УДК 512.25/26

ОДИН ОБЩИЙ ПРИЕМ УЧЕТА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СТОЛБЦОВ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М.А.Яковлева

Публикуемая статья является развернутым изложением краткой заметки автора [6]. Рассмотрены также некоторые приложения предлагаемого приема.

При изложении мы будем исходить из следующей постановки общей задачи линейного программирования. Пусть в евклидовом пространстве R^n заданы векторы A_s $(s=1,2,\ldots,N)$ и вектор B. Кроме того, заданы числа c_s $(s=1,2,\ldots,N)$. Требуется определить значения переменных x_s $(s=1,2,\ldots,N)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1^0. $x_s \geq 0$, $s=1,2,\ldots,N$;

2^0. $\sum\limits_{s=1}^{N} x_s A_s = B$;

3^0. Достигает минимума величина

$$\sum_{s=1}^{N} c_s x_s .$$

Пусть множество $S \subset \{1,2,\ldots,N\}$ и состоит из n элементов и пусть семейство векторов $\{A_s\}_{s\in S}$ образует базис пространства R^n. Каждому такому множеству S можно поставить в соответствие решение $X=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ системы 2^0, положив $x_s=0$ для $s\bar{\in} S$ и определив остальные x_s из системы уравнений:

$$\sum_{s\in S} x_s A_s = B. \qquad (1)$$

Решение X, соответствующее множеству S, называется допустимым, если выполнено условие I°, и оптимальным, если выполнены условия I° и 3°.

Известно, что необходимым и достаточным условием оптимальности допустимого решения, соответствующего множеству S, является существование вектора $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, удовлетворяющего условиям:

1) $(A_s, Y) \leq c_s, \quad s \in \{1, 2, \ldots, N\}$;

2) $(A_s, Y) = c_s, \quad s \in S$.

Хотя описанными выше решениями (их называют базисными) и не исчерпывается множество всех допустимых и всех оптимальных решений, тем не менее при решении поставленной задачи ими можно ограничиться, что и делается в методе последовательного улучшения допустимого плана [1], [2]. Один шаг этого метода состоит из следующих этапов.

I. Определяют компоненты вектора $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ как решение системы линейных уравнений:

$$(A_s, Y) = c_s, \quad s \in S. \tag{2}$$

II. Находят номер $\sigma \in \{1, 2, \ldots, N\}$, при котором $(A_\sigma, Y) > c_\sigma$. На последующих этапах данного шага вектор A_σ вводят в базис вместо одного из векторов A_s $(s \in S)$.

III. Определяют коэффициенты разложения вводимого в базис вектора A_σ по векторам старого базиса, то есть такие числа g_s $(s \in S)$, что

$$\sum_{s \in S} g_s A_s = A_\sigma. \tag{3}$$

IV. Отыскивают число

$$\varepsilon = \min_{g_s > 0,\, s \in S} \left\{ \frac{x_s}{g_s} \right\}.$$

Если среди коэффициентов разложения g_s нет положительных, то рассматриваемая задача не имеет решения ввиду неограниченности снизу на множестве допустимых решений минимизируемой формы. В противном случае найдется $\tau \in S$ такое, что $\varepsilon = \frac{x_\tau}{g_\tau}$, $g_\tau > 0$.

V. Составляют новое множество $\bar{S}$, которое получается из множества S заменой в последнем элемента τ на элемент σ. Таким образом, $\bar{S} = (S \setminus \{\tau\}) \cup \{\sigma\}$.

VI. Допустимое решение $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N\}$, соответствующее множеству $\bar{S}$, может быть получено по следующим формулам:

$$\bar{x}_s = x_s - \varepsilon g_s \quad \text{при} \quad s \in S;$$

$$\bar{x}_\sigma = \varepsilon;$$

$$\bar{x}_s = 0 \quad \text{при} \quad s \bar{\in} S.$$

Заметим, что иногда оказывается целесообразным не подправлять допустимое решение, а получать его на каждом шаге, решая систему (I).

Решение систем (I), (2) и (3) при большой размерности векторов A_s наталкивается на существенные технические трудности. Для некоторых классов задач эти трудности могут быть обойдены путем разработки для решения указанных систем специальных алгорифмов, учитывающих особенности решаемых задач (см., например, [3], [4], [5]).

Цель настоящей статьи состоит в изложении способа решения поставленной выше общей задачи линейного программирования в предположении, что решаемая задача лишь сравнительно небольшим числом последних векторов A_s $(s = M+1, M+2, \ldots, N)$ отличается от задачи специального вида, для которой разработан упрощенный метод решения.

Основная идея предлагаемого способа базируется на следующих соображениях. Предположим, что заданы три попарно непересекающихся множества $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ и семейство векторов $\{A_s\}_{s \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J} \cup \mathcal{K}}$ из пространства R^n, обладающее тем свойством, что как семейство $\{A_s\}_{s \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}}$, так и семейство $\{A_s\}_{s \in \mathcal{I} \cup \mathcal{K}}$ образуют базис пространства R^n. Предположим также, что известны коэффициенты $\tau_{\mu\nu}$ в разложениях

$$A_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{I} \cup \mathcal{K}} \tau_{\mu\nu} A_\nu, \quad \mu \in \mathcal{J}, \tag{4}$$

и что решения систем

$$(A_\mu, Y) = \bar{c}_\mu, \quad \mu \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}, \tag{5}$$

и

$$\sum_{\mu \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} z_\mu A_\mu = A_\sigma \tag{6}$$

могут быть найдены при любых правых частях. Решение таких систем в дальнейшем будет рассматриваться как основная операция. Если нужно решить систему

$$(A_\mu, Y) = c_\mu, \quad \mu \in J \cup \mathcal{H}, \tag{7}$$

то, как нетрудно убедиться, вместо неё можно решить систему (5), в которой в качестве правых частей надлежит взять числа

$$\bar{c}_\mu = \begin{cases} c_\mu, & \mu \in J, \\ \sum\limits_{\nu \in J \cup \mathcal{H}} r_{\mu\nu} c_\nu, & \mu \in \mathcal{J}. \end{cases} \tag{8}$$

Действительно, в силу единственности решений систем (5) и (7) достаточно показать, что решение системы (7) одновременно является и решением системы (5). Но так как при $\mu \in J$ уравнения этих систем совпадают, то остается лишь проверить, что при указанном выборе чисел $\bar{c}_\mu$ равенства

$$(A_\mu, Y) = \bar{c}_\mu, \quad \mu \in \mathcal{J},$$

выполняются в силу системы (7). Последнее сразу получается, если векторное равенство (4) умножить скалярно на решение Y системы (7) и в правых частях полученных выражений скалярные произведения (A_ν, Y) заменить согласно (7) на c_ν.

Знанием коэффициентов $r_{\mu\nu}$ можно воспользоваться и для перехода от решения системы (6) к решению системы

$$\sum_{\nu \in J \cup \mathcal{H}} g_\nu A_\nu = A_\sigma. \tag{9}$$

Именно, если $\{z_\mu\}_{\mu \in J \cup \mathcal{J}}$ - решение системы (6), а $\{g_\nu\}_{\nu \in J \cup \mathcal{H}}$ - решение системы (9), то имеют место равенства:

$$g_\nu = \begin{cases} z_\nu + \sum\limits_{\mu \in \mathcal{J}} r_{\mu\nu} z_\mu, & \nu \in J, \\ \sum\limits_{\mu \in \mathcal{J}} r_{\mu\nu} z_\mu, & \nu \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{10}$$

Действительно, для g_ν из (10) имеем

$$\sum_{\nu \in J \cup \mathcal{H}} g_\nu A_\nu = \sum_{\nu \in J} z_\nu A_\nu + \sum_{\nu \in J} \Big(\sum_{\mu \in \mathcal{J}} r_{\mu\nu} z_\mu \Big) A_\nu +$$

$$+ \sum_{\nu \in \mathcal{H}} \Big(\sum_{\mu \in \mathcal{J}} r_{\mu\nu} z_\mu \Big) A_\nu = \sum_{\mu \in J} z_\mu A_\mu + \sum_{\mu \in \mathcal{J}} z_\mu \Big(\sum_{\nu \in J \cup \mathcal{H}} r_{\mu\nu} A_\nu \Big) =$$

$$= \sum_{\mu \in \mathfrak{I}} z_\mu A_\mu + \sum_{\mu \in \mathfrak{J}} z_\mu A_\mu = A_0$$

Таким образом, имея коэффициенты разложений (4), можно находить решения систем (7) и (9), решая вместо них системы (5) и (6). В дальнейшем, однако, мы будем в основном ориентироваться на тот случай, когда число элементов в множестрах $\mathfrak{J}$ и $\mathcal{K}$ (которые, очевидно, имеют одинаковое число элементов) значительно меньше числа элементов множества $\mathfrak{I}$. При этом может оказаться нецелесообразным хранить все коэффициенты $\tau_{\mu\nu}$. Оказывается, можно обойтись лишь коэффициентами с номерами из $\mathfrak{J} \cdot \mathcal{K}$, что влечет за собой необходимость повторного решения систем вида (5) и (6).

Выбрав любые γ_μ, $\mu \in \mathfrak{J}$, решим предварительно систему

$$(A_\mu, \tilde{Y}) = \begin{cases} c_\mu, & \mu \in \mathfrak{I}; \\ \gamma_\mu, & \mu \in \mathfrak{J}. \end{cases} \tag{11}$$

Эта система лишь правой частью отличается от системы (5), и, согласно сделанному ранее предположению, её решение мы можем найти. Тогда для получения чисел $\bar{c}_\mu$ вместо формул (8) можно воспользоваться следующими формулами:

$$\bar{c}_\mu = \begin{cases} c_\mu, & \mu \in \mathfrak{I}; \\ \gamma_\mu + \sum_{\nu \in \mathcal{K}} \tau_{\mu\nu} [c_\nu - (A_\nu, \tilde{Y})], & \mu \in \mathfrak{J}. \end{cases} \tag{12}$$

Покажем, что формулы (8) и (12) дают одно и то же. Заметим, прежде всего, что при всех $\mu \in \mathfrak{J}$

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{I}} \tau_{\mu\nu} (A_\nu, \tilde{Y}) = \gamma_\mu - \sum_{\nu \in \mathcal{K}} \tau_{\mu\nu} (A_\nu, \tilde{Y}). \tag{13}$$

Действительно, при $\mu \in \mathfrak{J}$ согласно (4) имеем

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{I}} \tau_{\mu\nu} A_\nu + \sum_{\nu \in \mathcal{K}} \tau_{\mu\nu} A_\nu = A_\mu,$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{I}} \tau_{\mu\nu} (A_\nu, \tilde{Y}) + \sum_{\nu \in \mathcal{K}} \tau_{\mu\nu} (A_\nu, \tilde{Y}) = (A_\mu, \tilde{Y}) = \gamma_\mu,$$

откуда сразу получается (13). Эквивалентность формул (8) и (12) следует теперь из того, что при $\mu \in \mathfrak{J}$

$$\sum_{\nu \in \mathcal{J} \cup \mathcal{H}} z_{\mu\nu} c_\nu = \sum_{\nu \in \mathcal{H}} z_{\mu\nu} c_\nu + \sum_{\nu \in \mathcal{J}} z_{\mu\nu} c_\nu = \sum_{\nu \in \mathcal{H}} z_{\mu\nu} c_\nu$$

$$+ \sum_{\nu \in \mathcal{J}} z_{\mu\nu} (A_\nu, \tilde{Y}) = \sum_{\nu \in \mathcal{H}} z_{\mu\nu} c_\nu + \gamma_\mu - \sum_{\nu \in \mathcal{H}} z_{\mu\nu} (A_\nu, \tilde{Y}) =$$

$$= \gamma_\mu + \sum_{\nu \in \mathcal{H}} z_{\mu\nu} \left[c_\nu - (A_\nu, \tilde{Y}) \right]$$

Таким образом, при неполном хранении коэффициентов $z_{\mu\nu}$ для нахождения решения системы (7) нужно решить систему (II) (вида системы (5)) для определения $\tilde{Y}$, по формулам (I2) вычислить числа $\bar{c}_\mu$ и решить систему (5).

Для вычисления решения системы (9), как и раньше, прежде всего нужно найти решение системы (6). Формулы (I0) применимы и теперь для получения g_ν при $\nu \in \mathcal{H}$. Что касается остальных компонент искомого решения, то они могут быть найдены из системы уравнений

$$\sum_{\nu \in \mathcal{J}} g_\nu A_\nu = \bar{A} , \qquad (I4)$$

где $\bar{A} = A_\sigma - \sum_{\nu \in \mathcal{H}} g_\nu A_\nu$. Хотя эта система, возможно, переопределена и по форме отличается от системы (6), однако её решение можно получить тем же способом, каким решается система (6). Действительно, вместо системы (I4) можно рассмотреть систему

$$\sum_{\nu \in \mathcal{J}} g_\nu A_\nu + \sum_{\nu \in \mathcal{J}} \omega_\nu A_\nu = \bar{A} , \qquad (I5)$$

которая от системы (6) отличается лишь правой частью, причем в решении этой системы все ω_ν окажутся равными нулю. Таким образом, и при решении системы (9) экономия коэффициентов $z_{\mu\nu}$ привела к необходимости один лишний раз решить систему вида (6).

Вернемся теперь к задаче линейного программирования. Как уже отмечалось, помимо общих методов её решения, разработан ряд специальных методов, которые предполагают, что семейство векторов $\{A_s\}_{s=1}^{N}$ в постановке задачи линейного программирования удовлетворяет тем или иным условиям. Некоторые из этих методов строятся по следующей схеме. В пространстве R^n выделяется множество Y с таким расчетом, чтобы можно было построить некоторые упрощенные алгоритмы для решения систем вида

$$(B_k, Y) = d_k , \quad k = 1, 2, \ldots, n ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k B_k = F, \qquad (17)$$

где $F \in R^n$, d_k $(k=1,2,\dots,n)$ – любые вещественные числа, а векторы B_k $(k=1,2,\dots,n)$ принадлежат V и образуют базис R^n. Если все векторы A_s в постановке задачи линейного программирования принадлежат множеству V, то при решении этой задачи методом последовательного улучшения допустимого плана система (2) оказывается вида (16), а системы (1) и (3) – вида (17). Причем наличие упрощенных алгорифмов для решения этих систем обычно позволяет существенно повысить объем поддающихся решению задач. Следует заметить, что часто описание множества V и упрощенных алгорифмов решения систем (16) и (17) не зависит от размерности пространства n, так что специальный класс задач линейного программирования выделяется сразу для всех размерностей.

Перейдем теперь к описанию приема, позволяющего расширить область применения специальных методов на тот случай, когда лишь часть векторов A_s принадлежит множеству V. В дальнейшем будем считать, что $A_s \in V$ при $s = 1,2,\dots,M$, а векторы A_{M+1}, $A_{M+2}, \dots, A_N$ – произвольные. При этом, как уже говорилось, предполагается, что число $N - M$ сравнительно невелико.

В соответствии с разделением векторов A_s на две группы множество S на очередном шаге метода последовательного улучшения допустимого плана разобьется на два подмножества: $S = \mathcal{J} \cup \mathcal{K}$, где $\mathcal{J} \subset \{1,2,\dots,M\}$, $\mathcal{K} \subset \{M+1, M+2,\dots,N\}$. Пусть, кроме того, задано семейство вспомогательных векторов $\{A_\mu\}_{\mu \in \bar{\mathcal{J}}}$, составленное из векторов множества V, с числом элементов, равным числу элементов множества $\mathcal{K}$ и такое, что семейство $\{A_\mu\}_{\mu \in \mathcal{J} \cup \bar{\mathcal{J}}}$ образует базис R^n. Так как в методе последовательного улучшения допустимого плана семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ также образует базис пространства R^n, то имеют место разложения (4). Мы опишем один шаг метода как при полном хранении коэффициентов $z_{\mu\nu}$, так и при их сокращенном хранении. Заметим также, что векторы A_μ при $\mu \in \bar{\mathcal{J}}$ могут быть взяты из числа векторов, входящих в постановку задачи линейного программирования, но могут быть выбраны и иначе. Важно лишь, чтобы они принадлежали множеству V. Свобода в выборе этих векторов может иметь значение при подготовке первого шага вычислений. Коэффициенты $z_{\mu\nu}$ (те, которые предполагается хранить) также должны быть как-то вычислены к началу первого шага. Однако начало счета мо-

жет быть, как правило, организовано так, чтобы на первом шаге множество $\mathcal{K}$ оказалось пустым и чтобы не потребовалось ни выбирать дополнительные векторы, ни вычислять коэффициенты $z_{\mu\nu}$.

Итак, пусть заданы множества $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$, семейство $\{A_\mu\}_{\mu\in\mathcal{J}}$ и либо все коэффициенты в разложениях (4), либо лишь те из них, для которых $(\mu,\nu)\in\mathcal{J}\times\mathcal{K}$. Поскольку системы (2) и (3) в наших обозначениях превращаются соответственно в системы (7) и (9), то их решение может быть получено, как описано выше. Таким образом, проведение этапов I-VI описанного в начале статьи метода последовательного улучшения допустимого плана дополнительных пояснений не требует. Заметим лишь, что вместо получения нового множества $\bar{S}$ нужно сформировать два множества:

$$\bar{\mathcal{J}} = \begin{cases} (\mathcal{J}\setminus\{\tau\})\cup\{\sigma\}, & \sigma\le M; \\ \mathcal{J}\setminus\{\tau\}, & \sigma > M; \end{cases}$$

$$\bar{\mathcal{K}} = \begin{cases} \mathcal{K}\setminus\{\tau\}, & \sigma\le M; \\ (\mathcal{K}\setminus\{\tau\})\cup\{\sigma\}, & \sigma > M. \end{cases}$$

Что касается нового множества $\bar{J}$, то требуется лишь, чтобы семейство $\{A_\mu\}_{\mu\in\bar{\mathcal{J}}\cup\bar{J}}$ образовывало базис пространства R^n. Если $\sigma > M$ и $\tau\in\mathcal{K}$, то $\mathcal{J}=\bar{\mathcal{J}}$ и можно положить $\bar{J}=J$, сохранив семейство вспомогательных векторов. Если $\sigma > M$ и $\tau\in\mathcal{J}$, то в качестве множества $\bar{J}$ можно взять множество $J\cup\{\tau\}$, переведя вектор A_τ в число вспомогательных. В случае $\sigma\le M$ номер σ попадает в множество $\bar{\mathcal{J}}$ и, следовательно, некоторый элемент α старого множества $\mathcal{J}\cup J$ должен быть удален. Так как элементы множества $\bar{\mathcal{J}}$ удалять нельзя, то искомый элемент α должен принадлежать множеству

$$R = \begin{cases} J, & \tau\in\mathcal{K}, \\ J\cup\{\tau\}, & \tau\in\mathcal{J}. \end{cases}$$

При этом требование линейной независимости семейства $\{A_\mu\}_{\mu\in\bar{\mathcal{J}}\cup\bar{J}}$ эквивалентно тому, что коэффициент z_α в разложении (6) должен быть отличен от нуля. В качестве α можно взять, например, тот номер, на котором реализуется

$$\max_{\mu\in R}\{|z_\mu|\}.$$

Поскольку в силу выбора номера τ коэффициент $g_\tau\ne 0$, то из формул (10) видно, что этот максимум строго положителен. Заметим, что при решении системы (9) коэффициенты z_μ к этому

моменту уже определены, так что для нахождения номера α дополнительно решать систему (6) нет необходимости. Суммируя сказанное, можно сформулировать следующее правило определения множеств $\bar{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{\mathcal{J}}$.

а) Если $\sigma \leq M$, то

$$\bar{\mathcal{I}} = (\mathcal{I} \setminus \{\tau\}) \cup \{\sigma\} ;$$
$$\bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \setminus \{\tau\} ;$$
$$\bar{\mathcal{J}} = R \setminus \{\alpha\} .$$

б) Если $\sigma > M$, то

$$\bar{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \setminus \{\tau\} ;$$
$$\bar{\mathcal{K}} = (\mathcal{K} \setminus \{\tau\}) \cup \{\sigma\} ;$$
$$\bar{\mathcal{J}} = R .$$

Чтобы завершить шаг, осталось от коэффициентов в разложениях (4) перейти к коэффициентам в разложениях

$$A_\mu = \sum_{\nu \in \bar{\mathcal{I}} \cup \bar{\mathcal{K}}} \bar{\tau}_{\mu\nu} A_\nu , \quad \mu \in \bar{\mathcal{J}} .$$

Если хранятся все коэффициенты этих разложений, то новые коэффициенты разложений $\bar{\tau}_{\mu\nu}$ векторов A_μ по базису, отличающемуся от старого заменой вектора A_τ на вектор A_σ, могут быть получены по известным формулам:

$$\bar{\tau}_{\mu\nu} = \begin{cases} \tau_{\mu\nu} - \dfrac{g_\nu}{g_\tau} \tau_{\mu\tau} , & \nu \in (\bar{\mathcal{I}} \cup \bar{\mathcal{K}}) \setminus \{\sigma\} , \\ \dfrac{\tau_{\mu\tau}}{g_\tau} , & \nu = \sigma . \end{cases} \tag{18}$$

этим определяются коэффициенты $\bar{\tau}_{\mu\nu}$ при $\mu \in \bar{\mathcal{J}} \setminus \{\tau\}$.
Если $\tau \in \bar{\mathcal{J}}$, то коэффициенты $\bar{\tau}_{\tau\nu}$ могут быть найдены по формулам:

$$\bar{\tau}_{\tau\nu} = \begin{cases} -\dfrac{g_\nu}{g_\tau} , & \nu \in (\bar{\mathcal{I}} \cup \bar{\mathcal{K}}) \setminus \{\sigma\} , \\ \dfrac{1}{g_\tau} , & \nu = \sigma . \end{cases} \tag{19}$$

В случае сокращенного хранения коэффициентов $\tau_{\mu\nu}$ для вычисления $\bar{\tau}_{\mu\nu}$ можно воспользоваться теми же формулами, ограничив в них область изменения индекса ν множеством $\bar{\mathcal{K}}$. Однако если $\tau \in \mathcal{I}$, то в нашем распоряжении нет коэффициентов $\tau_{\mu\tau}, \mu \in \mathcal{J}$,

которые необходимы для применения написанных выше формул. В этом случае предварительно надо вычислить недостающие коэффициенты, что можно сделать следующим образом. Найдем, прежде всего, вектор u, являющийся решением следующей системы уравнений вида (5) :

$$(A_\mu, u) = \begin{cases} 0, & \mu \in (\mathcal{I} \setminus \{\tau\}) \cup \mathcal{J}; \\ -1, & \mu = \tau. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда

$$z_{\mu\tau} = \sum_{\nu \in \mathcal{K}} z_{\mu\nu} (A_\nu, u), \ \mu \in \mathcal{J}. \tag{21}$$

Для проверки справедливости этих равенств достаточно вспомнить, что при $\mu \in \mathcal{J}$

$$\sum_{\nu \in \mathcal{I} \cup \mathcal{K}} z_{\mu\nu} A_\nu = A_\mu$$

и, следовательно,

$$0 = (A_\mu, u) = \sum_{\nu \in \mathcal{I}} z_{\mu\nu} (A_\nu, u) + \sum_{\nu \in \mathcal{K}} z_{\mu\nu} (A_\nu, u) =$$

$$= -z_{\mu\tau} + \sum_{\nu \in \mathcal{K}} z_{\mu\nu} (A_\nu, u).$$

Таким образом, при неполном хранении коэффициентов $z_{\mu\nu}$ на каждом шаге приходится решать не две системы вида (5) или (6), а четыре или пять, в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит на данном шаге номер τ множеству $\mathcal{K}$. Отметим также, что если вместо этапа УI новое допустимое решение X получается на каждом шаге из системы (I), то эту систему можно решить точно таким же способом, что и систему (3).

В ряде специализированных методов для задачи линейного программирования решения систем (2) и (3) получаются не прямым решением этих систем, а на основе использования некоторой вспомогательной информации, получаемой той или иной переработкой матрицы систем (2) и (3). Поскольку на каждом шаге метода последовательного улучшения допустимого плана в семействе $\{A_s\}_{s \in S}$ меняется один вектор, то во всех специализированных методах указанного типа предусматривается связанное с этим изменение вспомогательной информации. Таковы являются, например, некоторые

методы решения задач линейного программирования с блочно-диагональными матрицами, а также задач типа транспортной и двухкомпонентной с дополнительными ограничениями общего вида. Ко всем таким методам применим описанный в данном параграфе прием, поскольку семейство $\{A_\mu\}_{\mu \in J \cup J}$ при его изменении либо на данном шаге вообще не меняется (если $\sigma > M$), либо в нем происходит смена одного вектора (при $\sigma \leq M$ вектор A_α заменяется на вектор A_σ). Тем самым указанные задачи можно дополнить столбцами произвольного вида и решать их, нисколько не меняя уже разработанные алгорифмы. Остановимся более подробно на некоторых применениях изложенного приема.

а) Блочная задача с дополнительными столбцами

Так мы называем задачу, матрица ограничений которой (т.е.матрица, составленная из столбцов A_s, $s=1,2,\dots,N$) имеет конфигурацию ненулевых элементов, изображенную на рис.I.

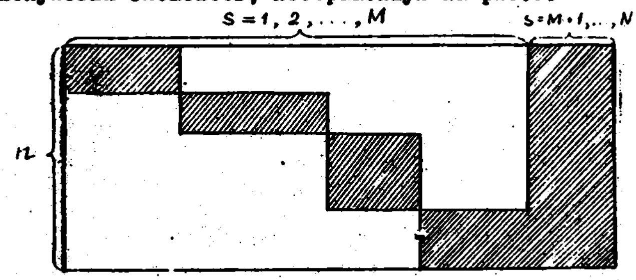

Рис. I

Формально класс чисто блочных задач можно описать следующим образом. Задано натуральное число r (число блоков) и натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_r$ (размерности блоков) при условии, что $n_1+n_2+\dots+n_r=n$. Если обозначить через V_1 множество векторов из R^n, у которых отличны от нуля разве лишь первые n_1 компонент, через V_2 - множество векторов, у которых отличны от нуля лишь элементы с номерами $n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$ и т.д., то в качестве множества V следует для чисто блочной задачи (с параметрами $r; n_1, n_2, \dots, n_r$) взять множество

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r .$$

Про векторы из V_i удобно говорить, что они принадлежат i-му блоку. В случае решения чисто блочной задачи системы (I), (2) и (3) в методе последовательного улучшения допустимого плана рас-

падаются на независимые подсистемы в соответствии с разбиением на блоки. Тем самым решение задачи упрощается, так как для каждого блока можно применить тот или иной прием решения соответствующей подсистемы. Так для блоков без какой-нибудь явной специфики можно хранить матрицу, обратную к матрице соответствующей подсистемы, подправляя её, когда вводимый в базис вектор A_σ (а следовательно, и выводимый вектор A_τ) принадлежит данному блоку. Эта процедура совпадает с хорошо разработанной процедурой модифицированного симплекс-метода. Заметим, что сама по себе чисто блочная задача, конечно, интереса не представляет, так как она распадается на r отдельных линейно программных задач. Мы, однако, игнорируем здесь это распадение, так как нашей целью является использование специфики чисто блочной задачи для задачи с дополнительными столбцами, которая уже не распадается.

Применение описанного выше приема для решения блочной задачи с дополнительными столбцами не требует особых пояснений. Системы (5), (6), (II), (I5) и (20) распадаются на r подсистем, как это имеет место для чисто блочной задачи. Однако в системе (20) лишь одна из этих подсистем имеет ненулевую правую часть, и потому решение остальных подсистем фактически искать не приходится. Это же упрощение имеет место и при решении системы (6), если, однако, вводимый столбец A_σ не из числа дополнительных. Ещё одно упрощение касается нахождения вектора $\tilde{Y}$ из системы (II). Поскольку от шага к шагу в множестве $\mathcal{J} \cup J$ меняется не более одного элемента, то при переходе к следующему шагу вектор $\tilde{Y}$ либо совсем не меняется, либо меняются лишь компоненты, определяемые из той подсистемы системы (II), в которой произошла смена уравнения (напомним, что выбрасываемый и вводимый векторы принадлежат одному блоку).

б) Двухкомпонентная задача с дополнительными столбцами

Этот тип задач получается, если каждый из первых M векторов A_s имеет не более двух отличных от нуля компонент, а остальные A_s – произвольного вида. Чисто двухкомпонентная задача [5] обладает рядом свойств, позволяющих построить в этом случае специальные алгорифмы решения систем (2) и (3). При решении двухкомпонентной задачи с дополнительными столбцами может быть использован тот или иной алгорифм решения двухкомпонентной задачи, причем к используемому алгорифму предъявляется лишь одно требование – части алгорифма, относящиеся к решению систем (2)

и (3), должны быть изолированы друг от друга, а также от остальных частей алгорифма и иметь удобное к ним обращение. Специфика учета дополнительных столбцов при этом не зависит от того, как решаются эти системы.

Замечание. Поскольку транспортная задача на сети является частным случаем двухкомпонентной задачи, то всё сказанное выше относительно двухкомпонентной задачи справедливо и для транспортной.

в) Обрамленные задачи линейного программирования

Иногда в качестве множества V выбирается множество столбцов, первые n_0 компонент которых произвольны, а на остальные компоненты накладываются те или иные ограничительные условия. При этом возникают так называемые специальные задачи с дополнительными ограничениями общего вида. К таким задачам относится, в частности, блочная задача линейного программирования [4], ненулевые элементы в матрице которой имеют расположение, изображенное на рисунке 2.

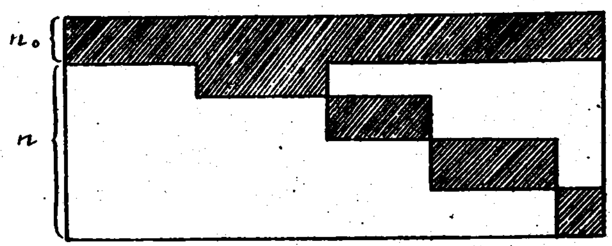

Рис. 2

К этому же типу задач можно отнести двухкомпонентную и транспортную задачи с дополнительными ограничениями. Применение к таким задачам описанного выше метода позволяет решать задачи линейного программирования, которые мы будем называть "обрамленными". Для блочного случая матрица такой обрамленной задачи имеет вид, изображенный на рис. 3, где, как и раньше заштрихованы места, допустимые для ненулевых элементов. Мы наметим один из возможных способов решения обрамленных задач, получающийся комбинированием описанного приема учета дополнительных столбцов и метода решения задач с дополнительными ограничениями, изложенного в [4].

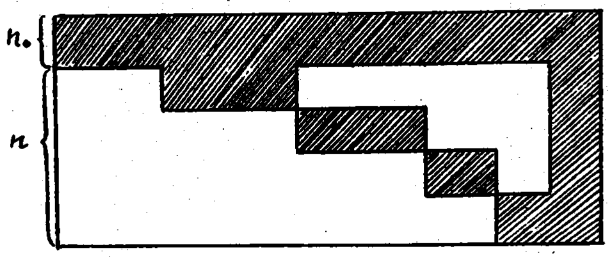

Рис. 3

Будем считать, что поставленная в начале статьи задача линейного программирования является задачей специального вида с дополнительными столбцами. Нам будет безразлично, какая именно это задача. Например, она может быть одного из рассмотренных выше типов. Однако теперь её будем решать при дополнительных ограничениях на переменные x_s, причем эти ограничения мы предположим заданными в виде равенства

$$\sum_{s=1}^{N} x_s B_s = Q ,$$

где B_s, $s=1,2,\ldots,N$, и Q - векторы $n_\circ$- мерного евклидова пространства $R^{n_\circ}$. При решении такой задачи методом последовательного улучшения допустимого плана множество S на каждом шаге состоит из $n+n_\circ$ элементов (по числу ограничений), а вместо систем (2) и (3) нужно решать соответственно системы

$$(B_s, y') + (A_s, y) = c_s , \quad s \in S , \tag{22}$$

и

$$\begin{cases} \sum\limits_{s \in S} g_s B_s = B_\sigma , \\ \sum\limits_{s \in S} g_s A_s = A_\sigma . \end{cases} \tag{23}$$

Здесь y, как и раньше, - вектор из R^n, а y' - вектор из $R^{n_\circ}$, соответствующий дополнительным ограничениям. Разобьём множество S на два подмножества S_1 и S_2 так, чтобы семейство $\{A_\mu\}_{\mu \in S_1}$ образовывало базис пространства R^n. Если через $\beta_{\kappa\mu}$ обозначить коэффициенты в разложениях

$$A_\kappa = \sum_{\mu \in S_1} \beta_{\kappa\mu} A_\mu , \quad \kappa \in S_2 , \tag{24}$$

и ввести в рассмотрение векторы

$$\bar{B}_\kappa = B_\kappa - \sum_{\mu \in S_1} \beta_{\kappa\mu} B_\mu, \ \kappa \in S_2 ,$$

то решения систем (22) и (23) можно получать следующим образом. Сначала найдем y' из системы

$$(\bar{B}_\kappa , y') = c_\kappa - \sum_{\mu \in S_1} \beta_{\kappa\mu} c_\mu, \ \kappa \in S_2 , \tag{25}$$

а затем вектор y из системы:

$$(A_\mu, y) = c_\mu - (B_\mu, y'), \ \mu \in S_1 . \tag{26}$$

Решение системы (23) можно получить сходным образом. Если определить λ_μ ($\mu \in S_1$) из системы

$$\sum_{\mu \in S_1} \lambda_\mu A_\mu = A_6 , \tag{27}$$

то коэффициенты g_κ при $\kappa \in S_2$ можно найти из векторного равенства:

$$\sum_{\kappa \in S_2} g_\kappa \bar{B}_\kappa = B_6 - \sum_{\mu \in S_1} \lambda_\mu B_\mu . \tag{28}$$

При $\mu \in S_1$ коэффициенты g_μ теперь могут быть получены по формулам:

$$g_\mu = \lambda_\mu - \sum_{\kappa \in S_2} \beta_{\kappa\mu} g_\kappa , \quad \mu \in S_1 .$$

Для нахождения решений систем (25) и (26) в работе [4] предлагается хранить матрицу, обратную к матрице этих систем (матрица системы (28), транспонированная по отношению к матрице системы (25)). Там же разработаны процедура подправки этой обратной матрицы и способ изменения подмножества S_1 (не более чем на один элемент) при переходе к следующему шагу. Нас здесь в основном интересует решение систем (26) и (27). Эти системы отличаются лишь обозначением, соответственно, от систем (7) и (9), и для их решения может быть применен предлагаемый в настоящей статье прием. Для этого, как и раньше, множество S_1 (выступающее теперь в той же роли, в какой выступало множество S) разбивается на множества $\mathcal{J}$ и $\mathcal{H}$, и вводится семейство вспомогатель-

ных векторов $\{A_\mu\}_{\mu \in J}$. Отличие состоит лишь в том, что д… данное решение системы (27) используется не непосредственно, … для нахождения решения системы (23). Кроме того, может случить… ся, что в семейство $\{A_s\}_{s \in S_1}$ вводится не вектор A_σ, как это было ранее, а один из векторов семейства $\{A_k\}_{k \in S_2}$, скажем A_{k_0}. При этом, естественно, в формулах (18) и (19) при подправке коэффициентов z_μ, вместо чисел g, должны быть использованы коэффициенты соответствующего разложения из (24), а при выборе номера α вместо чисел z_μ (являющихся решением системы (6)) следует пользоваться коэффициентами z'_μ, определяемыми из системы

$$\sum_{\mu \in J \cup J} z'_\mu A_\mu = A_{k_0} .$$

г) Двухкомпонентная задача

В заключение будет рассмотрено использование подмены столбцов к решению общей двухкомпонентной задачи. Целесообразность такого применения основывается на двух соображениях. Во-первых, аналогичный подход, возможно, удастся применить и к некоторым другим специальным задачам. Во-вторых, этот подход естественно позволяет перенести способ решения, предложенный в [3] для транспортной задачи, на общую двухкомпонентную задачу. Напомним, что мы назвали двухкомпонентной такую задачу линейного программирования, в которой каждый из векторов A_s имеет не более двух отличных от нуля компонент. Такая задача обладает рядом свойств, позволяющих построить для неё специальные алгорифмы решения систем (2) и (3). Не имея целью детально анализировать здесь характерные особенности этих систем, приведем лишь их графическое изображение, наглядно передающее особенности их структуры. С этой целью поставим в соответствие каждому неизвестному y_j вершину некоторого графа, а каждому уравнению системы (2) ребро этого графа, соединяющее вершины, соответствующие входящим в это уравнение неизвестным. Уравнениям с одним неизвестным поставим в соответствие на графе стрелки, выходящие из соответствующих вершин. Можно показать, что система (2) распадается на одну или несколько подсистем, причем граф, поставленный в соответствие любой из этих подсистем, может иметь вид лишь одного из двух изображенных на рис.4 графов. Матрица коэффициентов системы (3)

представляет из себя транспонированную матрицу коэффициентов системы (2). Ввиду этого устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие между вершинами построенного для системы (2) графа и уравнениями системы (3), а также между дугами этого графа и неизвестными системы (3).

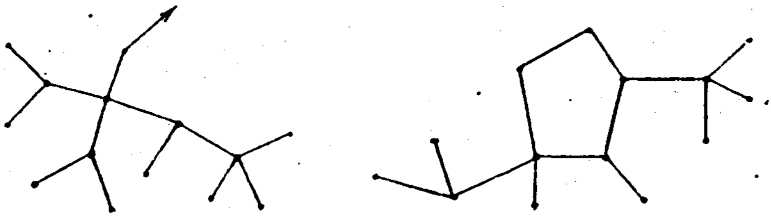

Рис. 4

Итак, предположим, что двухкомпонентная задача решается методом последовательного улучшения допустимого плана и что на очередном шаге имеется некоторое множество S (все обозначения имеют старый смысл). В рассматриваемом случае столбцы исходной задачи не разбиты заранее на основные и дополнительные, так что непосредственно ту схему, которая изложена выше, здесь применить нельзя. Вместо этого разбиение множества S на множества $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$, а также выбор семейства вспомогательных векторов $\{A_\mu\}_{\mu\in\mathcal{J}}$ мы будем производить следующим образом. По множеству S может быть, как указывалось выше, построен граф с n вершинами, каждое ребро которого изображает некоторый вектор семейства $\{A_s\}_{s\in S}$. Если в этом графе отсутствуют циклы, то в качестве множества $\mathcal{J}$ берется все S, а множества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{I}$ пустые. Если же в графе имеются циклы, то из каждого цикла выбирается по одному ребру и номер соответствующего этому ребру вектора в семействе $\{A_s\}_{s\in S}$ включается в множество $\mathcal{K}$. Таким образом, число элементов множества $\mathcal{K}$ равно числу циклов в графе. Через множество $\mathcal{J}$ обозначим множество $S\setminus\mathcal{K}$. Для выбора семейства вспомогательных векторов поступим следующим образом. Пусть $\pi\in\mathcal{K}$. Вектор A_π в таком случае имеет две отличные от нуля компоненты с некоторыми номерами i_π и j_π (какой номер обозначить через i_π, а какой через j_π – безразлично). Величины отличных от нуля компонент обозначим через a_π и b_π, соответственно. Мы включим номер $N+\pi$ в множество $\mathcal{J}$ и обозначим через $A_{N+\pi}$ вектор, у которого j_π-я компонента равна b_π, а

остальные компоненты нулевые. Если теперь для семейства $\{A_\mu\}_{\mu \in \mathcal{J} \cup \mathcal{J}}$ построить граф, как это делалось для семейства $\{A_s\}_{s \in S}$, то полученный граф уже не будет содержать циклов. Тем самым решение систем вида (5) и (6) может быть осуществлено, как и при решении транспортной задачи [3], однократным перебором уравнений в надлежащем порядке (причем порядок перебора уравнений системы (6) может быть, очевидно, выбран обратным к порядку, принятому для системы (5)).

При переходе к следующему шагу в множестве S меняется один элемент, а в соответствующем этому множеству графе меняется одно ребро. Тем самым за один шаг возможно образование одного нового цикла и (независимо от этого) разрыв одного из старых циклов. В соответствии с этим происходит изменение множеств $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$, а также семейства $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}}$.

Литература

1. Л.В.Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, изд. АН СССР, 1959.
2. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн, Линейное программирование, Физматгиз, 1963.
3. В.А.Булавский, Об одном алгорифме решения транспортной задачи, Оптимальное планирование, Новосибирск, вып.2, 1964.
4. Р.А.Звягина, Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами, Оптимальное планирование, Новосибирск, вып.2, 1964.
5. М.А.Яковлева, Двухкомпонентная задача линейного программирования, Оптимальное планирование, Новосибирск, вып.2, 1964.
6. М.А.Яковлева, О расширении области применения специальных алгорифмов линейного программирования, ДАН СССР, 179, № 5, 1968.

Поступила в редакцию
5.VII. 1969 г.