УДК 513

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

С.С.Кутателадзе

Под плоской изопериметрической задачей мы будем понимать задачу максимизации площади плоской выпуклой фигуры при линейных в пространстве выпуклых множеств ограничениях (на смешанные площади и опорные расстояния искомой фигуры). Такая задача рассматривалась в [1] как частный случай общей квазивогнутой изопериметрической задачи. Там же для задач такого сорта получены признаки оптимальности, которые хотя и упрощаются в плоском случае, тем не менее не дают алгоритма нахождения решения. Б.С.Митягин обратил внимание автора на то обстоятельство, что решение плоской задачи, вероятно, лежит в конусе (относительно операций Минковского), натянутом на фигуры, определяющие ограничения. Это, в частности, означает, что такие задачи являются конечномерными задачами квадратичного программирования, т.е. могут быть решены за конечное число шагов. Ниже устанавливается, что этот факт действительно имеет место для плоской изопериметрической задачи.

Мы будем рассматривать следующую задачу:

ЗАДАЧА 1. Найти плоский выпуклый компакт x такой, что

1. x лежит в выпуклом многоугольнике P;
2. $V(x, y_j) \leq b_j \quad (j=1,2,\ldots,n)$;
3. $V(x)$ достигает максимума.

Здесь $V(\cdot,\cdot)$ и $V(\ )$ – соответственно смешанная площадь и площадь.

Прежде чем формулировать результат, приведем одну полезную

интерпретацию смешанной площади, поясняющую, в частности, почему задача I названа изопериметрической.

Пусть x – телесный выпуклый симметричный относительно нуля компакт. Подсчитаем периметр $P_x(y)$ выпуклой фигуры y в геометрии Минковского, порождаемой x. Для этого выберем последовательность выпуклых многоугольников (y_m), аппроксимирующую y. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_s$ – вершины y_m, l_i, n_i – соответственно евклидова длина и единичная внешняя нормаль ненулевого ребра, соединяющего точки z_i, z_{i+1} (индексы, естественно, складываются по модулю s). Обозначим через p_x калибровочную функцию x. Тогда

$$P_x(y_m) = \sum_{i=1}^{s} p_x(z_{i+1} - z_i) = \sum_{i=1}^{s} p_x(l_i \bar{n}_i) =$$

$$= \int_{Z} p_x(\bar{z})\, d\mu(y_m)(z)$$

Здесь $-$ означает оператор поворота на девяносто градусов по часовой стрелке, μ – оператор взятия поверхностной функции, Z – единичная окружность с центром в нуле. Таким образом, переходя к пределу и используя известный дуализм калибровочных и опорных функций, получим

$$P_x(y) = 2V(\hat{x}, y),$$

где $\hat{}$ есть оператор, переводящий фигуру в ее поляру, повернутую на девяносто градусов против часовой стрелки.

Таким образом, смешанная площадь всегда имеет смысл периметра в некоторой геометрии Минковского.

Перейдем теперь к основной задаче. Будем считать, что многоугольник P задан пересечением полуплоскостей

$$P = \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in R^2 : (x, z_i) \leq c_i\} \qquad (z_i \in Z).$$

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ – s-мерные векторы, образующие остов многогранного конуса решений следующей системы:

$$\begin{cases} \alpha_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i z_i = 0 \end{cases}.$$

Положим

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{s} \nu_t^{(i)} \varepsilon_{z_i} \quad (t = 1,\dots,p) \quad (\ \varepsilon_{z_i} \ \text{– мера Дирака в точке } z_i\ ).$$

Очевидно, что найдется единственный (с точностью до переноса) выпуклый компакт x_l, такой что $\mu(x_l) = \mu_l \quad (l = 1,2,\dots,p)$.

ТЕОРЕМА. *Если в задаче I имеется телесное решение $\bar{x}$, то найдутся неотрицательные числа $\bar{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_p,\bar{\beta}_1,\dots,\bar{\beta}_n$ такие, что с точностью до параллельного переноса $\bar{x}$ совпадает с фигурой*

$$\bar{\alpha}_1 x_1 + \dots + \bar{\alpha}_p x_p + \bar{\beta}_1 y_1 + \dots + \bar{\beta}_n y_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие теоремы 5.1 из [I], достаточно показать, что из условий $y \underset{T}{\geq} x$ и $V(y,x) = V(x)$, где x – телесный выпуклый компакт, вытекает, что $x \underset{T}{\geq} y$ (символ $x \underset{T}{\geq} y$ означает, что y можно поместить в x путем параллельного переноса).

Обозначим через $s(x)$ носитель поверхностной функции тела x. Через $\tau(x)$ обозначим замыкание подмножества единичной окружности Z, образованного концами ортов внешних нормалей в регулярных точках x (точка называется регулярной, если существует единственная опорная прямая, проходящая через эту точку).

Легко видеть, что $\tau(x) \subset s(x) \subset Z$. Кроме того, ввиду телесности x, имеем

$$x = \bigcap_{z \in \tau(x)} \left\{ x \in R^2 : (x,z) \leq x(z) \right\}$$

(мы, как обычно, обозначаем выпуклый компакт и его опорную функцию одной и той же буквой).

Так как к тому же

$$x = \bigcap_{z \in Z} \left\{ x \in R^2 : (x,z) \leq x(z) \right\},$$

то

$$x = \bigcap_{z \in s(x)} \left\{ x \in R^2 : (x,z) \leq x(z) \right\} \tag{1}$$

Ввиду условий, найдется вектор $c \in R^2$ такой, что

$$\int_Z y(z) - x(z) + (c,z)\, d\mu(x)(z) = 0$$

и подынтегральная функция неотрицательна. Отсюда следует, что с точностью до выражения (c,z) величины $y(z)$ и $x(z)$ совпадают для z из носителя $S(x)$. Таким образом,

$$y = \bigcap_{z\in Z} \{x \in R^2 : (x,z) \leq y(z)\} \underset{T}{\leq} \bigcap_{z\in S(x)} \{x \in R^2 : (x,z) \leq x(z)\}$$

Следовательно, в силу (I), $x \underset{T}{\geq} y$. Теорема доказана.

Литература

1. С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов. Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел. Сб. "Оптимальное планирование", I4 (1969), 61-80.

Поступила в редакцию
I5.IX. 1970 г.