УДК 512.25/26 + 519.3 : 330.115

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ КУНА-ТАККЕРА

А.А.Каплан, Г.Ш.Рубинштейн

В настоящей работе устанавливаются новые условия эквивалентности задачи выпуклого программирования и задачи о седловой точке соответствующей функции Лагранжа, которые можно рассматривать как обобщение условий Куна-Таккера на случай недифференцируемых функций.

§ 1. Основная и двойственная задачи выпуклого программирования

В теории выпуклого программирования в качестве основной обычно рассматривается следующая

ЗАДАЧА 1. На некотором открытом выпуклом множестве G в m-мерном арифметическом пространстве R^m заданы вогнутые функции $g^1, g^2, \dots, g^n, f$, и, кроме того, выделено некоторое выпуклое множество $X^0 \subset G$. Требуется максимизировать функцию f в области $\Omega = \bigcap_{j=0}^{n} X^j$, где

$$X^j = \{x \in R^m : g^j(x) \geq 0\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то есть найти вектор $x^* \in \Omega$, на котором функция f достигает максимума.

Наряду с этой задачей оказывается полезным исследовать другую экстремальную задачу, в определенном смысле двойственную к первой.

ЗАДАЧА 1*. Пусть Y^0 - множество векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из R^n с неотрицательными компонентами ($y \geq 0$). Требуется минимизировать функцию

$$\varphi(y) = \sup_{x \in X^0} G(x, y),$$

где

$$G(x,y)=\sum_{j=1}^{n} y_j\, g^j(x)+f(x), \tag{1}$$

в области

$$\Omega^* = \{y \in Y^\circ : \varphi(y) < +\infty\}.$$

Векторы $x \in \Omega$ и $y \in \Omega^*$ называются допустимыми в задачах 1 и I*, а искомые векторы – оптимальными.

Очевидно, для любых допустимых векторов x и y справедливо соотношение

$$f(x) \leqslant G(x,y) \leqslant \varphi(y). \tag{2}$$

Поэтому для оптимальности векторов x° и y° достаточно, чтобы эти векторы были допустимыми в задачах I и I* и для них имело место равенство

$$f(x^\circ) = \varphi(y^\circ). \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что указанное достаточное условие выполняется в том и только том случае, если точка (x°, y°) является седловой для функции (I), именуемой функцией Лагранжа задачи I. Это означает, что $x^\circ \in X^\circ$, $y^\circ \in Y^\circ$ и при любых $x \in X^\circ$, $y \in Y^\circ$

$$G(x,y^\circ) \leqslant G(x^\circ, y^\circ) \leqslant G(x^\circ, y). \tag{4}$$

Действительно, если $x^\circ \in \Omega$, $y^\circ \in \Omega^*$ и имеет место равенство (3), то для любых $x \in X^\circ$, $y \in Y^\circ$

$$G(x,y^\circ) \leqslant \varphi(y^\circ) = f(x^\circ) \leqslant G(x^\circ, y),$$

$$f(x^\circ) = G(x^\circ, y^\circ) = \varphi(y^\circ).$$

Наоборот, если точка (x°, y°) является седловой для функции(I), то из левого неравенства в (4) следует, что $\varphi(y^\circ) \leqslant G(x^\circ, y^\circ)$, а на основании правого неравенства x° – допустимый вектор и $G(x^\circ, y^\circ) \leqslant f(x^\circ)$. Таким образом, $\varphi(y^\circ) \leqslant f(x^\circ)$, и, так как обратное неравенство всегда справедливо, то $\varphi(y^\circ) = f(x^\circ)$, что и требовалось показать.

Значительное место в теории выпуклого программирования уделяется выяснению дополнительных предположений относительно выпуклого множества X° и функций $g^1, g^2, \dots, g^n$, при которых справедливо следующее утверждение:

(*) Для оптимальности вектора $x^\circ \in X^\circ$ в задаче I наличие вектора y° такого, что (x°, y°) – седловая точка функции (I), является не только достаточным, но и необходимым.

Впервые условия такого рода для задач выпуклого программирования были получены в работе Куна и Таккера [I]. В дальнейшем были установлены и некоторые другие предложения, обеспечивающие

справедливость утверждения (1). В настоящей работе, как уже отмечалось, устанавливаются новые условия, при которых возможно сведение задачи выпуклого программирования к задаче о седловой точке.

Для выяснения природы исследуемого вопроса напомним геометрическую интерпретацию задач I и I* (см., например, [2]). С этой целью рассмотрим отображение F множества X^* в R^{n+1} :

$$F(x)=(g^1(x), g^2(x), \ldots, g^n(x), f(x)), \qquad (5)$$

а также порождаемые им множества

$$A=\{a=F(x): x\in X^*\},$$

$$A^-=\{a=a'-a'': a'\in A,\ a''\geq 0\}.$$

Последнее, как легко видеть, является выпуклым и телесным. Если вектор x - допустимый в задаче I, то точка $f(x)e^{n+1}$, где $e^{n+1}=(0,0,\ldots,0,1)$, принадлежит множеству A^-. Наоборот, если точка te^{n+1} принадлежит A^-, то на некотором $x\in\Omega$ функция f принимает значение $f(x)\geq t$. Таким образом, задача I сводится к отысканию "наивысшей" точки пересечения последней координатной оси с множеством A^-.

Каждому допустимому вектору $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ задачи I* можно поставить в соответствие гиперплоскость H, определяемую уравнением

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n + a_{n+1} = \varphi(y), \qquad (6)$$

где $a=(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ - текущий вектор. Эта гиперплоскость, как нетрудно проверить, пересекает последнюю координатную ось в точке $\varphi(y)e^{n+1}$ и строго отделяет*) от множества A^- луч $\{te^{n+1}: t>\varphi(y)\}$. Наоборот, если гиперплоскость H пересекает указанную ось в точке $\bar{t}e^{n+1}$ и строго отделяет от множества A^- луч $\{te^{n+1}: t>\bar{t}\}$, то уравнение этой гиперплоскости может быть приведено к виду

$$y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n + a_{n+1} = \bar{t},$$

где $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - допустимый вектор задачи I*, причем $\varphi(y)\leq\bar{t}$. Следовательно, задача I* состоит в отыскании гиперплоскости H, обладающей указанными свойствами и пересекающей последнюю координатную ось как можно ниже.

*) Говорят, что гиперплоскость H разделяет два множества, если эти множества лежат в различных замкнутых полупространствах, определяемых H. Гиперплоскость H строго отделяет множество M от множества N, если N лежит в одном из замкнутых полупространств, определяемых H, а M - в его дополнении.

Из сказанного ясно, что при наличии в задаче I оптимального вектора x^* вопрос о существовании вектора y^* такого, что (x^*,y^*) – седловая точка функции (I), сводится к существованию гиперплоскости H, проходящей через точку $f(x^*)e^{n+1}$ и строго отделяющей от множества A^- луч $\{te^{n+1}: t>f(x^*)\}$.

С другой стороны, если x^* – оптимальный вектор задачи I, то луч $\{te^{n+1}: t>f(x^*)\}$ не пересекается с множеством A^-, и потому всегда существует гиперплоскость H, разделяющая указанные множества. Любая такая гиперплоскость, очевидно, проходит через точку $f(x^*)e^{n+1}$ и не содержит внутренних точек множества A^-. Это означает, что при наличии в множестве A^- внутренних точек вида te^{n+1} рассматриваемая гиперплоскость H строго отделяет от этого множества интересующий нас луч и, следовательно, справедливо утверждение (!). Наличие в множестве A^- указанных точек означает выполнение следующего условия Слейтера [3,4] : существует вектор $x^*\in X^*$ такой, что $\min_j g^j(x^*)>0$. При нарушении этого условия не всякая разделяющая гиперплоскость строго отделяет рассматриваемый луч, и для доказательства существования нужной гиперплоскости требуются более тонкие рассуждения.

§ 2. Несколько вспомогательных предложений

В формулировке и доказательстве основного результата используются следующие понятия.

Предельным конусом выпуклого множества $X\subset R^m$ в точке $x^*\in X$ называется множество $X_{x^*}=\overline{K_{x^*}(X)}$, где

$$K_{x^*}(X)=\bigcup_{x\in X}\Lambda(x^*,x),$$

$$\Lambda(x^*,x)=\{z=x^*+t(x-x^*): t>0\},$$

а черта означает замыкание. Далее, под $X_{x^*x^1\ldots x^i}$ понимается предельный конус множества $X_{x^*x^1\ldots x^{i-1}}$ в точке x^i.

Заметим, что если выпуклое множество $X\subset R^m$ не пересекается с лучом $\Lambda(x^*,x)$, где $x^*\in X$, то для существования гиперплоскости, строго отделяющей указанный луч от X, необходимо и достаточно, чтобы предельный конус X_{x^*} не содержал точек луча $\Lambda(x^*;x)$.

Определенная в R^m вогнутая функция g называется суперлинейной относительно фиксированной точки x^*, если

$$g(x^*+t(x-x^*))=g(x^*)+t(g(x)-g(x^*)),$$

каковы бы ни были вектор x и неотрицательное число t.

Другими словами, заданная в R^m функция g называется суперлинейной относительно точки x^*, если подграфик этой функции, т.е. множество $\{(x,t): g(x)\geq t\}\subset R^{m+1}$, является выпуклым ко-

нусом с вершиной в точке $(x^\circ, g(x^\circ))$. При этом точку x° назовем вершиной функции g. Ясно, что множество вершин суперлинейной функции является аффинным многообразием.

Пусть g - произвольная вогнутая функция, определенная на открытом выпуклом множестве $G \subset R^m$, а x° - фиксированная точка в G. Определенная во всем R^m функция

$$g_{x^\circ}(x) = g(x^\circ) + g'_{x^\circ}(x - x^\circ),$$

где

$$g'_{x^\circ}(u) = \lim_{t \to +0} \frac{g(x^\circ + tu) - g(x^\circ)}{t},$$

называется опорной к g в точке x°. Легко проверить, что эта функция является суперлинейной относительно точки x° и при любом $x \in G$

$$g_{x^\circ}(x) \geq g(x). \qquad (7)$$

Через $g_{x^\circ x' \ldots x^2}$ обозначается функция, опорная к $g_{x^\circ x' \ldots x^{2-1}}$ в точке x^2. Очевидно, она суперлинейна относительно любой точки из аффинной оболочки точек $x^\circ, x', \ldots, x^\nu$.

Лемма I. Если x° - оптимальный вектор задачи I, то на этом векторе достигаем максимума также функция f_{x° в области Ω_{x°.

Доказательство. Каждый вектор $x \in \Omega_{x^\circ}$ является пределом некоторой последовательности точек $x^n \in K_{x^\circ}(\Omega)$ и, следовательно,

$$f_{x^\circ}(x) = \lim f_{x^\circ}(x^n) = \lim \left[f(x^\circ) + \lim_{t \to +0} \frac{f(x^\circ + t(x^n - x^\circ)) - f(x^\circ)}{t} \right]$$

Так как при достаточно малых положительных t точка $x^\circ + t(x^n - x^\circ)$ принадлежит Ω и $f(x^\circ) = \max_{x \in \Omega} f(x)$, имеем:

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x^\circ + t(x^n - x^\circ)) - f(x^\circ)}{t} \leq 0,$$

$$f_{x^\circ}(x) \leq f(x^\circ) = f_{x^\circ}(x^\circ),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть g - вогнутая функция, определенная на открытом выпуклом множестве $G \subset R^m$, причем $\sup_{x \in G} g(x) > 0$. Тогда предельный конус X_{x° множества $X = \{x \in G : g(x) > 0\}$ в точке $x^\circ \in X$ совпадает с множеством

$$\{x \in R^m : g_{x^\circ}(x) \geq 0\},$$

если $g(x^\circ) = 0$, и совпадает со всем R^m, если $g(x^\circ) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для случая, когда $g(x^*)>0$, утверждение очевидно. Пусть $g(x^*)=0$. Тогда для $x\in X_{x^*}$ най- дутся точки $x^n\in X$ и неотрицательные числа t_n такие, что

$$\lim^n (x^*+t_n(x^n-x^*))=x .$$

При этом

$$g_{x^*}(x^*+t_n(x^n-x^*))=t_n\, g_{x^*}(x^n)\geq t_n\, g(x^n)\geq 0,$$

и потому

$$g_{x^*}(x)=\lim g_{x^*}(x^*+t_n(x^n-x^*))\geq 0 .$$

Наоборот, если $g_{x^*}(x)\geq 0$, то точки

$$Z^n=x^*+\frac{1}{n}(x-x^*)=\frac{n-1}{n}x^*+\frac{1}{n}x \tag{8}$$

при достаточно больших n принадлежат G и

$$g_{x^*}(x)=n\,g(Z^n)+\varepsilon_n , \tag{9}$$

где $\varepsilon_n\geq 0$, $\lim\varepsilon_n=0$. Зафиксируем точку x^*, в которой $g(x^*)>0$, и рассмотрим точки

$$u^n=\frac{\varepsilon_n}{ng(x^*)}x^*+\left(1-\frac{\varepsilon_n}{ng(x^*)}\right)Z^n, \tag{10}$$

$$v^n=x^*+n(u^n-x^*). \tag{11}$$

На основании (8), (10) и (11)

$$v^n=x+\frac{\varepsilon_n}{g(x^*)}\left(x^*-\frac{n-1}{n}x^*-\frac{1}{n}x\right)$$

и, следовательно, $\lim v^n=x$. Далее, при достаточно больших n, ввиду вогнутости функции g и соотношений (9)-(10), имеем :

$$g(u^n)\geq\frac{\varepsilon_n}{ng(x^*)}g(x^*)+\left(1-\frac{\varepsilon_n}{ng(x^*)}\right)g(Z^n)=$$

$$=\frac{\varepsilon_n}{n}+\left(1-\frac{\varepsilon_n}{ng(x^*)}\right)\left(\frac{1}{n}g_{x^*}(x)-\frac{\varepsilon_n}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(1-\frac{\varepsilon_n}{ng(x^*)}\right)g_{x^*}(x)+\frac{\varepsilon_n^2}{n^2g(x^*)}\geq 0 ,$$

откуда $u^n\in X$, $v^n\in K_{x^*}(X)$, $x\in X_{x^*}$,

и лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть в задаче I исходное выпуклое множество X^* является замкнутым конусом с вершиной в x^*, а функции $g^1, g^2,\dots,g^n, f$ супёрлинейны относительно точки x^* и $g^j(x^*)=0$, $j=1,2,\dots,n$. Если при этом x^* – оптимальный вектор и опти- мальные векторы задачи образуют аффинное многообразие, то най-

дется вектор y^* такой, что (x^*, y^*) – седловая точка функции (I).

Доказательство. Прежде всего заметим, что если вогнутая функция g, определенная на аффинном многообразии P, достигает минимума в некоторой точке $x^* \in P$, то g принимает постоянное значение на всем P. Действительно, при любом $x \in P$ точка $2x^* - x$ также принадлежит P и, следовательно,

$$g(x) \geq g(x^*), \quad g(2x^* - x) \geq g(x^*).$$

С другой стороны, ввиду вогнутости g,

$$g(x^*) = g\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(2x^* - x)\right) \geq \tfrac{1}{2}g(x) + \tfrac{1}{2}g(2x^* - x)$$

и потому $g(x) = g(x^*)$, что и утверждалось.

Далее, если вогнутая функция g принимает постоянное значение на аффинном многообразии P и является суперлинейной относительно некоторой точки $x^* \in P$, то g принимает постоянное значение на любом аффинном многообразии $P' = P + \bar{x}$, параллельном P. Действительно, каковы бы ни были $y, z \in P'$, точка $x^* + z - y$ принадлежит P и, следовательно,

$$g(x^* + z - y) = g(x^*).$$

Далее, в силу суперлинейности g относительно точки x^*

$$g\left(\frac{x^* + z}{2}\right) = g\left(x^* + \tfrac{1}{2}(z - x^*)\right) = g(x^*) + \tfrac{1}{2}\left(g(z) - g(x^*)\right) = \tfrac{1}{2}g(x^*) + \tfrac{1}{2}g(z),$$

а в силу вогнутости этой функции

$$g\left(\frac{x^* + z}{2}\right) = g\left(\frac{(x^* + z - y) + y}{2}\right) \geq \tfrac{1}{2}g(x^* + z - y) + \tfrac{1}{2}g(y) = \tfrac{1}{2}g(x^*) + \tfrac{1}{2}g(y),$$

откуда $g(z) \geq g(y)$ и, так как y и z – произвольные точки из P', имеет место равенство $g(y) = g(z)$.

Из последнего факта, в частности, вытекает суперлинейность функции g относительно любой точки $x \in P$.

По условию леммы оптимальные векторы в исследуемой задаче образуют аффинное многообразие, которое мы обозначим через P. При этом точка $x_* \in P$, как легко видеть, является вершиной конуса Ω. Следовательно, P содержится в аффинном многообразии вершин конуса Ω.

Пусть Q – аффинное дополнение P, содержащее точку x^*, т.е. R^m является прямой суммой подпространств $P - x^*$ и $Q - x^*$. Тогда введенное в геометрической интерпретации множество $A = F(X^*) \subset R^{m+1}$, которое в данном случае является конусом с вершиной в точке $F(x^*) = f(x^*)e^{m+1}$, в силу сказанного выше, совпадает с $F(X^* \cap Q)$.

Допустим, что утверждение леммы не справедливо, т.е. интересующего нас вектора y^* не существует. Тогда, как уже отмечалось, луч $\{t e^{n+1} : t > f(x^*)\}$ содержится в множестве $(A^-)_{f(x^*)e^{n+1}}$ и, так как A^- – конус с вершиной в $f(x^*)e^{n+1}$, точка $(f(x^*)+1)e^{n+1}$ принадлежит замыканию этого конуса. Следовательно, найдутся точки $z^i \in X^* \cap Q$ такие, что

$$f(z^i) = f(x^*) + 1, \quad g^j(z^i) \geq -\frac{1}{i}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

Полагая $t_i = \|z^i - x^*\|$, $u^i = x^* + \frac{1}{t_i}(z^i - x^*)$, последние соотношения можем переписать в виде

$$t_i\left(f(u^i) - f(x^*)\right) = 1, \quad t_i g^j(u^i) \geq -\frac{1}{i}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

При этом, не уменьшая общности, можно считать, что последовательность точек u^i имеет предел u^*. Этот предел, очевидно, не совпадает с точкой x^* и содержится в $X^* \cap Q$. Далее, из непрерывности функции f в точке x^* следует, что величина $t^* = \underline{\lim}\, t_i$ больше нуля. Предположим вначале, что $t^* < +\infty$. Тогда точки

$$z^i = x^* + t_i(u^i - x^*)$$

сходятся к $z^* = x^* + t^*(u^* - x^*) \in X^0$ и для z^* на основании (12) имеем

$$f(z^*) = f(x^*) + 1, \quad g^j(z^*) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

что противоречит оптимальности x^*. Если же $t^* = +\infty$, то для точки u^* на основании (13)

$$f(u^*) = f(x^*), \quad g^j(u^*) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т е. вектор u^* является оптимальным и, следовательно, должен содержаться в P, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

§ 3. Основная теорема и некоторые её следствия

Теперь мы можем перейти к доказательству основного предложения.

Теорема I. Если в задаче I $\sup g^j(x) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то для справедливости утверждения (!) при произвольной вогнутой функции f необходимо и достаточно, чтобы

$$\bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^* x^1 \ldots x^k} = \Omega_{x^* x^1 \ldots x^k}, \tag{14}$$

каков бы ни были векторы $x^* \in \Omega$, $x^k \in \Omega_{x^* x^1 \ldots x^{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots, z$.

Достаточность. Пусть x° -оптимальный вектор задачи 1. В силу леммы I он является оптимальным также в задаче максимизации функции f_{x° в области Ω_{x°. Если множество M° оптимальных векторов в последней задаче не является аффинным многообразием, то переходим к задаче максимизации функции $f_{x^\circ x'}$ в области $\Omega_{x^\circ x'}$, где x' - внутренняя точка множества M° в его аффинной оболочке L°. Нетрудно видеть, что множество M' оптимальных векторов новой задачи содержит L°. Отсюда ясно, что через конечное число шагов мы придем к такой задаче максимизации функции $f_{x^\circ x' \dots x^r}$ в $\Omega_{x^\circ x' \dots x^r}$, что в ней множество оптимальных векторов M^r является аффинным многообразием.

Ввиду условия (I4) и лемм I и 2 при любом $k = 0, 1, \dots, r$ имеем:

$$\Omega_{x^\circ x' \dots x^k} = \bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^\circ x' \dots x^k} =$$

$$= \left\{ x \in X^j_{x^\circ x' \dots x^k} : g^j_{x^\circ x' \dots x^k}(x) \geq 0, \ j \in J^k \right\},$$

$$J^k = \left\{ j : g^j_{x^\circ x' \dots x^k}(x^k) = 0 \right\}.$$

На основании леммы 3 функция Лагранжа задачи максимизации $f_{x^\circ x' \dots x^r}$ в $\Omega_{x^\circ x' \dots x^r}$ имеет седловую точку $(x^\circ, \hat{y}^\circ)$. Добавлением компонент $y^\circ_j = 0$ при $j \bar{\in} J^r$ мы получим точку (x°, y°), которая, как легко видеть, является седловой для исходной задачи.

Необходимость. Пусть при некотором наборе $x^\circ \in \Omega$, $x' \in \Omega_{x^\circ}, \dots, x^r \in \Omega_{x^\circ \dots x^{r-1}}$ соотношение (I4) нарушается, т.е.

$$\bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^\circ \dots x^r} \neq \Omega_{x^\circ \dots x^r}.$$

Это означает, что некоторый луч $\Lambda(x^\circ, \tilde{x})$ принадлежит разности конусов $\bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^\circ x' \dots x^r}$ и $\Omega_{x^\circ x' \dots x^r}$. Ввиду замкнутости последнего найдется открытый выпуклый конус U с вершиной в x°, содержащий точку $\tilde{x}$ и такой, что

$$U \cap \Omega_{x^\circ x' \dots x^r} = \Phi.$$

Но тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств существует линейная функция f, для которой

$$f(x) \leq f(x^\circ) \quad \text{при} \quad x \in \Omega_{x^\circ x' \dots x^r}, \qquad (15)$$

$$f(x) > f(x^\circ) \quad \text{при} \quad x \in \Lambda(x^\circ, \tilde{x}). \qquad (16)$$

Рассмотрим задачу максимизации такой функции в области Ω. Вектор x^*, очевидно, является оптимальным в этой задаче. Покажем, что в данном случае не может существовать вектора y^* такого, что (x^*, y^*) – седловая точка соответствующей функции Лагранжа.

Действительно, если бы такой вектор нашелся, то при любом $x \in X^*$ имели бы

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* g^j(x) + f(x) \leq f(x^*) . \tag{17}$$

При этом, очевидно,

$$y_j^* g^j(x^*) = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

Полагая

$$J^* = \{ j : g^j(x^*) = 0 \} ,$$

для любого $x \in K_{x^*}(X^*)$ имеем:

$$\sum_{j \in J^*} y_j^* g^j_{x^*}(x) = \sum_{j \in J^*} y_j^* \left(\lim_{t \to +0} \frac{g^j(x^* + t(x - x^*))}{t} \right) =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\sum_{j \in J^*} y_j^* g^j(x^* + t(x - x^*))}{t} \leq \frac{f[x^* - (x^* + t(x - x^*))]}{t} = f(x^* - x)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j \in J^*} y_j^* g^j_{x^*}(x) + f(x) \leq f(x^*) . \tag{18}$$

Ввиду непрерывности функций $g^j_{x^*}$ и f неравенство (18) справедливо для всех точек $x \in X^*_{x^*}$. А это означает, что вектор x^* является оптимальным также в задаче максимизации функции f в области

$$\Omega^* = \{ x \in X^*_{x^*} : g^j_{x^*}(x) \geq 0, \ j \in J^* \} ,$$

которая в силу леммы 2 совпадает с $\bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^*}$.

Рассуждая аналогичным образом, мы последовательно придем к выводу, что вектор x^* доставляет максимум функции f на множестве $\bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^* x^1 \dots x^k}$, что невозможно, ибо в точке $\tilde{x} \in \bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^* x^1 \dots x^k}$, в силу выбора функции f, имеем $f(\tilde{x}) > f(x^*)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Необходимо отметить, что в доказательстве теоремы I условие $\sup g^j(x) > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, использовалось только для обоснования совпадения при $j \in J^k$ конусов $X^j_{x^* x^1 \dots x^k}$ и $\{ x \in R^m : g^j_{x^* x^1 \dots x^k}(x) \geq 0 \}$. Это означает, что имеет место также

Т е о р е м а 2. Для справедливости утверждения (1) при произвольной функции f необходимо и достаточно, чтобы для лю -

бых векторов

$$x^0 \in \Omega, \quad x^k \in \Omega_{x^0 \dots x^{k-1}}, \quad k = 1, \dots, \tau,$$

имело место равенство

$$\Omega_{x^0 \dots x^k} = \{x : g^j_{x^0 \dots x^k}(x) \geq 0, \quad j \in J^k\},$$

где

$$J^k = \{j : g^j_{x^0 \dots x^k}(x^k) = 0\}.$$

Именно это предложение следует рассматривать как непосредственное обобщение теоремы Куна-Таккера на случай недифференцируемых функций.

Далее, из теоремы I легко получается следующая

Теорема 3.*) Если в задаче I $\sup g^j(x) > 0$; $j = 1, 2, \dots, n_1$, и множества $X^0, X^1, \dots, X^{n_1}$ являются многогранниками (пересечения конечного числа полупространств), то при наличии вектора $x^* \in \Omega$ такого, что $g^j(x^*) > 0$, $j = n_1+1, \dots, n$, справедливо утверждение (I).

Доказательство. Нам нужно показать, что при любых $x^0 \in \Omega$, $x^k \in \Omega_{x^0 \dots x^{k-1}}$, $k = 1, \dots, \tau$, справедливо соотношение (I4), точнее, нетривиальное включение

$$\bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^0 x^1 \dots x^\tau} \subset \Omega_{x^0 x^1 \dots x^\tau}. \tag{I9}$$

Пусть $\tilde{x} \in \bigcap_{j=0}^{n} X^j_{x^0}$. Тогда открытый отрезок $(x^*, \tilde{x})$ содержится в каждом из конусов $K_{x^0}(X^j)$ (при $j = 0, 1, \dots, n_1$ -в силу их замкнутости, а при $j = n_1+1, \dots, n$ - в силу телесности соответствующих выпуклых множеств). Следовательно,

$$(x^*, \tilde{x}) \subset \bigcap_{j=0}^{n} K_{x^0}(X^j) = K_{x^0}(\Omega),$$

и потому $\tilde{x} \in \Omega_{x^0}$. С помощью тех же рассуждений включение (I9) проверяется последовательно для $\tau = 1, 2, \dots$.

Литература

I. H.Kuhn, A.Tucker. Nonlinear programming. Proc. 2th Symp. on

---

*) Для случая, когда X^0 -неотрицательный ортант, а множества $X^1, \dots, X^{n_1}$ являются полупространствами, эта теорема доказана в [2] (см. также [5] ,стр. 234).

Math. Stat. and Prob., Univ. of California Press (1951), pp 483.

2. Г.Ш.Рубинштейн. Сб. "Математическое программирование", Изд. "Наука", 1966, стр. 9-45.

3. Х.Удзава. Сб. "Исследования по линейному и нелинейному программированию", ИЛ, 1962, стр. 57-64.

4. M.Slater. Lagrange multipliers revisited: A contribution to nonlinear programming. Cowles Commis. Discuss. Paper, Math., 403 (1950).

5. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, Мир, 1964.

Поступила в редакцию
19.VI.1969 г.