УДК 512.25/26

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.М. Гальперин

В настоящей работе рассматривается одна из возможных формализаций принципа ветвей и границ [1], дающая общий метод формирования алгоритма для решения, вообще говоря, любой конкретной задачи дискретного программирования. Этот метод иллюстрируется на примере задачи оптимального (в смысле минимума затрат на сырьё, производство и транспорт) размещения производства одного продукта.

Пусть на некотором множестве M задана функция $F(x)$, достигающая на нем своего минимума L^*. Задача состоит в отыскании среди элементов множества M такого x^*, который этот минимум реализует:

$$x^* \in M \quad \text{и} \quad F(x^*) = \min_M F(x) = L^*. \qquad (1)$$

Всякий x, обладающий этими двумя свойствами, будем именовать F - наилучшим представителем множества M (кратко F н.п. M).

Для решения этой задачи воспользуемся следующей процедурой. Определим на M функцию $P(x)$, аппроксимирующую $F(x)$ снизу:

$$F(x) \geq P(x), \quad x \in M.$$

Любую такую функцию условимся называть минорантой (или - там, где это необходимо, - M -минорантой). Затем найдём $x^\circ = P$ н.п. M, вычислим $L_\circ = F(x^\circ)$ и положим $z^\circ = x^\circ$. Пусть, далее, $M_\circ^1$ - такое подмножество множества M, что $x^\circ = F$ н.п. $M_\circ^1$ (этому требованию удовлетворяет, например, одноэлементное множество $\{x^\circ\}$). Разобьём множество $M \setminus M_\circ^1$ на подмножества M_i^1:

$$M \setminus M_0^1 = \bigcup_i M_i^1 ,$$

на каждом из них определим миноранту $P_i^1(x)$ и наилучшего представителя $x_i^1 = P_i^1$ н.п. M_i^1. Те из наилучших представителей, чей ценз (т.е. величина $P_i^1(x_i^1)$) окажется меньше L_0, составят множество V_1 – сенат:

$$V_1 = \{ x \mid x = x_i^1 \text{ и } P_i^1(x_i^1) < L_0 \} .$$

Если этот сенат оказался пустым, то (это будет доказано ниже) $L^* = L_0$ и $x^* = Z^0$, т.е. задача решена. В противном случае определим на V_1 функцию ценза (или просто ценз) $P^1(x)$, считая $P^1(x) = P_i^1(x_i^1)$ для $x = x_i^1$, найдем $x^1 = P^1$ н.п. V_1, вычислим $L_1 = \min\{L_0, F(x^1)\}$ и положим

$$Z^1 = \begin{cases} Z^0, & \text{если} \quad L_0 \leq F(x^1), \\ x^1, & \text{если} \quad L_0 > F(x^1). \end{cases}$$

Предположим, что для $k = 1, \ldots, n-1$ уже определены множества M_i^k и их миноранты $P_i^k(x)$, образован сенат V_{n-1} со своим цензом $P^{n-1}(x)$, в нём найден элемент $x^{n-1} = P^{n-1}$ н.п. V_{n-1}, известны число L_{n-1} и элемент Z^{n-1}. Пусть $x^{n-1} = P_j^\ell$ н.п. M_j^ℓ, $1 \leq \ell \leq n-1$. Определим множество $M_0^n \subset M_j^\ell$ так, чтобы x^{n-1} был F н.п. M_0^n, и разобьём множество $M_j^\ell \setminus M_0^n$ на подмножества M_i^n:

$$M_j^\ell \setminus M_0^n = \bigcup_i M_i^n$$

В каждом из M_i^n определим миноранту $P_i^n(x)$ и наилучшего представителя $x_i^n = P_i^n$ н.п. M_i^n, после чего сформируем новый сенат V_n, вводя в него те $x \in V_{n-1} \setminus \{x^{n-1}\}$ и те x_i^n, чей ценз меньше L_{n-1}:

$$V_n = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x \in V_{n-1} \setminus \{x^{n-1}\} \text{ и } P^{n-1}(x) < L_{n-1} \\ \text{или} \\ x = x_i^n \text{ и } P_i^n(x_i^n) < L_{n-1} \end{matrix} \right\} . \qquad (2)$$

Если таковых не окажется (т.е. $V_n = \varnothing$), то $L^* = L_{n-1}$ и $x^* = Z^{n-1}$ – задача решена. Иначе зададим на V_n ценз

$$P^n(x) = \begin{cases} P^{n-1}(x), & x \in V_{n-1}, \\ P_i^n(x_i^n), & x = x_i^n, \end{cases}$$

найдём $x^n = P^n$ н.п. V_n, подсчитаем $L_n = \min\{L_{n-1}, F(x^n)\}$ и положим

$$z^n=\begin{cases} z^{n-1}, & L_{n-1}\le F(x^n) \\ x^n, & L_{n-1}>F(x^n)\end{cases}$$

Покажем, что этот алгоритм действительно решает задачу (I), и оценим разность $L_n - L^*$, характеризующую приближение к оптимуму, достигнутое к концу n-го шага алгоритма.

Т е о р е м а . Если сенаты $V_1,\dots,V_n$ непусты, то

$$0\le L_n-L^*\le L_n-P^n(x^n). \qquad (3)$$

Если же, кроме того, $V_{n+1}=\phi$, то $L^*=L_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Убедимся вначале в справедливости второго утверждения теоремы. Нам нужно показать, что

$$F(x)\ge L_n=F(z^n),\ x\in M. \qquad (4)$$

При этом, поскольку для любого $x\in M_0^{K+1}$, $0\le K\le n$, $F(x)\ge F(x^K)\ge \min_{0\le r\le n} F(x^r)=L_n$, можно считать, что $x\bar{\in}\bigcup_{K=1}^{n+1} M_0^K$. В частности, $x\bar{\in} M_0^1$, и потому $x\in M_i^1(i\ne 0)$. Если $x_i^1\in V_n\setminus\{x^n\}$, то

$$F(x)\ge P_i^1(x)\ge P_i^1(x_i^1)=P^n(x_i^1)\ge L_n$$

(последнее ввиду пустоты V_{n+1}). Если же $x_i^1\bar{\in} V_n\setminus\{x^n\}$, то либо $P_i^1(x_i^1)\ge L_{K-1}$ при некотором K, $1\le K\le n$, либо для всех таких K $P_i^1(x_i^1)<L_{K-1}$. В первом случае $F(x)\ge P_i^1(x)\ge P_i^1(x_i^1)\ge L_{K-1}\ge L_n$, а во втором x_i^1 при некотором r, $1\le r\le n$, будет выбран в качестве x. Действительно, $x_i^1\in V_1$, т.к. $P_i^1(x_i^1)<L_0$. Значит, если $x_i^1\ne x^1$, то, ввиду $P_i^1(x_i^1)<L_1$, x_i^1 попадет в V_2. Аналогично, из $x_i^1\ne x^2$ вытекает, что $x_i^1\in V_3$ и т.д. В итоге, допустив, что $x_i^1\bar{\in}\{x^1,\dots,x^n\}$, мы должны будем согласиться с принадлежностью x_i^1 к $V_n\setminus\{x^n\}$ вопреки исследуемой гипотезе. Но если $x_i^1=x^r$ и $x\bar{\in} M_0^{r+1}$, то $x\in M_i^1\setminus M_0^{r+1}=\bigcup_j M_j^{r+1}$. Пусть $x\in M_j^{r+1}$. Перед нами вновь дилемма: или $x_j^{r+1}\in V_n\setminus\{x^n\}$, или $x_j^{r+1}\bar{\in} V_n\setminus\{x^n\}$. Анализируя её подобно тому, как это только что было сделано при $r=0$, мы должны будем заключить, что либо $F(x)\ge L_n$, либо $x\in M_\ell^{s+1}$, где $r+1\le s\le n$. Остаётся рассмотреть последнюю возможность: $x\in M_h^{n+1}$ Так как $V_{n+1}=\phi$, то $F(x)\ge$ $\ge P_h^{n+1}(x)\ge P_h^{n+1}(x_h^{n+1})\ge L_n$, и неравенство (4) доказано.

Доказательство первого утверждения сводится к проверке неравенства $P^n(x^n)\le L^*$, являющегося простым следствием неравенства

$$F(x) \geq P^n(x^n), \quad x \in M. \qquad (5)$$

В самом деле, если последнее имеет место, а $P^n(x^n) > L^*$, то $F(x) > L^*$ для всех $x \in M$, что противоречит разрешимости задачи (I). Неравенство же (5) устанавливается почти дословно так же, как и неравенство (4). Поэтому мы предоставляем завершить доказательство теоремы заинтересованному читателю.

Неравенство (3) позволяет применять описанную выше процедуру не только для точного решения задачи (I), но и для приближённого. Действительно, оборвав процесс в момент, когда $L_n - P^n(x^n) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ заранее фиксировано, можно быть уверенным, что $F(z^n)$ отличается от искомого минимума L^* не более, чем на ε.

Если воспользоваться терминологией АЛГОЛ - 60, то наша процедура определена лишь с точностью до значений своих формальных параметров, каковыми являются:

а) принцип выделения из множества M его подмножеств M_i^k,

б) определение минорант $P, P_i^1, P_i^2, \ldots\ldots,$

в) метод их минимизации на соответствующих множествах.

Поэтому для получения алгоритма, решающего конкретную экстремальную задачу, нужно определить значения этих параметров специально для этой задачи с максимальным учётом её специфики.

Рассмотрим для примера задачу оптимального размещения производства одного продукта. Математически эта задача формулируется так:

требуется найти вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и матрицы

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_{11}^0 \ldots x_{1n}^0 \\ \ldots\ldots \\ x_{m1}^0 \ldots x_{mn}^0 \end{pmatrix}, \quad X^1 = \begin{pmatrix} x_{11}^1 \ldots x_{1m}^1 \\ \ldots\ldots \\ x_{p_1,1}^1 \ldots x_{p_1,m}^1 \end{pmatrix}, \ldots, X^r = \begin{pmatrix} x_{11}^r \ldots x_{1m}^r \\ \ldots\ldots \\ x_{p_r,1}^r \ldots x_{p_r,m}^r \end{pmatrix}$$

которые минимизируют сумму

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^0 x_{ij}^0 + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{hi}^\ell x_{hi}^\ell \qquad (6)$$

при соблюдении следующих условий:

$$x_i \in A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{is_i}\}, \; i = 1, \ldots, m; \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^0 \leq x_i, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 = b_j, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad (9)$$

$$x^\circ_{ij} \geq 0, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x^\ell_{hi} \leq u^\ell_h, \ \ell=1,\dots,r, \ h=1,\dots,p_\ell; \tag{11}$$

$$\sum_{h=1}^{p_\ell} x^\ell_{hi} = d^\ell_i + \sum_{j=1}^{n} x^\circ_{ij}, \ \ell=1,\dots,r, \ i=1,\dots,m; \tag{12}$$

$$x^\ell_{hi} \geq 0, \ \ell=1,\dots,r, \ h=1,\dots,p_\ell, \ i=1,\dots,m. \tag{13}$$

Здесь все b_j и u^ℓ_h положительны, c°_{ij}, c^ℓ_{hi} и d^ℓ_i неотрицательны, элементы множеств A_i неотрицательны и занумерованы в порядке роста :

$$a_{i_0} < a_{i_1} < \dots < a_{is_i}, \ i=1,\dots,m,$$

функции φ_i определены, возрастают и выпуклы вверх на множествах A_i соответственно. Поскольку условия (7) - (13) непротиворечивы тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \min\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{is_i}, \sum_{h=1}^{p_1} u^1_h - \sum_{i=1}^{m} d^1_i, \dots, \sum_{h=1}^{p_r} u^r_h - \sum_{i=1}^{m} d^r_i\right\} \tag{14}$$

то это неравенство будет в дальнейшем предполагаться выполненным. Частные случаи этой задачи рассматривались в работах[2],[3].

Для применения общей схемы более удобной оказывается другая формулировка задачи (6) - (13), которую проще всего получить, воспользовавшись следующим простым фактом.

ЛЕММА I (о сечениях). Пусть Ω произвольное множество пар (x,y), $N(x)=\{y \mid (x,y)\in\Omega\}$, $M=\{x \mid N(x)\neq\phi\}$ и $f(x,y)$ - функция, заданная на Ω. Множество Ω тогда и только тогда непусто, когда непусто M. Если $\Omega\neq\phi$, то

$$\inf_{\Omega} f(x,y) = \inf_{M} \inf_{N(x)} f(x,y).$$

Доказательство совершенно элементарно и потому опускается.

Пусть $X=(X^\circ,\dots,X^r)$, Ω обозначает совокупность пар (x,X) удовлетворяющих условиям (7) - (13), а $f(x,X)$ отождествлена с (6). Если x согласуется с (7) (иначе $N(x)\neq\phi$), то $N(x)$ состоит из тех X, для которых имеет место соотношения (8) - (13). Но ввиду (14) эти соотношения совместны в том и только в том случае, когда $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq b$, где $b=\sum_{j=1}^{n} b_j$. Следовательно,

$$M=\left\{x \mid x_i\in A_i, \ i=1,\dots,m, \ \text{и} \ \sum_{i=1}^{m} x_i \geq b\right\}. \tag{15}$$

По лемме о сечениях

$$\min_{\Omega} f(x, X) = \min_{M} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + \min_{N(x)} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\circ} x_{ij}^{\circ} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{hi}^{\ell} x_{hi}^{\ell} \right]\right\} .$$

Отсюда видно, что задача (6) - (I3) эквивалентна следующей: в множестве M найти вектор x^*, реализующий

$$L^* = \min_{M} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) - T(x) \right\} , \tag{I6}$$

где

$$T(x) = \min_{N(x)} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\circ} x_{ij}^{\circ} + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{hi}^{\ell} x_{hi}^{\ell} . \right. \tag{I7}$$

Именно к этой задаче мы и попытаемся применить рассмотренную вначале общую процедуру.

Первая наша забота - описание подмножеств M_i^K множества M. Пусть $x^\circ = P$ н.п. M. Положим $M_0^1 = \{x^\circ\}$, а

$$M_i^1 = \{x \in M \mid x_i \neq x_i^\circ ,\ x_{i+1} = x_{i+1}^\circ , \dots , x_m = x_m^\circ\},\ i = 1, \dots , m .$$

Вообще, если $x^n = P_{i_n}^{K+1}$ н.п. $M_{i_n}^{K+1}$, $0 \leq K \leq n$, то $M_0^{n+1} = \{x^n\}$ и

$$M_i^{n+1} = \{x \in M_{i_n}^{K+1} \mid x_i \neq x_i^n ,\ x_{i+1} = x_{i+1}^n , \dots , x_m = x_m^n\} .$$

Согласно этому определению для всех $x \in M_{i_n}^{K+1}$ (и в том числе для x^n) $x_i = x_i^K$ при $i > i_n$, так что $M_i^{n+1} = \phi$, когда $i > i_n$. Значит $M_{i_n}^{K+1} \setminus \{x^n\} = \bigcup_{i=1}^{i_n} M_i^{n+1}$, причём множества M_i^{n+1} попарно непересекаются.

Нетрудно убедиться, что все непустые множества M_i^K имеют вид (I5). Более точно: если множество (I5) обозначать более подробно символом $M(A_1, \dots , A_m)$, то

$$M_i^{n+1} = M(A_1, \dots , A_{i-1}, A_i^{n+1}, \{x_{i+1}^n\}, \dots , \{x_m^n\}), \tag{I8}$$

где

$$A_i^{n+1} = \begin{cases} A_i \setminus \{x_i^n\} \text{ при } & i < i_n , \\ A_i^{K+1} \setminus \{x_i^n\} \text{ при } & i = i_n . \end{cases} \tag{I9}$$

Действительно, при $n = 0$ это очевидно:

$$M_{i_n}^1 = M(A_1, \dots , A_{i-1}, A_i \setminus \{x_i^\circ\}, \{x_{i+1}^\circ\}, \dots , \{x_m^\circ\}) .$$

Предположим, что (18) верно для всех M_i^s, $s=1,\dots,n$. Тогда

$$M_{i_n}^{k+1} = M(A_1,\dots,A_{i_n-1},A_{i_n}^{k+1},\{x_{i_n+1}^k\},\dots,\{x_m^k\})$$

и, следовательно, M_i^{n+1} совпадает с правой частью (18). Из (19) видно, что если

$$x^n = P_{i_n}^{k_1+1} \text{ н.п. } M_{i_n}^{k_1+1},\ x^{k_1} = P_{i_n}^{k_2+1} \text{ н.п. } M_{i_n}^{k_2+1}, \dots,$$

$$x^{k_{s-1}} = P_{i_n}^{k_s+1} \text{ н.п. } M_{i_n}^{k_s+1},\ x^{k_s} = P_j^{\ell} \text{ н.п. } M_j^{\ell},$$

где $n > k_1 > \dots > k_s \geq \ell \geq 1$ и $i_n < j$, то

$$A_{i_n}^{n+1} = A_{i_n} \setminus \{x_{i_n}^{k_s}, x_{i_n}^{k_{s-1}}, \dots, x_{i_n}^{k_1}, x_{i_n}^{n}\}.$$

Равенства (18) и (19) показывают, что тройка $(x^n, i_n, A_{i_n}^{k+1})$ несёт на себе всю информацию о множествах $M_1^{n+1},\dots,M_{i_n}^{n+1}$.

Переходим к определению минорант. Поскольку все M_i^k имеют вид (15), нам достаточно определить миноранту P, ограничивающую функцию

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + T(x)$$

снизу на всём множестве $M = M(A_1,\dots,A_m)$. При этом полезно учесть, что a_{is}, меньшие $b - \sum_{v\neq i} a_{vs_v}$, можно из A_i исключать, ибо M не содержит векторов с такими компонентами. Эта операция даёт возможность точнее оценить $F(x)$ её минорантой. Будем считать, что это сделано и ни одно из A_i лишних элементов не содержит. Т.к. функции φ_i по условию выпуклы вверх на A_i, справедливы неравенства:

$$\varphi_i(t) \geq \varphi_i(a_{i0}) + c_i(t - a_{i0}),\ t\in A_i,\ i=1,\dots,m,$$

где

$$c_i = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i(a_{is_i}) - \varphi_i(a_{i0})}{a_{is_i} - a_{i0}}, & \text{если } s_i \geq 1 \\ 0, & \text{если } s_i = 0. \end{cases}$$

Поэтому для любого $x \in M$

$$F(x) \geq \sum_{i=1}^{m}(\varphi_i(a_{i0}) - c_i a_{i0}) + \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \min_{N(x)}\Big[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\circ} x_{ij}^{\circ} +$$

$$\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{h=1}^{p_\ell}\sum_{i=1}^{m} c_{hi}^{\ell} x_{hi}^{\ell}\Big] \geq \sum_{i=1}^{m}(\varphi_i(a_{i0}) - c_i a_{i0}) +$$

$$+ \min_{N(x)} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_i + c_{ij}^{\circ}) x_{ij}^{\circ} + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{hi}^{\ell} x_{hi}^{\ell} \right],$$

и в качестве $P(x)$ может быть взята правая часть этого неравенства. Положив для краткости

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(a_{i0}) - c_i a_{i0})$$

и

$$g(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_i + c_{ij}^{\circ}) x_{ij}^{\circ} + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{hi}^{\ell} x_{hi}^{\ell},$$

фиксируем наш выбор:

$$P(x) = \sigma + \min_{N(x)} g(X). \tag{20}$$

Заметим, что это не единственный способ построения оценки снизу для $F(x)$. Другой путь намечен в работе [3].

Займёмся теперь отысканием P н.п. M. С этой целью рассмотрим ещё раз совокупность Ω пар (x, X), удовлетворяющих условиям (7)-(13), и множества $S(X) = \{x \mid (x, X) \in \Omega\}$ и $R = \{X \mid S(X) \neq \phi\}$. Если набор X отвечает требованиям (9) - (13) (в противном случае $S(X) \neq \phi$), то

$$S(X) = A_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{\circ}\right) \times \ldots \times A_m\left(\sum_{j=1}^{n} x_{mj}^{\circ}\right),$$

где $A_i(z) = \{t \in A_i \mid t \geq z\}$, а крест символизирует прямое произведение множеств. В таком случае R образуют те и только те X, для которых имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\circ} \leq a_{is_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{21}$$

(9) - (13). Применяя дважды лемму о сечениях, получаем

$$\min_M P(x) = \sigma + \min_M \min_{N(x)} g(X) = \sigma + \min_{\Omega} g(X) =$$

$$= \sigma + \min_R \min_{S(X)} g(X) = \sigma + \min_R g(X).$$

Пусть этот минимум реализуется набором Y из R и $x \in S(Y)$. Тогда $Y \in N(x) \subset R$ и, т.к. $S(Y) \subset M$,

$$\min_M P(x) = \sigma + g(Y) \geq \sigma + \min_{N(x)} g(X) \geq$$

$$\geq \sigma + \min_M \min_{N(x)} g(X) = \min_M P(x).$$

Это означает, что на $S(Y)$ миноранта $P(x)$ не зависит от x и равна $\min_M P(x)$. Поэтому любой x из $S(Y)$ может выступать в роли P н.п. M. На каком же из них остановиться? Для выяснения этого вопроса определим подмножество E множества M, состоящее из тех x, для которых среди решений задачи (I7) имеется такое X, что $x_i = \min A_i(\sum_{j=1}^{n} x^{\circ}_{ij}),\ i=1,\dots,m$.

ЛЕММА 2.

$$\min_M F(x) = \min_E F(x) \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $x \in M$ и X – решение задачи (I7), т.е. тот набор из $N(x)$, на котором достигается минимум в (I7). Положим $y_i = \min A_i(\sum_{j=1}^{n} x^{\circ}_{ij}),\ i=1,\dots,m$, и $y=(y_1,\dots,y_m)$. Тогда для всех i, $\sum_{j=1}^{n} x^{\circ}_{ij} \le y_i \le x_i$, так что $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(y_i) \le \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i)$ и $X \in N(y) \subset N(x)$. Отсюда, обозначив линейную функцию от X, минимум которой ищется в (I7), через h, имеем

$$T(x) = h(X) \ge \min_{N(y)} h(X) \ge \min_{N(x)} h(X) = T(x),$$

т.е. $T(x) = h(X) = \min_{N(y)} h(X) = T(y)$. Значит набор X решает задачу (I7) не только для вектора x, но и для y. В таком случае $y \in E$ и

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + T(x) \ge \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(y_i) + T(y) = F(y) \ge \min_E F(x)$$

Т.к. это неравенство установлено для любого x из M, лемма доказана.

Равенство (22) показывает, что выбор должен пасть на тот вектор из $S(Y)$, который имеет наибольшие шансы оказаться в E. Таков, очевидно, вектор x° с компонентами $x^{\circ}_i = \min A_i(\sum_{j=1}^{n} y^{\circ}_{ij})$. Его мы и объявим P н.п. M.

Таким образом, поиск P н.п. M сводится к решению так называемой двухэтапной транспортной задачи типа (I7). Вопрос о решении этой линейной задачи достаточно нетривиален, чтобы стать темой специального обсуждения, а здесь оставляется открытым. Постулируем, что метод её решения нам известен, и пусть $T(c,x)$ обозначает процедуру, ищущую (см.(20)) $\min_{N(x)} g(X)$ и соответствующий оптимальный $X \in N(x)$. Тогда для получения $x^{\circ} = P$ н.п. M и $P(x^{\circ})$ достаточно проделать следующее.

I. Исключаем из A_i те их элементы a_{is}, которые меньше

$b-\sum\limits_{\nu\neq i} a_{\nu s_\nu}$ (за совокупностью оставшихся сохраним прежнее обозначение A_i), $i=1,\dots,m$. Если после этого хотя бы одно A_i оказалось пустым, то M пусто.

2. Вычисляем компоненты вектора $c=(c_1,\dots,c_m)$:

$$c_i=\begin{cases}\dfrac{\varphi_i(\max A_i)-\varphi_i(\min A_i)}{\max A_i-\min A_i}, & \text{если } \min A_i<\max A_i\\ 0, \text{ если } & \min A_i=\max A_i ,\end{cases}$$

и величину $\sigma-\sum\limits_{i=1}^{m}(\varphi_i(\min A_i)-c_i\min A_i)$.

3. Положив $x=(\max A_1,\dots,\max A_m)$, находим с помощью $T(c,x)$ $\min\limits_{N(x)} g(X)$ и X из $N(x)$, этот минимум реализующий.

4. Вычисляем компоненты вектора x° , полагая

$$x_i^\circ=\min A_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^\circ\right) \quad \text{и} \quad P(x^\circ)=\sigma+\min_{N(x)} g(X) .$$

Этот алгоритм условимся обозначать через $\Gamma(A_1,\dots,A_m)$.

Всё вышеизложенное аргументирует следующий алгоритм решения задачи (16). Задавшись некоторым $\varepsilon\geq 0$, находим (пользуясь $\Gamma(A_1,\dots,A_m)$) x° и $P(x^\circ)$, формируем сенат $V_0=\{x^\circ\}$ и полагаем $z^\circ=x^\circ$, $i_0=m$. Вместе с x° и i_0 запоминаем также и A_m .

Пусть уже имеются сенат V_n , векторы x^n и z^n , число L_n , номер i_n и множество $A_{i_n}^{k+1}$.

1. Строим пары (x_i^{n+1} , $P_i^{n+1}(x_i^{n+1})$), $i=1,\dots,i_n$. Каждая такая пара получается с помощью процедуры

$$\Gamma(A_1,\dots,A_{i-1},A_i^{n+1},\{x_{i+1}^n\},\dots,\{x_m^n\}),$$

где A_i^{n+1} определено в (19). Если $A_i^{n+1}=\phi$, то это i пропускается.

2. Формируем новый сенат V_{n+1} по правилу (2). Вместе с каждым x_i^{n+1}, прошедшим в сенат, запоминается порядковый номер i представляемого им множества M_i^{n+1} и множество A_i^{n+1} . Те же $x\in V_n\setminus\{x^n\}$ и x_i^{n+1}, которые в V_{n+1} не вошли, забываются, т.е. занимаемые ими массивы памяти ЭВМ освобождаются для новой информации. Забывается также и тройка (x^n, i_n , $A_{i_n}^{k+1}$).

3. Если V_{n+1} оказался пустым, то z^n - решение задачи, а $L^*=L_n$. Останов.

4. Сравнивая между собой цены $P^{n+1}(x)$ векторов x из V_{n+1} находим наименьший и выбираем из памяти соответствующую тройку

$(x_i^{K+1},\ i\ ,\ A_i^{K+1})$. Сделав это, полагаем $x^{n+1} = x_i^{K+1}$, $L_{n+1} = \min\{L_n, F(x^{n+1})\}$,

$$z^{n+1} = \begin{cases} z^n, & \text{если } L_n \leqslant F(x^{n+1}), \\ x^{n+1}, & \text{если } L_n > F(x^{n+1}) \end{cases} ; \quad i_{n+1} = i .$$

5. Если $(L_{n+1} - P^{n+1}(x^{n+1}))/P^{n+1}(x^{n+1}) \leqslant \varepsilon$, то $\frac{F(z^{n+1}) - L^*}{L^*} \leqslant \varepsilon$, и z^{n+1} объявляем решением задачи. Останов.

6. Заменяем n на $n+1$ и переходим к I.

Некоторые экономисты считают необходимым при подсчёте суммарных затрат учитывать штрафы, налагаемые на те из размещаемых предприятий, которые недоиспользуют свои производственные мощности. Формально такой учёт означает введение в целевую функцию (6) дополнительного слагаемого $\sum_{i=1}^{m} \psi_i\,(x_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\circ})$, где функции $\psi_i(t)$ непрерывны и возрастают для $t > 0$, а при $t = 0$ суть нули. Если эти функции линейны: $\psi_i(t) = \alpha_i t$, то описанный только что алгоритм сохраняет силу и для модели со штрафами, так как функция (6) не меняет своего вида при условии (9):

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\circ}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{\circ} x_{ij}^{\circ} + \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{h_i}^{\ell} x_{h_i}^{\ell} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(x_i) + \alpha_i x_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^{\circ} + \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_i - \alpha_i) x_{ij}^{\circ} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{h=1}^{p_\ell} \sum_{i=1}^{m} c_{h_i}^{\ell} x_{h_i}^{\ell} - b \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_i .$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Lawler, Wood. Branch - and - bound methods, a survey. Operation Research, v. I4 N 4 (I966).

2. В.А.Емеличев, В.И.Комлик. Применение динамического программирования к решению задачи размещения. Докл. АН БССР, т.X № I0 (I966)

3. А.М.Гальперин. Об одном алгоритме для решения однопродуктовой задачи размещения. Техническая и экономическая информация. Сер."Экономика хим.пром.", НИИТЭХИМ, I968, вып.8.

Поступила в редакцию
4.IX. 1969 г.