УДК 512.25/26 + 519.3:330.115

О ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Л.М.Абрамов, И.И.Бочкарева

1°. В n -мерном пространстве R^n рассматривается задача стохастического программирования с вероятностными ограничениями:

$$\min c^T x, \tag{1}$$

$$P\{Ax \geq b\} \geq \alpha, \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

где $A=(a_{ij})-(m\times n)$ матрица; $c^T=(c_1,c_2,\dots,c_n)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$- векторы из R^n; $b=(b_1,b_2,\dots,b_m)$ -мерный случайный вектор с функцией распределения

$$F(y)=F(y_1,y_2,\dots,y_m); \quad 0<\alpha<1 .$$

Известно (см. [3]), что задача /1/ - /3/ эквивалентна следующей задаче нелинейного программирования:

$$\min c^T x, \tag{1'}$$

$$Ax-y=0, \tag{2'}$$

$$F(y)=F(y_1,y_2,\dots,y_m)\geq\alpha, \tag{3'}$$

$$x\geq 0, \tag{4'}$$

которая является задачей минимизации линейной функции c^Tx на области D' векторов $(x,y)=(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m)\in R^{n+m}$, удовлетворяющих соотношениям /2'/ - /4'/. Поскольку условие /3'/ является единственным нелинейным ограничением среди условий /2'/ - /4'/, интересно выяснить, для каких функций распределения $F(y)$ множество $D_\alpha=\{y\in R^m \mid F(y)\geq\alpha\}$ является

выпуклым.

Достаточным условием выпуклости множества D_α является вогнутость функции $F(y)$, но, как уже было отмечено в [3], для большинства распределений, представляющих практический интерес, это условие не выполняется. В [2] доказывается выпуклость множества D_α, $0<\alpha<1$, если компоненты вектора b распределены независимо и равномерно, и высказывается утверждение, что множество D_α выпукло для любых независимых непрерывных распределений. Как будет показано ниже (см. п.4), последнее утверждение неверно.

Функцию $g(y)$, определенную на выпуклом множестве $M \subset R^m$, назовем α - квазивогнутой (α - вещественное число), если множество $S_\alpha=\{y \in M \mid g(y) \geq \alpha\}$ выпукло, и A - квазивогнутой (A - множество вещественных чисел), если $g(y)$ является α - квазивогнутой для каждого $\alpha \in A$. R - квазивогнутая функция называется квазивогнутой. Квазивогнутые функции и задачи математического программирования с квазивогнутыми ограничениями изучались рядом авторов (см. [I],[4]). В настоящей статье приводится исследование выпуклости множества D_α, или, что то же, исследование α - квазивогнутости функции распределения $F(y)$ в случае, когда компоненты вектора b независимы, т.е., когда

$$F(y)=F_1(y_1)\cdot F_2(y_2)\cdots F_m(y_m). \qquad (4)$$

2^0. Исследование α - квазивогнутости функции мы начнем со следующего очевидного замечания (ср. [I] стр. I22).

Пусть $g(y)$ - функция, определенная на выпуклом множестве M, A - интервал $[\alpha, +\infty)$ или все множество R вещественных чисел и $S_\alpha=\{y \in M \mid g(y) \geq \alpha\}$ или M, если $A=R$. Функция $g(y)$ является A -квазивогнутой в том и только в том случае, если для любых $\bar{y}$, $\bar{\bar{y}} \in S_\alpha$ и любого $0 \leq \lambda \leq 1$ имеет место

$$g[(1-\lambda)\bar{y}+\lambda\bar{\bar{y}}] \geq \min\{g(\bar{y}), g(\bar{\bar{y}})\}. \qquad (5)$$

Пусть на выпуклых множествах V_i, $V_i \in R^{m_i}$, $i=1,2,\dots,\kappa$, определены неотрицательные вогнутые функции $g_i(y^{(i)})$ и пусть $g(y)=g(y^{(1)}, y^{(2)},\dots, y^{(\kappa)})=g_1(y^{(1)})\cdot g_2(y^{(2)})\cdots g_\kappa(y^{(\kappa)})$ функция, определенная на множестве $V=V_1\times V_2\times\dots\times V_\kappa \in R^m$ $(m=\sum m_i)$. Функция $g(y)$ квазивогнутая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{y}=(\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)},\dots, \bar{y}^{(\kappa)})$,

$\bar{\bar{y}}=(\bar{\bar{y}}^{(1)}, \bar{\bar{y}}^{(2)},\dots,\bar{\bar{y}}^{(K)})$ из V и $0\le\lambda\le 1$. В силу вогнутости и неотрицательности функций $g_i(y^{(i)})$ имеем

$$g[(1-\lambda)\bar{y}+\lambda\bar{\bar{y}}]=\prod_{i=1}^{K} g_i[(1-\lambda)\bar{y}^{(i)}+\lambda\bar{\bar{y}}^{(i)}]\ge$$
$$\ge\prod_{i=1}^{K}[(1-\lambda)g_i(\bar{y}^{(i)})+\lambda g_i(\bar{\bar{y}}^{(i)})],$$

и для завершения доказательства достаточно проверить квазивогнутость функции $\prod\limits_{i=1}^{K} x_i$ для $x\ge 0$, т.е. доказать, что для любых неотрицательных чисел $x_1', x_2',\dots,x_K', x_1'', x_2'',\dots,x_K''$ и любого $0\le\lambda\le 1$ справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^{K}[(1-\lambda)x_i'+\lambda x_i'']\ge \min\left\{\prod_{i=1}^{K}x_i', \prod_{i=1}^{K}x_i''\right\}. \qquad (6)$$

Неравенство (6) очевидно при $K=1$. Предположим, что оно справедливо при $K=\ell$, и будем считать для определенности, что

$$\prod_{i=1}^{\ell+1}x_i'\le\prod_{i=1}^{\ell+1}x_i''. \qquad (7)$$

Неравенство (6) очевидно, если $x_i'\le x_i''$ при всех i. Пусть $x_{i_2}'>x_{i_1}''$. В силу (7) найдется такое i_2, что $x_{i_2}'<x_{i_2}''$. Тогда

$$[(1-\lambda)x_{i_1}'+\lambda x_{i_2}''][(1-\lambda)x_{i_2}'+\lambda x_{i_2}'']=(1-\lambda)^2x_{i_1}'x_{i_2}'+$$
$$+\lambda(1-\lambda)(x_{i_1}'x_{i_2}''+x_{i_1}''x_{i_2}')+\lambda^2x_{i_1}''x_{i_2}''\ge(1-\lambda)^2x_{i_1}'x_{i_2}'+$$
$$+\lambda(1-\lambda)(x_{i_1}'x_{i_2}'+x_{i_1}''x_{i_2}'')+\lambda^2x_{i_1}''x_{i_2}''=(1-\lambda)x_{i_1}'x_{i_2}'+\lambda x_{i_1}''x_{i_2}''$$

и

$$\prod_{i=1}^{\ell+1}[(1-\lambda)x_i'+\lambda x_i'']\ge\prod_{i\ne i_1,i_2}[(1-\lambda)x_i'+\lambda x_i''][(1-\lambda)x_{i_1}'x_{i_2}'+\lambda x_{i_1}''x_{i_2}''].$$

Из последнего неравенства и предположения индукции следует (6).

Доказанное утверждение находит следующее применение.

Пусть одномерные распределения $F_i(y_i)$ имеют плотности $f_i(y_i)$, монотонно убывающие для $y_i\ge\bar{y}_i$, и пусть существует такое число α_0, что $0<\alpha_0<1$ и $F_i(\bar{y}_i)\le\alpha_0$. Тогда функция $F(y)=\prod\limits_{i=1}^{m}F_i(y_i)$ является $[\alpha_0, 1]$ квазивогнутой.

3^0. Предположим, что функция $g(y)=g(y_1, y_2,\dots,y_m)$, $y\in R^m$,

непрерывно и монотонно возрастает по переменной y_m. Уравнение $g(y)=\alpha$ определяет y_m как неявную функцию от y_1, $y_2, \dots, y_{m-1}$:

$$y_m = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}),$$

область определения которой Φ_α является ортогональной проекцией множества G_α решений уравнения $g(y)=\alpha$ на подпространство переменных $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$. Оператор проектирования обозначим через P_m

$$P_m : R^m \longrightarrow R^{m-1} .$$

Пусть множество Φ_α непусто. Тогда функция $g(y)$ в том и только в том случае является α - квазивогнутой, когда φ - выпуклая функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть φ - выпуклая функция и $\bar{y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)$, $\bar{\bar{y}}=(\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_m)$ - такие точки из R^m, что $g(\bar{y}) \geqslant \alpha$ и $g(\bar{\bar{y}}) \geqslant \alpha$. Тогда $P_m y \in \Phi_\alpha$ и $P_m y \in \Phi_\alpha$. В самом деле, пусть $y^\circ \in G_\alpha, \varepsilon > 0$, $y_m = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{m-1} y_{m-1} + \alpha_0$ - такая гиперплоскость в R^m, что для любого $y \in G_\alpha$

$$y_m > \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{m-1} y_{m-1} + \alpha_0$$

и

$$y_m^\circ - \varepsilon < \alpha_1 y_1^\circ + \alpha_2 y_2^\circ + \dots + \alpha_{m-1} y_{m-1}^\circ + \alpha_0 .$$

В силу предположенной монотонности $g(y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_{m-1}^\circ, y_m^\circ - \varepsilon) < \alpha$ и если для некоторого $\tilde{y} \in R^m$

$$\tilde{y}_m < \alpha_1 \tilde{y}_1 + \alpha_2 \tilde{y}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \tilde{y}_{m-1} + \alpha_0 ,$$

то $g(\tilde{y}) < \alpha$: в противном случае на отрезке, соединяющем точки $\tilde{y}$ и $(y_1^\circ, y_2^\circ, \dots, y_{m-1}^\circ, y_m^\circ - \varepsilon)$, найдется точка из G_α, что невозможно. Поэтому найдутся такие $\bar{y}_m'$ и $\bar{\bar{y}}_m'$, что $g(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{m-1}, \bar{y}_m') = \alpha$ и $g(\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_{m-1}, \bar{\bar{y}}_m') = \alpha$. В силу монотонности функции g имеем $\bar{y}_m' \leqslant y_m$, $\bar{\bar{y}}_m' \leqslant \bar{\bar{y}}_m$.

Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Поскольку φ - выпуклая функция, то

$$y_m(\lambda) = \varphi[(1-\lambda) P_m \bar{y} + \lambda P_m \bar{\bar{y}}] \leqslant$$
$$\leqslant (1-\lambda)\bar{y}_m' + \lambda \bar{\bar{y}}_m' \leqslant (1-\lambda)\bar{y}_m + \lambda \bar{\bar{y}}_m$$

и, в силу монотонности,

$$\alpha = g[(1-\lambda)\bar{y}_1 + \lambda\bar{\bar{y}}_1, (1-\lambda)\bar{y}_2 + \lambda\bar{\bar{y}}_2, \dots, (1-\lambda)\bar{y}_{m-1} +$$
$$+ \lambda\bar{\bar{y}}_{m-1}, y_m(\lambda)] \leqslant g[(1-\lambda)\bar{y} + \lambda\bar{\bar{y}}] ,$$

т.е. множество $L_\alpha = \{y \in R^m,\ g(y) \geq \alpha\}$ выпуклое.

Пусть $g(y)$ – α – квазивогнутая функция и

$$\bar{y}_m = \varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{m-1}), \quad \bar{\bar{y}}_m = \varphi(\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_{m-1}).$$

При любом $0 \leq \lambda \leq 1$ имеем $[(1-\lambda)\bar{y}_1 + \lambda\bar{\bar{y}}_1, \ldots, (1-\lambda)\bar{y}_{m-1} + \lambda\bar{\bar{y}}_{m-1}] \in \Phi_\alpha$. В самом деле, в силу выпуклости множества $L_\alpha = \{y \in R^m,\ g(y) \geq \alpha\}$ и монотонности функции g по y_m существует такая гиперплоскость $y_m = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{m-1} y_{m-1} + \alpha_0$, что $y_m > \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{m-1} y_{m-1} + \alpha_0$ для любого $y \in L_\alpha$. Поэтому найдется такое $y_m(\lambda)$, что

$$g[(1-\lambda)\bar{y}_1 + \lambda\bar{\bar{y}}_1, (1-\lambda)\bar{y}_2 + \lambda\bar{\bar{y}}_2, \ldots, (1-\lambda)\bar{y}_{m-1} + \lambda\bar{\bar{y}}_{m-1}, y_m(\lambda)] = \alpha,$$

а так как

$$g[(1-\lambda)\bar{y}_1 + \lambda\bar{\bar{y}}_1, (1-\lambda)\bar{y}_2 + \lambda\bar{\bar{y}}_2, \ldots, (1-\lambda)\bar{y}_m + \lambda\bar{\bar{y}}_m] \geq \alpha,$$

то, в силу монотонности,

$$y_m(\lambda) = \varphi[(1-\lambda)\bar{y}_1 + \lambda\bar{\bar{y}}_1, (1-\lambda)\bar{y}_2 + \lambda\bar{\bar{y}}_2, \ldots, (1-\lambda)\bar{y}_{m-1} + \lambda\bar{\bar{y}}_{m-1}] \leq$$
$$\leq (1-\lambda)\bar{y}_m + \lambda\bar{\bar{y}}_m .$$

4°. Предположим теперь, что функция φ дважды дифференцируема. Тогда необходимым и достаточным условием α – квазивогнутости функции g является неотрицательная определенность матрицы, составленной из вторых производных функции φ. Производные функции φ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_m} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_m} - \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y_m}\right)^2}{\left(\frac{\partial g}{\partial y_m}\right)^3} +$$
$$+ \frac{-\frac{\partial^2 g}{\partial y_m^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_m} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_m}}{\left(\frac{\partial g}{\partial y_m}\right)^3}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1; \quad j = 1, 2, \ldots, m-1; \quad g(y) = \alpha .$$

Для исследуемых нами функций распределений

$$g(y) = F_1(y_1) \cdot F_2(y_2) \cdot \ldots \cdot F_m(y_m)$$

имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{F_m[(F'_m)^2 - F_m F''_m]}{(F'_m)^3} \cdot \frac{F'_i \cdot F'_j}{F_i \cdot F_j}$$

при $i \neq j$ и

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i^2} = \frac{F_m\left[(F_m')^2 - F_m \cdot F_m''\right]}{(F_m')^3} \cdot \frac{(F_i')^2}{F_i^2} + \frac{F_m}{F_m'} \cdot \frac{(F_i')^2 - F_i\, F_i''}{F_i^2} .$$

Нетрудно сосчитать, что главный минор к-го порядка матрицы, составленной из вторых производных функции φ, равен

$$\left(\frac{F_m(y_m)}{F_m'(y_m)}\right)^K \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{F_i'(y_i)}{F_i(y_i)}\right)^2 \Bigg\{\prod_{j=1}^{K}\left[(F_j'(y_j))^2 - \right.$$

$$\left. - F_j(y_j)\cdot F_j''(y_j)\right] + \left[(F_m'(y_m))^2 - F_m(y_m)\, F_m''(y_m)\right] \times$$

$$\times \sum_{z=1}^{K} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq z}}^{K} \left[(F_i'(y_i))^2 - F_i(y_i)\cdot F_i''(y_i)\right]\Bigg\} \qquad (8)$$

и неотрицательность выражений (8) при $\kappa = 1, 2, \ldots, m-1$ и $g(y) = \alpha$ является необходимым и достаточным условием α - квазивогнутости функции $g(y)$.

Если $F_1 = F_2 = \ldots = F_m = F$, то выполнение при любом $t \in R$ условия

$$(F'(t))^2 - F(t)\cdot F''(t) \geqslant 0 \qquad (9)$$

достаточно для квазивогнутости ([0,I] - квазивогнутости) функции g. Очевидно также, что для α -квазивогнутости функции g необходимо выполнение условия (9) для t, являющегося решением уравнения $F(t) = \sqrt[m]{\alpha}$. Нетрудно построить пример функции распределения с гладкой и нигде не обращающейся в нуль плотностью, для которой функция $g(y)$ не будет $[\alpha, 1]$ квазивогнутой ни при каком $0 < \alpha < 1$.

5^0. Рассмотрим некоторые примеры, имеющие, по-видимому, самостоятельное значение.

а) $F_1(t) = F_2(t) = \ldots = F_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

В этом случае функция $g(y)$ является квазивогнутой, что следует из справедливости неравенства

$$t \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-\frac{t^2}{2}} \geqslant 0, \quad t \in (-\infty, +\infty);$$

б) $F_1(t) = F_2(t) = \ldots = F_m(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\, du$,

где

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot u^{\lambda-1} e^{-u}, & u > 0, \quad \lambda > 0 . \end{cases}$$

Тогда квазивогнутость функции $g(y)$ следует из справедливости неравенства:

$$-(\lambda-1-t)\int\limits_{-\infty}^{t} u^{\lambda-1}e^{-u}du + e^{-t}\cdot t^{\lambda} \geq 0 ,$$

$$t\in(-\infty,+\infty),\quad \lambda>0 ;$$

в) $$F_1(t)=F_2(t)=\ldots=F_m(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(u)\,du ,$$

где $$f(u)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}\,u^{p-1}(1-u)^{q-1} & 0<t<1;\ p,q>0\\ 0 & t\leq 0,\ t\geq 1 .\end{cases}$$

Если $q>1$, то

$$-[p-1-(p+q-2)\cdot t]\int\limits_{-\infty}^{t} u^{p-1}(1-u)^{q-1}du + t^{p}(1-t)^{q} \geq 0$$

при любом $t\in(-\infty,+\infty)$ и $q(y)$ квазивогнута. В том случае, когда $q<1$, существует $\alpha_0<1$, что $g(y)$ не является α квазивогнутой ни при каком $\alpha_0<\alpha<1$.

Литература

1. Б.А.Вертгейм, Г.Ш.Рубинштейн. К определению квазивыпуклых функций - Сб."Математическое программирование." Наука,1966.
2. В.Е.Солдатов. О некоторых задачах стохастического программирования.- Сб."Математическое программирование." Наука,1966.
3. C.Miller, H.Wagner. Chance Constrained Programming with Joint Constraints. Operat. Res. 13 (1965) No. 6.
4. K.J.Arrow, A.C.Enthoven. Quasi-concave programming. Econometrica, 29 (1961) No. 4.

Поступила в редакцию
10.X. 1969 г.