УДК 513.88

О СВЯЗИ МЕЖДУ ТОПОЛОГИЕЙ И ПОЛУУПОРЯДОЧЕНИЯМИ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОДНИМ ИЛИ ДВУМЯ КОНУСАМИ

И.Ф.Даниленко

В настоящей работе рассматривается вопрос о связи между топологией локально выпуклого пространства и полуупорядочениями этого пространства с помощью одного или двух конусов. Показывается, что эта связь достаточно хорошо отражается в свойствах специальных топологий, построенных на исходном пространстве с помощью исходной локально выпуклой топологии и конусов. Оказывается, что одна из этих топологий может быть введена и в том случае, когда исходная локально выпуклая топология задана не на всём пространстве, а лишь на некоторой его части. Для этого случая изучаются свойства построенных топологий.

Рассмотрим сначала схему построения топологии, связанной с полуупорядочением исходного локально выпуклого пространства с помощью воспроизводящего конуса $K(X=K-K)$.

Отношение порядка в X, вводимое с помощью конуса K, будем обозначать знаком $\leq$. Исходную локально выпуклую топологию пространства X обозначим τ. Эта топология будет определяться мажорантной системой полунорм $P=\{\ell\}$. Такую систему полунорм будем называть τ-комплектом. Для каждого $x\in X$ построим множества $K_x=K\cap(x+K)$. Так как конус K воспроизводящий, то K_x не пустое множество для каждого x из X.

Определим функционалы $p_{\ell+}$; $p_{\ell-}$ и p_ℓ для каждого $\ell\in P$ формулами

$$p_{\ell+}(x)=\inf_{u\in K_x}\ell(u);\qquad p_{\ell-}(x)=p_{\ell+}(-x),$$

$$p_\ell(x)=p_{\ell+}(x)+p_{\ell-}(x).$$

Можно заметить, что построение функционала p_ℓ по функционалу ℓ проводится по схеме, близкой к естественному распространению нормы с нормированной структурой на её K -пополнение (пополнение по Дедекинду) (см. [4] стр.197).

Свойства системы функционалов $P_+ = (p_\ell)_{\ell \in P}$ даются леммой I.

ЛЕММА I. Функционалы $p_{\ell\pm}$ и p_ℓ неотрицательны, конечны и обладают свойствами:

1) $p_{\ell\pm}$ полуаддитивны и положительно однородны;

2) p_ℓ – полунорма;

3) $p_\ell(x) = p_{\ell+}(x)$; $p_\ell(x) \leq \ell(x)$ для каждого $x \in K$;

4) p_ℓ монотонна на K, т.е. из $0 \leq x \leq y$ следует
$$p_\ell(x) \leq p_\ell(y);$$

5) если $\ell_1(x) \leq A\,\ell_2(x)$ для каждого $x \in X$, где ℓ_1 и $\ell_2 \in P$, $A > 0$, то $p_{\ell_1}(x) \leq A p_{\ell_2}(x)$;

6) $p_\ell(x) = p_{p_\ell}(x)$ для каждого $x \in X$, где p_{p_ℓ} построен по функционалу p_ℓ;

7) $|p_{\ell+}(x) - p_{\ell-}(x)| \leq \ell(x) \vee \ell(-x)$ для каждого x.

Свойства 1) – 6) из леммы доказываются, исходя из определения функционалов $p_{\ell\pm}$, p_ℓ и элементарных свойств множеств K_x. Свойство 7) следует из неравенства:

$$p_{\ell-}(x) = \inf_{u \in K_{-x}} \ell(u) = \inf_{u+x \in K_x} \ell(u-x) \leq \ell(-x) + p_{\ell+}(x)$$

и неравенства, получающегося из него заменой x на $-x$.

Из свойств 2), 5) видно, что система функционалов P_+ – мажорантная система полунорм на X. Локально выпуклую топологию в X, определяемую этой системой полунорм, будем обозначать τ_+.

Построим теперь в локально выпуклом пространстве (X, τ) с двумя конусами K и K_0 локально выпуклую топологию τ_+^* с помощью исходной топологии и указанной пары конусов. Будем считать, что конус K_0 вложен в конус K и является K - воспроизводящим (см. [1], стр.56). Это означает: $X = K_0 - K$. Отношение порядка в X, вводимое конусом K_0, будем обозначать знаком $\leq$.

По τ -комплекту полунорм P строим системы функционалов: $P_+^* = \{p_\ell^*\}$; $\{p_{\ell+}^*\}$, $\{p_{\ell-}^*\}$ согласно формулам
$$p_{\ell+}^*(x) = \inf_{u \geq 0;\ u \geq x} \ell(u); \quad p_{\ell-}^*(x) = p_{\ell+}^*(-x); \quad p_\ell^*(x) = p_{\ell+}^*(x) + p_{\ell-}^*(x).$$

Нетрудно проверить, что построенные системы функционалов обладают свойствами 1),2),4),5),6) и первой частью 3) из леммы 1 с заменой p_ℓ на p_ℓ^* и $p_{\ell\pm}$ на $p_{\ell\pm}^*$ соответственно. Вторая часть свойства 3) теперь формулируется так: если $x\in K_o$, то $p_\ell^*(x)\leqslant \ell(x)$. Таким образом, система функционалов P_+^* определяет в X локально выпуклую топологию, которую мы обозначим τ_+^*.

Конус K в (X , τ) воспроизводящий, поэтому в X можно определить и локально выпуклую топологию τ_+. Отметим, что в отличие от топологии τ_+, которая полностью определяется топологией τ и конусом K, топология τ_+^* зависит ещё и от конуса K_o. Полунормы из τ_+ -комплекта P_+ и τ_+^*-комплекта P_+^* связаны следующим очевидным соотношением: $p_\ell(x)\leqslant p_\ell^*(x)$ для любого $\ell\in P$ и $x\in X$, так что топология τ_+ всегда слабее топологии τ_+^*.

Заметим, что функционалы $p_{\ell\pm}$ и p_ℓ совпадают с функционалами $p_{\ell\pm}^*$ и p_ℓ^* соответственно, если в определении последних считать конус $K_o=K$. Вследствие этого топологию τ_+ можно считать частным случаем топологии τ_+^*, а именно $\tau_+=\tau_+^*$ при $K_o=K$.

При построении функционалов p_ℓ^* использовались значения ℓ только на элементах из конуса K_o. Поэтому топологию τ_+^* можно определить и в том случае, когда исходная локально выпуклая топология задана не на всем пространстве X, а лишь на его векторном подпространстве Y, содержащем конус K_o. Во всем дальнейшем X -векторное пространство, Y - его подпространство, наделенное локально выпуклой топологией τ (в частном случае возможно, что $Y=X$), конусы K и K_o имеют указанный выше характер и $K_o\subset Y$.

Используя свойства функционалов p_ℓ^*, нетрудно показать, что совокупность всех множеств:

$$U_{\ell,\lambda}^* = \bigcup_{u,v\geqslant 0;\ \ell(u),\ell(v)\leqslant\lambda} [-v,u],$$

где $[-v,u]$ - порядковый интервал в X, упорядоченном отношением $\leqslant$, $\lambda>0$, ℓ входит в τ -комплект P полунорм в X, образует базис окрестностей нуля в топологии τ_+^*. Учитывая независимость топологии τ_+^* от τ -комплекта полунорм (лемма 1, свойство 5), будем рассматривать такой τ -комплект полунорм, что если $\ell\in P$, то и $\lambda\ell\in P$ для

бенкого $\lambda > 0$. Тогда множества $U_\ell^* = U_{\ell,\lambda}^*$ $(\ell \in P)$ образуют базис окрестностей нуля в (X, τ_+^*).

З а м е ч а н и е. Из сказанного следует, что базис окрестностей нуля в (X, τ_+) состоит из множеств U_ℓ вида:

$$U_\ell = \bigcup_{u,v\geq 0,\ \ell(u),\ \ell(v)\leq 1} [-v, u] \quad (\ell \in P).$$

Введем теперь два бинарных отношения во множестве всех подмножеств X.

О п р е д е л е н и е I. Пусть A и B – подмножества из X. Будем писать $A \overset{+}{\preceq} B$ (или $B \overset{+}{\succeq} A$), если для каждого $a \in A$ существует $b \in B$ такое, что $a \leq b$ и $A \overset{-}{\preceq} B$ (или $B \overset{-}{\preceq} A$), если для каждого $a \in A$ существует $b \in B$ такое, что $a \geq b$.

Нетрудно заметить, что каждое из этих отношений транзитивно и рефлексивно, но не является отношением порядка: из $A \overset{+}{\preceq} B$ и $B \overset{+}{\preceq} A$ не следует $A = B$.

Т е о р е м а I. Пусть $\mathcal{F}$ – базис фильтра в X. $\mathcal{F}$ – сходится к нулю в топологии τ_+^* тогда и только тогда, когда существуют базисы фильтров $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$ множеств из Y, для которых выполняются условия:

а) каждое C из $\mathcal{F}_+$ содержится в K_0, а каждое C' из $\mathcal{F}_-$ содержится в $-K_0$;

б) $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$ в (Y, τ) сходятся к нулю;

в) для каждой пары множеств C, C', где $C \in \mathcal{F}_+$ и $C' \in \mathcal{F}_-$, существует такое $F_0 \in \mathcal{F}$, что $C' \overset{-}{\preceq} F \overset{+}{\preceq} C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда сходимость базиса фильтра $\mathcal{F}$ в (X, τ_+^*) следует из условий теоремы и свойств базиса окрестностей нуля в топологии τ_+^*. Если же базис фильтра $\mathcal{F}$ в (X, τ_+^*) сходится к нулю, то для каждого $F \in \mathcal{F}$ построим множества:

$$F_+ = \{u : u \geqslant 0, \quad u \geq f \quad \text{для некоторого } f \in F\},$$

$$F_- = \{v : v \geqslant 0; \quad -v \leq f \quad \text{для некоторого } f \in F\}.$$

Рассмотрим множества $U = \{y : \ell(y) \leq 1\}$. Они образуют базис окрестностей нуля в (Y, τ). Образуем множества подмножеств из $\mathcal{F}_+ = \{C : C = F_+ \cap U$ для некоторых $F \in \mathcal{F}$ и U, но так, чтобы $C \overset{+}{\preceq} F\}$, $\mathcal{F}_- = \{C' : C' = F_- \cap U$ для некоторых $F \in \mathcal{F}$ и U, но так, чтобы $C' \overset{-}{\preceq} F\}$.

Покажем, что F_+ и F_- являются базисами фильтров в X, для которых выполняются условия а); б); в). Доказательство

проведем только для $\mathcal{F}_+$, так как для $\mathcal{F}_-$ рассуждения аналогичны.

Из определения $\mathcal{F}_+$ видно, что совокупность $\mathcal{F}_+$ не содержит пустого множества. То, что сама $\mathcal{F}_+$ не пуста, будет следовать из проверки условия б).

Каждое C из F_+ принадлежит K_0, следовательно, а) выполнено.

Если C_1 и $C_2 \in \mathcal{F}_+$, то $C_1 = F_{1+} \cap U_1$ и $C_2 = F_{2+} \cap U_2$, где $F_i \in \mathcal{F}$, U_i – из базиса окрестностей нуля в (Y, τ), причем $C_i \succcurlyeq F_i$ для $i = 1,2$. Пусть $U = \{y : \ell(y) < 1\}$ – окрестность нуля в (Y, τ), содержащаяся в $U_1 \cap U_2$. Так как базис фильтра $\mathcal{F}$ в (X, τ_+^*) сходится к нулю, то существует F_3 из F такс, что $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ и $F_3 \subset U_\ell^*$. Рассмотрим множество $C = F_3 \cap U$. Легко показать, что $C \in \mathcal{F}_+$ и $C \subset C_1 \cap C_2$. Поэтому $\mathcal{F}_+$ является базисом фильтра множеств в Y, сходящимся в топологии τ к нулю. Таким образом, для $\mathcal{F}_+$ выполняется условие б).

Проверим выполнение условия в). Для пары множеств C и C' из F_+ и F_- соответственно имеем: $C = F_{1+} \cap U_1$, $C' = F_{2-} \cap U_2$, где $F_i \in \mathcal{F}$, а U_i – окрестности нуля в (Y, τ), причем $C \succcurlyeq F_1$; $C' \preccurlyeq F_2$. Если F_0 из $\mathcal{F}$ содержится в $F_1 \cap F_2$, то из транзитивности отношений $\succcurlyeq$ и $\preccurlyeq$ получаем $C \succcurlyeq F \succcurlyeq C'$.

СЛЕДСТВИЕ. Совокупность X_0^* неотделимых от нуля элементов в (X, τ_+^*) характеризуется следующим свойством. Элемент $x \in X_0^*$ тогда и только тогда, когда существует направление $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из K_0, сходящееся в (Y, τ) к нулю, элементы которого удовлетворяют неравенствам $u_\alpha \geqslant x \geqslant -u_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Совокупность X_0 неотделимых от нуля элементов в (Y, τ_+) характеризуется аналогичным образом.

Если (Y, τ)-счетно-нормированное пространство, то для последовательностей теорему I можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а 2. Пусть (Y, τ)-счётно-нормированное пространство. Последовательность $\{x_n\}$ сходится в топологии τ_+^* к нулю тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\{U_n\}$, $U_n \geqslant 0$ и $\{v_n\}$, $v_n \geqslant 0$, сходящиеся в (Y, τ) к нулю, такие, что $U_n \geqslant x_n \geqslant -v_n$ для каждого n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для последовательности $\{x_n\}$ существуют последовательности $\{U_n\}$ и $\{v_n\}$, удовлетво-

ряющие условиям теоремы, то $\{x_n\}$ сходится к нулю в (X , τ_+^*) по определению τ_+^* .

Пусть последовательность $\{x_n\}$ в топологии τ_+^* сходится к нулю. Возьмём τ -комплект полунорм $\{\ell_m\}$ в (Y , τ) счётным и монотонным. Для последовательности вещественных чисел $\{\varepsilon_m\}$, где $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$, построим элементы $u_{n,m}$ так, чтобы $u_{n,m} \geq 0$; $u_{n,m} \geq x_n$, $\rho^*_{\ell_m}(x_n) + \varepsilon_m \geq \ell_m(u_{n,m})$ при любых m , n . Так как $\rho^*_{\ell_m}(x_n) \to 0$ при каждом m , то $\ell_m(u_{n,m}) < 2\varepsilon_m$ при $n \geq n_m$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < \ldots$. Положим

$$u_n = \begin{cases} u_{n,1}, & \text{если } n \leq n_1 \ ; \\ u_{n,m}, & \text{если } n_m \leq n < n_{m+1} \ . \end{cases}$$

Тогда $u_n \geq 0$, $u_n \geq x_n$ при любом n и для каждой полунормы ℓ_{m_0}

$$\ell_{m_0}(u_n) \leq \ell_m(u_n) = \ell_m(u_{n,m}) < 2\varepsilon_m ,$$

если $n_m \leq n \leq n_{m+1}$. Поэтому последовательность $\{u_n\}$ сходится в (Y , τ) к нулю. Совершенно аналогично построим последовательность $\{v_n\}$ так, что $v_n \geq 0$; $v_n \geq -x_n$ при любом n и $\{v_n\}$ сходится в (Y , τ) к нулю.

В работах (3) (7) определяется понятие несплющенности конуса K_0 относительно конуса K для нормированного пространства. Конус K_0 называется K -несплющенным, если для каждого $x \in X$ справедливо равенство $x = u - v$, где $u \in K_0$, $v \in K$, $\|u\| \leq M \cdot \|x\|$, причём $M > 0$ и не зависит от x . В частном случае, когда $K_0 = K$, несплющенность конуса относительно самого себя называется просто несплющенностью конуса K . Тогда говорят, что конус K обладает свойством Крейна-Шмульяна (2) или является $s.b.$ - конусом. [ж)] Известно также, что каждый замкнутый, воспроизводящий конус в полном отделимом метризуемом пространстве обладает свойством Крейна-Шмульяна. Понятие несплющенности конуса играет важную роль в теории операторов в полуупорядоченных пространствах (I). Дадим определения несплющенности конуса и K -несплющенности конуса для общего случая локально выпуклого пространства, которые для

ж) Конус K в локально выпуклом пространстве (X , τ) называется $s.b$ - конусом, если для каждого ограниченного множества A существует ограниченное множество B такое, что $A \subset B \cap K - B \cap K$ (см.(12) гл.II определение 1.II).

нормированных и счётно-нормированных пространств совпадают с общепринятыми определениями.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть (X , τ) - локально-выпуклое пространство. Будем говорить, что K -воспроизводящий конус K_0 K-не сплющен, если $\tau_+^* \leq \tau$.

О п р е д е л е н и е 3. В локально выпуклом пространстве (X , τ) воспроизводящий конус K не сплющен, если $\tau_+ \leq \tau$.

З а м е ч а н и е 1. Если (X , τ) нормируемо, то легко видеть, что эти определения эквивалентны обычным определениям K -несплющенности конуса K_0 или просто несплющенности воспроизводящего конуса K .

З а м е ч а н и е 2. В работе (2) показано, что свойство Крейна-Шмульяна воспроизводящего конуса в счётно-нормированном пространстве эквивалентно следующему утверждению. Пусть в счётно-нормированном пространстве (X , τ) выбран монотонный τ -комплект полунорм $\ell_1(x) \leq \ell_2(x) \leq \ldots$; тогда для каждой ℓ_n можно найти M_n и целое m , причём:

α) если $\ell_m(x) \neq 0$, то существует $u \geq 0, x$ такой, что

$$\ell_n(u) \leq M_n \cdot \ell_m(x);$$

β) если $\ell_m(x) = 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $u \geq 0, x$ такой, что $\ell_n(u) < \varepsilon$.

Отсюда нетрудно вывести, что в счётно-нормированном пространстве (X , τ) конус K не сплющен тогда и только тогда, когда он обладает свойством Крейна-Шмульяна.

Заметим, что из K -несплющенности конуса K следует несплющенность конуса K в смысле определения 3. В действительности же в этом случае можно утверждать большее: если $\tau_+^* \leq \tau$, то топология τ_+^* совпадает с топологией τ .

Теорема 3. Пусть $Y = X$ (X , τ). Если при этом $\tau_+^* \leq \tau$, то $\tau_+^* = \tau_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mathcal{F}$ - базис фильтра в X , сходящийся в (X , τ_+) к нулю; тогда по теореме I (случай, когда $Y = X$ и $K = K_0$) получим, что существуют базисы фильтров $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$ в X , удовлетворяющие условиям а), б), в) этой теоремы. По условию б) $\mathcal{F}_\pm$ сходятся в (X , τ) к нулю, но по условию теоремы $\tau_+^* \leq \tau$, следовательно, $\mathcal{F}_\pm$ сходятся к нулю в (X , τ_+^*).

Снова применим теорему I, но уже в общем случае к базисам фильтров $\mathcal{F}_\pm$. Тогда существуют базисы фильтров $\mathcal{F}_\pm^\pm$ в X такие, что $\mathcal{F}_+^\pm$ удовлетворяют условиям а), б), в) теоремы I по

отношению к базису фильтра $\mathcal{F}_+$, а $\mathcal{F}^{\perp}$ по отношению к базису фильтра $\mathcal{F}_-$. Отсюда следует, что базисы фильтров $\mathcal{F}_+^+$ и $\mathcal{F}_-^-$ удовлетворяют условиям а); б; в) теоремы 1 по отношению к базису фильтра $\mathcal{F}_-$. Тогда базис фильтра $\mathcal{F}$ будет сходиться к нулю и в топологии τ_+^*. Следовательно, топология τ_+ будет сильнее топологии τ_+^*, что вместе со всегда выполняющимся неравенством $\tau_+ \leq \tau_+^*$ дают $\tau_+^* = \tau$.

Неравенство $\tau_+^* \leq \tau$ в условиях теоремы 3 можно при некоторых дополнительных условиях заменить на $\tau_+ \leq \tau$. Например, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Пусть (X , τ) - счётно-нормированное пространство с воспроизводящим, несплющенным конусом K, т.е. $\tau_+ \leq \tau$. Тогда, если конус K удовлетворяет условию Φ : для любой возрастающей последовательности Коши $\{u_n\}$, где $u_n \geq 0$, существует верхняя граница, то каждый K - воспроизводящий конус K_0 K - не сплющен ($\tau_+^* \leq \tau$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Покажем, что $\tau_+^* \leq \tau$. Допустим противное; тогда существует последовательность $\{x_m\}$, сходящаяся к нулю в (X , τ), но не сходящаяся в (X , τ_+^*) к нулю. Последнее означает, что существует ℓ_N из монотонного τ-комплекта полунорм $\{\ell_n\}$ такая, что $\rho_{\ell_N}^*(x_m) \not\to 0$. Из последовательности $\{x_m\}$ тогда можно выделить частичную последовательность $\{x_{m_i}\}$ так, чтобы $\rho_{\ell_N}^*(x_{m_i}) \geq \varepsilon$ или $\rho_{\ell_N}^*(-x_{m_i}) \geq \varepsilon$ для любого целого i, где $\varepsilon > 0$; меняя, где необходимо, знак перед x_{m_i} на обратный и обозначая полученную таким образом последовательность снова через $\{x_m\}$, имеем: последовательность $\{x_m\}$ сходится в (X , τ) к нулю, но $\rho_{\ell_N}(x_m) \geq \varepsilon$ для любого m. Так как $\tau_+ \leq \tau$, то $\{x_m\}$ сходится в (X , τ) к нулю, следовательно, можно построить последовательность $m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$ такую, что $\rho_{\ell_n}(x_{m_n}) < \frac{1}{n^3}$ для любого n. Согласно определению $\rho_{\ell_n}(x_{m_n})$ существуют элементы u_n такие, что $u_n \geq 0$, x_{m_n} и $\ell_n(u_n) < \frac{1}{n^3}$. для любого n.

Рассмотрим элементы

$$v_i = \sum_{n=1}^{n=i} n u_n .$$

Для любого n_0 справедливо неравенство:

$$\ell_{n_0}(v_{i+p} - v_i) \leq \sum_{n=i+1}^{n=i+p} n \ell_{n_0}(u_n) ,$$

правая часть которого при $i \geq n_0$ оценивается сверху величиной

$$\sum_{n=i+1}^{n=i+p} n\ell_n(u_n) \leq \sum_{n=i+1}^{n=i+p} \frac{1}{n^2},$$

следовательно, $\{v_i\}$ – последовательность Коши в (X , τ). Ясно, что v_i возрастает, а тогда по условию Φ существует $u \geq v_i$ для любого i . Так как конус K_0 K-воспроизводящий, то можно считать $u \neq 0$. Из неравенства $x_{m_n} \leq u_n \leq \frac{u}{n}$ и определения $p^*_{\ell_N^+}$ получаем

$$p^*_{\ell_N^+}(x_{m_n}) \leq \frac{1}{n}\ell_N(u)$$

для любого n , что противоречит условию $p^*_{\ell_N^+}(x_{m_n}) > \varepsilon$ при всех n.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (X , τ) – пространство Фреше с замкнутым, воспроизводящим конусом K , тогда каждый K -воспроизводящий конус K_0 K-не сплющен.

Действительно, из полноты (X , τ) замкнутости и воспроизводимости конуса K следует, что конус K обладает свойством Крейна-Шмульяна (2), т.е. $\tau_+ \leq \tau$. Конус $K^{\cdot}$ удовлетворяет условию Φ , так что остается применить теорему 4.

З а м е ч а н и е . Теорема 4 показывает, что для счётно-нормированных пространств K-несплющенность K-воспроизводящего конуса K_0 характеризуется свойством несплющенности большего конуса и условием Φ . Это условие существенно, так как далее будет построен пример нормированного пространства, в котором $\tau_+ < \tau < \tau_+^*$ (все три топологии различны).

Несплющенность конуса в своей линейной оболочке позволяет в ряде случаев судить о расположении замыкания конуса в замыкании его линейной оболочки.

Т е о р е м а 5. Пусть (Z , τ) – пространство Фреше с конусом K , $X = K - K$ и конус K не сплющен в X . Тогда $\overline{X} = \overline{K} - \overline{K}$, где замыкание берётся в (Z , τ).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из несплющенности конуса K в (X , τ) легко следует существование τ-комплекта полунорм $\{\ell_n\}$ такого, что $\ell_n(x) \leq \ell_{n+1}(x)$ и $p_{\ell_n}(x) \leq \ell_{n+1}(x)$ для каждого n .

Пусть теперь $z \in \overline{X}$; тогда существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что каждое $x_n \in X$ и $\{x_m\}$ в (Z , τ) сходится к z . Выберем из последовательности $\{x_n\}$ частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$ так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_{n+1}(x_{m_{n+1}} - x_{m_n}) = c < +\infty ;$$

Так как $\ell_2(x_{m_1}) \geq p_{\ell_1}(x_{m_1})$ и $p_{\ell_n}(x_{m_{n+1}} - x_{m_n}) \leq \ell_{n+1}(x_{m_{n+1}} - x_{m_n})$, то из определения p_{ℓ_n} получим, что существует последовательность $\{u_m\}$ такая, что $u_n \geq 0$; $u_1 \geq x_{m_1}$; $u_{n+1} \geq x_{m_{n+1}} - x_{m_n}$; $\ell_1(u_1) < \ell_2(x_{m_1}) + \frac{\varepsilon}{2}$; $\ell_n(u_{n+1}) < \ell_n(x_{m_{n+1}} - x_{m_n}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n(u_{n+1}) < \sum_{n=1}^{\infty} \ell_{n+1}(x_{m_{n+1}} - x_{m_n}) + c = 2c < +\infty .$$

Таким образом, последовательность сумм

$$w_i = \sum_{n=1}^{n=i} u_n$$

монотонно возрастает и фундаментальна в (Z , τ). Кроме того,

$$w_i \geq \sum_{n=2}^{n=i} (x_{m_n} - x_{m_{n-1}}) + x_{m_1} = x_{m_i}$$

для любого i . Конус K полон в (Z , τ), поэтому последовательность $\{w_i\}$ сходится в топологии τ к $w \in K$, а последовательность $\{w_i - x_{m_i}\}$ – к элементу $w - z \in K$. Из представления z в виде $w - (w - z)$ получаем $z \in K - K$, откуда $\bar{X} = \bar{K} - \bar{K}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (Z , τ) – пространство Фреше с замкнутым конусом K . $X = K - K$ замкнуто в топологии τ тогда и только тогда, когда K не сплющен в X с топологией, индуцированной из (Z , τ).

В общем случае соотношения между топологиями τ , τ_+^* , τ_+ в локально выпуклом пространстве (X , τ) с K -воспроизводящим конусом могут быть различными. Наметим общую схему построения примеров, иллюстрирующих различные возможные случаи.

Пусть $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ – алгебраическая сумма пространств $X_n = R^2$ *). Норму в X определим формулой $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{R^2}$, где $x = \{x_n\} \in X$.

---

*) Алгебраической суммой векторных пространств X_n называется линейное подпространство произведения пространств X_n , состоящее из тех последовательностей $\{x_n\}$, для которых $x_n \neq 0$ только для конечного числа n .

Рассмотрим конус K в X вида $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$, где K_n - конус в X_n, симметричный относительно положительной части вещественной оси в R^2 с углом раствора $2\alpha_n$, где $0<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$. Будем варьировать α_n и по-разному вводить конус K_o в X так, чтобы он содержался в K и был K-воспроизводящим. В первых трех примерах $K_o=\sum_{n=1}^{\infty} K_{on}$, где K_{on}-положительная часть вещественной оси в R^2.

1. Пусть $ctg\,\alpha_n = \sqrt{n}$ для каждого n, тогда, $\tau_+=\tau_+^*<\tau$ строго.

2. Если $\alpha_n<\frac{\pi}{4}$ и $\alpha_n\to 0$, то тогда $\tau_+^*=\tau_+>\tau$ строго.

3. Из $\{\alpha_n\}$ можно выделить частичные последовательности $\{\alpha_{n_i}\}$ и $\{\alpha_{n_j}\}$ такие, что $\alpha_{n_i}\to 0$ и $\alpha_{n_j}\to\frac{\pi}{2}$; тогда $\tau_+^*>\tau_+$ и τ_+ несравнима с τ.

4. Определим конус K_o следующим образом. В него включим те и только те элементы из $\sum_{n=1}^{\infty} K_{on}$, для которых $\|x_1\|\geq\|x_2\|\geq\dots$. Полагая α_n такими же, как и в примере 2, получим, что $\tau_+^*>\tau_+>\tau$ строго.

5. Пусть конус K_o такой, как и в примере 4, а $\{\alpha_n\}$ из примера I, тогда получим $\tau_+<\tau$ и $\tau_+<\tau_+^*$ строго.

6. Возьмём $\{\alpha_n\}$ из примера I и конус K_o вида

$$K_o=\{x: x\in\sum_{n=1}^{\infty} K_{on} : \|x_n\|\geq tg\,\alpha_{n+1}\|x_{n+1}\| \text{ для каждого } n\}.$$

Тогда $\tau_+<\tau<\tau_+^*$ строго.

В следствии из теоремы 5, в частности, установлено, что всякий замкнутый воспроизводящий конус в пространстве Фреше не сплющен (2). Ни одно из условий, наложенных на конус и на пространство, не может быть отброшено. Соответствующие примеры построены в работах (2) и (8).

Для случая неметризуемого локально выпуклого пространства (X, τ) требование полноты пространства, замкнутости воспроизводящего конуса K в топологии τ, наличия $s.b.$-конуса недостаточно для его несплющенности. Построим соответствующий пример.

Пусть $X=\sum_{i=1}^{\infty} R_i$ - алгебраическая сумма пространств $R_i=R$ и конус K в X состоит из последовательностей с неотрицательными координатами. Топологию τ в X определим как $\sigma(X, X^\#)$, где $X^\#=\prod_{i=1}^{\infty} R_i$ - пространство, алгебраически сопряженное к X. Эту топологию можно рассматривать как топологию, порожденную системой полунорм $\ell_{x'}(x)=|\langle x, x'\rangle|$, где $x'\in X^\#$

и $\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i'$ – билинейная форма, приводящая X и $X^{\#}$ в двойственность. Так как X совпадает с алгебраически сопряженным пространством к $X^{\#}$, то (X , τ) полно (см. (9) стр. 94). Конус K замкнут в (X , τ). Нетрудно заметить, что каждое ограниченное множество в (X , τ) конечномерно, следовательно, конус K является $s b$ – конусом. Подсчет $p_{\ell_{x'}}(x)$ для $x' = (1, 1, \ldots)$ дает для неё значение

$$p_{\ell_{x'}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

– норму в X , в то время как каждая полунорма, непрерывная в (X , τ), не норма. Поэтому конус K сплющен в (X , τ).

Иногда вывод о несплющенности воспроизводящего конуса в (X , τ) можно сделать, рассматривая топологию, построенную по τ , базисом окрестностей нуля которой являются множества вида $U \cap K - U \cap K$, где U пробегает некоторый базис окрестностей нуля в (X , τ). Такая топология рассматривалась в (6) и (12) (приложение). Будем обозначать её через τ_{sh}^{1} .

Т е о р е м а 6. В локально выпуклом пространстве (X , τ) с воспроизводящим конусом K топологии τ_{sh}^{1} и $\tau \vee \tau_+$ совпадают ($\tau \vee \tau_+$ – слабейшая топология в X , в которой непрерывны тождественные вложения X в (X , τ) и X в (X , τ_+)).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для любой абсолютно выпуклой окрестности нуля U в (X , τ) имеем $U \supset \frac{1}{2}(U \cap K - U \cap K)$, следовательно, $\tau_{sh}^{1} \geq \tau$. Как отмечено в начале статьи, базис окрестностей нуля в (X , τ_+) состоит из множеств $U_\ell \ (\ell \in D)$, где D – τ -комплект полунорм в (X , τ). Ясно, что каждая окрестность U_ℓ содержит множество $U \cap K$, где $U = \{x : \ell(x) < 1\}$ при $\ell \in D$ – окрестность нуля в (X , τ). Тогда $U = \{x : \ell(x) \leq 1\}$, следовательно, топология τ_{sh}^{1} сильнее топологии τ_+ , поэтому $\tau_{sh}^{1} \geq \tau_+ \vee \tau$.

Пусть теперь $U = \{x : \ell(x) \leq 1\}$ – окрестность нуля в (X , τ) и ($U \cap K - U \cap K$) является соответствующей ей окрестностью нуля в (X , τ_{sh}^{1}).

Рассмотрим множество $U \cap U_\ell$ – окрестность нуля в $\tau \vee \tau_+$. Если $x \in U \cap U_\ell$, то $\ell(x) \leq 1$ и по определению U_ℓ существуют u , $v \geq 0$ такие, что $u \geq x \geq -v$; $\ell(u)$, $\ell(v) \leq 1$, следовательно, $0 \leq x + v \leq u + v$ и $\ell(x - v) \leq 2$. Тогда $x + v \in 2U \cap K$ и $v \in 2U \cap K$, а поэтому $x \in 2(U \cap K - U \cap K)$. Последнее включение показывает, что $\frac{1}{2} U \cap U_\ell \subset U \cap K - U \cap K$, а следователь-

но, и $\tau \vee \tau_+ > \tau^2_{sh}$. Объединяя оба неравенства, получим $\tau^2_{sh} = \tau \vee \tau_+$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В (X, τ) воспроизводящий конус K не сплющен тогда и только тогда, когда $\tau > \tau^2_{sh}$. При этом $\tau = \tau^2_{sh}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В (X, τ) каждый телесный конус не сплющен.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть (X, τ)-борнологическое пространство и конус K есть $s\mathcal{B}$ –конус в нём. Тогда $\tau_+ \leq \tau$.

Доказательство. Любая окрестность нуля в (X, τ^2_{sh}) вида $U \cap K - U \cap K$ поглощает каждое ограниченное множество из K. Поэтому она поглощает и каждое ограниченное множество, т.к. K есть $s\mathcal{B}$–конус. Но (X, τ)-борнологическое пространство, следовательно, $U \cap K - U \cap K$–окрестность нуля в (X, τ) и, значит, $\tau^2_{sh} \leq \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть локально выпуклое пространство (X, τ) с воспроизводящим конусом K может быть представлено как индуктивный предел своих линейных подпространств X_α с локально выпуклыми топологиями τ_α в $X_\alpha (\alpha \in A)$ и $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если конус $K_\alpha = K \cap X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$ воспроизводящий и не сплющенный в (X_α, τ_α), то и конус K в (X, τ) не сплющен.

Доказательство. Покажем, что в этом случае $\tau^2_{sh} \leq \tau$. Пусть U – окрестность нуля в (X, τ): тогда $U \cap K - U \cap K$ – окрестность нуля в (X, τ^2_{sh}). Для каждого $\alpha \in A$ рассмотрим сужение $U \cap K - U \cap K$ на X_α. Это сужение содержит множество $(U \cap K_\alpha - U \cap K_\alpha)$. По определению индуктивного предела множество $U \cap X_\alpha$ – окрестность нуля в (X_α, τ_α). Но конус K_α по условию не сплющен в (X_α, τ_α), поэтому $\tau_\alpha = (\tau_\alpha)^2_{sh}$ (по следствию 1). Таким образом, $U \cap K_\alpha - U \cap K_\alpha$ является окрестностью нуля в (X_α, τ_α). В силу определения индуктивного предела и произвольности $\alpha \in A$ заключаем, что $U \cap K - U \cap K$ – окрестность нуля в (X, τ), следовательно, $\tau^2_{sh} \leq \tau$.

Докажем несплющенность воспроизводящего конуса в локально выпуклом пространстве для одного важного частного случая.

Теорема 7. Пусть $\langle X, X^* \rangle$ – два векторных пространства над полем вещественных чисел, находящихся в двойственности посредством билинейной формы $\langle x, x' \rangle$, где $x \in X$ и $x' \in X^*$. Далее, пусть в X выделена счетная система $\{A_n\}$ абсолютно выпуклых $\sigma(X, X^*)$ – компактных множеств A_n, причем

1. линейные оболочки X_n множеств A_n покрывают X;

2. для любых n_1 и n_2 существует n_3 такое, что

$X_{n_1} \subset X_{n_3}$, $X_{n_2} \subset X_{n_3}$.

Наделим каждое X_n локально выпуклой топологией τ_n с базисом окрестностей нуля $\{\lambda A_n\}_{\lambda > 0}$. Обозначим через (X , τ) индуктивный предел линейных подпространств (X_n , τ_n) относительно вложений X_n в X . Тогда любой воспроизводящий конус K в X , пересекающий каждое A_n по σ (X , X^*) - замкнутому множеству A_n^+ , не сплющен в топологии τ .

Доказательство. Рассмотрим множества $A_n' = A_n^+ - A_n^+$ и обозначим через X_n' их линейные оболочки в X . Множества A_n^+ по условию теоремы σ (X , X^*) - компактны и выпуклы, следовательно, множества A_n' σ (X , X^*) - компактны и абсолютно выпуклы. Наделим X_n' локально выпуклой топологией τ_n' с базисом окрестностей нуля $\{\lambda A_n'\}$. Тогда (X_n , τ_n) и (X_n' , τ_n') будут банаховыми пространствами (это следует из (9), стр.244, лемма 2). Топология σ (X , X^*) на каждом X_n или X_n' слабее топологии τ_n или τ_n' соответственно, а тогда (X_n , τ_n) и (X_n' , τ_n') можно рассматривать как подпространства Фреше в топологическом пространстве (X , $\sigma(X, X^*)$) (см. (9) стр.228).

Конус K - воспроизводящий в X, и с помощью условий I и 2 легко показать, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n'$. Так как $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n'$, то отделимое локально выпуклое пространство (X , σ (X , X^*)) покрывается двумя счетными последовательностями своих подпространств Фреше. В этом случае по одной из теорем Гротендика (см. (9) стр.231)) (X_n , τ_n) для любого n является подпространством Фреше в некотором ($X_{n'}'$, $\tau_{n'}'$), где n' зависит от n . Последнее означает, что $X_n \in X_n'$ и вложение (X_n , τ_n) в (X_n' , τ_n') непрерывно, т.е. существует $\lambda_n > 0$ такое, что $A_n \subset \lambda_n A_n'$. Из построения (X_n' , τ_n') видно, что оно непрерывно вложено в (X_n , τ_n). Отсюда следует, что топологию в X можно рассматривать как топологию индуктивного предела подпространств (X_n' , τ_n') относительно вложений X_n' в X .

Рассмотрим в пространстве (X_n' , τ_n') конус $K_n = K \cap X_n'$. Нетрудно заметить, что $K_n = X_n \cap K$ и K_n - воспроизводящий конус в X_n' . Покажем, что K_n не сплющен в (X_n' , τ_n').

Множества ($\lambda A_n'$) $\lambda > 0$ образуют базис окрестностей нуля в (X_n' , τ_n'). Для каждого из них справедливо включение $(\lambda A_n') \cap K_n - (\lambda A_n') \cap K_n \supset \lambda A_1$ и множества $\lambda A_n' \cap K_n - \lambda A_n' \cap K_n$

образуют базис окрестностей нуля в (X_n' , $(\tau_n')^{*}_{sh}$). Тогда $(\tau_n')^{*}_{sh} \leq \tau_n'$, и по следствию I теоремы 6 получаем, что конус K_n не сплющен в (X_n' , τ_n').

Таким образом, для локально выпуклого пространства (X , τ) и его линейных подпространств X с топологиями τ_n' и конусами K_n выполнены условия следствия 4 теоремы 6, а тогда конус K не сплющен в (X , τ).

Из теоремы 7 вытекает ряд признаков несплющенности конусов в дуально-метрических пространствах.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (X , β) – локально выпуклое пространство, сопряженное к правильному счётно-нормированному пространству (X^*, ϑ), где $\beta = \beta$ (X , X^*) – сильная топология в X (см. (10) гл.IУ § 3 упр.10). Тогда каждый воспроизводящий конус в X , замкнутый в топологии равномерной сходимости на множествах, предкомпактных в (X^* , ϑ), не сплющен в (X , β).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как (X^*, ϑ) правильно, то топология β совпадает с топологией индуктивного предела банаховых пространств (X_n , τ_n) (II). Здесь банахово пространство (X_n , τ_n) представляет линейную оболочку в X абсолютно выпуклого множества A_n с базисом окрестностей нуля $\{\lambda A_n\}$, где A_n – поляра к окрестности нуля в (X^* , ϑ) из счётного базиса окрестностей нуля. Ясно, что X_n покрывает X , а множества A_n , как поляры к базису окрестностей нуля в (X^*, ϑ) – σ (X , X^*) – компакты и для любых n_1 и n_2 существует n_3 такое, что X_{n_1} , $X_{n_2} \subset X_{n_3}$. Множества $A_n^+ = A_n \cap K - \sigma(X, X^*)$ замкнуты для каждого n , т.к. на A_n топология $\sigma(X, X^*)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на множествах предкомпактных в (X^* , ϑ) и в этой топологии конус K замкнут. Следовательно, выполнены все условия теоремы 7, поэтому конус K не сплющен в (X , β).

Достаточным условием правильности пространства (X^* , ϑ) является его рефлексивность или сепарабельность (X , β) (см. (10) гл.IУ § 3 упр.24).

Будем говорить, что локально выпуклое пространство (X , τ), где X – одновременно K -линеал удовлетворяет условию (N), если из того, что направление $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сходится к нулю в (X , τ), а направление $\{y_\alpha\}$ удовлетворяет условию $|y_\alpha| \leq |x_\alpha|$ для каждого $\alpha \in A$ следует, что $\{y_\alpha\}$ сходится к нулю в (X , τ). (Иными словами, это локально выпуклая структура в смысле

Ковам (5)).

Т е о р е м а 8. Пусть локально выпуклое пространство (X, τ) является K-линеалом. (X, τ) удовлетворяет условию (N) тогда и только тогда, когда топологии τ и τ_+ совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть топологии τ и τ_+ совпадают. Тогда τ_+-комплект полунорм $\{p_\ell\}_{\ell\in P}$, построенный по τ-комплекту полунорм $P=\{\ell\}$, можно считать τ-комплектом полунорм в (X, τ). Для каждого $x\in X$ имеем $p_\ell(|x|)\le p_\ell(x^+)+p_\ell(x^-)=p_\ell(x)$. Так как p_ℓ монотонна на конусе положительных элементов в X, то $p_\ell(x)=p_\ell(x^+)+p_\ell(x^-)\le 2p_\ell(|x|)$. Следовательно, сходимость направления $\{|x_\alpha|\}_{\alpha\in A}$ к нулю в (X, τ) эквивалентна сходимости к нулю в (X, τ) направления $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Тогда для направления $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такого, что $|y_\alpha|\le|x_\alpha|$ для каждого $\alpha\in A$ следует, что направление $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ сходится к нулю в топологии τ. Тем самым показано, что (X, τ) удовлетворяет условию (N).

Если (X, τ) удовлетворяет условию (N), то, как следует из (5), τ-комплект полунорм $P=\{\ell\}$ можно взять таким, что каждая ℓ монотонна на конусе положительных элементов и $\ell(x)=\ell(|x|)$. Тогда по определению p_ℓ получим $p_\ell(x)\le\ell(x^+)+$ $+\ell(x^-)\le 2\ell(|x|)$, следовательно, $\tau_+\le\tau$. Из неравенства $\ell(x)\le\ell(x^+)+\ell(x^-)=p_\ell(x)$ следует включение $\tau_+\ge\tau$.

В заключение автор выражает глубокую признательность своему руководителю, профессору Б.З.Вулиху, за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний при её написании.

Литература

1. М.А.Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз. М., 1961.
2. Б.З.Вулих. Теорема Крейна-Шмульяна в счётно-нормированных пространствах и некоторые её приложения. Вестник ЛУ, № 19, (1967) 18-24.
3. И.А.Бахтин, М.А.Красносельский, В.Я.Стеценко. О непрерывности линейных положительных операторов. Сиб.матем.журнал III, № 1 (1962) 156-160.
4. Б.З.Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз. М., 1961.
5. Kawai S. Locallyconvex lattices. J. Math. Soc. Japan. V.9 № 3 (1957) 281-314.
6. Shaefer. H. Topological vector spaces. New-York. 1966.

7. В.Я.Стеценко. к-правильные конусы. ДАН СССР, 136, № 5 1961, 1038-1040.

8. Г.Я.Лозановский. О конусах в нормированных структурах. Вестник ЛГУ, № 19, вып.4 (1962), 148-150.

9. А.Робертсон, В.Робертсон. Топологические векторные пространства. МИР, М., 1967.

10. Н.Бурбаки. Топологические векторные пространства. И.И.Л., М., 1959.

11. И.А.Березанский. Индуктивно рефлексивные локально выпуклые пространства. ДАН СССР, 182, № 1 (1968), 20-22.

12. A.L.Peressini. Ordered topological vector spaces. New-York 1967.

Поступила в редакцию
11 декабря 1969 г.