УДК 512.25 + 519.3

С.М. АНЦЫЗ

АЛГОРИФМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ
(сетевое планирование)

В настоящей работе приводится алгорифм приближенного решения задачи распределения ресурсов в сетевом графике, основанный на специальном методе, предложенном в [I] . Задача формулируется следующим образом.

Пусть дан сетевой график $G(X, U)$ с одной начальной вершиной $a \in X$ и одной конечной вершиной $z \in X$. Каждой работе $(x, y) \in U$ соответствуют неотрицательные величины $\tau(x, y)$ - длительность работы и $S(x, y)$ - интенсивность использования ресурса на этой работе. Задан срок T завершения процесса. σ_0 - средняя интенсивность потребления ресурса в процессе. Для каждого расписания $\alpha = \{\alpha(x, y)$, $(x, y) \in U\}$ можно вычислить $\sigma(t, \alpha)$ - суммарное потребление ресурса в момент времени t . (Обозначения взяты из [I]).

Требуется найти расписание $\{\alpha(x, y)$, $(x, y) \in U\}$, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha(x, y) + \tau(x, y) \leq \alpha(y, v), \quad (x, y) \in U, \quad v >> y, \quad (A)$$

$$\alpha(a, x) \geq 0, \quad x >> a, \quad (B)$$

$$\alpha(x, z) + \tau(x, z) \leq T, \quad x << z \; (T \geq T^*) \quad (C)$$

и доставляющее минимум функционалу:

$$F(\alpha) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\sigma(k, \alpha) - \sigma_0\right]^2$$

(T^* - длина критического пути в сетевом графике).

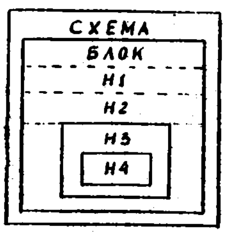
В процессе работы алгорифма строится усредненное расписание $\{\bar{\alpha}(x, y)\}$: принимается, что начало работы (x, y)

распределено равновероятно на интервале $[A(x), B(y)-\tau(x,y)]$, где $A(x)$ –самый ранний, а $B(x)$ –самый поздний сроки наступления события x. Совокупность таких работ составляет множество U. $p_k(x,y)$ – вероятность выполнения работы (x,y) на интервале $[K, K+1]$; $\bar{\sigma}_v(K,\bar{\alpha}) = \sum_{(x,y)\in U} p_k(x,y)\cdot s(x,y)$ – математическое ожидание интенсивности потребления ресурса графиком.

Итак, рассматривается сетевой график, содержащий m событий и n работ. Исходные данные задаются четырьмя массивами: x, y, t и s размерности n. j - ые компоненты каждого из массивов содержат информацию об одной и той же работе (x,y) и соответственно заполняются значениями величин: x –предыдущее событие, y - последующее событие, $\tau(x,y)$ и $s(x,y)$. Дано число E.

В результате работы алгорифма строятся "оптимальное в среднем" расписание $\alpha^* = \{\alpha(x,y), (x,y)\in U\}$ и отвечающие ему значения $\{\sigma(K,\alpha^*), K=1,\dots,T\}$, а затем уплотненное расписание $\alpha^{**} = \{\alpha^{**}(x,y), (x,y)\in U\}$ и отвечающие ему значения $\sigma(K,\alpha^{**})$. Выводятся массивы x, y, t, s и число Ψ – общий объем ресурса, потребляемого графиком; далее для каждого $T\in[T^*, T^*+E]$ выдаются числа T, σ_0 и дважды массивы α и σ. В первый раз эти массивы заполняются, соответственно, значениями величин $\alpha^*(x,y)$ и $\sigma(K,\alpha^*)$, а во второй $\alpha^{**}(x,y)$ и $\sigma(K,\alpha^{**})$. При выдаче j –е компоненты массивов x, y, t, s и α содержат информацию об одной и той же работе.

Структура схемы алгорифма изображается следующим образом:



В первой из четырех основных частей – $H1$ – обрабатывается исходная информация: компоненты массивов x, y, t и s упорядочиваются таким образом, чтобы к. итический путь находился за один просмотр сетевого графика (см. [I]). В $H2$ проводятся некоторые предварительные вычисления,[x)] в ... используемые ...

x) Блоки $H1$ и $H2$ схемы совпадают с блоком $H1$ схемы в [I].

зуемые в програме процедуры, а в $H4$ строится расписание, которое затем уплотняется.

Построение расписания происходит следующим образом. Вначале определяются величины $A(x)$ и $B(x)$ и по ним строятся усредненное расписание $\{\bar{\alpha}(x,y)\ ,\ (x,y)\in U\}$ и отвечающий ему набор $\{\bar{\sigma}_u(\kappa,\bar{\alpha})\}$. На l - м шаге на фоне расписаний $\{\alpha^*(x,y)\ ,\ (x,y)\in U^*\}$, где U^* -множество работ, начала которых зафиксированы, и $\{\bar{\alpha}(x,y)\ ,(x,y)\in V\}$ выбирается значение $\alpha^*(x_0,y_0)$, которое доставляет минимум функционалу:

$$F(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{T}\sum_{\kappa=0}^{T-1}\left[\sigma(\kappa,\tilde{\alpha}) - \sigma_0\right]^2 ;$$

$(\ x_0\ ,\ y_0\ )$ - l -я дуга в списке, а $\sigma(\kappa,\tilde{\alpha}) = \sigma_{u^*}(\kappa,\alpha^*)+\bar{\sigma}_v(\kappa,\bar{\alpha})$. Далее, дуга $(\ x_0\ ,\ y_0\ )$ закрепляется на интервале $[\alpha^*(x_0,y_0)\ ,\ \alpha^*(x_0,y_0)+\tau(x_0,y_0)]$, и величины $A(x)$ изменяются в соответствии с $\alpha^*(x_0,y_0)$. Построение расписания оканчивается, когда U^* совпадает с U.

На l -м шаге уплотнения на фоне расписаний $\{\alpha^{**}(x,y)\ ,\ (x,y)\in U^{**}\}$, где U^{**} - множество работ, начала которых перевычислены, и $\{\alpha^*(x,y), (x,y)\in U^*\}$ выбирается значение $\alpha^{**}(x_0,y_0)$, доставляющее минимум функционалу $F(\tilde{\alpha})$. Здесь

$$\sigma(\kappa,\tilde{\alpha}) = \sigma_{u^{**}}(\kappa,\alpha^{**}) + \sigma_{u^*}(\kappa,\alpha^*) .$$

Операторы $H2, H3, H4$ работают с данным значением параметра T. Величины $A(x), B(x)$ и $\sigma(\kappa,\tilde{\alpha})$ заполняют, соответственно, массивы A, B и σ. Ниже на α - варианте языка АЛГОЛ излагается схема алгорифма.

```
begin
Схема:
   integer m,n ;
    ввод ( m,n ) ;

Блок:
 begin
   integer  a,b,i,j,k,l,q,tl,C,CO,E,T,φ,ψ;
   integer array x,y,t,α[1:n],A,B[1:m];
    real f,F,g,p,sl,σO,Ψ;
    real array s[1:n];

    ввод   (E,x,y,t,s);
```

```
HI:Обработка информации:
  begin
Упорядочение работ:
   for i:=1,...,m do {A[i]:=0; B[i]:=1} ;
   for j:=1,...,n do α[j]:=0;
HII: просмотр списка:       i:=0;
   for j:=1,...,n do {k:=B[x[j]] ; q:=y[j];
      if B[q] ≤ k then {B[q]:=k+1; i:=1}} ;
    if i=1 then go to H11;
вычисление размеров классов:
   for j:=1,...,n do
      {i:=B[y[j]] ; A[i]:=A[i]+1};
   for i:=2,...,m do A[i]:=A[i]+A[i-1];
перестановка работ:
   for j:=1,...,n do
     begin
H12:    if α[j]=1 then go to H13;
        i:=B[y[j]]-1; k:=A[i]+1;
        a:=x[j]; b:=y[j]; tl:=t[j]; f:=s[j];
        x[j]:=x[k]; y[j]:=y[k]; t[j]:=t[k]; s[j]:=s[k];
        x[k]:=a; y[k]:=b; t[k]:=tl; s[k]:=f;
       α[k]:=1; A[i]:=k; go to H12;
H13: end;
Определение общего объема ресурса: Ψ:=0;
   for j:=1,...,n do Ψ :=Ψ+t[j]×s[j];
     вывод     (x,y,t,s, Ψ);
  end H1;
H2: Предварительные вычисления:
  begin
Нахождение критического пути:    T:= 0,
```

```
for i:=1,...,m do A[i]:=B[i]:=0;
for j:=n step -1 until 1 do
   {k:=B[y[j]] +t[j]; i:=x[j];
    if B[i]<k then {B[i]:=k; if T<k then T:=k}};
```

Определение срока завершения процесса:

```
T:=T+E;
```

Определение средней интенсивности:

$$\sigma 0 := \Psi / T \;;$$

Определение поздних сроков:

```
for i:=1,...,m do B[i]:=T-B[i]
end H2;
```

Н3: Процедуры:

```
begin
  real array σ[1:T];
  procedure выч. A(a);
   value a;
```

comment В процедуре перевычисляются значения $A(x)$ с учётом фиксированного значения $A(y_\circ)=a$ для ведущей i - ой работы $(x_\circ, y_\circ) \in U$, $i=y_\circ$;

```
  begin
    if A[i]< a then A[i]:=a;
    for j:=i+1,...,n do
      { k:=A[x[j]] +t[j]; q:=y[j];
       if A[q]<k then A[q]:=k}
  end выч. A ;
  procedure выч.β(φ);
```

comment В массив σ добавляются ($\varphi = +1$) или вычитаются ($\varphi = -1$) усредненные компоненты $\rho_k(x,y) \cdot s(x,y)$, отвечающие данной j - ой работе (x,y) . Значение $\alpha[j]$ совпадает с величиной $A(x)$;

```
  begin
```

```
b:=B[y[j]]+1; a:=α[j]; tl:=t[j];
sl:=s[j]×φ; q:=b-a-tl;
if q=1 then go to H31; f:=sl/q;
if tl<q then {q:=tl; sl:=f×q}; p:=0;
for k:=a+1,...,a+q-1 do
  {p:=p+f; σ[k]:=σ[k]+p};
for k:=b-q+1,...,b-1 do
  {σ[k]:=σ[k]+p; p:=p-f};
H31: for k:=a+q,...,b-q do σ[k]:=σ[k]+sl
end выч. σ;
procedure cr (ψ);
```

comment Основная процедура, управляющая вычислением "оптимального в среднем" ($\psi = 0$) или уплотненного ($\psi = 1$) расписания. Для работы (x, y), длительность которой $\tau(x,y) = 0$, вычисления не производятся, для неё $\alpha(x,y) = B(y)$;

```
begin
  for l:=1,...,n do
  begin
    if t[l]≠0 then
    begin
```

Исключение ведущей работы из усредненного расписания:

```
      if ψ=0 then {j:=l; выч. σ(-1)};
```

Фиксация параметров ведущей работы:

```
      i:=y[l]; tl:=t[l]; sl:=s[l];
      a:=α[l]; b:=B[i]-tl;
```

Исключение ведущей работы из "оптимального в среднем" расписания:

```
      if ψ=1 then
        {for k:=1,...,tl do σ[a+k]:=σ[a+k]-sl;
         a:=A[x[l]]};
```

comment Определяется начало выполнения ведущей работы СО, дающее минимум $F(\tilde{\alpha})$;

```
CO:=a; p:=0; FO:=sl-σ0;
   for C:=a+1,...,b do
     {f:=σ[C]+FO; F:=σ[C+tl]-σ0;
      p:=p+f↑2+F↑2; f:=f-sl; F:=F+sl;
      p:=p-f↑2-F↑2; if p>0 then{CO:=C; p:=0}} ;
```

Окончательное размещение ведущей работы:

```
   for k:=1,...,tl do σ[CO+k]:=σ[CO+k]+sl;
```

comment Перевычисляются значения $A(x)$. Если $\psi=0$ строится новое усредненное расписание $\bar{\alpha}(x,y)$ и изменяется соответствующий ему набор $\bar{\sigma}(\kappa,\bar{\alpha})$ для $l+1,\ldots,n$ -ой работ (x,y) ;

```
   if ψ=0  then
    { выч.A(CO+tl);
      for j:=l+1,...,n do  {if t[j]≠0  then
        {if α[j]≠A[x[j]]  then
        {  выч. σ (-1); α[j]:=A[x[j]] ;выч. σ(1)}}}}
   else if CO<α[l]  then  {A[i]:=0;
      for j:=1,...,n do  { if. y[j]=i  then
         {k:=α[j]+t[j]; if k>A[i]  then A[i]:=k}}}
     else if CO+tl>A[i]  then A[i]:=CO+tl;
```

Закрепление начала ведущей работы:

```
  α[l]:=CO
  end
 end  цикла ;
end cr;
procedure выч. Fp;
```

comment Вычисляются $F=F(\tilde{\alpha})$ и $p=\max_{\kappa}\sigma(\kappa,\alpha)$. Выводятся значения $\sigma(\kappa,\alpha),\alpha(x,y),p,F$;

```
begin
  F:=p:=0;
 for k:=1,...,T do  {F:=F+ (σ[k]-σ0)↑2;
    if σ[k]>p  then   p:=σ[k]};  F:=F/T;
```

```
    вывод  (σ,α,p,F)
  end выч. Fp;
H4: Построение расписаний:
 begin
Чистка полей:
  for k:=1,...,T do σ[k]:=0;
Построение исходного усредненного расписания:
  i:=1; l:=0; выч. A(0);
  for j:=1,...,n do
   { if t[j]≠0  then {α[j]:=A[x[j]]; выч.σ(1)}
     else α[j]:=B[y[j]] };
Построение "оптимального в среднем" расписания.
  cr(0);
Вывод результата:
  вывод (T,σ0); выч. Fp;
Изменение границ:
  for j:=1,...,n do  {i:=x[j]; if B[i]>α[j] then B[i]:=α[j]};
Уплотнение расписания:
  cr(1);
Вывод результата:
 выч.  Fp;
Изменение параметра:
  if E>0  then  {E:=E-1; go to H2}
 end H3 и H4;
 end БЛОКА ;
 end СХЕМЫ ;
```

Литература

1. С.М.Анцыз, Л.Т.Петрова. Задачи распределения ресурсов в сетевом графике.- Оптимальное планирование, вып.7, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, 1967.

Поступила в редакцию
15.XI.1967 г.