УДК 512.25/26 + 513.88

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ СТРОГО ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

В.А.Булавский, Г.Ш.Рубинштейн

Исследуемые в статье так называемые строго выпуклые отображения векторных пространств в предупорядоченные множества представляются естественным обобщением понятия строго выпуклой (точнее, строго квазивыпуклой) функции. В качестве приложения рассматривается вопрос о сходимости минимальных элементов в одной шкале норм.

§ I. Определение и некоторые свойства строго выпуклых отображений

Отображение f выпуклого множества M вещественного векторного пространства в предупорядоченное множество P назовем строго выпуклым, если при любых двух (различных) $x, y \in M$ и $t \in (0,1)$ имеет место по крайней мере одно из отношений:

$$f(x+t(y-x)) < f(x), \quad f(x+t(y-x)) < f(y),$$

где символ $<$ обозначает отношение предшествования в P, порождаемое заданным предпорядком (отношением мажорирования) $\leqslant$.

В частности, в качестве f может рассматриваться тождественное отображение множества M на себя, если оно само предупорядочено.

Совокупность всевозможных строго выпуклых отображений выпуклого множества M в различные предупорядоченные множества будем обозначать через $F(M)$.

Остановимся на некоторых свойствах отображений $f \in F(M)$

I^0.Если отображение f не является строго возрастающим на отрезке $[x, y] \subset M$, то найдется отличная от x точка $y' \in [x, y]$ такая, что $f(x)$ не предшествует $f(y')$.

Действительно, если найдутся точка $u \in [x, y]$ и отличная от нее точка $v \in [x, u]$ такие, что $f(v)$ не предшествует $f(u)$, то либо $x = v$, либо $f(v) < f(x)$. В качестве искомой точки y' можно взять в первом случае точку u, а во втором — точку v.

2°. Если z - внутренняя точка отрезка $[x, y] \subset M$, то f строго возрастает хотя бы на одном из отрезков $[z, x]$ и $[z, y]$.

В противном случае нашлись бы отличные от z точки $x' \in [z, x]$, $y' \in [z, y]$ такие, что элемент $f(z)$ не предшествует ни $f(x')$, ни $f(y')$. А это невозможно, так как z -внутренняя точка отрезка $[x', y']$.

3°. При любых $x, y \in M$ найдется (очевидно, единственная) точка $w \in [x, y]$ такая, что отображение f строго возрастает на обоих полуоткрытых отрезках $(w, x]$ и $(w, y]$.

Через K_x обозначим множество точек $z \in [x, y]$ таких, что f монотонно возрастает на $[z, x]$. Аналогично построим множество K_y. Эти множества, очевидно, непустые, выпуклые и имеют не более одной общей точки, причем $K_x \cup K_y = [x, y]$. В качестве искомой точки w следует принять общую граничную точку множеств K_x и K_y.

Ввиду свойства 3° каждое строго выпуклое отображение f порождает отображение $\hat{f}$ произведения $M \times M$ в M, сопоставляющее паре $(x, y) \in M \times M$ соответствующую точку w отрезка $[x, y]$.

Через $F_0(M)$ обозначим совокупность отображений $f \in F(M)$, каждое из которых на любом отрезке $[x, y]$ в точке $\hat{f}(x, y)$ достигает минимума. Такие отображения, очевидно, строго возрастают на замкнутых отрезках $[\hat{f}(x, y), x]$ и $[\hat{f}(x, y), y]$. Для фиксированного отображения $f \in F(M)$ рассмотрим лебеговы множества:

$$M_x = \{x' \in M : f(x') < f(x)\}.$$

Непосредственно из определения строго выпуклого отображения следует, что все эти множества и их объединения (в любом числе) являются выпуклыми. Дальнейшие свойства лебеговых множеств излагаются в предположении, что рассматриваемое отображение f принадлежит $F_0(M)$.

4°. Пересечение любых двух лебеговых множеств непусто и, следовательно, содержит некоторое лебегово множество.

Действительно, при любых $x, y \in M$ точка $\hat{f}(x, y) \in M_x \cap M_y$

5°. Если аффинные носители L_x и L_y множеств M_x и M_y не совпадают, то одно из этих лебеговых множеств содержится во втором.

Не умаляя общности, можно считать, что найдется $u \in M_x \setminus L_y$. Тогда если бы при некотором $v \in M_y$ точка $\hat{f}(u,v)$ не совпадала с v, то точка u принадлежала бы L_y, что противоречит выбору u. Следовательно, каждая точка $v \in M_y$ совпадает с $\hat{f}(u,v)$ и потому принадлежит M_x.

6°. Если среди лебеговых множеств имеются не более чем счетномерные, то в M существует монотонно минимизирующая последовательность, т.е. такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$, $n=1,2,\dots$, и для любого $x \in M$, начиная с некоторого номера, $f(x_n) \leqslant f(x)$.

Для доказательства рассмотрим сначала случай, когда среди аффинных носителей лебеговых множеств имеются конечномерные. Тогда среди них найдется наименьший, который мы обозначим через L. Если L нульмерно, т.е. состоит из одной точки, то в этой точке отображение f достигает минимума на M. Если же L содержит более одной точки, то зафиксируем некоторое счетное множество S, плотное в $L \cap M$. При этом каждое лебегово множество содержит подмножество, открытое в L, и потому пересекается с S.

Допустим теперь, что среди лебеговых множеств нет конечномерных, но имеется счетномерное множество M_{x_0}. Оно представимо в виде объединения счетного числа конечномерных выпуклых множеств $M^{(i)}$, $i=1,2,\dots$. По доказанному каждое из множеств $M^{(i)}$ содержит одноточечное или счетное подмножество $S^{(i)}$ такое, что при любом $x \in M^{(i)}$ лебегово множество $M_x^{(i)}$ пересекается с $S^{(i)}$. Тогда множество $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^{(i)}$ при любом $x \in M$ пересекается с M_x. Действительно, каково бы ни было $x \in M$, найдется $x' \in M_x \cap M_{x_0}$ и при некотором i получим

$$x' \in M^{(i)}, \quad M_{x'}^{(i)} \subset M_x, \quad M_{x'}^{(i)} \cap S^{(i)} \neq \varnothing .$$

Следовательно, $M_x \cap S \neq \varnothing$.

Таким образом, при наличии не более чем счетномерного лебегова множества существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что для каждого $x \in M$ при некотором n выполняется соотношение $f(y_n) \leqslant f(x)$.

Для построения искомой минимизирующей последовательности достаточно положить

$$x_1 = y_1, \quad x_n = \hat{f}(x_{n-1}, y_n), \quad n = 2,3,\dots .$$

§ 2. Строго выпуклые предпорядки

Предпорядок $\preccurlyeq$ на выпуклом множестве M назовем строго выпуклым, если он индуцируется некоторым отображением $f \in F(M)$.

В этом параграфе везде, где не оговорено противное, предполагается, что рассматриваемые строго выпуклые предпорядки индуцируются отображениями из $F_o(M)$.

Через $\hat{F}_o(M)$ обозначим множество отображений $M \times M$ в M, порождаемых отображениями из $F_o(M)$, т.е. таких отображений φ, что $\varphi = \hat{f}$ для некоторого $f \in F_o(M)$.

Для каждого $\varphi \in \hat{F}_o(M)$ через R_φ обозначим множество предпорядков, индуцируемых отображениями $f \in F_o(M)$, для которых $\hat{f} = \varphi$. Предпорядки из одного и того же R_φ будем называть эквивалентными.

1°. В каждом классе R_φ эквивалентных предпорядков имеется минимальный предпорядок, в котором точка $x \in M$ мажорируется точкой $y \in M$ в том и только том случае, если существуют точки $z_o, z_1, \ldots, z_{r+1} \in M$ такие, что

$$z_o = x, \quad z_{r+1} = y, \quad z_s = \varphi(z_s, z_{s+1}), \; s = 0, 1, \ldots, r. \quad (I)$$

Этот минимальный предпорядок является отношением порядка в M.

Доказательство. Для точек $x, y \in M$ условимся писать $x \preccurlyeq y$, если при некоторых $z_o, z_1, \ldots, z_{r+1} \in M$ имеет место (I). Введенное отношение, как нетрудно видеть, является предпорядком в M. При этом если $x \preccurlyeq y$, то x мажорируется y в любом предпорядке из R_φ. Более того, если $x \preccurlyeq y$ и $x \neq y$, то в (I) можно считать все z_s различными, и потому в любом предпорядке из R_φ каждая точка z_s, $s = 0, 1, \ldots, r$, предшествует точке z_{s+1}. Таким образом, при $x \preccurlyeq y$ и $x \neq y$ точка x предшествует y в любом предпорядке из R_φ. Отсюда следует, что построенное отношение $\preccurlyeq$ является порядком в M.

Остается проверить, что порядок $\preccurlyeq$ принадлежит R_φ. Рассмотрим тождественное отображение f множества M в себя. В силу определения построенного порядка $\preccurlyeq$ при любых $x, y \in M$ отображение f строго возрастает на замкнутых отрезках $[\varphi(x,y), x]$ и $[\varphi(x,y), y]$. А это означает, что $f \in F_o(M)$ и $\hat{f} = \varphi$.

2°. Каково бы ни было $\varphi \in \hat{F}_o(M)$, в R_φ имеются максимальные предпорядки, каждый из которых является совершенным.

Доказательство. Существование максимальных предпорядков в R_φ является простым следствием леммы Цорна. Покажем, что если предпорядок $\preccurlyeq$ из R_φ не является совершенным

то он не может быть максимальным в R_φ. Действительно, в этом случае найдутся несравнимые точки $x_0, y_0 \in M$. Определим новый предпорядок $\preccurlyeq'$, полагая $x \preccurlyeq' y$, во-первых, если $x \preccurlyeq y$, во-вторых, если $x \preccurlyeq x_0$ и $y_0 \preccurlyeq y$. Покажем, что соотношение $x \prec y$ влечет $x \prec' y$. Прежде всего в силу определения нового предпорядка $x \prec y$ влечет $x \preccurlyeq' y$. Если бы оказалось также $y \preccurlyeq' x$, то имели бы

$$y_0 \preccurlyeq x \prec y \preccurlyeq x_0$$

и точки x_0 и y_0, вопреки предположению, были бы сравнимы. Из доказанного следует, что предпорядок $\preccurlyeq'$ принадлежит R_φ и, следовательно, предпорядок $\preccurlyeq$ не является максимальным, что и требовалось доказать.

С введенным отношением эквивалентности предпорядков согласуется следующее понятие сходимости.

Будем говорить, что направленное семейство предпорядков $\preccurlyeq_\alpha$ из R_{φ_α}, определенных на M, сходится к предпорядку $\preccurlyeq$ из R_φ, если при всех $x, y \in M$ направленное семейство точек $\varphi_\alpha(x,y)$ сходится к точке $\varphi(x,y)$.

Рассмотрим теперь направленное семейство совершенных предпорядков $\preccurlyeq_\alpha$, определенных на одном и том же множестве M, и предположим, что эти предпорядки удовлетворяют следующему условию установления.

(1) Каковы бы ни были $x, y \in M$, либо, начиная с некоторого α, имеет место соотношение $x \preccurlyeq_\alpha y$, либо, начиная с некоторого α, справедливо соотношение $y \preccurlyeq_\alpha x$.

Тогда в M можно рассмотреть совершенный предпорядок $\preccurlyeq$, полагая $x \preccurlyeq y$, если $x \preccurlyeq_\alpha y$, начиная с некоторого α.

Т е о р е м а 1. Если предпорядки $\preccurlyeq_\alpha$ являются строго выпуклыми, то построенный предпорядок $\preccurlyeq$ также строго выпуклый. При этом для функций $f_\alpha \in F(M)$ и $f \in F(M)$, индуцирующих предпорядки $\preccurlyeq_\alpha$ и $\preccurlyeq$, справедливо соотношение

$$\lim \hat{f}_\alpha(x,y) = \hat{f}(x,y) \text{ при всех } x, y \in M. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что предпорядок $\preccurlyeq$ является строго выпуклым. Если бы это было не так, то на некотором отрезке $[x, y] \subset M$ нашлась бы внутренняя точка z такая, что $x \preccurlyeq z$ и $y \preccurlyeq z$. Но тогда при некотором α имели бы: $x \preccurlyeq_\alpha z$ и $y \preccurlyeq_\alpha z$. А это противоречит строгой выпуклости предпорядка $\preccurlyeq_\alpha$.

Остается проверить соотношение (2). Каковы бы ни были отличная от $\hat{f}(x,y)$ точка $u \in [\hat{f}(x,y), x]$ и другая точка $u' \in [\hat{f}(x,y), u]$, начиная с некоторого α, $u' \preccurlyeq_\alpha u$ и, следовательно,

$\hat{f}_\alpha(x,y)\in[u,y]$. Точно так же, если точка $v\in[\hat{f}(x,y),y]$ отлична от $\hat{f}(x,y)$, то $\hat{f}_\alpha(x,y)\in[v,x]$, начиная с некоторого α. Отсюда непосредственно следует (2).

Доказанная теорема позволяет сформулировать следующий

Признак сходимости. Если направленное семейство предпорядков $\preccurlyeq_\alpha$ из R_{φ_α} удовлетворяет условию (1) и соответствующий предпорядок $\preccurlyeq$ принадлежит некоторому R_φ, то предпорядки $\preccurlyeq_\alpha$ сходятся к предпорядку $\preccurlyeq$.

§ 3. Примеры сходящихся предпорядков

В рассматриваемых примерах доказательство сходимости предпорядков и установление предельного предпорядка опирается на приведенный в предыдущем параграфе признак сходимости. Прежде всего проверяется условие (1) и находится порождаемый им строго выпуклый совершенный предпорядок. Для доказательства сходимости к нему (следовательно, и к любому эквивалентному предпорядку) рассматриваемого направленного семейства остается проверить, что в этом предпорядке на каждом отрезке $[x,y]$ имеется минимальный элемент. Для проверки этого факта иногда оказывается полезным следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть строго выпуклый предпорядок $\preccurlyeq$ в R^n индуцируется непрерывным отображением f в неотрицательный гипероктант P векторного пространства R^q, в котором введено лексикографическое упорядочение. Если при этом для любого множества точек из P с ограниченной первой компонентой полный прообраз в R^n является ограниченным, то в каждом непустом замкнутом множестве $M\subset R^n$ имеется минимальный элемент.

Доказательство. Пусть $M\subset R^n$ - непустое замкнутое множество и x_0 - некоторая его точка. Обозначим через Q множество точек $a\in P$, у которых первая компонента не превосходит первой компоненты точки $f(x_0)$, и положим $M'=M\cap f^{-1}(Q)$. Ввиду компактности $f^{-1}(Q)$ и замкнутости M, множество M', а следовательно, и множество $f(M')$ компактны. Поэтому в множестве $f(M')\subset P$ имеется лексикографически минимальная точка. В качестве искомой может быть принята любая точка из её прообраза, принадлежащая множеству M.

Рассмотрим теперь предпорядки $\preccurlyeq_p$ в R^n, индуцируемые функциями

$$f_p(x)=\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p,\quad p\in(1,+\infty),\tag{3}$$

и докажем их сходимость при $p\to 1$ и $p\to+\infty$. Легко видеть, что функции (3) принадлежат $F_0(R^n)$. Проверим, что для любых

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ найдется $p_0\in(1,+\infty)$ такое, что либо для всех $p\in(1,p_0)$

$$f_p(x)\leqslant f_p(y), \tag{4}$$

либо для всех этих p

$$f_p(y)< f_p(x). \tag{5}$$

Полагая $p=1+\varepsilon$, имеем:

$$f_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\sum_{j=1}^{n}|x_j|(\ln|x_j|)^k,\quad f_p(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\sum_{j=1}^{n}|y_j|(\ln|y_j|)^k.$$

А это означает, что если последовательность

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}|x_j|\,(\ln|x_j|)^k\right\}_{k=0}^{\infty} \tag{6}$$

лексикографически не превосходит последовательность

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}|y_j|\,(\ln|y_j|)^k\right\}_{k=0}^{\infty},$$

то при некотором $p_0\in(1,+\infty)$ для всех $p\in(1,p_0)$ имеет место (4). В противном случае при p, достаточно близких к 1, имеет место (5).

Через f обозначим отображение R^n в лексикографически упорядоченное множество последовательностей, сопоставляющее каждому $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ последовательность (6). Покажем, что $f\in F_0(R^n)$, т.е. на каждом отрезке $[x^\circ,y^\circ]$ отображение достигает минимума. Ввиду выпуклости функции $\sum_{j=1}^{n}|x_j|$, множество точек отрезка $[x^\circ,y^\circ]$, в которых эта функция достигает минимума, является замкнутым отрезком $[u,v]$, причем компоненты векторов $x\in[u,v]$ не меняют знаков. Ввиду этого функция $\sum_{j=1}^{n}|x_j|\ln|x_j|$ строго выпукла на $[u,v]$ и, следовательно, достигает минимума в единственной точке отрезка $[u,v]$. В этой точке, очевидно, достигает минимума на отрезке $[x^\circ,y^\circ]$ также отображение f.

В силу признака сходимости предпорядки $\leqslant_p$ при $p\to 1$ сходятся к предпорядку, индуцируемому отображением f.

Остается заметить, что из приведенных рассуждений следует эквивалентность указанного предельного предпорядка с предпорядком $\leqslant_1$, индуцируемым отображением f_{1+0}, сопоставляющим каждому $x\in R^n$ пару

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|,\ \sum_{j=1}^{n}|x_j|\ln|x_j|\right)$$

в множестве лексикографически упорядоченных пар вещественных чисел.

Таким образом, предпорядки $\preccurlyeq_p$ при $p \to 1$ сходятся к предпорядку $\preccurlyeq_1$. При этом отображение $f_{1,0}$, как легко видеть, удовлетворяет условиям леммы I, и потому в любом непустом замкнутом множестве $M \subset R^n$ имеется элемент, минимальный в предпорядке $\preccurlyeq_1$.

Проверим теперь сходимость предпорядков $\preccurlyeq_p$ при $p \to +\infty$. Для этого рассмотрим отображение f_∞, сопоставляющее каждому $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вектор $f_\infty(x) = (|x_{j_1}|, |x_{j_2}|, \dots, |x_{j_n}|)$, где $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ – такая перестановка набора $\mathcal{J} = (1, 2, \dots, n)$, что

$$|x_{j_1}| \geq |x_{j_2}| \geq \dots \geq |x_{j_n}| .$$

В множестве значений отображения f_∞ введем лексикографическое упорядочение.

Легко видеть, что при $f_\infty(x) < f_\infty(y)$, начиная с некоторого p,

$$f_p(x) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p = f_p(y) .$$

На основании теоремы I заключаем, что предпорядок $\preccurlyeq_\infty$, индуцируемый отображением f_∞, является строго выпуклым. Для доказательства сходимости к нему предпорядков $\preccurlyeq_p$ при $p \to \infty$ остается проверить, что отображение f_∞ на любом отрезке $[x, y]$ достигает минимума, а для этого достаточно показать, что отображение f_∞ удовлетворяет условиям леммы I.

Отображение f_∞ можно рассматривать как суперпозицию двух отображений, первое из которых каждому $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ сопоставляет вектор $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, а второе переводит этот вектор в вектор $(|x_{j_1}|, |x_{j_2}|, \dots, |x_{j_n}|)$, где уже $|x_{j_1}| \geq |x_{j_2}| \geq \dots \geq |x_{j_n}|$. Непрерывность первого из этих отображений, а также выполнение для f_∞ условия ограниченности фигурирующего в лемме I полного прообраза в данном случае очевидны. Непрерывность же второго отображения, следует из того, что при этом отображении евклидово расстояние между точками не увеличивается.

Таким образом, последовательность предпорядков $\preccurlyeq_p$ при $p \to \infty$ сходится к предпорядку $\preccurlyeq_\infty$, и любое замкнутое множество $M \subset R^n$ содержит элемент, минимальный в предпорядке $\preccurlyeq_\infty$.

§ 4. Приложение к исследованию сходимости минимальных элементов в одной шкале норм

В этом параграфе доказываются следующие утверждения.

Т е о р е м а 2. Каково бы ни было непустое выпуклое замкнутое множество $M \subset R^n$, элементы $x(M,p)$, на которых достигают минимума нормы

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (1, +\infty), \tag{7}$$

при $p \to 1$ сходятся к минимальному элементу x° множества M в строго выпуклом предпорядке $\leqslant_1$, определенном в предыдущем параграфе.

Т е о р е м а 3[x]. Для любого непустого выпуклого многогранного множества[xx] $M \subset R^n$ элементы $x(M,p)$, на которых достигают минимума нормы (7), при $p \to +\infty$ сходятся к минимальному элементу x° множества M в строго выпуклом предпорядке $\leqslant_\infty$, введенном в предыдущем параграфе.

Прежде всего, непосредственно из определения следует, что в строго выпуклом предпорядке каждое выпуклое множество имеет не более одного минимального элемента. Для фигурирующих в приведенных теоремах предпорядков минимальные элементы, как было показано выше, существуют в любом непустом замкнутом множестве. Кроме того, точки $x(M,p)$, $p \in (1, +\infty)$, образуют ограниченное семейство. Действительно,

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j(M,p)| \leqslant \|x(M,p)\|_p \leqslant \|x^\circ\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j^\circ| .$$

Поэтому для доказательства приведенных теорем, достаточно показать, что в каждой из них никакая отличная от x° точка y° из замкнутого множества M не может являться предельной для соответствующего направленного семейства точек.

Учитывая сказанное, теорема 2 непосредственно вытекает из следующей леммы.

Л е м м а 2. Если x° - минимальный элемент выпуклого множества $M \subset R^n$ в предпорядке $\leqslant_1$, то какова бы ни была отличная от x° точка $y^\circ \in M$, найдется окрестность S точки y° и $p_\circ \in (1, +\infty)$ такие, что при всех $y \in S \cap M$ и $p \in (1, p_\circ)$

---

x) Для случая, когда многогранное множество M является аффинным многообразием, эта теорема доказана Б.С.Митягиным [I] без привлечения понятия строго выпуклых предпорядков.

xx) То есть пересечения конечного числа замкнутых полупространств.

$$\| y \|_p > \| x^\circ \|_p .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как предпорядок $\preccurlyeq_1$ строго выпуклый и x° – минимальная точка, то $x^\circ \preccurlyeq_1 y^\circ$. А это означает, что пара $\left(\sum_{j=1}^n |x_j^\circ|, \sum_{j=1}^n |x_j^\circ| \, \ln |x_j^\circ|\right)$ лексикографически предшествует паре $\left(\sum_{j=1}^n |y_j^\circ|, \sum_{j=1}^n |y_j^\circ| \ln |y_j^\circ|\right)$.

Допустим сначала, что $\sum_{j=1}^n |x_j^\circ| < \sum_{j=1}^n |y_j^\circ|$. Тогда из очевидного соотношения

$$\lim_{p \to 1} \| x \|_p = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

следует существование $p_0 \in (1, +\infty)$ и $\alpha > 0$ таких, что при $p \in (1, p_0)$

$$\| y^\circ \|_p > \| x_p^\circ \| + \alpha .$$

Поэтому при $p \in (1, p_0)$

$$\| y \|_p > \| y^\circ \|_p - \| y - y^\circ \|_p > \| x^\circ \|_p + \alpha - \sum_{j=1}^n |y_j - y_j^\circ|$$

и потому при $\sum_{j=1}^n |y_j - y_j^\circ| < \alpha$ оказывается $\| y \|_p > \| x^\circ \|_p$.

Если же $\sum_{j=1}^n |x_j^\circ| = \sum_{j=1}^n |y_j^\circ|$, то $\sum_{j=1}^n |x_j^\circ| \ln |x_j^\circ| < \sum_{j=1}^n |y_j^\circ| \ln |y_j^\circ|$, и $\sum_{j=1}^n |y_j| \geq \sum_{j=1}^n |x_j^\circ|$ для любого $y \in M$. Далее, найдутся положительные числа α и c и окрестность S точки y° такие, что

$$\inf_{y \in S} \sum_{j=1}^n |y_j| \ln |y_j| > \sum_{j=1}^n |x_j^\circ| \ln |x_j^\circ| + \alpha ,$$

$$\sup_{p' \in (1,2)} \sum_{j=1}^n |x_j^\circ|^{p'} (\ln |x_j^\circ|)^2 < c .$$

Тогда для $y \in S \cap M$ и $p \in (1,2)$ при некотором $p' \in (1, p)$

$$(\| y \|_p)^p - (\| x^\circ \|_p)^p = \left(\sum_{j=1}^n |y_j| - \sum_{j=1}^n |x_j^\circ|\right) + (p-1)\left(\sum_{j=1}^n |y_j| \ln |y_j| - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^n |x_j^\circ| \ln |x_j^\circ|\right) + \frac{(p-1)^2}{2}\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^{p'} (\ln |y_j|)^2 - \sum_{j=1}^n |x_j^\circ|^{p'} (\ln |x_j^\circ|)^2\right) >$$
$$> (p-1)\alpha - \frac{(p-1)^2}{2} c ,$$

и потому при $0 < p - 1 < \min\left\{1, \frac{2\alpha}{c}\right\}$ и $y \in S \cap M$

$$\| y \|_p > \| x^\circ \|_p .$$

Лемма доказана.

Теорема 3 является следствием лемм 3 и 4.

Л е м м а 3. Если M – аффинное многообразие в R^n и точка $y^\circ \in M$ не совпадает с минимальной в предпорядке $\preccurlyeq_\infty$

точкой x°, то найдутся $p_\circ \in (1,+\infty)$ и окрестность S точки y° такие, что при $p > p_\circ$ для любого $y \in S \cap M$

$$\| y \|_p > \| x^\circ + y - y^\circ \|_p . \qquad (8)$$

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать, что для минимальной точки $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$

$$x_1^\circ \geq x_2^\circ \geq \dots \geq x_n^\circ \geq 0$$

и при этом если $x_j^\circ = x_{j+1}^\circ$, то $y_j^\circ \geq y_{j+1}^\circ$, а если $x_j^\circ = 0$, то $y_j^\circ \geq 0$. К этому случаю можно прийти путем перенумерации и изменения направления некоторых осей.

Допустим теперь, что

$$x_j^\circ = y_j^\circ, \quad j = 1, 2, \dots, \tau - 1, \quad x_\tau^\circ \neq y_\tau^\circ ,$$

и s – максимальный номер, при котором $x_s^\circ = x_\tau^\circ$. Покажем, что $y_\tau^\circ > x_\tau^\circ$. Если $x_\tau^\circ = 0$, то y_τ°, в силу сделанного выше предположения, неотрицателен и, следовательно, больше, чем x_τ°. Если же при $x_\tau^\circ > 0$ оказалось бы, что $y_\tau^\circ < x_\tau^\circ$, то тем более $y_j^\circ \leq y_\tau^\circ < x_\tau^\circ = x_j^\circ$ при $\tau \leq j \leq s$. Поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для точки $x = x^\circ + \varepsilon(y^\circ - x^\circ) \in M$ имели бы

$$x_j = x_j^\circ, \ j = 1, 2, \dots, \tau - 1, \ \ 0 < x_j < x_j^\circ, \ \tau \leq j \leq s, \ |x_j| < x_\tau^\circ, \ j > s ,$$

что противоречит минимальности точки x°. Введем теперь $\delta = \frac{1}{3}(y_\tau^\circ - x_\tau^\circ) > 0$ и рассмотрим точки x^* и y^* из R^n с компонентами:

$$x_j^* = \begin{cases} 0 \text{ при } 1 \leq j < \tau , \\ x_j^\circ + \delta \text{ при } j \geq \tau , \end{cases} \qquad y_j^* = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq \tau , \\ y_\tau^\circ - \delta \text{ при } j = \tau . \end{cases}$$

Поскольку в предпорядке $\preccurlyeq_\infty$ точка x^* предшествует точке y^*, то найдется $p_\circ > 1$ такое, что при $p > p_\circ$

$$\| x^* \|_p < \| y^* \|_p .$$

В качестве искомой окрестности точки y° можно принять множество точек $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ таких, что

$$|y_j - y_j^\circ| < \delta , \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

Действительно, если $y \in S \cap M$ и $p > p_\circ$, то

$$(\| y \|_p)^p - (\| x^\circ + y - y^\circ \|_p)^p = \sum_{j=1}^n |y_j|^p - \sum_{j=1}^n |x_j^\circ + y_j - y_j^\circ|^p =$$

$$= \sum_{j=\tau}^n |y_j|^p - \sum_{j=\tau}^n |x_j^\circ + y_j - y_j^\circ|^p \geq (y_\tau^\circ - \delta)^p - \sum_{j=\tau}^n (x_j^\circ + \delta)^p =$$

$$=(\|y^*\|_p)^p-(\|x^*\|_p)^p>0,$$

т.е. имеет место соотношение (8).

Л е м м а 3. Пусть имеется направленное семейство строго выпуклых предпорядков $\preccurlyeq_\alpha$ в R^n, сходящееся к строго выпуклому предпорядку $\preccurlyeq$. Если при этом каждое непустое выпуклое многогранное множество M имеет минимальные элементы $x(M,\preccurlyeq_\alpha)$ и $x(M,\preccurlyeq)$ в рассматриваемых предпорядках $\preccurlyeq_\alpha$ и $\preccurlyeq$ и, кроме того, для любого аффинного многообразия M

$$\lim x(M,\preccurlyeq_\alpha)=x(M,\preccurlyeq), \tag{9}$$

то соотношение (9) имеет место также в случае, когда M – произвольное непустое выпуклое многогранное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, очевидно, что если x° – минимальный элемент выпуклого множества V в некотором строго выпуклом предпорядке, определенном во всем пространстве, то x° является минимальным также в конусе $K_{x^\circ}(V)$ с вершиной в x°, натянутом на V.

Для доказательства утверждения леммы предположим, что для некоторого выпуклого многогранного множества M соотношение(9) неверно. Тогда найдется окрестность S точки $x(M,\preccurlyeq)$ и поднаправление направленного семейства точек $x(M,\preccurlyeq_\alpha)$ такое, что ни одна его точка не принадлежит S. Не уменьшая общности, можно считать, что это поднаправление совпадает со всем направлением и его точки принадлежат одной и той же открытой грани G многогранного множества M. Аффинный носитель этой грани обозначим через L. Так как L совпадает с $K_{x(M,\preccurlyeq_\alpha)}(G)$ и $x(G,\preccurlyeq_\alpha)=x(M,\preccurlyeq_\alpha)$, то в силу замечания, сделанного в начале доказательства, при любом α

$$x(L,\preccurlyeq_\alpha)=x(M,\preccurlyeq_\alpha).$$

Поэтому на основании условия леммы

$$\lim x(M,\preccurlyeq_\alpha)=x(L,\preccurlyeq).$$

При этом ,очевидно, $x(L,\preccurlyeq)\in M$ и, так как по предположению точка $x(M,\preccurlyeq)$ не является пределом рассматриваемого направления, $x(M,\preccurlyeq)\prec x(L,\preccurlyeq)$. Следовательно, $x(M,\preccurlyeq)\notin L$.

Через L_1 обозначим аффинный носитель множества $L\cup\{x(M,\preccurlyeq)\}$. Ясно, что точка $x(L_1,\preccurlyeq)$ также не принадлежит L и отрезок, соединяющий точки $x(L_1,\preccurlyeq)$ и $x(M,\preccurlyeq)$, не пересекается с L. Это означает, что точка $x(L_1,\preccurlyeq)$ и множество $M\cap L_1$ принадлежат одному и тому же полуаффинному многооб-

разию L_1', выделяемому в L_1, гиперплоскостью L.

Всем точкам $x \in G$ и, в частности, точкам $x(M, \leqslant_\alpha)$, очевидно, отвечает один и тот же конус $K_x(M)$, содержащий L_1'. На основании условия леммы

$$\lim x(L_1, \leqslant_\alpha) = x(L_1, \leqslant).$$

Следовательно, начиная с некоторого α,

$$x(L_1, \leqslant_\alpha) \in L_1' \setminus L.$$

А тогда на открытом отрезке, соединяющем точки $x(L_1, \leqslant_\alpha)$ и $x(M, \leqslant_\alpha) \in L_1$, найдется точка $u \in M$. Для последней будем иметь $u \leqslant_\alpha x(M, \leqslant_\alpha)$, что невозможно, и лемма доказана.

В заключение приведем пример, показывающий, что требование многогранности выпуклого множества M в теореме 3 существенно.

Рассмотрим в R^3 выпуклое замкнутое множество M, определяемое неравенствами

$$(x_1 - 1)(x_2 + 1) \geqslant (x_3 - 1)^2, \quad x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \geqslant -1.$$

Нетрудно проверить, что точка $x^0 = (1, 0, 1)$ является минимальной в M в предпорядке $\leqslant_\infty$.

Выясним расположение точек $x(M, p)$, в которых достигают минимума нормы

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p)^{1/p}, \quad p \in (1, +\infty),$$

или, что то же, функции

$$f_p(x) = |x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p.$$

Если для точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ из M

$$(x_1 - 1)(x_2 + 1) > (x_3 - 1)^2,$$

то $x_1 > 1$, $x_2 > -1$ и, следовательно, эта точка является внутренней для M. В такой точке, очевидно, функции f_p не могут достигать минимума. Это означает, что для точек минимума функций f_p

$$(x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_3 - 1)^2. \tag{10}$$

При этом если $x_1 = 1$, то $x_3 = 1$ и $f_p(x)$ принимает наименьшее значение при $x_2 = 0$. Если же $x_2 = -1$, то опять-таки $x_3 = 1$ и $f_p(x)$ принимает наименьшее значение при $x_1 = 1$. С другой стороны, точки $x^{(1)} = (1, 0, 1)$ и $x^{(2)} = (1, -1, 1)$ не могут доставлять минимум в M функциям f_p, так как $f_p(x^{(1)}) = 2$, $f_p(x^{(2)}) = 3$ и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для точки $x^{(\varepsilon)} = (1 + \varepsilon^2, 0, 1 - \varepsilon) \in M$

$$f_p(x^{(\varepsilon)}) = (1 + \varepsilon^2)^p + (1 - \varepsilon)^p < 2.$$

Поэтому для точек минимума функций f_p, наряду с равенством (10), имеют место строгие неравенства $x_1 > 1$, $x_2 > -1$. Это означает, что для каждой из рассматриваемых точек минимума при четном p найдется множитель Лагранжа λ, при котором помимо (10)

$$p x_1^{p-1} = \lambda (x_2 + 1), \tag{11}$$

$$p x_2^{p-1} = \lambda (x_1 - 1), \tag{12}$$

$$p x_3^{p-1} = -2\lambda (x_3 - 1). \tag{13}$$

Из (13), (10), (11) и (12) имеем:

$$x_3^{2(p-1)} = \left(\frac{2\lambda}{p}\right)^2 (x_3 - 1)^2 = \left(\frac{2\lambda}{p}\right)^2 (x_1 - 1)(x_2 + 1) = 4 x_1^{p-1} x_2^{p-1},$$

откуда

$$x_3^2 = 4^{\frac{1}{p-1}} |x_1| \cdot |x_2| . \tag{14}$$

Из (14) ясно, что точки $x(M, p)$ при $p \to +\infty$ не могут сходиться к точке $x^0 = (1, 0, 1)$, так как при $x_2 \to 0$ и $x_1 \to 1$ имели бы $x_3 \to 0$.

Литература

1. Б.С. Митягин, Экстремальные точки одного семейства выпуклых функций, Сибирский математ. журнал 6, № 3 (1965), 556-563.

Поступила в редакцию
10.VII. 1969 г.