УДК 51.330.115

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

А.М.Рубинов

В работе определяется динамическая модель производства с переменной технологией. Вводятся в рассмотрение некоторые классы траекторий модели и приводится характеристика этих траекторий (в терминах линейных положительных функционалов). Из полученных результатов вытекают, в частности (иногда в уточненном виде), теоремы о характеристике и теоремы двойственности, приведенные для динамических моделей в работах [1,2,3,4,5].

При исследовании моделей существенно используются свойства суперлинейных функционалов и точечно-множественных отображений, определенных на конусе [6,7]. Отметим еще, что в дальнейшем мы будем применять, не оговаривая это особо, терминологию и обозначения работы [7].

1^0. Рассмотрим произвольное множество E неотрицательных вещественных чисел, обладающее лишь теми свойствами, что а) $0 \in E$; б) E содержит более одного элемента. Положим $\tilde{E} = \{(\tau, t) \in E \times E \mid \tau > t\}$. Рассмотрим далее семейство топологических пространств $(X_t)_{t \in E}$ и семейство отображений $(a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}$, где $a_{\tau,t}$ -отображение некоторого непустого подмножества K_t пространства X_t в $\Xi(X_\tau)$ $((\tau, t) \in \tilde{E})$. Если семейства $(K_t)_{t \in E}$ и $(a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}$ таковы, что

1) $a_{\tau,t}(K_t) \subset K_\tau$;

2) отображение $a_{\tau,t}$ $((\tau,t) \in \tilde{E})$ замкнуто (т.е. график $Z_{\tau,t} = \{(x,y) \in X_t \times X_\tau \mid y \in a_{\tau,t}(x)\}$ этого отображения замкнут в $X_t \times X_\tau$);

3) $a_{t'',t'} \circ a_{t',t} = a_{t'',t}$ $(t, t', t'' \in E,\ t < t' < t'')$, (1.1)

то объект

$$\mathcal{N} = \{E, (X_t)_{t\in E}, (K_t)_{t\in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in \hat{E}}\} \qquad (I\ 2)$$

назовем динамическим семейством отображения.

Основным объектом изучения в динамическом семействе отображений является траектория. Траекторией динамического семейства отображений $\mathcal{N}$ назовем семейство $\chi = (x_t)_{t\in E}$ такое, что а) $x_t \in K_t$ $(t\in E)$; б) $x_\tau \in a_{\tau,t}(x_t)$ $((\tau,t)\in\hat{E})$. Заметим, что траекторию χ семейства $\mathcal{N}$ можно рассматривать как элемент прямого произведения $\Pi_{t\in E} X_t$.

Важную роль в дальнейшем играет следующая

Теорема I.I. Рассмотрим семейство (I.2), и пусть $t'\in E$ $(t'>0)$, $y_\circ \in K_\circ$, $y'\in a_{t',0}(y_\circ)$; пусть, далее, множества $a_{\tau,t}(x)$ компактны $((\tau,t)\in\hat{E}$; $x\in K_t$). Тогда найдется траектория $\chi = (x_t)_{t\in E}$ семейства $\mathcal{N}$, такая, что $x_\circ = y_\circ$, $x_{t'} = y'$.

Доказательство. Расширим пространство X_t, добавив к нему одну точку u_t $(t\in E)$ (Будем считать, что базис окрестностей точки u_t совпадает с множеством, состоящим из этой точки $(t\in E)$). Полученное таким образом топологическое пространство обозначим через $\tilde{X}_t$ $(t\in E)$. Через $\tilde{X}$ обозначим прямое произведение $\Pi_{t\in E}\tilde{X}_t$.

Рассмотрим подмножество $\mathcal{Y}$ пространства $\tilde{X}$, состоящее из элементов $\chi = (x_t)_{t\in E}$ этого пространства, обладающих следующим свойством: найдется подмножество E_χ множества E такое, что I) $0\in E_\chi$, $t'\in E_\chi$; 2) если $t,\tau\in E_\chi$, $\tau > t$, то $x_\tau \in a_{\tau,t}(x_t)$; 3) $x_\circ = y_\circ$; $x_{t'} = y'$; 4) если $E \neq E_\chi$ и $t\in E\setminus E_\chi$, то $x_t = u_t$.

Ясно, что множество $\mathcal{Y}$ непусто. Введем в $\mathcal{Y}$ отношение порядка $\succcurlyeq$, положив для $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{Y}$ $(\chi_i = (x^i_t)_{t\in E}$; $i=1,2)$

$$\chi_1 \succcurlyeq \chi_2$$

тогда и только тогда, когда а) $E_{\chi_1} \supset E_{\chi_2}$; б) $x^1_t = x^2_t$ $(t\in E_{\chi_2})$. Нетрудно проверить, что каждая цепь в $\mathcal{Y}$ обладает верхней гранью. Используя лемму Цорна, получим, что $\mathcal{Y}$ содержит максимальные элементы.

Пусть $\chi = (x_t)_{t\in E}$ - максимальный элемент $\mathcal{Y}$. Покажем, что $E_\chi = E$. Предполагая противное, найдем точку θ, принадлежащую $E\setminus E_\chi$ и положим ж)

$$F_1 = \{t\in E_\chi \mid t<\theta\}, \quad F_2 = \{\tau\in E_\chi \mid \tau>\theta\}$$

ж) Мы предполагаем, что множества F_1 и F_2 непусты. В противном случае доказательство лишь упростится.

Пусть $F = F_2 \times F_1$. Для пары $(\tau, t) \in F$ положим

$$b_{\tau,t} = a^{-1}_{\tau,\theta}(x_\tau) \cap a_{\theta,t}(x_t) .$$

Нетрудно проверить, что семейство $(b_{\tau,t})_{(\tau,t)\in F}$ центрировано. Из условий теоремы следует, что множество $b_{\tau,t}$ ($(\tau, t) \in F$) компактно, а потому

$$\bigcap_{(\tau,t)\in F} b_{\tau,t} \neq \phi .$$

Пусть $y_\theta \in \bigcap_{(\tau,t)\in F} b_{\tau,t}$. Рассмотрим элемент $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t\in E}$ пространства $\tilde{X}$, определенный следующим образом: $\bar{x}_t = x_t$ $(t \in E_\chi)$, $\bar{x}_\theta = y_\theta$; $\bar{x}_t = u_t$ $(t \in E \setminus (E_\chi \cup \{\theta\}))$.

Ясно, что $\bar{\chi} \in Y$, причем $E_{\bar{\chi}} = E_\chi \cup \{\theta\}$, кроме того, $\bar{\chi} \geqslant \chi$, $\bar{\chi} \neq \chi$. Последнее, однако, невозможно, так как χ - максимальный элемент множества Y. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие 1. Из каждой точки x конуса K_0 исходит траектория.

Следствие 2. Пусть $(t_1, t_2) \in \hat{E}$ $(t_2 > 0)$ и элементы y_1 и y_2 таковы, что $y_2 \in a_{t_2,0}(K_0)$, $y_1 \in a_{t_1,t_2}(y_2)$. Тогда существует траектория $\chi = (x_t)_{t\in E}$ такая, что $x_{t_i} = y_i$ $(i = 1, 2)$.

Совокупность всех траекторий семейства $\mathfrak{n}$, удовлетворяющего условиям теоремы, назовем пучком траекторий и обозначим символом $P_{\mathfrak{n}}$. Нетрудно описать все подмножества пространства $\prod_{t\in E} X_t$, которые можно рассматривать, как пучки траекторий некоторого динамического семейства отображений. Однако, мы не останавливаемся на этом, ввиду недостатка места.

2° Рассмотрим динамическое семейство отображений:

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t\in E}, (K_t)_{t\in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in \hat{E}}\}, \qquad (2.1)$$

где X_t - банахово пространство ($t \in E$), K_t - выпуклый, замкнутый, выступающий, воспроизводящий конус в пространстве X_t $(t \in E)$; $a_{\tau,t}$ $((\tau,t) \in \hat{E})$ - вогнутое, положительно однородное, замкнутое, полунепрерывное сверху, ограниченное отображение конуса K_t в $\Xi(K_\tau)$, обладающее следующими свойствами: 1) найдется положительное число $\lambda_{\tau,t}$ такое, что

$$n\, a_{\tau,t}(S_t^1) \supset \lambda_{\tau,t} S_\tau^1 \qquad (2.2)$$

(здесь $S_\theta^1 = \{x \in K_\theta \mid \|x\| \leq 1\}$ $(\theta \in E)$).

2) для любого $x \in K_t$ множество $a_{\tau,t}(x)$ является слабым компактом.

Семейство (2.1) будем называть динамической моделью произ-

водства.

Отметим некоторые свойства модели $\mathfrak{M}$.

1) $n \cdot a_{\tau,t}(K_t) \ (= a''_{\tau,t}(K_t)) = K_\tau \quad ((\tau,t)\in\tilde{E})$;

2) отображение $a_{\tau,t}$ является гейловским;

3) через любые две точки x_1, x_2 $\ (x_2 \in a_{t_2,0}(K_0)$, если $t_2 > 0$, и $x_2 \in K_0$ – в противном случае; $x_1 \in a_{t_1,t_2}(x_2)$; $(t_1,t_2)\in\tilde{E}$) проходит некоторая траектория модели $\mathfrak{M}$.

В этом пункте мы будем рассматривать лишь модели, обладающие тем свойством, что $T \in E$, где $T = \sup E$. (Эти модели назовем моделями первого рода).

Траекторию $\chi = (x_t)_{t\in E}$ модели первого рода $\mathfrak{M}$ назовем оптимальной, если найдется функционал $f \in K_T^*$ $(f \neq 0)$ такой, что

$$f(x_T) = \max_{y\in a_{T,0}(x_0)} f(y).$$

Про указанную траекторию будем говорить, что она исходит из точки x_0 и оптимальна в смысле f. Ясно, что из любой точки x конуса K_0 исходит оптимальная траектория. Для того, чтобы дать характеристику оптимальной траектории, наряду с моделью (6.1), рассмотрим объект

$$\mathfrak{M}' = \{E, (X'_t)_{t\in E}, (K'_t)_{t\in E}, (a'_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\tilde{E}}\}$$

и покажем, что этот объект является динамическим семейством отображений. Для этого достаточно проверить, что

$$a'_{t'',t} = a'_{t'',t'} \circ a'_{t',t} \qquad (t,t',t''\in E,\ t''>t'>t). \quad (2.3)$$

Отметим сначала, что из (2.2) и леммы 4.4 в [7] вытекает ограниченность отображения $a'_{\tau,t}$ (как отображения K_t^* в $\Xi(K_\tau^*)$, $(\tau,t)\in\tilde{E}$). Применяя теперь следствие 3 к теореме 4.1 в [7], убедимся в справедливости (2.3).

Так как отображение $a_{\tau,t}$ $((\tau,t)\in\tilde{E})$ полунепрерывно сверху, то (теорема 3.2 в [7]) $a'_{\tau,t}(K'_t) = K'_\tau$. Так как $\|a'_{\tau,t}\| < \infty$, то для любого $f \in K_t^*$ множество $a'_{\tau,t}(f)$ ограничено в X_τ^* и, следовательно, компактно в X'_τ. Отсюда следует (теорема 1.1 и следствие 2 к ней), что если $f \in K'_t$, $g \in a'_{t'',t'}(f)$, $((t'',t')\in\tilde{E})$, то найдется траектория $\varphi = (f_t)_{t\in E}$ семейства $\mathfrak{M}'$ такая, что $f_{t'} = f$, $f_{t''} = g$.

Пусть теперь $x_0 \in K_0$ $(x_0 \neq 0)$, $f_T \in K'_T$ $(f_T \neq 0)$ и $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t\in E}$ – траектория модели $\mathfrak{M}$, исходящая из точки x_0 и оптимальная в смысле f_T. Так как отображение $a_{T,0}$ полунепрерывно сверху, то (теорема 3.2 в [7]) множество

$(a'_{T,0})^{-1}(f)$ непусто и

$$f_T(\bar{x}'_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f_T(y) = \inf_{g \in (a'_{T,0})^{-1}(f_T)} g(x_0). \quad (2.4)$$

Учитывая (2.4), нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2.I. Пусть $x_0 \in K_0$, $f_T \in K'_T$ $(x_0 \neq 0,\ f_T \neq 0)$ и $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ – траектория модели $\mathfrak{M}$, исходящая из точки x_0. Для того, чтобы траектория $\bar{\chi}$ была оптимальной в смысле функционала f_T, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось семейство $\varphi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$ $(f_t^\varepsilon \in K'_t,\ t \in E)$ такое, что

I) для любой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели $\mathfrak{M}$ функция h_χ:

$$h_\chi(t) = f_t^\varepsilon(x_t) \qquad (t \in E)$$

убывает (в широком смысле);

2) $h_{\bar{\chi}}(0) - h_{\bar{\chi}}(T) < \varepsilon$;

3) $f_t^\varepsilon \neq 0$ $(t \in E)$; $f_T^\varepsilon = f_T$.

Доказательство. I) Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$, $\bar{\chi}$ – оптимальная в смысле f_T траектория и функционал f_0^ε из множества $(a'_{T,0})^{-1}(f_T)$ таков, что

$$f_0^\varepsilon(\bar{x}_0) < f_T(\bar{x}_T) + \varepsilon .$$

(Такой функционал найдется в силу (2.4)). Поскольку $f_T \in a'_{T,0}(f_0^\varepsilon)$, то найдется траектория $\varphi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$ семейства $\mathfrak{M}'$, исходящая из f_0 и такая, что $f_T^\varepsilon = f_T$. Нетрудно проверить, что $a'_{T,t}$ – гейловское отображение; так как $f_T \neq 0$, то из сказанного следует, что и $f_t^\varepsilon \neq 0$ $(t \in E)$. Мы показали, таким образом, что φ_ε – искомое семейство.

2) Достаточность. Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство $\varphi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$, удовлетворяющее условиям теоремы. Тогда, если $y \in a_{T,0}(\bar{x}_0)$, то найдется траектория модели $\mathfrak{M}$, соединяющая точки $\bar{x}_0$ и y, и потому $f_T(y) \le f_0^\varepsilon(\bar{x}_0)$. С другой стороны, $f_0^\varepsilon(\bar{x}_0) < f_T(\bar{x}_T) + \varepsilon$. Таким образом

$$f_T(\bar{x}_T) \le \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f_T(y) < f_T(\bar{x}_T) + \varepsilon ,$$

откуда и следует оптимальность траектории $\bar{\chi}$. Теорема доказана.

Теорему 2.I. можно переписать в форме теоремы двойственности.

Пусть P – пучок траекторий модели $\mathfrak{M}$, $\tilde{P}$ – совокупность

всех семейств $\varphi=(f_t)_{t\in E}$ $(f_t\in K'_t,\ t\in E)$ таких, что для любого $\chi=(x_t)_{t\in E}\in P$ функция $h_\chi: h_\chi(t)=f_t(x_t)$ убывает. Ясно, что $\tilde{P}$ включает в себя пучок P' траекторий семейства $\mathfrak{M}'$ и совпадает с этим пучком в случае, если $a_{\tau,t}(K_t)=K_\tau$ $((\tau,t)\in\tilde{E})$.

Пусть $x_0\in K_0$, $f_T\in K'_T$ $(x_0\neq 0,\ f_T\neq 0)$. Сформулируем следующие задачи.

ЗАДАЧА I. Найти элемент $\bar{\chi}$ множества P такой, что $Pz_0\bar{\chi}=x_0$ и

$$f_T(Pz_T\bar{\chi})=\max_{\chi\in P,\ Pz_0\chi=x_0} f_T(Pz_T\chi).$$

ЗАДАЧА II. Найти элемент $\bar{\varphi}$ множества $\tilde{P}$ такой, что $Pz_T\bar{\varphi}=f_T$ и

$$(Pz_0\varphi)(x_0)=\min_{\varphi\in\tilde{P},\ Pz_T\varphi=f_T}(Pz_0\varphi)(x_0).$$

Имеет место

Теорема 2.I$'$ (Теорема двойственности).

$$\max_{\chi\in P,\ Pz_0\chi=x_0} f_T(Pz_T\chi)=\inf_{\varphi\in\tilde{P},\ Pz_T\varphi=f_T}(Pz_0\varphi)(x_0),$$

Введем следующее определение. Будем говорить, что траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ допускает характеристику, если найдется семейство $\varphi=(f_t)_{t\in E}$ $(f_t\in K^*_t,\ f_t\neq 0,\ t\in E)$ такое, что I) для любой траектории $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ функция h_χ: $h_\chi(t)=f_t(x_t)$ $(t\in E)$ убывает; 2) $h_{\bar{\chi}}(0)=h_{\bar{\chi}}(T)$ (т.е. функция $h_{\bar{\chi}}$ постоянна). Указанное семейство φ назовем характеристикой траектории $\bar{\chi}$.

Если траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ допускает характеристику $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$, то эта траектория оптимальна в смысле $\bar{f}_T$. Действительно, для $y\in a_{T,0}(\bar{x}_0)$ имеем

$$\bar{f}_T(y)\le\bar{f}_0(\bar{x}_0)=\bar{f}_T(\bar{x}_T),$$

отсюда и следует наше утверждение. Обратное, разумеется, не имеет места. Из доказательства теоремы 2.I. легко вытекает, что если инфимум в формуле (2.4) реализуется, то оптимальная в смысле f_T траектория $\bar{\chi}$, исходящая из точки x_0, допускает характеристику $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$ такую, что $\bar{f}_T=f_T$. Нетрудно проверить, что справедливо и обратное утверждение. Нетрудно также проверить, что справедлива

Лемма 2.I. Пусть траектория $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ допускает характеристику $\varphi=(f_t)_{t\in E}$. Тогда функционал f_t $(t\in E,\ 0<t<T)$ разделяет множества $a_{t,0}(x_0)$ и $a^{-1}_{T,t}(\cdot\,)$.

Более точно,

$$\max_{y\in a_{t,0}(x_0)} f_T(y) - f_t(x_t) = \min_{z\in a^{-1}_{T,t}(x_T)} f_t(z) \cdot$$

Следующая ниже теорема дает (при некоторых дополнительных предположениях) полное описание траекторий, допускающих характеристику.

Т е о р е м а 2.2. Пусть модель $\mathfrak{M}$ такова, что отображение $a'^{\,0}_{T,0}$ полунепрерывно сверху. Для того, чтобы траектория $\chi = (x_t)_{t\in E}$ этой модели допускала характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K^*_0 такой, что

I) $f(x_0) = \min_{y\in(na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y)$; 2) $a'_{T,0}(f_0) \neq \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Достаточность. Пусть f - функционал, фигурирующий в условии теоремы. Так как отображение $a'_{T,0}$ полунепрерывно сверху, то (теоремы 3.2 и 3.3 в [7]) .

$$\sup_{g\in a'_{T,0}(f)} g(x_T) = \inf_{x\in(a'_{T,0})^{-1}(x_T)} f(x) = \inf_{x\in(na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(x) = f(x_0).$$

Множество $a'_{T,0}(f)$ компактно в X'_T ,и потому найдется функционал $\tilde{f}$ из $a'_{T,0}(f)$ такой, что

$$\tilde{f}(x_T) = f(x_0) \quad .$$

Так как $a'_{T,0}(f) \neq \{0\}$, то можно считать, что $\tilde{f} \neq 0$.Соединим точки f и $\tilde{f}$ траекторией φ модели $\mathfrak{M}'$. Ясно, что φ является характеристикой траектории χ .

2) Необходимость. Пусть χ допускает характеристику $\varphi = (f_t)_{t\in E}$.Тогда, если $x\in K_0$, $y\in a_{T,0}(x)$, то $f_0(x) \geq f_T(y)$. Последнее означает, что $f_T \in a'_{T,0}(f_0)$. Так как $f_T \neq 0$, то $a'_{T,0}(f_0) \neq \{0\}$. Заметим , что (теорема 3.3 в [7]) $a''_{T,0} = na_{T,0}$, и потому $(na_{T,0})' = a'_{T,0}$. Из сказанного следует, что $f_T \in (na_{T,0})'(f_0)$. Из последнего соотношения вытекает, что для любого $x\in(na_{T,0})^{-1}(x_T)$

$$f_0(x) \geq f_T(x_T) = f_0(x_0) \; .$$

Таким образом,

$$f_0(x_0) = \min_{y\in(na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y) \; .$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е . Если функционал f удовлетворяет условию I) теоремы и $f(x_0) > 0$, то $a'_{T,0}(f) \neq \{0\}$.

Приведем теперь некоторые достаточные условия того, что траектория χ допускает характеристику.

Теорема 2.3. Пусть модель $\mathfrak{M}$ такова, что конус $K_\circ$ телесен и $x_\circ$ -внутренняя точка $K_\circ$. Тогда траектория $\chi=(x_t)_{t\in E}$, исходящая из $x_\circ$ и оптимальная в смысле функционала f_T ($f_T \in K^*_T$, $f_T \neq 0$), допускает характеристику $\tilde{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$ такую, что $\bar{f}_T = f_T$.

Доказательство. Рассмотрим суперлинейный функционал q, определенный на конусе $K_\circ$ по формуле:

$$q(x) = \inf_{f\in (a'_{T,0})^{-1}(f_T)} f(x) .$$

Так как q принимает лишь неотрицательные значения, то он непрерывен в нуле. Так как $x_\circ$ -внутренняя точка конуса $K_\circ$, то q имеет опорный линейный функционал в этой точке (см. теорему 9 в [6]); иными словами, найдется функционал $\hat{f}\in (a'_{T,0})^{-1}(f_T)$ такой, что

$$\hat{f}(x_\circ) = \min_{f\in (a'_{T,0})^{-1}(f_T)} f(x) .$$

Доказательство завершается теми же рассуждениями, что и в теореме 2.1.(Необходимость).

Теорема 2.4. Пусть $\mathfrak{M}$ - динамическая модель производства первого рода, причем конуса K_t обладают тем свойством, что каждое их ограниченное, выпуклое замкнутое подмножество слабо компактно; пусть Ω - выпуклое замкнутое подмножество конуса K_t такое, что при некотором $\lambda > 0$

$$\Omega \supset \lambda S^+_\circ . \qquad (2.5)$$

Пусть, далее, $f_T \in K^*_T$ и $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ - траектория модели $\mathfrak{M}$ такая, что $\bar{x}_\circ \in \Omega$ и

$$f_T(\bar{x}_T) = \max_{y\in a_{T,0}(\Omega)} f_T(y) .$$

Тогда траектория $\bar{\chi}$ допускает характеристику $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$, обладающую тем свойством, что $\bar{f}_T = f_T$.

Доказательство. Наряду с моделью $\mathfrak{M}$ рассмотрим объект

$$\mathfrak{M}^\circ = \{E^\circ, (X^\circ_t)_{t\in E^\circ}, (K^\circ_t)_{t\in E^\circ}, (a^\circ_{\tau,t})_{(\tau,t)\in \hat{E}^\circ}\} ,$$

где $E^\circ = E\cup(-1)$, $X^\circ_{-1} = R$ (вещественная прямая), $X^\circ_t = X_t$ $(t\in E)$; $K^\circ_{-1} = R^+$ (неотрицательная полуось), $K^\circ_t = K_t$ $(t \in E$

$$a^{\circ}_{0,-1}(\lambda) = \lambda\,\Omega \quad (\lambda \in R^{+}); \quad a^{\circ}_{\tau,-1} = a_{\tau,0} \circ a^{\circ}_{0,-1} \quad (\tau \in E);$$

$$a^{\circ}_{\tau,t} = a_{\tau,t} \quad ((\tau,t) \in \bar{E}).$$

Объект $\mathfrak{M}^{\circ}$, вообще говоря, не является динамическим семейством отображений, так как $\inf E^{\circ} = -1$. Нетрудно, однако, проверить, что он обладает всеми свойствами динамической модели, и потому, допуская вольность речи, мы будем называть его динамической моделью (можно сказать, что $\mathfrak{M}^{\circ}$ "изоморфно" некоторой динамической модели).

Пусть $\bar{\mathfrak{X}}$ – траектория модели $\mathfrak{M}$, фигурирующая в теореме. Рассмотрим семейство $\bar{\mathfrak{X}}^{\circ} = (\bar{x}^{\circ}_{t})_{t \in E^{\circ}}$, где $\bar{x}^{\circ}_{-1} = 1$, $\bar{x}^{\circ}_{t} = \bar{x}_{t}$ $(t \in E)$. Так как $\bar{x}_{0} \in \Omega = a_{-1,0}(1)$, то семейство $\bar{\mathfrak{X}}^{\circ}$ является траекторией модели $\mathfrak{M}^{\circ}$; так как

$$f_{T}(\bar{x}_{T}) = \max_{y \in a_{T,0}(\Omega)} f_{T}(y) = \max_{y \in a_{T,-1}(1)} f_{T}(y),$$

то траектория $\bar{\mathfrak{X}}^{\circ}$ оптимальна в смысле f_{T}. Поскольку I является внутренней точкой конуса K_{-1}, то, в силу теоремы 2.3, траектория $\bar{\mathfrak{X}}^{\circ}$ допускает характеристику. Отсюда легко следует, что и траектория $\bar{\mathfrak{X}}$ допускает характеристику.

Теорема доказана.

Приведем (без доказательства) еще одно достаточное условие траектории, допускающей характеристику. Предварительно введем некоторые определения. Пусть X – векторное пространство, K – выпуклый конус в X, $x \in K$. Элемент $u \in X$ назовем допустимым в точке x, если найдется число $\alpha_u > 0$ такое, что отрезок $\{x + \alpha u \mid \alpha \in [0, \alpha_u]\}$ входит в конус K. Совокупность M_x всех допустимых в точке x элементов является выпуклым конусом. Ясно, что $K \subset M_x$, $-x \in M_x$. Пусть теперь K_i – выпуклый замкнутый конус в нормированном пространстве X_i $(i = 1,2)$, a – положительно однородное, вогнутое, замкнутое, ограниченное отображение K_1 в $\Pi(K_2)$. Будем говорить, что отображение a дифференцируемо в точке $x \in K_1$, если 1) найдется з а м к н у т ы й выпуклый конус L_x допустимых в точке x направлений, такой, что $K \subset L_x$, $-x \in L_x$; 2) для любых $u \in L_x$ и $\alpha \in [0, \alpha_u]$ найдутся выпуклые, замкнутые, ограниченные подмножества $a^{+}_{x}(u)$, $a^{-}_{x}(u)$, $0^{+}_{x,u}(\alpha)$, $0^{-}_{x,u}(\alpha)$ такие, что

$$a(x + \alpha u) + \alpha a^{-}_{x}(u) + 0^{-}_{x,u}(\alpha) = a(x) + \alpha a^{+}_{x}(u) + 0^{+}_{x,u}(\alpha) \tag{2.6}$$

$$\lim_{\alpha \to +0} \sup_{y \in 0^{+}_{x,u}(\alpha)} \frac{\|y\|}{\alpha} = \lim_{\alpha \to +0} \sup_{y \in 0^{-}_{x,u}(\alpha)} \frac{\|y\|}{\alpha} = 0$$

Через $\Xi'(K_2)$ обозначим метрическое пространство, элементами которого являются выпуклые, замкнутые, ограниченные подмножества конуса K_2, а метрика введена следующим образом:

$$\rho(U,V)=max(\sup_{x\in U}\rho(x,V),\ \sup_{y\in V}\rho(U,y))\quad (U,V\in\Xi'(K_2)).$$

Будем говорить, что отображение a непрерывно дифференцируемо по направлениям в точке x, если отображения a_x^- и a_x^+ конуса L_x в $\Xi'(K_2)$, фигурирующие в (2.6), непрерывны.

Имеет место.

Теорема 2.5. Пусть $\mathfrak{M}$ - динамическая модель производства, $x_0\in K_0$ $(x_0\neq 0)$ и отображение $a_{T,0}$ непрерывно дифференцируемо по направлениям в точке x_0. Тогда каждая оптимальная траектория, исходящая из точки x_0, допускает характеристику.

Замечание. Допустим, что конус K_0 содержит окруженные точки. Тогда если x_0 - окруженная точка, то, полагая $L_{x_0}=X$, нетрудно убедиться в том, что отображение $a_{T,0}$ дифференцируемо в точке x_0 по направлениям. (см. [8]). Таким образом, для того чтобы каждая оптимальная траектория, исходящая из окруженной точки, допускала характеристику, достаточно потребовать непрерывной дифференцируемости отображения $a_{T,0}$ в этой точке.

Рассмотрим динамическое семейство отображений

$$\mathfrak{N}=\{E,(X_t)_{t\in E},(K_t)_{t\in E},\ (a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}.$$

Пусть $T=\sup E$ и $\theta\in E$, $0<\theta<T$. Положим $E_\theta=E\cap[0,\theta]$ и рассмотрим динамическое семейство

$$\mathfrak{N}_\theta=\{E_\theta,(X_t)_{t\in E_\theta},(K_t)_{t\in E_\theta},\ (a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}_\theta}\}.$$

Траектории семейства $\mathfrak{N}_\theta$ будем называть θ - траекториями семейства $\mathfrak{N}$. Если $\chi=(x_t)_{t\in E}$ - траектория семейства $\mathfrak{N}$, то θ - траекторию $\chi_\theta=(x_t)_{t\in E_\theta}$ этого семейства назовем θ - куском траектории χ. Предположим теперь, что $\mathfrak{N}$ - динамическая модель производства. Будем говорить, что θ -траектория модели $\mathfrak{N}$ оптимальна (соответственно, допускает характеристику), если она является оптимальной (соответственно, допускает характеристику), как траектория модели $\mathfrak{N}_\theta$.

В заключение этого пункта отметим справедливость следующих простых утверждений. Пусть $\mathfrak{M}=\{E,(X_t)_{t\in E},(K_t)_{t\in E},(a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$ - динамическая модель производства первого рода. Тогда

I) если χ - оптимальная траектория модели $\mathfrak{M}$, то θ

кусок этой траектории может и не быть θ - оптимальной траекторией ;

2) если траектория χ модели $\mathfrak{M}$ допускает характеристику, то и любой θ -кусок этой траектории допускает характеристику.

3. В этом пункте мы рассмотрим динамические модели производства, представляющие наибольший интерес, а именно конечно - мерные динамические модели. Динамическое семейство отображений

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t\in E}, (K_t)_{t\in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in \hat{E}}\} \qquad (3.I)$$

назовем конечномерной динамической моделью производства, если X_t $(t\in E)$ - конечномерное векторное пространство, K_t $(t\in E)$ - выпуклый, замкнутый, выступающий, воспроизводящий конус в пространстве X_t, $a_{\tau,t}$ - вогнутое, положительно однородное, замкнутое, гейловское отображение, обладающее тем свойством, что конус $a_{\tau,t}(K_t)$ содержит внутреннюю точку конуса K_τ. (В случае, если пространство X_τ нульмерно, т.е. $X_\tau=\{0\}$, условимся считать ноль внутренней точкой конуса $K_\tau=\{0\}$). Нетрудно проверить, используя результаты работы [7], что конечномерная динамическая модель производства является динамической моделью производства в смысле 2°.

В конечномерных моделях имеет смысл рассматривать так называемые эффективные траектории. Предварительно мы приведем некоторые вспомогательные определения и результаты.

Пусть K - выпуклый, замкнутый воспроизводящий, выступающий конус в конечномерном пространстве X. Как известно, гранью конуса K называется всякое его пересечение Γ с каким-либо (возможно, пустым) множеством гиперподпространств, обладающее следующим свойством: если $x, y\in K$ и существует внутренняя точка отрезка $[x, y]$, принадлежащая Γ, то и $x, y\in\Gamma$. Если Ω - выпуклое подмножество K, то пересечение всех граней конуса K, содержащих Ω, также является гранью. Эту грань конуса K мы будем называть гранью, порожденной множеством Ω и обозначать через $\Gamma(\Omega)$. Имеет место

Лемма 3.I. Если Ω - выпуклое компактное подмножество K, то

$$\Gamma(\Omega)=C(n\,\Omega),$$

(где $C(n\,\Omega)$ - коническая оболочка нормальной оболочки Ω).

Замечание. $\Gamma(\Omega)=K$ тогда и только тогда, когда Ω содержит внутренние точки конуса K.

Если ξ -подмножество векторного пространства X, то элемент x множества ξ назовем граничным сверху (соответственно, снизу) элементом этого множества, если при $\lambda > 1$ (соответственно, $0 < \lambda < 1$),

$$\lambda x \notin \xi .$$

Лемма 3.2. Пусть Ω -выпуклое компактное нормальное подмножество рассматриваемого нами конуса K, причем $\Omega \neq \{0\}$. Элемент x множества Ω является граничным сверху элементом этого множества тогда и только тогда, когда найдется функционал $h \in (\Gamma(\Omega))^*$ такой, что

$$h(x) = \sup_{y \in \Omega} h(y) > 0$$

(здесь символом $(\Gamma(\Omega))^*$ обозначена поляра к конусу $\Gamma(\Omega)$ в пространстве L^*, где $L = \Gamma(\Omega) - \Gamma(\Omega)$.

Рассмотрим снова конечномерную модель (3.I). Пусть $x \in K_0$. Грань $\Gamma(\{x\})$ конуса K_0 обозначим символом Γ_0^x, грань $\Gamma(a_{t,0}(x))$ конуса K_t обозначим символом Γ_t^x $(t \in E,\ t > 0)$. Из леммы 3.I вытекает, что

$$\Gamma_0^x = C(\langle 0, x\rangle); \quad \Gamma_t^x = C(Ha_{t,0}(x)) \quad (t \in E,\ t > 0).$$

Положим $L_t^x = \Gamma_t^x - \Gamma_t^x$; символом $a_{\tau,t}^x$ обозначим сужение отображения $a_{\tau,t}$ на конус Γ_t^x $((\tau,t) \in \hat{E})$. Нетрудно проверить, что объект

$$\mathfrak{M}^x = \{E,\ (L_t^x)_{t\in E},\ (\Gamma_t^x)_{t\in E},\ (a_{\tau,t}^x)_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$$

является конечномерной динамической моделью. Эту модель мы будем называть подмоделью модели $\mathfrak{M}$, порожденной точкой x. Заметим, что $\mathfrak{M}^x = \mathfrak{M}^y$ тогда и только тогда, когда $C(\langle 0, x\rangle) = C(\langle 0, y\rangle)$ (или, что то же самое $\Gamma_0^x = \Gamma_0^y$). В частности, если конус K_0 многогранный, то модель $\mathfrak{M}$ имеет лишь конечное число различных подмоделей. Отметим еще, что подмодель $\mathfrak{M}^x$ совпадает с $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда x является внутренней точкой конуса K_0.

В оставшейся части этого пункта будем предполагать, что модель (3.I) первого рода.

Траекторию $\chi = (x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ назовем эффективной, если она является оптимальной траекторией подмодели $\mathfrak{M}_{\chi_0}$. Заметим, что каждая эффективная траектория модели $\mathfrak{M}$ является оптимальной траекторией этой модели, тем не менее, не каждая оптимальная траектория эффективна; если, однако, x -внутренняя точка K_0, то множества всех оптимальных и всех эффективных траекторий, исходящих из x, совпадают. Следующие леммы описывают эффектив-

ные траектории в терминах самой модели $\mathfrak{M}$ (а не её подмоделей).

Лемма 3.3. Траектория $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ эффективна тогда и только тогда, когда x_T является граничным сверху элементом множества $n a_{T,0}(x_0)$. (Доказательство этой леммы легко следует из леммы 3.2). Здесь $n a_{T,0}(x)=\{\vec{a}\}$.

Лемма 3.4. Траектория $\dot{\chi}=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ эффективна тогда и только тогда, когда x_0 является граничным снизу элементом множества $(n a_{T,0})^{-1}(x_T)$

Следствие. Если χ -эффективная траектория модели $\mathfrak{M}$, то любой её Θ -кусок является эффективной Θ -траекторией этой модели. (Эффективные Θ -траектории определяются естественным образом).

Используя определение эффективной траектории и теорему 2.3 нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы

Теорема 3.1. Пусть

$$\mathfrak{M}=\{E,(X_t)_{t\in E},(K_t)_{t\in E},(a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$$

конечномерная динамическая модель производства первого рода, $x\in K_0\ (x\neq 0)$ и

$$\mathfrak{M}^x=\{E,(L_t^x)_{t\in E},(\Gamma_t^x)_{t\in E},(a_{\tau,t}^x)_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$$

подмодель модели $\mathfrak{M}$, порожденная точкой x. Пусть, далее, f – линейный положительный (на конусе Γ_t^x) функционал в пространстве L_T^x, $f\neq 0$. Для того, чтобы траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$, исходящая из точки x, была эффективна в смысле функционала f (т.е. $f(\bar{x}_T)=\max\limits_{y\in a_{T,0}(x)} f(y)$) необходимо и достаточно, чтобы нашлось семейство $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$, где f_t – линейный положительный (на конусе Γ_t^x) функционал в пространстве L_t^x $(t\in E)$, такое, что - а) для любой траектории $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}^x$ функция $h_\chi: h_\chi(t)=\bar{f}_t(x_t)\ (t\in E)$ убывает

б) функция $h_{\bar\chi}$ постоянна и отлична от нуля;

в) $\bar{f}_T=f$.

Конечномерную динамическую модель (3.1) назовем правильной если $X_t\ (t\in E)$ – арифметическое пространство, $K_t\ (t\in E)$ – конус векторов пространства X_t с неотрицательными компонентами. Имеет место

Лемма 3.5. Для того, чтобы траектория $\chi=(x_t)_{t\in E}$ правильной модели $\mathfrak{M}$ первого рода была эффективной, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_T^* такой, что

$$f(x_T)=\max_{x\in a_{T,0}(x_0)} f(x)>0 \qquad (3.2)$$

В дальнейшем, если выполнено (3.2), траекторию χ будем называть эффективной в смысле f.

Т е о р е м а 3.2. Пусть $\mathfrak{M}=\{E,(X_t)_{t\in E},(K_t)_{t\in E};(a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$, правильная конечномерная модель первого рода, $x\in K_0$, $f\in K_T^*$ $(x\neq 0,\ f\neq 0)$. Для того, чтобы траектория $\bar{\chi}=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$, исходящая из точки x, была эффективна в смысле f, необходимо и достаточно, чтобы нашлось семейство $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$. $(\bar{f}_t\in K_t^*,\ t\in E)$ такое, что

а) для любой траектории $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$, исходящей из точки $\tilde{x}$, принадлежащей конусу $C(\langle o,x\rangle)$, функция h_χ: $h_\chi(t)=\bar{f}_t(x_t)$ $(t\in E)$ убывает;

б) функция $h_{\bar{\chi}}$ -постоянна и отлична от нуля;

в) $\bar{f}_T=f_T$

Доказательство легко следует из теоремы 3.I.

4° В этом пункте мы рассмотрим конечномерную динамическую модель

$$\mathfrak{M}=\{E,(X_t)_{t\in E},(K_t)_{t\in E},(a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}}\} \qquad (4.I)$$

такую, что $\sup E=T\notin E$ (модель второго рода).

Траекторию χ модели (4.I) назовем эффективной, если для любого $\theta\in E$ $(\theta>0)$ θ -кусок этой траектории является ϑ- - эффективной траекторией модели $\mathfrak{M}$. Имеет место

Т е о р е м а 4.I. Пусть $\mathfrak{M}=\{E,(X_t)_{t\in E}(K_t)_{t\in E},(a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$ конечномерная динамическая модель второго рода, $x\in K_0$ $(x\neq 0)$ и $\mathfrak{M}^x=\{E,(L_t^x)_{t\in E},(\Gamma_t^x)_{t\in E},(a_{\tau,t}^x)_{(\tau,t)\in\hat{E}}\}$ подмодель этой модели, порожденная точкой x. Для того, чтобы траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$, исходящая из точки x была эффективной, необходимо и достаточно, чтобы нашлось семейство $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t\in E}$, где $\bar{f}_t$ -положительный (на конусе Γ_t^x) линейный функционал в пространстве L_t^x $(t\in E)$, такое, что

а) для любой траектории $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}^x$ функция h_χ : $h_\chi(t)=\bar{f}_t(x_t)$ $(t\in E)$ убывает

б) функция $h_{\bar{\chi}}$ -постоянна и отлична от нуля.

Мы приведем лишь схему доказательства необходимости. Множество E можно рассматривать как направление (относительно естественного отношения порядка). Рассмотрим конфинальное подмножество e множества E такое, что I) $0\in E$. 2) каждая точка e является изолированной точкой этого множества (т.е. e дискретно). Положим

$$\mathfrak{M}_e=\{e,(X_t)_{t\in e},(K_t)_{t\in e},(a_{\tau,t})_{(\tau,t)\in\hat{e}}\}$$

Ясно, что $\mathfrak{M}_e$ — конечномерная модель второго рода. Семейство $\bar{\chi}_e=(\bar{x}_t)_{t\in e}$ является эффективной траекторией модели $\mathfrak{M}_e$. Применяя к каждому θ -куску этой траектории теорему 3.I и используя канторовский диагональный процесс, найдем семейство $\bar{\varphi}_e=(f_t^e)_{t\in e}$ такое, что а) для любой траектории $\chi=(x_t)_{t\in e}$ функция $h_{\chi_e}(t)=f_t^e(x_t)$ $(t\in e)$ убывает ; б) функция $h_{\bar{\chi}_e}$ постоянна и отлична от нуля. Из сказанного следует, в частности, что семейство $\bar{\varphi}_e$ является траекторией модели $(\mathfrak{M}_e)'$. Используя теорему I.I, нетрудно найти траекторию $\bar{\varphi}=(f_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}'$ такую что $f_t=f_t^e$ (При этом, разумеется, используется то обстоятельство, что $(\mathfrak{M}_e)'=(\mathfrak{M}')_e$). Из конфинальности e легко следует, что $\bar{\varphi}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Продолжим изучение траекторий модели второго рода. Если $\chi=(x_t)_{t\in E}$ — траектория модели (4.I), то положим

$$(nA)^{-1}(\chi)=\bigcup_{t\in E,\,t>0}(na_{t,0})^{-1}(x_t).$$

Из леммы 3.4. мгновенно следует

Л е м м а 4.I. Траектория $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели (4.I) эффективна тогда и только тогда, когда x_0 является граничной снизу точкой множества $(nA)^{-1}(\chi)$.

Будем говорить, что траектория $\bar{\chi}=(x_t)_{t\in E}$ модели (4.I) допускает характеристику, если найдется семейство $\varphi=(f_t)_{t\in E}$ $(f_t\in K_t^*,\ f_t\neq 0,\ t\in E)$ такое, что

I) для любой траектории $\chi=(x_t)_{t\in E}$ модели $\mathfrak{M}$ функция $h_\chi:\ h_\chi(t)=f_t(x_t)$ $(t\in E)$ убывает

2) функция $h_{\bar{\chi}}$ постоянна.

Используя ту же схему, что и при доказательстве теоремы 4.I и привлекая теорему 2.2, можно убедиться в справедливости следующей теоремы

Т е о р е м а 4.2. Для того, чтобы траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ модели (4.I) допускала характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что

$$\min_{y\in(nA)^{-1}(\bar{\chi})} f(y)=f(\bar{x}_0),\qquad a'_{t,0}(f)\neq 0\quad(t\in E,\ t>0)$$

Отметим еще, что имеет место

Т е о р е м а 4.3. Для того, чтобы траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t\in E}$ модели (4.I) допускала характеристику, необходимо и достаточно, чтобы θ -куски этой траектории допускали характеристику при любом $\theta\in E\setminus\{0\}$.

Литература

1. W.Tyndall. A duality theorem for a class of continuous linear programming problems, J. of Industrial and Appl. Math. v.13, No 3, 1965.
2. N.Levinson. A class of continuous linear programming problems, J. of Math Anal and Appl. v.16, No 1, 1966.
3. В.Л.Макаров. Характеристика решений задачи непрерывного линейного и выпуклого программирования, ДАН СССР, т.176, № 5, 1967.
4. А.М.Рубинов. Эффективные траектории динамической модели производства ДАН СССР, т.184, № 6, стр. 1294-1297, 1969 г.
5. А.М.Рубинов. Сублинейные функционалы, определенные на конусе, Сиб. математ. журнал (в печати).
6. А.М.Рубинов. Точечно-множественные отображения, определенные на конусе. Настоящий сборник, стр. 96-113.
7. Ю.Н.Тюрин. Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования. Экономика и математические методы, т.1, № 3, 1965.

Поступила в редакцию
19.VI. 1969 г.