УДК 512.25 /26

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ОТСЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.А.Каплан

Ниже предлагается модификация метода отсечения для решения задачи выпуклого программирования [1 - 3], позволяющая использовать этот метод и в случае, когда допустимое множество не является телесным. Изложены также некоторые детали реализации метода, не исследованные в указанных публикациях.

Рассматривается задача отыскания максимума линейной функции

$$f(x) = (c, x)$$

на выпуклом замкнутом ограниченном множестве X евклидова пространства R^n. В работах [1-3] предложен метод решения указанной задачи для случая, когда допустимое множество X телесно и известна его внутренняя точка x^*. Схема этого метода может быть описана следующим образом.

Пусть Ω_0 - некоторый ограниченный многогранник, содержащий X. Процесс решения задачи состоит в последовательном построении вложенных многогранников

$$\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots ,$$

создающих в пределе плотную аппроксимацию исходного допустимого множества в окрестности одной из точек, доставляющих максимум f на X. На k - ом шаге решается задача отыскания точки $y^{k-1} \in \Omega_{k-1}$, в которой достигается максимум функции f на многограннике Ω_{k-1}. Если при этом y^{k-1} принадлежит X, то y^{k-1} является также решением исходной задачи. В противном случае определяется точка x^{k-1}, в которой луч

$$\{x = x^* + \lambda (y^{k-1} - x^*) : \lambda \geq 0\}$$

пересекает границу множества X, и к ограничениям, определяющим многогранник Ω_{k-1}, добавляется ограничение

$$\eta_\kappa(x) - \eta_\kappa(x^{\kappa-1}) \geq 0,$$

где η_κ - фиксированный ненулевой линейный функционал, опорный к множеству X в точке $x^{\kappa-1}$ *). В результате получается новый многогранник $\Omega_\kappa \subset \Omega_{\kappa-1}$, и описанный процесс может быть продолжен.

В рассмотренном методе на каждом шаге мы имеем двухсторонние оценки для решения исходной задачи

$$f(y^\kappa) \geq \max_{x \in X} f(x) \geq f(x^\kappa),$$

причем

$$\lim_{\kappa \to \infty} [f(y^\kappa) - f(x^\kappa)] = 0.$$

Решением исходной задачи является каждая предельная точка последовательностей $\{y^\kappa\}$ и $\{x^\kappa\}$.

Требование телесности множества X сужает возможности использования данного метода, исключает из рассмотрения некоторые практически важные задачи. Однако, следует сразу заметить, что без сколь-либо существенных изменений метод может быть применен при наличии линейных ограничений в форме равенств - в том случае, если существует точка x^*, внутренняя для X относительно аффинного многообразия, порождаемого линейными равенствами.**)

Действительно, эти ограничения следует учесть при построении исходного многогранника Ω_0, и тогда описанный выше процесс будет осуществлен, не выходя из $L(X)$. Требуется только в качестве η_κ выбирать опорный функционал, не принимающий постоянного значения на $L(X)$. Такой функционал, очевидно, всегда существует.

Рассмотрим теперь случай, когда допустимое множество исходной задачи не имеет внутренних точек, предполагая лишь, что нам известна точка x^*, внутренняя для множества X в его аффинной оболочке.

Пусть

$$X = \{x \in R^n : g_j(x) \geq 0,\ j \in J_1;\ g_j(x) = 0,\ j \in J_2\},$$

где все функции g_j - вогнутые непрерывно дифференцируемые, причем $g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i - b_j$, если $j \in J_2$. Будем считать, что ограничения с номерами $j \in J_2$ включены в число условий, определяющих Ω_0.

---

*) Т.е. $\eta_\kappa(x) - \eta_\kappa(x^{\kappa-1}) \geq 0$ для всех $x \in X$.

**) Ясно, что указанное аффинное многообразие будет в этом случае совпадать с аффинной оболочкой $L(X)$ множества X.

На K -м шаге, как и в описанном выше варианте, решается задача отыскания точки $y^{K-1} \in \Omega_{K-1}$, доставляющей максимум f на Ω_{K-1}. Затем определяется точка x^{K-1} пересечения луча $\{x = x^* + \lambda (y^{K-1} - x^*) : \lambda > 0\}$ с границей множества X и многогранник Ω_K. При этом возможны 2 случая.

а) Если $x^{K-1} \neq x^*$, то процесс продолжается, как описано выше. Следует учитывать, что для определения опорного функционала η_K может быть использован градиент какой-либо из функций $g_j\,(j \in J_1)$, обращающейся в 0 в точке x^{K-1}. Если окажется, что гиперплоскость

$$\eta_K(x) - \eta_K(x^{K-1}) = 0$$

содержит множество X, то этот факт автоматически обнаружится на следующем шаге (мы получим точку y^K, совпадающую с y^{K-1}). Ясно, что такой случай следует рассматривать, как вырожденность (проекция градиента функции g_j на $L(X)$ равна 0).

б) Пусть $x^{K-1} = x^*$, причем к K -му шагу среди ограничений, задающих многогранник Ω_{K-1}, имеются равенства

$$(a_i \,.\, x) - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, \ell_K ,$$

где a_i - линейно-независимые векторы. В этом случае многогранник Ω_K получается из Ω_{K-1} добавлением ограничения

$$(a_{\ell_K+1}, x) - b_{\ell_K+1} = 0 ,$$

где a_{ℓ_K+1} и b_{ℓ_K+1} выбираются из условий, что

$$\{x : (a_{\ell_K+1}, x) - b_{\ell_K+1} = 0\} \supset X$$

и векторы $a_1, \dots, a_{\ell_K}, a_{\ell_K+1}$ -линейно-независимы.

Случай $x^K = x^*$ может встретиться не более ($n - v - q$) раз (v - размерность аффинной оболочки множества X, q -число равенств в исходном многограннике Ω_0), а затем все последующие многогранники будут содержаться в $L(X)$.

Заметим, что ситуация, когда $n - v - q > 0$, в практических задачах менее типична, чем случай, когда причиной нетелесности являются только линейные равенства.

Сходимость рассмотренного здесь процесса может быть показана так же, как и в случае телесности множества X.

Исследуем далее вопрос об отыскании интересующей нас точки x^*. Будем предполагать, что

$$\sup_{x \in R^n} g_j(x) > 0, \quad j \in J_1 .$$

В этом случае можно попытаться применить для отыскания x^* изложенный выше метод.

Пусть вектор $\bar{x}=(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ удовлетворяет всем ограничениям задачи с номерами $j\in J_2$. Если при этом $\min\limits_{j\in J_1} g_j(\bar{x})>0$, то в качестве x^* можно взять $\bar{x}$. Если же $\min\limits_{j\in J_1} g_j(\bar{x})<0$ рассмотрим, как это часто делается, следующую вспомогательную задачу.

В пространстве R^{n+1} требуется найти максимум линейной функции

$$\varphi(x)=x_{n+1}$$

на множестве $\tilde{X}$, задаваемом ограничениями

$$g_j(x_1,\ldots,x_n)-x_{n+1}\geq 0,\quad j\in J_1,$$
$$g_j(x_1,\ldots,x_n)=0,\qquad j\in J_2,$$
$$-A\leq x_{n+1}\leq A,$$

где A выбирается из условия $A>-\min\limits_{j\in J_1} g_j(\bar{x})$.

Ввиду ограниченности допустимого множества исходной задачи множество $\tilde{X}$ также будет ограниченным. В качестве исходной относительно внутренней точки $\tilde{X}$ можно взять $\xi^*=(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1})$ при любом фиксированном значении $\bar{x}_{n+1}$, удовлетворяющем условию

$$-A<\bar{x}_{n+1}<\min_{j\in J_1} g_j(\bar{x}).$$

Таким образом, к вспомогательной задаче указанный метод может быть применен.

В зависимости от решения вспомогательной задачи возможны следующие выводы.

1) $\max\limits_{\xi\in\tilde{X}}\varphi(\xi)>0$. В этом случае допустимое решение вспомогательной задачи, доставляющее положительное значение функции φ, а, следовательно, и относительно внутренняя точка допустимого множества исходной задачи, получается за конечное число шагов.

2) $\max\limits_{\xi\in\tilde{X}}\varphi(\xi)<0$. Исходная задача не имеет допустимого решения.

3) $\max\limits_{\xi\in\tilde{X}}\varphi(\xi)=0$. Это обстоятельство означает, что размерность оболочки множества X меньше числа элементов множества J_1. В такой ситуации поиск x^* должен продолжаться. Мы получили точку $\bar{\xi}=(\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_{n+1})\in\tilde{X}$, в которой $\varphi(\bar{\xi})=0$, и определили множество

$$J' = \{j \in J_1 : g_j(\bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_n) = 0\}.$$

Если J' состоит из одного элемента, $J' = \{j_1\}$, то можно определить искомую точку, заменяя во вспомогательной задаче ограничение с номером j_1 ограничением

$$g_{j_1}(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

и используя в качестве ξ^* точку $\bar\xi$ (легко видеть,что $\bar\xi$ является относительно внутренней точкой допустимого множества новой задачи).

Для случая, когда $J' = \{j_1, \ldots, j_\ell\}$, $\ell > 1$, принципиально можно действовать таким же путем, последовательно заменяя условия

$$g_{j_m}(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+1} \geq 0, \quad m = 1, \ldots, \ell,$$

условиями

$$g_{j_m}(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,$$

затем аналогично заменяя пары ограничений и т.д. - до тех пор,пока не встретится задача, в которой максимум x_{n+1} больше 0. Ясно, что с увеличением ℓ трудоемкость процедуры отыскания точки x^* описанным методом очень сильно возрастает (верхняя оценка возможного числа вспомогательных задач $- 2^\ell$) и вряд ли данный путь является реальным даже при сравнительно небольших ℓ.

Однако в случае, когда можно применить для решения вспомогательных задач какой-либо градиентный метод, процесс определения x^* значительно облегчается, ибо после каждой замены ограничений нам придется сделать лишь по одному шагу, начиная из точки $\bar\xi$.

Заметим, что приведенные рассуждения остаются в силе, если функции $g_j\ (j \in J_1)$ непрерывные квазивогнутые. Нужно лишь дополнительно потребовать, чтобы g_j удовлетворяли строгому неравенству

$$g_j(tx + (1-t)y) > \min\{g_j(x), g_j(y)\},$$

если только $g_j(x) \neq g_j(y)$ и $0 < t < 1$.

В заключение обратимся к вопросу о выборе многогранника Ω_0 для исходной задачи.

В том случае, когда мы не имеем достаточной информации,чтобы построить начальный многогранник Ω_0, сколь -нибудь удовлетворительно аппроксимирующий множество X, вместо того, чтобы брать очень большой многогранник, можно пойти на риск, что Ω_0 отрежет часть множества X.

Если при этом окажется, что[ж)]

$$\max_{x \in \Omega_0 \cap X} f(x) < \max_{x \in X} f(x) ,$$

то этот факт будет нетрудно обнаружить в процессе решения. Одновременно выяснится, в каком направлении следует расширять исходный многогранник Ω_0. При расширении многогранника любые добавленные на предыдущих шагах ограничения можно сохранить, так как они и в этом случае не могут отсечь точек множества X.

Литература

1. A.Veinott. The supporting Huperplane method for Unimodal Programming. Oper. Res. 15, 1 (1967).
2. А.А.Каплан. Об одном методе решения задач выпуклого программирования. Экономика и математические методы, т.IУ, № 1 (1968).
3. А.А.Каплан. Об отыскании экстремума линейной функции на выпуклом множестве. ДАН СССР, т.178, № 6 (1968).

Поступила в редакцию
25.УI.1969 г.

ж) Неблагоприятным является именно этот случай.