УДК 513.88+517.948

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.Д.Зияудинов

Введение

В работах [1], [2], [3] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть A – вещественная ($n \times n$)-матрица.

(I) Если все главные миноры A положительны, то система

$$x \geqslant 0, \quad Ax > 0 \qquad (1,1)$$

имеет решение.

(II) Если все главные миноры A неотрицательны, то система

$$x \geqslant 0, \quad Ax \geqslant 0 \qquad (1,2)$$

имеет решение.

Теорема 2. Пусть P – класс вещественных ($n \times n$) матриц, главные миноры которых положительны, P_0 – класс вещественных ($n \times n$) – матриц, главные миноры которых неотрицательны. Тогда

(I) $A \in P$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \neq 0$ существует индекс k такой, что

$$x_k \neq 0 \quad \text{и} \quad x_k Ax > 0 . \qquad (1.3)$$

(II) $A \in P_0$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \neq 0$ существует индекс k такой, что

$$x_k \neq 0, \quad x_k Ax \geqslant 0 . \qquad (1,4)$$

В работе [4] этот результат обобщается на общие системы нелинейных неравенств вида

$$x > a, \qquad f(x) > f(a) \tag{I,5}$$

и

$$x > a, \qquad f(x) \geq f(a), \tag{I,6}$$

где a — заданный вектор из E^n - евклидова n-мерного пространства и отображение f из E^n в E^n имеет вид $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, компоненты которого скалярные функции от $x \in E^n$.

В части 2 работы [4] предполагается, что f непрерывно, и показывается (теорема 3), что если f удовлетворяется условиям, аналогичным (I,3) и (I,4), но более слабым, то системы (I,5) и (I,6) имеют решения, т.е. имеет место

Теорема 3. Пусть f - отображение из $S_\alpha(a)$ в E^n, где $S_\alpha(a) = \{x \in E^n \; x > a, \; e(x-a) = \alpha\}$ $(e = (1,1,\dots,1) \in E^n$ α-скаляр), f непрерывно на $S_\alpha(a)$.

(I) Если для любого $x \in S_\alpha(a)$ существует индекс k такой, что

$$x_k > a_k \quad \text{и} \quad f_k(x) > f_k(a), \tag{I,7}$$

то существует $\bar{x} \in S_\alpha(a)$ такой, что

$$\bar{x} > a \quad \text{и} \quad f(\bar{x}) > f(a).$$

(II) Если для любого $x \in S_\alpha(a)$ существует индекс k такой, что

$$x_k > a_k \quad \text{и} \quad f_k(x) \geq f_k(a), \tag{I,8}$$

то существует $\bar{x} \in S_\alpha(a)$ такой, что

$$\bar{x} > a \quad \text{и} \quad f(\bar{x}) \geq f(a).$$

Цель этой заметки обобщить этот результат для нелинейного отображения A из E_1 в E_2, где E_1 и E_2 - локально-выпуклые пространства.

Для доказательства теоремы 3 в работе [4] используется теорема Какутани о неподвижной точке. Для доказательства основных теорем в данной работе используется теорема Гликсберга [6], обобщающая теорему Какутани.

Метод доказательства теорем 2.I и 3.I. данной работы существенно отличается от метода доказательства теоремы 3 работы [4] для конечномерных пространств.

2^0. Случай строгого неравенства

Пусть E_1 и E_2 – локально выпуклые пространства с замкнутыми выпуклыми конусами K_1 и K_2 соответственно, причем K_2 телесен, а E_2 отделимо; E_2' –сопряженное к E_2 пространство.

Пусть $\tau(E_2, E_2')$ –топология Макки в E_2, определенная двойственностью. K_2^* –сопряженный к K_2 конус, a – фиксированная точка из E_1.

Определение I [7]. Множество X называется *основанием* конуса K с вершиной в начале, если $0 \notin X$ и для любого $y \in K$ существует единственное $\alpha > 0$ и $x \in X$ такие, что $y = \alpha x$. Из определения X следует, что $K = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda X$.

В работе [8] доказывается следующее утверждение:
Пусть M и N – векторные пространства в двойственности. Пусть K –выпуклый конус в M с вершиной в 0, обладающей в топологии $\tau(M,N)$ внутренней точкой. Тогда в N существует слабо замкнутая гиперплоскость H, не содержащая начала и такая, что $G = H \cap K^*$ слабо компактно. Из этой теоремы следует, что конус K_2^* имеет слабо компактное основание.

Определение 2 [9]. Отображение F из E_1 в E_2 называется *вогнутым*, если для любых x', $x'' \in E_1$ и $\alpha \in [0,1]$

$$F(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq \alpha F(x') + (1-\alpha) F(x'') .$$

Теорема 2.I. Пусть A –вогнутое отображение из E_1 в E_2 такое, что

$$S_\varphi = \{x \in E_1 : (Ax, \varphi) > (Aa, \varphi)\} \neq \emptyset \tag{2.I}$$

для любого $\varphi \in G$.
Тогда существует $\bar{x} \in E_1$, такое, что

$$A\bar{x} \in Aa + \mathring{K}_2$$

($\mathring{K}_2$ - внутренность конуса K_2).

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению теоремы, не существует элемента x_φ, удовлетворяющего заключению теоремы. Определим множество P_φ следующим образом:

$$P_\varphi = \{y \in A(S) : (y, \varphi) > (Aa, \varphi)\}, \qquad S = \bigcup_{\varphi \in G} S_\varphi .$$

Множество P_φ непусто и выпукло для любого $\varphi \in G$. По предположению $P_\varphi \cap (Aa + \mathring{K}_2) \neq \emptyset$ для всех $\varphi \in G$.

Определим отображение $T : G \to G$ следующим образом:

$T(y)=\{f\in G:(y,f)>(Aa,f)$, если $y\in Aa+\mathring{K}_2$ и $(y,f)\leq(Aa,f)$, если $y\in P_y\}$.
Покажем, что $T(y)$ непусто для любого $y\in G$.

Так как $Aa+\mathring{K}_2$ - непустое открытое выпуклое множество, а P_y - непустое и выпуклое, то по теореме Банаха об отделении выпуклых множеств ([5], стр.51) существуют линейный непрерывный функционал f_y и число α_y такие, что $(\bar{y},f_y)>\alpha_y$ для всех $\bar{y}\in Aa+\mathring{K}_2$ и $(y,f_y)\leq\alpha_y$ для всех $y\in P_y$. Но любой элемент $\bar{y}\in Aa+\mathring{K}_2$ представим в виде $\bar{y}=Aa+y$, где $y\in\mathring{K}_2$, поэтому $(y,f_y)>\alpha_y-(Aa,f_y)$, где $y\in\mathring{K}_2$.
Очевидно, что $\alpha_y-(Aa,f_y)\leq 0$, в противном случае нашлось бы $\bar{y}\in\mathring{K}_2$ и достаточно большое λ такие, что $\lambda^{-1}(\bar{y},f_y)<$ $<\alpha_y-(Aa,f_y)$, что невозможно. Значит, $\alpha_y\leq(Aa,f_y)$. С другой стороны, не может выполняться и неравенство $(\bar{y},f_y)<0$, где $\bar{y}$ - какая-либо точка из $\mathring{K}_2$. В противном случае нашлось бы достаточно большое λ, для которого $\alpha_y-(Aa,f_y)>\lambda(\bar{y},f_y)$, что также невозможно. Значит, $(y,f_y)\geq 0$ для всех $y\in\mathring{K}_2$. Из непрерывности f_y следует, что $(y,f_y)\geq 0$ для всех $y\in K_2$. Таким образом, $f_y\in K_2^*$. По определению G существуют $\tilde{f}_y$ и $\lambda>0$ такие, что $f_y=\lambda\tilde{f}_y$, где $\lambda>0$, так как $f_y\neq 0^*$. Тогда для линейного функционала $\tilde{f}_y=\lambda^{-1}f_y$ будут выполнены условия:

а) $(y,\tilde{f}_y)>\alpha_y$, $y\in Aa+\mathring{K}_2$;

б) $(y,\tilde{f}_y)\leq\alpha_y$, $y\in P_y$.

Очевидно, что $(y,\tilde{f}_y)>(Aa,\tilde{f}_y)$ для всех $y\in Aa+\mathring{K}_2$. Итак, $\tilde{f}_y\in T(y)$, следовательно, $T(y)$ непусто.

Покажем, что отображение T полунепрерывно сверху. (Отображение T полунепрерывно сверху, если для любых семейств $\{y_\delta\in G\}$ и $\{f_\delta\in T(y_\delta)\}$, для которых $y_\delta\to y$ и $f_\delta\to f$, имеем $f\in T(y)$). Следовательно, нужно показать, что $(y,f)>$ $>(Aa,f)$ для всех $y\in Aa+\mathring{K}_2$ и $(y,f)\leq(Aa,f)$ для всех $y\in P_y$

а) Пусть $y\in P_y$. Имеем

$$(y,f)=(y,f)+(y,f_\delta)-(y,f_\delta)\leq(y,f)+(Aa,f_\delta)-(y,f_\delta)\to(Aa,f),$$

т.е. $(y,f)\leq(Aa,f)$ для всех $y\in P_y$.

б) Пусть $y\in Aa+\mathring{K}_2$. Так как G слабо замкнуто, то $f\in\mathring{K}_2^*$. Тогда $(y,f)\geq 0$ для всех $y\in K_2$, следовательно, $(y,f)>(Aa,f)$ для всех $y\in Aa+\mathring{K}_2$.

Итак, функционал f разделяет $Aa+K_2$ и P_y. Из телесности $Aa\dot{+}K_2$ следует, что $(y,f)>(Aa,f)$ для всех $y\in Aa+\overset{\circ}{K_2}$. Очевидно, что $(Aa+K_2)^{\circ}=Aa+\overset{\circ}{K_2}$, т.е. отображение слабо замкнуто. Таким образом, выполнены все условия теоремы Гликсберга о неподвижной точке ([6] стр. 497), и следовательно, существует линейный непрерывный функционал $\bar{\varphi}$ такой, что $\bar{\varphi}\in T(\bar{\varphi})$. Тогда, с одной стороны, $\bar{\varphi}\in G$, и для него существует $x_{\bar{\varphi}}\in E_1$, такое, что $(Ax_{\bar{\varphi}},\bar{\varphi})>(Aa,\bar{\varphi})$, где $Ax_{\bar{\varphi}}\in P_{\bar{\varphi}}$. С другой стороны, $\bar{\varphi}\in T(\bar{\varphi})$, и для него имеет место неравенство $(y,\bar{\varphi})\leq(Aa,\bar{\varphi})$ для всех $y\in P_{\bar{\varphi}}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Если пространство E_2 таково, что конус $K_2=\{y\in E_2: y\geq 0\}$ является телесным, то справедлива

Теорема 2.I. Пусть A - вогнутое отображение из E_1 в E_2 такое, что выполнено условие (I). Тогда существует линейный непрерывный функционал $\bar{\varphi}\in G$ и $x_{\bar{\varphi}}\geq a$ такие, что $Ax_{\bar{\varphi}}>Aa$.

3°. Случай нестрогого неравенства

Пусть E_1, E_2, E_2', K_2' и K_2^* те же, что и в п.2°. Тогда имеет место

Теорема 3.I. Пусть A - вогнутое отображение из E_1 в E_2 такое, что множество

$$S_\varphi=\{x\in E_1: (Ax,\varphi)\geq(Aa,\varphi)\}\neq\emptyset,\quad \varphi\in G,$$

и $A(S_\varphi)$ телесно для всех $\varphi\in G$. Тогда существует $\bar{x}\in E_1$ такой, что $A\bar{x}\in Aa+K_2$

(доказательство такое же, что и для теоремы 2.I.).

Тут множество $T(\varphi)$ имеет вид

$T(\varphi)=\{f\in G: (y,f)\geq(Aa,f)$ для $y\in Aa+K_2$ и $(y,f)\leq(Aa,f)$ для $y\in\overset{\circ}{P_\varphi}\}$,

где $\overset{\circ}{P_\varphi}$ - внутренность P_φ.

Очевидно, $T(\varphi)$ непусто для любого $\varphi\in G$ и выпукло. Докажем замкнутость отображения T. Для этого построим другое отображение $\tilde{T}$:

$\tilde{T}(\varphi)=\{f\in G: (y,f)\geq(Aa,f)$ для $y\in Aa+K_2$ и $(y,f)\leq(Aa,f)$ для $y\in P_\varphi\}$.

Очевидно, $\tilde{T}(\varphi)$ непусто и выпукло и $T(\varphi)\subset\tilde{T}(\varphi)$ для любого $\varphi\in G$. Замкнутость отображения $\tilde{T}$ тоже очевидна.

Пусть $\{\varphi_\delta\}\subset G$ и $\varphi_\delta\xrightarrow[\Delta]{c_\Delta}\varphi$, $f_\delta\in T(\varphi_\delta)\subset\tilde{T}(\varphi_\delta)$ и $f_\delta\xrightarrow[\Delta]{c_\Delta}f$. Очевидно, что $f\in\tilde{T}(\varphi)$ ($\tilde{T}$ - замкнутое отображение); из отделимости E_2' следует единственность предельного функционала. Значит, f разделяет множества $Aa+K_2$ и R_y, т.е. существует такое c, что $(y,f)>c$ для всех $y\in Aa+K_2$, $(y,f)\leq c$ для всех $y\in R_y$.

Так как $o\in K_2$, то $c\leq (Aa,f)$. Таким образом, имеем $(y,f)\leq (Aa,f)$ для всех $y\in R_y$. Следовательно, $(y,f)<$ $<(Aa,f)$ для всех $y\in R_y$, то есть $f\in T(y)$.

По теореме Гликсберга [6] $T(y)$ имеет неподвижную точку, то есть существует

$$\bar{y}\in T(\bar{y}),$$

элемент $\bar{y}\in G$ и для него существует $x_{\bar{y}}$, для которого $Ax_{\bar{y}}\in R_{\bar{y}}$ и $(Ax_{\bar{y}},\bar{y})>(Aa,\bar{y})$; с другой стороны, $\bar{y}\in T(\bar{y})$ и $(y,\bar{y})<(Aa,\bar{y})$ для всех $y\in R_{\bar{y}}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Условие телесности K_2 можно заменить более слабым условием.

Пусть задано замкнутое слабо компактное выпуклое множество $G\subset K_2^*$ такое, что

$$o^*\notin G \quad \text{и} \quad \bigcup_{\lambda>0}\lambda G=K_2^*,$$

где o^* -нулевой функционал, то есть конус K_2^* допускает слабо компактное основание G. Имеет место

Т е о р е м а 3.1. Пусть A -вогнутое отображение из E_1 в E_2 такое, что множество $S_y=\{x\in E_1:(Ax,y)>(Aa,y)\}\neq\emptyset$ для любого $y\in G$ и $A(S_y)$ - телесно для всех $y\in G$. Тогда существует такой $\bar{x}\in E_1$, что $A\bar{x}\in Aa+K_2$.

З а м е ч а н и е 2. Если $K_2=\{y\in E_2: y>o\}$, то имеет место

Т е о р е м а 3.1'. Пусть G -замкнутое, выпуклое, слабо компактное множество из K_2^* со свойствами (1).

Пусть A -вогнутое отображение из E_1 в E_2 такое, что множество

$$S_y=\{x\in E_1: x>a \quad \text{и} \quad (Ax,y)>(Aa,y)\}\neq\emptyset$$

для любого $y\in G$ и $A(S_y)$ - телесно для всех $y\in G$. Тогда существует линейный непрерывный функционал $\bar{y}\in G$ и элемент $x_{\bar{y}}>a$ такие, что $Ax_{\bar{y}}>Aa$.

Литература

1. Fiedler, M., and V. Pták On matrices with non-negative off-diagonal elements and positive principal minors. Czech. Math. J. 12, 383-400 (1962).

2. Fiedler,M., and V.Pták. Some generalisations of positive difiniteness and monotonicity. Numerische Mathematik,9,163-172 (1966).

3. Gale, D., and H.Nikado The Jakobian matrix and global univalence of mappings. Mathematische Annalen, 159, 81-93(1965).

4. Karamardian Existense of Solutions of Certian Systems of Non-Linear Inegualities. Numerische Mathematik, 12, 327-334 (1968).

5. А.П.Робертсон, В.Дж.Робертсон. Топологические пространства. М., "МИР", 1967.

6. И.Л.Гликсберг, В сборн. "Бесконечные антагонистические игры", М., 1963, стр. 497.

7. Р.Фелпс. Лекции о теоремах Шоке. М., "МИР", 1968.

8. Н.Бурбаки. Топологические векторные пространства. М.,

9. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства. Сб."Оптимальное планирование", вып.9, Новосибирск (1967).

Поступила в редакцию
5.VI. 1970 г.