УДК 512.25/26 + 519.3:330.115

О ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМАХ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Н.Н.Астафьев

Для задачи выпуклого программирования (задача C)

$$\min\{f(x) \mid g_j(x) \geq 0, \quad j \in \overline{1,m}\}$$

и ей двойственной (задача C^*)

$$\max\{f(x) - \sum_j u_j g_j(x) / \nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla g_j(x), \; u_j \geq 0 (j)\}$$

при дифференцируемых $f(x)$, $g_j(x)$ известны два основных факта, явившихся основополагающими в теории выпуклого программирования [1-5]:

1) Если задача C удовлетворяет условию регулярности C I [6] и разрешима в $\bar{x}$, то при некотором $\bar{u} \geq 0$ вектор $(\bar{x}; \bar{u})$ решает задачу C^*, при этом их оптимальные значения совпадают (прямая теорема двойственности).

2) Если задача C^* разрешима в точке $(\bar{x}; \bar{u})$ и функция $f(x) - \sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j g_j(x)$ строго выпукла в некоторой окрестности $\bar{x}$, то $\bar{x}$ - оптимальный вектор задачи C (обратная теорема двойственности).

Между задачами C и C^* имеются и другие весьма интересные связи. Отметим, что приведенные условия, при которых справедливы прямая и обратная теоремы двойственности, по своему характеру не являются близкими; кроме того, условия обратной теоремы не позволяют автоматически включить в неё обратную теорему для задачи линейного программирования.

Важным представляется развитие двойственности в направлении отыскания минимальных условий, гарантирующих выполнение основных соотношений двойственности в выпуклом программировании и не

исключающих столь естественные случаи, как, например, случай линейных программ. Представляет несомненный интерес случай негладких ограничений в задаче C [7].

Этим вопросам и посвящена данная работа.

Отметим, что геометрический подход к двойственности был развит в работах [8,9].

Определим для вогнутой функции $\varphi(x)$ множество

$$\nabla(\varphi, \bar{x}) = \{\nabla \in R^n / \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \leqslant (\nabla, x - \bar{x}),\ \forall x \in R^n\}$$

Его называют множеством субградиентов функции $\varphi(x)$ в точке $\bar{x}$.

Под задачей C^*, двойственной к C, понимается [1,7] задача найти

$$\max \{\Phi(x, u) = f(x) - (u, g(x)) / \nabla = \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla_j,$$

$$u_j \geqslant 0,\ \nabla_j \in \nabla(g_j, x),\ j \in \overline{1,m},\ -\nabla \in \nabla(-f, x)\},$$

здесь $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$.

Определение 1. Линейное многообразие $L(x)$, проходящее через $\bar{x} \in R^n$, назовем асимптотическим относительно выпуклой (вогнутой) функции $\varphi(x)$, если $\inf\limits_{L(x)} \varphi(x)$ ($\sup\limits_{L(x)} \varphi(x)$) конечен, но не достигается.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ обладает свойством (φ, y_0) (записывать $\varphi(x) \vdash (\varphi, y_0)$), если из $\varphi(\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_i) = \varphi(y_i)$ $(i \in \overline{0,K})$ для некоторых $K \geqslant 0$, $y_i \in R^n (i \in \overline{1,K})$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=0}^{K} \alpha_i = 1$ всякий раз следует, что многообразия $L(\bar{x}; y_0, \ldots, y_K)$ не являются асимптотическими; здесь

$$L(\bar{x}; y_0, \ldots, y_K) = \{x / x = \bar{x} - y_0 + x',\ x' = \sum_{i=0}^{K} \lambda_i y_i,\ \sum_{i=0}^{K} \lambda_i = 1\}.$$

Заметим, что для выпуклой (вогнутой) функции $\varphi(x)$ имеет место $\varphi(x) \vdash (\varphi, y_0)$, если, например, 1) $\varphi(x)$ линейна; 2) $\varphi(x)$ строго выпукла (строго вогнута) в окрестности y_0; 3) множество $\{x / \varphi(x) \leqslant \varphi(y_0)\}$ ($\{x / \varphi(x) \geqslant \varphi(y_0)\}$) ограничено

Утверждение 1. Пусть $\varphi_1(x) = \varphi(x + y_0)$, тогда если $\varphi(x) \vdash (\varphi, y_0)$, то $\varphi_1(x) \vdash (\varphi_1, 0)$.

Оно проверяется легко, исходя из определения 2.

Положим $\Phi(y, x, u) = f(x + x_0) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x_j + x)$; здесь

$u = (u_1, \ldots, u_m) \in R^m$, $x \in R^n$, $y = (x_0, \ldots, x_m)$, $x_j \in R^n (j \in \overline{0,m})$, $x_0, \ldots, x_m$ — независимые переменные; $M_0 = \{x / g_j(x) \geqslant 0,\ (j \in \overline{1,m})\}$.

Т е о р е м а I. Пусть $M_0 \neq \phi$ и при некоторых $\bar{x}_j$ $(j \in \overline{0,m})$, $-\nabla \in \nabla(-f, \bar{x}_0)$, $\nabla_j \in \nabla(g_j, \bar{x}_j)$ $(j \in \overline{1,m})$ выполняется

$$\nabla = \sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \nabla_j \quad (\bar{u}_j > 0,\ j \in \overline{1,m}). \tag{I}$$

Тогда, если выполнено одно из условий:

I) для любого $v \in R^n$ $(v \neq 0)$ существует $t > 0$, что $\Phi(\bar{y}, tv, \bar{u}) \neq \Phi(\bar{y}, 0, \bar{u})$, где $\bar{y} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_m)$;

2) $F_u(x) \vdash (F_u, 0)$ при некотором $u > 0$, где $F_u(x) = \Phi(\bar{y}, x, u)$, $\bar{y} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_m)$;

3) $f(x) \vdash (f, \bar{x}_0)$, $g_j(x) \vdash (g_j, \bar{x}_j)$ $(j \in \overline{1,m})$,

то задача C разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будем вести индукцией по размерности пространства. Для $n = 0$ утверждение теоремы справедливо. Пусть уже доказано, что оно справедливо для всех $k \leq n-1$. Если для $k = n$ утверждение неверно, т.е. задача C неразрешима, то для неё найдется $s \neq 0$, $s \in R^n$, при котором

$$g(x + ts) \geq g(x),\ f(x + ts) \leq f(x),\ t \geq 0 \tag{2}$$

для любого $x \in R^n$. Отсюда с применением (I) получаем

$$0 \geq (\nabla, s) = \sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j (\nabla_j, s) \geq 0,$$

где $-\nabla \in \nabla(-f, \bar{x}_0)$, $\nabla_j \in \nabla(g_j, \bar{x}_j)$. Поэтому в силу $\bar{u}_j > 0$ будем иметь $(\nabla, s) = 0$, $(\nabla_j, s) = 0$ $(j \in \overline{1,m})$, но тогда согласно (2)

$$\left.\begin{aligned} &f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0 + ts),\ g_j(\bar{x}_j) = g_j(\bar{x}_j + ts),\ t \geq 0,\ j \in \overline{1,m} \\ &\text{или иначе} \\ &\Phi(\bar{y}, ts, \bar{u}) = \Phi(\bar{y}, 0, \bar{u}),\ t \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

что противоречит условию (I) доказываемой теоремы. Будем теперь исходить из условия 2. Введем в рассмотрение функцию

$$\hat{F}_u(x) = \min_t \Phi(\bar{y}, x + ts, u) = F_u(x + t(x)s),$$

где $t(x) \geq 0$ существует в силу (3) и $F_u(x) \vdash (F_u, 0)$.

Из соотношений (2) и

$$\hat{F}_u(x) = \min_t \Big[f(\bar{x}_0 + x + ts) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(\bar{x}_j + x + ts)\Big] = F_u(x + t(x) \cdot s)$$

получаем: для каждого $x \in R^n$ **существуют** $t_j(x)$ $(j \in \overline{0,m})$, что

$$\left.\begin{aligned} &\hat{f}(x) = \min_t f(x + ts) = f(x + t_0(x) \cdot s), \\ &\hat{g}_j(x) = \max_t g_j(x + ts) = g_j(x + t_j(x) s)\ (j \in \overline{1,m}), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем

$$\hat{F}_u(x) = \hat{f}(\bar{x}_0 + x) - \sum_{j=1}^{m} u_j \hat{g}_j(\bar{x}_j + x). \tag{4'}$$

Покажем, что для произвольного t' $\hat{F}_u(x) \vdash (\hat{F}_u, t's)$. Положим $y_0 = t's$ и пусть для некоторых $K \geq 0$, $y_i \in R^n$ $(i \in \overline{1,K})$, $\alpha_i > 0$ $(i \in \overline{0,K})$, $\sum_{i=0}^{K} \alpha_i = 1$ имеет место $\hat{F}_u\left(\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_i\right) = \hat{F}_u(y_i)$ $(i \in \overline{0,K})$. Возьмём $\bar{t} = max\{t(\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_i);\ t(y_i)\ (i \in \overline{0,K})\}$, тогда для $K \geq 0$, $\bar{y}_i = y_i + \bar{t}s$ $(i \in \overline{0,K})$ получим

$$F_u\left(\sum_{i=0}^{K} \alpha_i \bar{y}_i\right) = \hat{F}_u\left(\sum_{i=0}^{K} \alpha_i y_i\right) = \hat{F}_u(y_i) = F_u(\bar{y}_i),\quad i \in \overline{0,K}.$$

Из последнего и соотношений (2),(3) следует, что для любого $0<\alpha<1$

$$F_u\left(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha)\sum_{i=0}^{K} \alpha_i \bar{y}_i\right) = F_u(0) = F_u\left(\sum_{i=0}^{K} \alpha_i \bar{y}_i\right) = F_u(\bar{y}_i),$$

$i \in \overline{0,K}$. Тогда в силу $F_u(x) \vdash (F_u, 0)$ для произвольного многообразия $L(\bar{x}; \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_K, 0)$ (см. определение 2) имеет место $min\, F_u(x) = F_u(x')$ $(x \in L(\bar{x}; \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_K, 0))$. Заметив, что

$$L(\bar{x}; \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_K, 0) = \{x / x = x' + ts,\ x' \in L(\bar{x}; y_0, \ldots, y_K)\},$$

получим

$$\min_{x \in L(\bar{x}; y_0, \ldots, y_K)} \hat{F}_u(x) = \min_{x \in L(\bar{x}; y_0, \ldots, y_K)} \min_t F_u(x + ts) =$$

$$= F_u(x') = \hat{F}_u(x') = \hat{F}_u(x''),$$

где $x' = x'' + ts$, $x'' \in L(\bar{x}, y_0, \ldots, y_K)$, а это и значит $\hat{F}_u(x) \vdash (\hat{F}_u, t's)$.

Непосредственно проверяется

$$-\nabla \in \nabla(-f, \bar{x}_0 + ts),\quad \nabla_j \in \nabla(\hat{g}_j, \bar{x}_j + ts),\ j \in \overline{1,m}. \qquad (5)$$

Положив $R^{n-1} = \{x / (s, x) = 0\}$, определим на R^{n-1} функции $\bar{f}(x) = \hat{f}(x)$, $\bar{g}_j(x) = \hat{g}_j(x)$ $(j \in \overline{1,m})$ и рассмотрим задачу

$$min\{\bar{f}(x) / \bar{g}_j(x) \geq 0,\quad j \in \overline{1,m}\}.$$

Для этой задачи применимо индуктивное предположение. Это следует из (3), (4), (4$'$), (5). Обозначим через $\hat{x}$ её решение. Тогда $\hat{x} + ts$ при любом t решает задачу

$$min\{\hat{f}(x) / \hat{g}_j(x) \geq 0,\quad j \in \overline{1,m}\}.$$

Из (4) следует $\{x / \hat{g}_j(x) \geq 0,\ j \in \overline{1,m}\} = \{x / x = y + ts,\ y \in M_0\}$, а потому существует такое $t_0 \geq 0$, что $\hat{x} + t_0 s \in M_0$ и $\hat{f}(\hat{x}) = f(\hat{x} + t_0 s)$. Приняв во внимание $\hat{f}(x) \leq f(x)$, получим

$$f(\hat{x} + t_0 s) = f(\hat{x}) = min\{f(x) / x \in M_0\},$$

т.е. $x_0 = \hat{x} + t_0 s$ решает задачу C в случае 2). В случае 3) также вводятся функции $\hat{f}(x)$, $\hat{g}_j(x)$ $(j \in \overline{1,m})$ и аналогично, как это делалось в случае 2), показывается, что $\hat{f}(x) \vdash (f, \bar{x})$, $\hat{g}_j(x) \vdash (g_j, \bar{x}_j)$ $(j \in \overline{1,m})$, откуда и получает-

ся разрешимость задачи C. Итак, получена разрешимость задачи C во всех трех случаях – вопреки предположению. Теорема доказана полностью.

Примечание. Для случая линейной программы

$$\min\{(c,x)/x\in M_0=\{x/(c_j,x)-\beta_j\geq 0\ (j\in\overline{1,m})\}\}$$

теорема дает хорошо известный факт; из $M_0\neq\phi$ и представимости $c=\sum_{j=1}^{m}u_j c_j$ при некоторых $u_j\geq 0$ вытекает разрешимость исходной задачи.

Полагая $M_0\neq\phi$, сформулируем два следствия.

Следствие 1. Если при некотором $\bar{x}$ $\nabla=\sum_{j=1}^{m}\bar{u}_j\nabla_j$, где $\bar{u}_j>0$, $\nabla_j\in\nabla(g_j,\bar{x})(j\in\overline{1,m})$, $-\nabla\in\nabla(-f,\bar{x})$, и множество $S(u)=\{x/\Phi(x,\bar{u})\leq\Phi(\bar{x},\bar{u})\}$ где $\Phi(x,\bar{u})=f(x)-(u,g(x))$ ограничено, то задача C разрешима.

Действительно, в этом случае соблюдено условие 1) доказанной теоремы.

Следствие 2. Если при некотором $\bar{x}$ $\nabla=\sum_{j=1}^{m}\bar{u}_j\nabla_j$ (смысл $\nabla,\nabla_j,\bar{u}_j$ –прежний) и множество $\tilde{M}=\{x/g_j(x)\geq g_j(\bar{x}),\ j\in\overline{1,m},\ f(x)=f(\bar{x})\}$ – ограничено, то задача разрешима.

В этом случае также выполнено условие 1) теоремы 1.

Перейдем к установлению необходимого условия разрешимости задачи C, достаточно близкого к достаточному условию в теореме 1. Положим

$$m(\delta)=\min\{f(x)/g(x)\geq-\delta\},$$

$$\tilde{M}(\delta)=\{x/g(x)\geq-\delta,\ f(x)=m(\delta)\}.$$

Нам понадобится следующий легко доказываемый для R^n факт (см. [10]): если $\tilde{M}(0)\neq\phi$ и ограничено, то для $\delta\geq 0$ $m(\delta)$ – конечно, $\tilde{M}(\delta)$ – ограничено и $\sup_{\delta>0} m(\delta)=m(0)$.

Сформулируем теорему, дающую необходимое условие разрешимости задачи

Теорема 2. Пусть x_0 решает задачу C. Если $g_j(x)\longmapsto(g_j,x_0)$ для $j\in\mathfrak{I}(x_0)=\{j/g_j(x_0)=0,\ j\in\overline{1,m}\}$, то для $\varepsilon>0$ существуют $\bar{x}_\varepsilon$, $u^\varepsilon=(u_1^\varepsilon,\dots,u_m^\varepsilon)\geq 0$, $\delta(\varepsilon)=(\delta,\dots,\delta)>0$, что

$$\nabla=\sum_{j=1}^{m}u_j^\varepsilon\nabla_j$$

при некоторых $\nabla_j \in \nabla(g_j, \bar{x}_\varepsilon)$, $j \in \overline{1,m}$, $-\nabla \in \nabla(-f, x_0)$;

$$(u^\varepsilon, g(\bar{x}_\varepsilon) + \delta(\varepsilon)) = 0, \quad -\varepsilon < (\nabla, \bar{x}_\varepsilon - x_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по размерности пространства. Для $n = 0$ теорема справедлива. Пусть теорема доказана для всех $k \leq n-1$. Если x_0 - точка абсолютного минимума функции $f(x)$, то теорема, очевидно, справедлива (можно положить $\nabla = 0$, $u^\varepsilon = 0$, $\delta(\varepsilon)$ и $\bar{x}_\varepsilon$ - произвольны). Итак, будем считать, что x_0 - не точка абсолютного минимума функции $f(x)$. Тогда существует ∇ ($-\nabla \in \nabla(-f, x)$, $\nabla \neq 0$), что

$$\min_x \{(\nabla, x - x_0) / g(x) \geq 0\} = 0.$$

Рассмотрим случаи:

α) Множество $S = \{x / g(x) \geq 0, (\nabla, x - x_0) = 0\}$ - ограничено. В этом случае согласно приведенному выше факту для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) = (\delta, \ldots, \delta) > 0$, что

$$-\varepsilon < \min_x \{(\nabla, x - x_0) / g(x) \geq -\delta(\varepsilon)\}.$$

Поэтому из разрешимости задачи $\min \{(\nabla, x - x_0) / g(x) \geq -\delta(\varepsilon)\}$ и условия Слейтера [II] (так как $g(x_0) > -\delta(\varepsilon)$) утверждение теоремы следует [I]

β) Множество S - не ограничено, т.е. существует $s \in R^n$, что при любом $t \geq 0$

$$g(x_0 + ts) \geq g(x_0), (\nabla, x_0 + ts - x_0) = (\nabla, s) = 0.$$

Положим $\bar{J}(x_0) = \{j / g_j(x_0 + ts) = g_j(x_0) = 0,\ t > 0,\ j \in \overline{1,m}\}$. Покажем, что $\bar{J}(x_0) \neq \varnothing$.

Допустим $\bar{J}(x_0) = \varnothing$. В этом случае существует $\bar{\varepsilon} > 0$, что из $\| s' - \bar{t}s \| < \bar{\varepsilon}$ следует $g(x_0 + s') > 0$, а потому $x_0 + \bar{t}s \notin S$; так как $(\nabla, s) = 0$, то и $x_0 \notin S$ -вопреки предположению теоремы.

Итак, $\bar{J}(x_0) \neq \varnothing$. Как легко видеть в этом случае

$$\min_x \{(\nabla, x - x_0) / g_j(x) \geq 0,\ j \in \bar{J}(x_0)\} = 0.$$

Для $j \in \bar{J}(x_0)$ введём функции

$$\hat{g}_j(x) = \sup_t g_j(x + ts),$$

которые являются вогнутыми и конечными в любой точке x.

Далее, $\hat{g}_j(x) \longmapsto (\hat{g}_j, x_0 + ts)$ для $-\infty < t < +\infty$ -

– это доказывается так же, как и в теореме I. Положив $R^{n-1} = \{x/(s,x)=0\}$, рассмотрим задачу

$$\min\{(\nabla, x-x_\circ)/\hat{g}_j(x)\geq 0,\ j\in\bar{J}(x_\circ),\ x\in R^{n-1}\} \quad (6)$$

Заметим, что $\hat{g}_j(x+ts)=\hat{g}_j(x)$ при любом t.
Нетрудно видеть, что в силу $g_j(x)\longmapsto(g_j,x_\circ)$ для $j\in\bar{J}(x_\circ)$, $\bar{x}_\circ$ – проекция $x_\circ$ на R^{n-1} – решает задачу (6) в R^{n-1}. Согласно индуктивному предположению существуют x'_ε, $u_j^\varepsilon\geq 0$, $j\in\bar{J}(x_\circ)$, $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\left.\begin{aligned}&\nabla=\sum_{j\in\bar{J}(x_\circ)}u_j^\varepsilon\nabla_j,\qquad \sum_{j\in\bar{J}(x_\circ)}u_j^\varepsilon(\hat{g}_j(x'_\varepsilon)+\delta)=0\\ &\qquad\qquad -\varepsilon<(\nabla, x'_\varepsilon-x_\circ),\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

при некоторых $\nabla_j\in\nabla(\hat{g}_j, x'_\varepsilon)$, $j\in\bar{J}(x_\circ)$.

Так как $g_j(x)\longmapsto(g_j,x_\circ)$, $j\in\bar{J}(x_\circ)$, то можно указать $\bar{t}\geq 0$, что

$$\hat{g}_j(x'_\varepsilon)=g_j(x'_\varepsilon+ts),\quad j\in\bar{J}(x_\circ). \quad (8)$$

Положив $\bar{x}_\varepsilon=x'_\varepsilon+\bar{t}s$, получим

$$\nabla_j\in\nabla(\hat{g}_j,x'_\varepsilon)\subset\nabla(g_j,\bar{x}_\varepsilon),\ j\in\bar{J}(x_\circ),\ -\nabla\in\nabla(-f,x_\circ) \quad (9)$$

В соответствии с (8), (9) соотношения (7) запишутся в следующем виде (полагаем $u_j^\varepsilon=0$ для $j\in\overline{1,m}\setminus\bar{J}(x_\circ)$):

$$\nabla=\sum_{j=1}^{m}u_j^\varepsilon\nabla_j,\quad (u^\varepsilon, g(\bar{x}_\varepsilon)+\delta(\varepsilon))=0,\quad -\varepsilon<(\nabla,\bar{x}_\varepsilon-x_\circ),$$

что и доказывает полностью теорему 2.

С л е д с т в и е I. Пусть $x_\circ$ решает задачу C. Если $g_j(x)\longmapsto(g_j,x_\circ)$ хотя бы для одного минимального набора существенных ограничений задачи C, то

$$\inf_x\sup_{u\geq 0}\Phi(x,u)=\min_x\max_{u\geq 0}\Phi(x,u)=f(x_\circ)=\sup_{u\geq 0}\inf_x\Phi(x,u),$$

где
$$f(x_\circ)=\sup_{u\geq 0}\min_x\Phi(x,u),\ \text{если}\ M^*\neq\phi,$$

$$\Phi(x,u)=f(x)-\sum_{j=1}^{m}u_jg_j(x),\qquad M^*=\{(x,u)/\ \nabla=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}u_j\nabla_j,\ u_j\geq 0,\ -\nabla\in\nabla(-f,x),\ \nabla_j\in\nabla(g_j,x),\ j\in\overline{1,m}\}$$

При этом набор $\{g_j(x)\geq 0,\ j\in J(C)\subset\overline{1,m}\}$ существенных ограничений задачи C называется минимальным, если для любого $J'\subsetneq J(C)$

$$\inf\{f(x)/g_j(x)\geq 0,\ j\in J'\}<$$

$$< \min \{ f(x) / g_j(x) \geq 0, \quad j \in \mathcal{J}(C) \} = f(x_0).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}(C)$ – упомянутый набор индексов из $\overline{1,m}$ для задачи C. Положим $\Phi(x,u) = f(x) - \sum_{j \in \mathcal{J}(C)} u_j g_j(x)$. К задаче $\min \{ f(x) / g_j(x) \geq 0, \ j \in \mathcal{J}(C) \}$ применима теорема 2, т.е. для $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta(\varepsilon) > 0, x_\varepsilon, u_j^\varepsilon \geq 0$ для $j \in \mathcal{J}(C)$, что

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla} = \sum_{j \in \mathcal{J}(C)} u_j^\varepsilon \nabla_j, \quad u_j^\varepsilon (g_j(x_\varepsilon) + \delta(\varepsilon)) = 0, \quad j \in \mathcal{J}(C) \\ -\varepsilon < (\nabla, x_\varepsilon - x_0) \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

при некоторых $-\nabla \in \nabla(-f, x_0)$, $\nabla_j \in \nabla(g_j, x_\varepsilon)$, $j \in \mathcal{J}(C)$. Соотношения

$$f(x_0) = \min_x \max_{u \geq 0} \Phi(x,u) \geq \inf_x \sup_{u \geq 0} \Phi(x,u) \geq$$

$$\geq \sup_{u \geq 0} \inf_x \Phi(x,u)$$

выполняются очевидным образом даже при более слабых условиях, чем условия теоремы 2. С использованием соотношений (10) легко проверяются неравенства

$$f(x_0) \geq \sup_{u \geq 0} \inf_x \Phi(x,u) \geq \sup_{u \geq 0} \inf_x \Phi_{\mathcal{J}}(x,u) \geq$$

$$\geq \sup_{u \geq 0} \inf_x \left[(\nabla, x - x_0) + f(x_0) - \sum_{j \in \mathcal{J}(C)} u_j g_j(x) \right] \geq$$

$$\geq (\nabla, x_\varepsilon - x) + f(x_0) - \sum_{j \in \mathcal{J}(C)} u_j^\varepsilon g_j(x_\varepsilon) > f(x_0) - \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует $f(x_0) = \sup_{u \geq 0} \inf_x \Phi(x,u)$. При $M^* \neq \phi$ аналогично доказывается равенство

$$f(x_0) = \sup_{u \geq 0} \min_x \Phi(x,u).$$

Следствие 2. В условиях следствия 1

$$v = \sup_{u \geq 0} \{ \Phi(y_0, \ldots, y_m, u) / \nabla = \sum_{j=1}^m u_j \nabla_j, \ u_j \geq 0,$$

$$\nabla \in \nabla(-f, y_0), \ \nabla_j \in \nabla(g_j, y_j), \ j \in \overline{1,m} \} = f(x_0),$$

$$\Phi(y_0, \ldots, y_m, u) = f(y_0) - \sum_{j=1}^m u_j g_j(y_j) \quad \text{и} \quad y_j \ (j \in \overline{0,m}) -$$

независимые векторные переменные из R^n.

Доказательство. Очевидно, $f(x_\circ) \geq v$ и из (10) для $\varepsilon > 0$ следует

$$f(x_\circ) \geq \Phi(x_\circ, x_\varepsilon, \ldots, x_\varepsilon, u^\varepsilon) \geq$$

$$\geq (\nabla, x_\varepsilon - x_\circ) + f(x_\circ) + \sum_{j=1}^{m} u_j^\varepsilon g_j(x_\varepsilon) > f(x_\circ) - \varepsilon ,$$

что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и доказывает следствие 2.

Примечание 1. Задача $\hat{C}^*$

$$\sup \{ f(y_\circ) - \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(y_j) / \nabla_\circ = \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla_j , u_j \geq 0,$$

$$-\nabla_\circ \in \nabla(-f, y_\circ) , \quad \nabla_j \in \nabla(g_j, y_j'), \quad j \in \overline{1,m} \}$$

обобщает задачу C^* [12]: здесь в каждой функции $f(y_\circ)$, $g_j(y_j), (j \in \overline{1,m})$ своя независимая переменная y_j. Допустимое множество задачи C^* включено в допустимое множество задачи $\hat{C}^*$, которое оказывается (в предположениях теоремы 2) всегда не пустым, при этом $f(x_\circ) = v$.

Примечание 2. В условиях следствия 2 имеет место

$$f(x_\circ) = \sup \{ \Phi(x, u) / \nabla = \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla_j , \quad u_j \geq 0$$

$$\nabla_j \in \nabla(g_j, x), \; j \in \overline{1,m}, \quad -\nabla \in \nabla(-f, x) \} ,$$

т.е. если в задаче C^* заменить max на sup, то получается аналог прямой теоремы двойственности при трактовке C^* в смысле [1,7].

Примечание. Схема возможных перестановок операций min, sup, max из работы [10] не поглощает следствия 1, так как условия тех перестановок (в отличие от перестановок следствия) не позволяют автоматически включить, например, линейный случай.

Обратная теорема двойственности в предположении дифференцируемости функций $f(x)$, $g_j(x)$ $(j \in \overline{1,m})$ и выполнении некоторых других условий рассматривалась в работах [4, 5, 13] (работа [5] перекрывает результаты [4] и исправляет дефекты ее доказательств). В работе [5] переход от C^* к C дан при условии строгой выпуклости функции $\Phi(x, u^\circ)$ в окрестности точки $x_\circ$, где $(x_\circ, u^\circ)$ – решение задачи C^*. В работе [13] дан переход от C^* к C при условии ограниченности множества

$$\{ x / \Phi(x, u^\circ) \leq \Phi(x_\circ, u^\circ) \} .$$

Ниже обратная теорема двойственности формулируется без пред-

положения дифференцируемости входящих в нее функций и при более общих условиях по сравнению с [5, 13].

Т е о р е м а 3. Пусть (x_0, u^0) – решение задачи C^*. Если $S(u^0) = \{x / \Phi(x, u^0) \leq \Phi(x_0, u^0)\} = \{x_0\}$, то x_0 решает задачу C и $f(x_0) = \Phi(x_0, u^0)$. Если же $S(u^0)$ содержит более одной точки, то при выполнении условий

1) $g_j(x) = g_j(x_0)$ для всех $x \in S(u^0)$, $j \in I = \{j / u_j^0 > 0,\ j \in \overline{1,m}\}$,

2) $F_{u^0}(x) \vdash (F_{u^0}, x_0)$, где $F_{u^0}(x) = \Phi(x; u^0)$,

вектор x_0 решает задачу

$$\min \{ f(x) / g_j(x) \geq 0,\ j \in I \},$$

при этом $f(x_0) = \Phi(x_0, u^0)$.

Сначала докажем два вспомогательных утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть выполнено одно из двух условий :

α) $S(u^0)$ ограничено и $g_\ell(x_0) < 0$;

β) $g_\ell(x_0) < 0$, $u_\ell^0 > 0$, $F_{u^0}(x) \vdash (F_{u^0}, x_0)$.

Тогда найдется $\bar{x} \in S(u^0)$, что $g_\ell(\bar{x}) > g_\ell(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из того, что (x_0, u^0) решает задачу C^* и $g_\ell(x_0) < 0$, следует $0 \notin \nabla(g_\ell, x_0)$.

Положим $\Phi_\ell(x, u^0) = \Phi(x, u^0) + u_\ell^0 g_\ell(x)$ и рассмотрим задачу

$$\min \{ \Phi_\ell(x, u^0) / g_\ell(x) \geq g_\ell(x_0) + \delta \}. \qquad (11)$$

Так как $0 \notin \nabla(g_\ell, x_0)$, то ограничение задачи при некотором $\bar{\delta} > 0$ удовлетворяет условию Слейтера. Нетрудно видеть, что задача (11) для выбранного $\bar{\delta} > 0$ разрешима. Действительно. в случае α) при $u_\ell^0 > 0$ это вытекает из следствия 1 теоремы 1; если же $u_\ell^0 = 0$, то множество $\{x / \Phi_\ell(x, u^0) \leq \Phi_\ell(x_0, u^0)\}$ ограничено, а тогда разрешимость (11) очевидна. В случае β) из утверждения 1 после определения 2 вытекает, что выполнено условие 2 теоремы 1, и потому задача (11) разрешима при

$$\delta = \bar{\delta} > 0 .$$

Пусть $\bar{x}$ – решение задачи. Для (11) имеет место прямая теорема двойственности [1, 7], т.е. существует $\bar{u} \geq 0$, что $(\bar{x}, \bar{u})$ решает задачу

$$\max \{ \Phi_\ell(x, u^0) - u [g_\ell(x) - g_\ell(x_0) - \bar{\delta}] / $$
$$ / v = u \nabla_\ell,\ u \geq 0,\ \nabla_\ell \in \nabla(g_\ell, x),\ -v \in \nabla(-\Phi_\ell, x)\} \qquad (11^*)$$

с оптимальным значением $\Phi_\ell(\bar{x}, u^\circ)$, при этом

$$\bar{u}\left[g_\ell(\bar{x}) - g_\ell(x_\circ) - \delta\right] = 0 .$$

Так как $(\bar{x}, \bar{u})$ – решение задачи (II*) и вектор $(x_\circ, u_\ell^\circ)$ является допустимым для (II*), то справедливы неравенства

$$\Phi_\ell(x_\circ, u^\circ) - \bar{u}\left[g_\ell(x_\circ) - g_\ell(x_\circ) - \bar{\delta}\right] \geq \Phi_\ell(\bar{x}, u^\circ) - \bar{u}\left[g_\ell(\bar{x}) - g_\ell(x_\circ) - \bar{\delta}\right] \geq$$

$$\geq \Phi_\ell(x_\circ, u^\circ) - u_\ell^\circ\left[g_\ell(x_\circ) - g_\ell(x_\circ) - \bar{\delta}\right], \tag{12}$$

отсюда следует $\bar{u} \geq u_\ell^\circ$.

Аналогично для задачи C^* : в силу допустимости $(x, u_1^\circ, \ldots, u_\ell, \ldots, u_m^\circ)$ для C^*, где $\bar{u}_\ell = \bar{u}$, справедливо

$$\Phi_\ell(\bar{x}, u^\circ) - \bar{u}\, g_\ell(\bar{x}) \leq \Phi(x_\circ, u^\circ) \leq \Phi(\bar{x}, u^\circ) = \Phi_\ell(\bar{x}, u^\circ) - u_\ell^\circ\, g_\ell(\bar{x}) \tag{13}$$

Допустим, что $\bar{u} > 0$. Тогда $g_\ell(\bar{x}) = g_\ell(x_\circ) + \bar{\delta} < 0$ ($\bar{\delta}$ – достаточно мало), а потому из (13) следует $u_\ell^\circ \geq \bar{u}$ т.е. $u_\ell^\circ = \bar{u}$.

Пусть $\bar{u} = 0$, тогда $u_\ell^\circ = 0$. Итак, всегда $u_\ell^\circ = \bar{u}$, и в силу (13) $\bar{x} \in S(u^\circ)$, причем $g_\ell(\bar{x}) \geq g_\ell(x_\circ) + \delta > g_\ell(x_\circ)$ что и требовалось.

Утверждение 3. Пусть выполнено одно из двух условий:

1) $S(u^\circ)$–ограничено и существует $\ell \in \overline{1,m}$, что $g_\ell(x_\circ) > 0$, $u_\ell^\circ > 0$;

2) $g_\ell(x_\circ) > 0$, $u_\ell^\circ > 0$, $F_{u^\circ}(x) \longmapsto (F_{u^\circ}\, x_\circ)$, где $F_{u^\circ}(x) = \Phi(x, u)$

Тогда найдется $\bar{x} \in S(u^\circ)$, что $g_\ell(\bar{x}) < g_\ell(x_\circ)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (в обозначениях утверждения 2)

$$\min\left\{\Phi_\ell(x, u^\circ) / g_\ell(x) \geq \varepsilon\right\}, \tag{14}$$

($\varepsilon > 0$ выбрано так, что $g_\ell(x_\circ) > \varepsilon$).

Задача (14) также разрешима (см.доказательство утверждения I) пусть в $\bar{x}$, при этом имеют место неравенства типа (12),(13), которые приводят к $\bar{u} = u_\ell$ и $\bar{x} \in S(u^\circ)$. Так как $\bar{u} = u_\ell^\circ > 0$ то $g(\bar{x}) = \varepsilon < g_\ell(x_\circ)$, что и доказывает утверждение 2.

Доказательство теоремы 3. В случае $S(u^\circ) = \lambda$. из утверждений I и 2 следует $g_j(x_\circ) \geq 0$, $g_j(x_\circ)u_j^\circ = 0$ для $j \in \overline{1,m}$, что является достаточным для оптимальнос.и в за... че C , при этом выполняется, очевидно, $f(x_\circ) = \Phi(x_\circ, u^\circ)$ Если же выполнены условия I) и 2), то утверждения I и 2 дают $g_j(x_\circ) \geq 0\ (j \in I)$, $g_j(x_\circ)u_j^\circ = 0\ (j \in I)$ отсюда $x_\circ$ решает задачу

$\min\{f(x)/g_j(x)\geq 0,\ j\in I$ при этом $f(x_0)=\Phi(x_0, u^0)$.
Доказательство теоремы 3 закончено.

Если задачу C переформулировать как $\inf\{f(x)/g_j(x)\geq 0,$ $j\in \overline{1,m}$, то двойственной к ней в работах 10 названа задача

$$\sup_{u\geq 0}\{\varphi(u)/\varphi(u)=\inf \Phi(x,u)\}.$$

В этой постановке содержательная сторона двойственности сводится к задаче выявления условий, при которых $\inf_x \sup_{u\geq 0}\Phi(x,u)=$ $=\sup_{u\geq 0}\inf_x \Phi(x,u)$; последнюю можно рассматривать (и она действительно рассматривается многими авторами [14]) для функции $F(x,y)$ и пространств X и Y довольно общей природы. Такой подход к двойственности, несмотря на свою привлекательную общность и симметрию, сужает содержательный ее аспект. Поэтому направление в разработке двойственности [1, 2, 3, 5, 7, 12, 13], которое логически продолжает двойственность в линейном программировании без потери содержательной емкости, представляется важным.

В заключение выражаю благодарность И.И.Еремину за руководство настоящей работой.

Литература

1. P.Wolfe. A duality theorem for nonlinear programming. Quart. of Applied Math. 19, No 3, 1961, pp. 239-244.
2. M.A.Hanson. A Duality Theorem in Nonlinear Programming with Nonlinear Constraints. Australian J. Statistics. 3,1961, pp. 64-72.
3. P.Huard. Dual Programms. IBM. J. Research and Development. 6, 1962, pp. 137-139.
4. O.L.Mangasarian. Duality in Nonlinear Programming. Quart. of Applied Math. 20, 1962, pp. 300-302.
5. O.L.Mangasarian, J.Ponstein. Minmax and Duality in Nonlinear Programming. J. Math. Anal. and Applied. 11,1965, pp.504-518.
6. Г.Зойтендейк. Методы возможных направлений И.Л. 1963.
7. M.C.Roffin. Programme convexe infini et programme dual dans deux espaces vectoriels sur et dualité. C.R.Acad.Sc.Paris. vol.266, No 16, 1968, pp. 839-842.
8. Г.Ш.Рубинштейн. Двойственные экстремальные задачи. Докл. АН СССР, 1963, 152, 288-291.
9. Г.Ш.Рубинштейн. Несколько примеров двойственных экстремальных задач. В сб. "Математическое программирование", М., изд. "Наука", 1966.

10. Е.Г.Гольштейн, С.М.Мовшович. Непрерывная зависимость от параметра множества решений минимаксной задачи. Экономика и математические методы. Том IУ, вып.6, 1968, 920-930.

11. M. Slater. Lagrange Multipliers Revisitad: A Contribution to Non-linear Programming. Cowles Commision Discussion Paper; Math. 403 November 1950.

12. M.C. Raffin. Programmes lineaires d'appui d'un programme convexe. C. R. Acad. Sc. Paris. t 265, N 6, 1967, 193-195.

13. J. Stoer. Duality in Nonlinear Programming and The minimax Theorem. Numer. Math. 5, 1963, 371-379.