УДК 513:88

ПРИМЕР НА ДЕКОМПОЗИЦИЮ

С.С.Кутателадзе

1^0. В работе [1] установлена, в частности, следующая ТЕОРЕМА ДЕКОМПОЗИЦИИ. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_m$ - выпуклые замкнутые конусы в пространстве $C(Z)$ непрерывных на компакте Z функций с чебышевской нормой, упорядоченном с помощью конуса неотрицательных функций. Если μ, ν - неотрицательные радоновские меры на Z, то для любых функций $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2, \dots, h_m \in H_m$ неравенство

$$\mu(h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_m) \geq \nu(h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_m)$$

имеет место в том и только том случае, если для всякого разбиения $\nu_1, \dots, \nu_m \geq 0$, $\sum_{k=1}^{m} \nu_k = \nu$ меры ν найдется разбиение $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\sum_{k=1}^{m} \mu_k = \mu$ меры μ, такое что $\mu_k - \nu_k \in H_k^*$ (т. е. $\mu_k(h_k) \geq \nu_k(h_k)$ при $h_k \in H_k$) $(k = 1, 2, \dots, m)$.

Конструкция этой теоремы позволяет, в частности, на основе схемы двойственности Минковского-Фенхеля описывать интегральными неравенствами многие интересные классы выпуклых множеств. В настоящей заметке мы иллюстрируем способ применения теоремы декомпозиции примером так называемого пинскеровского конуса с конечн' числом образующих в n -мерном числовом пространстве.

2^{0}. Ниже мы будем рассматривать совокупность $\mathcal{H}$ выпуклых компактных подмножеств n-мерного числового пространства R^n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Сфера $\{x \in R^n: |x|=1\}$ будет обозначаться через Z. Символ ε_z, где $z \in Z$, означает меру Дирака в точке z. Радоновские меры договоримся считать уже реализованными, как борелевские.

Совокупность $\mathcal{H}$ наделяется упорядочением по включению, при этом $S_1 \vee S_2$ совпадает с выпуклой оболочкой $S_1 \cup S_2$. В $\mathcal{H}$ вводятся операции Минковского и топология Хаусдорфа. Каждый элемент S из $\mathcal{H}$ отождествляется с опорной функцией

$$S(y) = \max_{x \in S} (x, y) \qquad (y \in R^n),$$

а последняя с ее следом на Z. При этом точки $\mathcal{H}$ переходят в точки конуса H следов на Z сублинейных функций, определенных на R^n, т.е.

$$H = \{f \in C(Z): |x|\, f(\tfrac{x}{|x|}) + |y|\, f(\tfrac{y}{|y|}) - |x+y|\, f(\tfrac{x+y}{|x+y|}) \geq 0 \ \ (x, y \in R^n)\}.$$

(В последней формуле выражение $|0|\, f(\frac{0}{|0|})$ по определению совпадает с нулем).

Известно, что алгебраическая, топологическая и порядковые структуры, индуцированные в H из $C(Z)$, совпадают с перенесенными в H из $\mathcal{H}$ указанным отождествлением. Учитывая сказанное, выпуклый компакт, его опорная функция и след последней на Z различаться не будут.

Нам потребуется еще один простой факт. Пусть S – телесный выпуклый, симметричный относительно нуля компакт в R^n (множество всех таких элементов $\mathcal{H}$ обозначим $\mathcal{H}S$). Через S^* будем обозначать поляру S, а через $\|\cdot\|_S$ – калибровочную функцию S. Имеет место следующая формула двойственности:

$$S(\cdot) = \|\cdot\|_{S^*} .$$

3^{0}. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_m$ – элементы $\mathcal{H}S$. Через $\mathcal{T}(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ обозначается наименьший выпуклый замкнутый конус в $\mathcal{H}$, устойчивый относительно операции $\vee$ (т.е. $\vee$-полуструктура) и содержащий $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Такой конус называют еще пинскеровской оболочкой $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Из теоремы декомпозиции немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $S\in\mathcal{K}(S_1,S_2,\dots,S_m) \Longleftrightarrow \mu(S)\geq\nu(S)$ для всех мер μ,ν на Z таких, что $\mu\gg\nu$. Последнее означает, что для всякого конечного разбиения $\nu_1,\dots,\nu_p\geq 0$, $\sum_{K=1}^{p}\nu_K=\nu$ найдется разбиение $\mu_1,\dots,\mu_p\geq 0$, $\sum_{K=1}^{p}\mu_K=\mu$ такое, что $\mu_K(S_i)\geq\nu_K(S_i)$ $(K=1,2,\dots,p;$ $i=1,2,\dots,m)$.

Основываясь на этом факте, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $S\in\mathcal{K}(S_1,S_2,\dots,S_m) \Longleftrightarrow$ для любых векторов $x_1,\dots x_p\in R^n$ и всякого $y\in R^n$ такого, что

$$\sum_{K=1}^{p} S_i(x_K)\geq S_i(y) \qquad (i=1,2,\dots,m),$$

выполняется неравенство

$$\sum_{K=1}^{p} S(x_K)\geq S(y).$$

<u>Необходимость</u>. Следует из того факта, что

$$\sum_{K=1}^{p}|x_K|\mathcal{E}_{\frac{x_K}{|x_K|}}\gg|y|\mathcal{E}_{\frac{y}{|y|}}$$

(здесь и ниже считается, что $|0|\mathcal{E}_{\frac{0}{|0|}}=0$).

<u>Достаточность.</u> Пусть $\mu\gg\nu$. Заметим, что отображения

$$R^n\ni z\longmapsto\mu(z)\in R;$$
$$R^n\ni z\longmapsto\nu(z)\in R$$

суть линейные функционалы, так что при некоторых u, $v\in R^n$ имеем

$$\mu(z)=(u,z);\qquad \nu(z)=(v,z)\qquad (z\in R^n).$$

Положим

$$\mu_1=\mu+mes+|u|\mathcal{E}_{-\frac{u}{|u|}}+|v|\mathcal{E}_{-\frac{v}{|v|}}=\bar{\mu}_1+|v|\mathcal{E}_{-\frac{v}{|v|}};$$

$$\mu_2=\nu+mes+|v|\mathcal{E}_{-\frac{v}{|v|}}+|u|\mathcal{E}_{-\frac{u}{|u|}}=\bar{\mu}_2+|u|\mathcal{E}_{-\frac{u}{|u|}};$$

где mes – лебегова мера на Z. Отметим, что меры μ_1, μ_2 являются александровскими, значит, найдутся выпуклые тела

$x_1, x_2 \in \mathcal{V}$ такие, что поверхностная функция $\mu(x_i)$ есть $\bar{\mu}_i$ $(i=1,2)$. Пусть (x_1^t), (x_2^t) – последовательности многогранников, аппроксимирующие соответственно x_1 и x_2, причем такие, что $x_1^t \supset x_1$ и $x_2 \supset x_2^t$. Тогда меры $\mu(x_i^t)$ дискретны и сходятся (в широкой топологии) к $\mu(x_i)$. Кроме того, в силу известного свойства монотонности смешанного объема, для всякого $\bar{S} \in \mathcal{H}$ имеем

$$\mu(x_1^t)(\bar{S}) \geq \mu(x_1)(\bar{S});$$
$$\mu(x_2)(\bar{S}) \geq \mu(x_2^t)(\bar{S}).$$

Следовательно, для мер

$$\mu_1^t = \mu(x_1^t) + |v|\,\varepsilon_{-\frac{v}{|v|}};$$
$$\mu_2^t = \mu(x_2^t) + |u|\,\varepsilon_{-\frac{u}{|u|}}$$

получаем

$$\mu_1^t \gg \mu_2^t .$$

В силу условий предложения, нетрудно (беря разбиение на точечные нагрузки) убедиться, что $\mu_1^t(S) \geq \mu_2^t(S)$. И так как μ_i есть широкий предел (μ_i^t), то $\mu_1(S) \geq \mu_2(S)$, следовательно, $\mu(S) \geq \nu(S)$. Применением предложения I завершаем доказательство.

Из последнего предложения и формулы двойственности калибровочных и опорных функций вытекает

ТЕОРЕМА. Ненулевое множество S входит в $\mathcal{T}(S_1, S_2, \dots, S_m)$ в том и только том случае, если для любых ненулевых векторов $x_1, \dots x_p \in R^n$ имеет место соотношение:

$$\frac{S}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^*}} \leq \frac{S_1}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^*}} \vee \dots \vee \frac{S_m}{\sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^*}} .$$

Литература

1. С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов, К теории структурной двойственности функций и множеств. Наст. сборник., 96–144

Поступила в редакцию
29.IX. 1970 г.