . Остальные звенья уплотняем в конец массива  $\tilde{W}$ . По окончании этого процесса сформированная часть массива  $\tilde{W}$  пересылается в  $W$ .

Под  $\tilde{W}[A1] := W[A2]$  в приводимой схеме этого блока понимается составной оператор:

$$\{\varphi[A1] := \varphi[A2]; \psi[A1] := \psi[A2]; \varepsilon[A1] := \varepsilon[A2];$$

$$\alpha[A1] := \alpha[A2]; \tilde{j}[A1] := j[A2]; \tilde{\kappa}[A1] := \kappa[A2]\}.$$

Через  $\tilde{W}[A2]$  обозначается звено с измененным на противоположное значением переменной  $\varphi[A2]$ . Сделаем необходимые пояснения к схеме. Операторы  $Q1, Q2, Q3, Q4$  служат для предварительного переупорядочения массива звеньев цикла, содержащего исключаемое звено  $W_{k_1}$ .

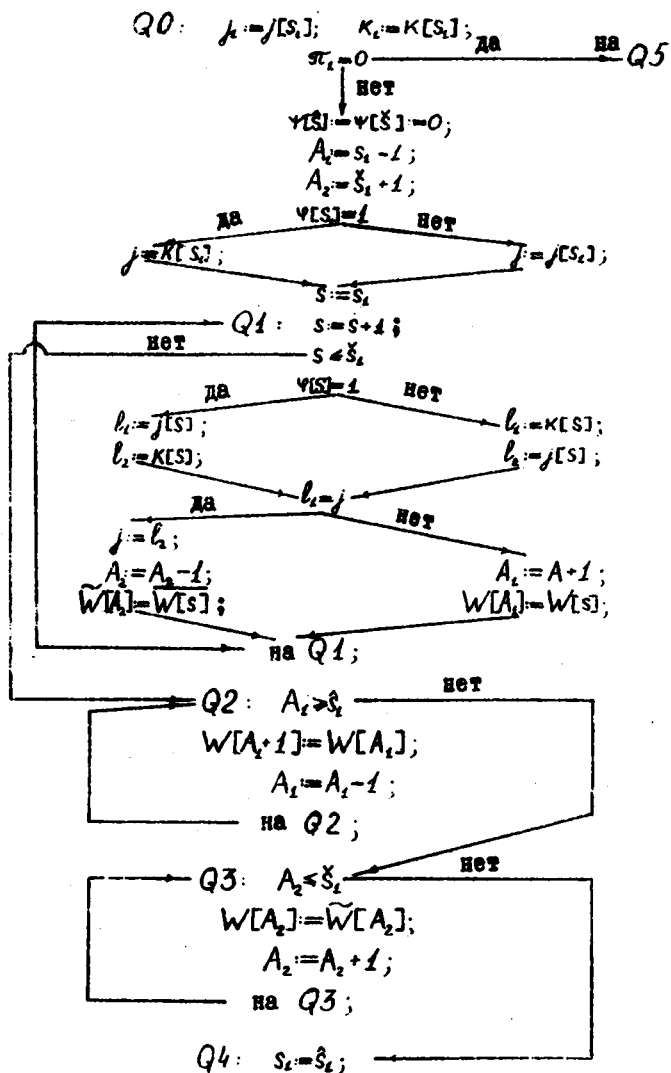
В операторе  $Q5$  определяется значение переменной  $S_2$  — номер вводимого звена в упорядоченном массиве звеньев — и вводимое звено помещается на соответствующее место в массиве  $\tilde{W}$ .

Операторы  $Q6, Q7, Q8$  осуществляют последовательный просмотр звеньев массива  $\tilde{W}$ , формируя из упорядоченных левой и правой цепочек массив  $\tilde{W}$  и уплотняя остальные звенья в конец массива  $\tilde{W}$ . При этом начальные пункты цепочек выбираются так, чтобы левая цепочка была порванной.

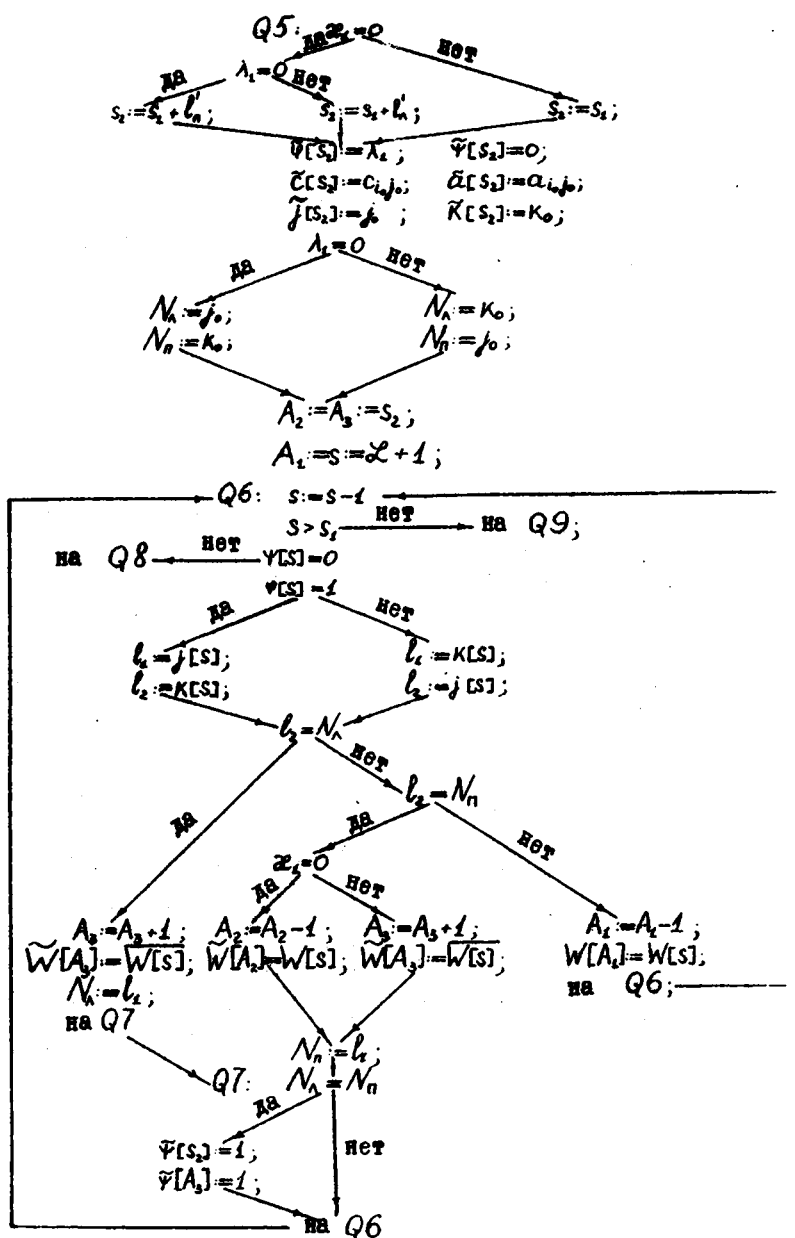
Оператор  $Q9$  осуществляет пересылку необходимой части массива  $\tilde{W}$  в массив  $W$ .

Сокращение малого базиса. В этом блоке производится выбор новой главной переменной блока  $D[k_1]$  ( $k_1$  — вершина исключаемого звена), если исключаемое звено соответствовало главной переменной этого блока (операторы  $M0, M1, M2$ ). Кроме того, если массив звеньев малого базиса содержит  $2n+1$  звено, то отыскивается виская вершина и соответствующий блок исключается из малого базиса; при этом происходит надлежащая перенумерация вершин малого базиса (операторы  $M3-M7$ ).

# Схема блока переупорядочения малого базиса

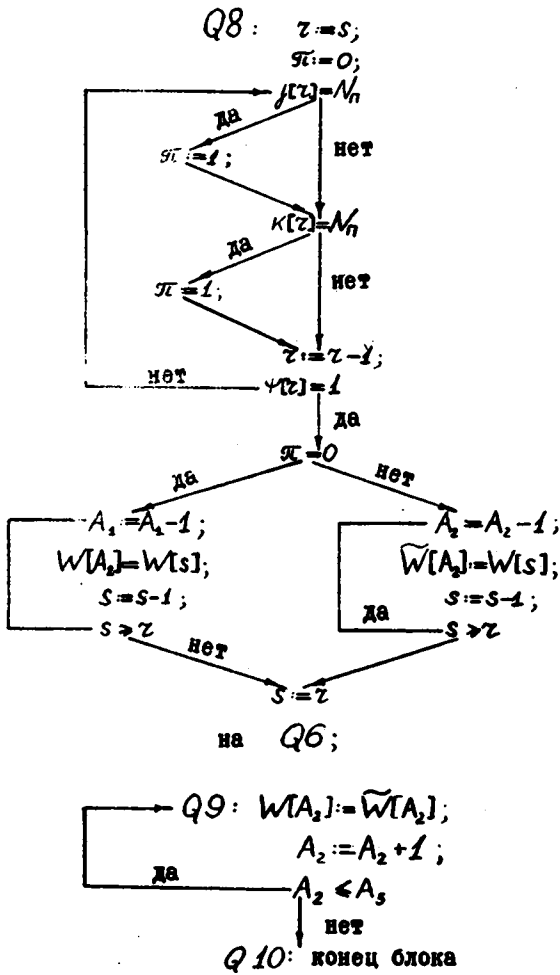


( продолжение схем )

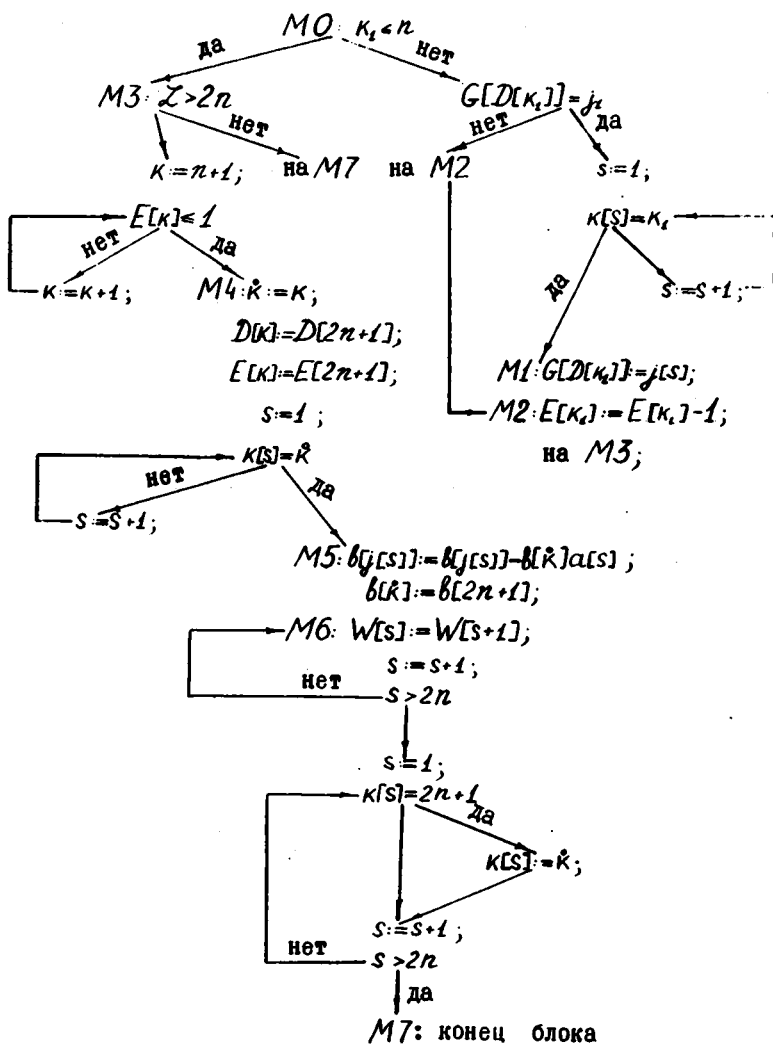




(Окончание схемы)



# Схема блока сокращения малого базиса



#### § 4. Одна конкретная модель загрузки дефицитного оборудования

в качестве примера многоблочной обобщенной транспортной задачи рассмотрим задачу оптимальной загрузки прокатных станов, которая состоит в следующем. Имеется  $n$  прокатных станов, производящих  $P$  сортов прокатной продукции, которая потребляется в  $Q$  районах. Заданы числа:

$T_j$  - фонд горячего времени  $j$ -го стана;

$a_{pj}$  - время, необходимое для производства одной тонны продукции  $p$ -го сорта на  $j$ -м стане;

$b_{pq}$  - объем потребления продукции  $p$ -го сорта в  $q$ -м районе;

$c_{qj}$  - расходы, связанные с транспортировкой одной тонны продукции от  $j$ -го стана в  $q$ -й район.

При оценке закономерностей эффективности загрузки прокатных станов будем учитывать не только транспортный фактор, но и эффект от высвобождения горячего времени станов. Пусть  $P_j$  - эффект от высвобождения единицы горячего времени  $j$ -го стана. Можно принять, например,  $P_j$  пропорциональным среднечасовым производительностям станов. Таким образом, приходим к следующей математической задаче:

**Задача 1.** Найти числа  $x_{pqj}$  и  $y_j$  так, чтобы удовлетворились условия:

$$\sum_{p,q} a_{pj} x_{pqj} + y_j = T_j,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{pqj} = b_{pq},$$

$$x_{pqj} \geq 0,$$

$$y_j \geq 0,$$

$$j=1, 2, \dots, n; \quad p=1, 2, \dots, P; \quad q=1, 2, \dots, Q;$$

и достигался минимум функции

$$(1-\lambda) \sum_{p,q} c_{qj} x_{pqj} + \lambda \sum_j P_j y_j.$$

Здесь  $x_{pqj}$  - количество тонн  $p$ -го сорта, производимого для  $q$ -го района на  $j$ -м стане;  $y_j$  - количество высвобожденного времени на  $j$ -м стане;  $\lambda \in [0, 1]$  - параметр задачи.

Отметим одну особенность сформулированной задачи при  $\lambda = 1$ .

В этом случае транспортные расходы не учитываются и размерность задачи существенно понижается. Действительно, введем новые переменные  $x_{pj} = \sum_q x_{pqj}$  и рассмотрим

**Задачу II:** Минимизировать  $\sum_{j=1}^n p_j y_j$  при условиях:

$$\sum_p a_{pj} x_{pj} + y_j = T_j ,$$

$$\sum_j x_{pj} = b_p , \quad x_{pj} \geq 0 , \quad j=1, \dots, n; \quad p=1, 2, \dots, P.$$

Здесь  $b_p = \sum_j b_{pq}$ .

Задача II является также обобщенной транспортной задачей. После решения этой задачи решение задачи I при  $\lambda = 1$  получается просто, ибо лишь для каждого  $p$  нужно лишь найти числа  $x_{pqj}$  из условий:

$$\sum_j x_{pqj} = x_{pj} ,$$

$$\sum_j x_{pqj} = b_{pq} ,$$

$$x_{pqj} \geq 0 , \quad q=1, 2, \dots, Q, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

то есть речь идет о нахождении допустимого решения обычной транспортной задачи, что, как известно, осуществляется сравнительно легко.

Полученное решение задачи I при  $\lambda=1$  может быть использовано в качестве начального для решения задачи при  $\lambda \neq 1$ , тем более, что очень часто экономически наиболее целесообразные решения получаются именно при значениях  $\lambda$ , близких к единице.

Наконец, остановимся еще на вопросе нахождения начального решения для задачи II. В данном случае для получения достаточно хорошего начального решения можно применить следующую модификацию М - метода Данцига. Полагаем

$$x_{pjp} = b_p ,$$

$$x_{pj} = 0 , \quad j \neq p, \quad p=1, 2, \dots, P,$$

где  $j_p$  такое, что  $a_{pjp} = \min a_{pj}$ . Если оказалось, что  $\sum_p a_{pjp} x_{pjp} \leq T_{j_p}$ , то в качестве базисной переменной используем  $y_{j_p}$ . В противном случае вводим дополнительную переменную  $z_j$ :

$$\sum_p a_{pj} x_{pj} - z_j = T_j.$$

При этом будем минимизировать функцию:

$$\sum_j P_j y_j + M \sum_j z_j.$$

Можно показать, что если в задаче II существует решение, то при достаточно большом значении  $M$  в оптимальном решении видоизмененной задачи  $z_j = 0$ .

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить свою благодарность Г.Ш.Рубинштейну, В.А.Булавскому за постоянное внимание и помощь в работе над этой статьей.

#### Л и т е р а т у р а

1. А.В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, изд. АН СССР, 1959.
2. С. Гасс. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
3. Г.Ш.Рубинштейн. О решении задач линейного программирования большого объема. - Оптимальное планирование, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1964, вып. 2.
4. Р.А. Звягина. Задачи линейного программирования с олочно-диагональными матрицами. Там же.
5. М.К. Гавурин, Г.Ш.Рубинштейн, С.С.Суриш. Об оптимальном использовании средств при выполнении нескольких видов работ (обобщения транспортной задачи) - Сиб. математич. журнал, т. III, 1962, № 4.
6. У.Х. Малков. Алгоритм решения распределительной задачи. - Журнал вычисл. математики и математической физики, 1962, т. II, № 2.
7. В.В. Шкурба. Алгоритм решения одной общей задачи линейного программирования. ДАН УССР, 1962, № 5.
8. М.А. Иковлева. Двухкомпонентная задача линейного программирования. Оптимальное планирование, Новосибирск, изд-во "Наука", Сибирское отделение, вып. 2, 1964.
9. В.А. Булавский. Об одном алгоритме решения транспортной задачи. Там же.

Поступила в редакцию  
20 мая 1968 г.