УДК 513.88

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

А.Г.Пинскер, В.В.Кузьмина

В работе [I] дана внутренняя характеристика выпуклого подмножества произвольного линейного пространства, как некоторого множества с "усреднением". К этой же цели приводит и предлагаемый в настоящей статье метод характеризации выпуклых множеств, являющийся более простым и естественным.

Введем понятие "квазилинейного множества". Именно, пусть в абстрактном множестве K для любой конечной системы его элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и чисел $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1$, однозначно определен элемент $x = \lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \lambda_2 \cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n \cdot x_n$ – квазивыпуклая комбинация элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Отметим, что $\lambda \cdot x$, где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $x \in K$, является частным случаем квазивыпуклой комбинации в K.

Множество K назовем квазилинейным, если квазивыпуклые комбинации его элементов удовлетворяют следующим аксиомам.

$K1$. Если $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, то

$$\lambda_{i_1} \cdot x_{i_1} \dotplus \lambda_{i_2} \cdot x_{i_2} \dotplus \ldots \dotplus \lambda_{i_n} \cdot x_{i_n} = \lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \lambda_2 \cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n \cdot x_n .$$

$K2$ Равенства квазилинейных комбинаций

$$\lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \lambda_2 \cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_m \cdot x_m = \mu_1 \cdot y_1 \dotplus \mu_2 \cdot y_2 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n \cdot y_n$$

и

$$\lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \lambda_2 \cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_m \cdot x_m \dotplus \alpha \cdot z = \mu_1 \cdot y_1 \dotplus \mu_2 \cdot y_2 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n \cdot y_n \dotplus \alpha \cdot z$$

равносильны.

$K3$. Если $0 \leq \lambda \leq 1$, то

$$\lambda\cdot(\mu_1\cdot x_1 \dotplus \mu_2\cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n\cdot x_n) = (\lambda\mu_1)\cdot x_1 \dotplus (\lambda\mu_2)\, x_2 \dotplus \ldots \dotplus (\lambda\mu_n)\cdot x_n.$$

$K4$. $\lambda\cdot x \dotplus \mu\cdot x = (\lambda+\mu)\cdot x$.

$K5$. $1\cdot x = x$ для любого $x \in K$.

$K6$. В K содержится нулевой элемент θ такой, что $0\cdot x = \theta$ для любого $x \in K$.

Примером квазилинейного множества может служить любое выпуклое подмножество X_0 произвольного линейного пространства X, в котором квазивыпуклые комбинации его элементов определены следующим образом.

Пусть x_0 – произвольный, но фиксированный элемент X_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любая конечная система элементов X_0, числа $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1$ и $\lambda_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$; положим $\lambda_1\cdot x_1 \dotplus \lambda_2\cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n\cdot x_n = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Здесь слева записана квазивыпуклая комбинация элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, а справа – выпуклая в обычном смысле комбинация элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. При этом, как нетрудно видеть, в X_0 будут иметь место все аксиомы квазилинейного множества. Действительно, аксиомы $K1$ и $K2$ следуют из известных свойств линейных операций в X.

Проверим аксиому $K3$, т.е. покажем, что

$$\lambda\cdot(\mu_1\cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n\cdot x_n) = (\lambda\mu_1)\cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\lambda\mu_n)\, x_n.$$

По определению квазивыпуклой комбинации в X_0

$$\lambda\cdot(\mu_1\cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n\cdot x_n) = \lambda(\mu_1\cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n\, x_n) + (1-\lambda)\, x_0 =$$

$$= \lambda(\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n) + (1-\lambda)\, x_0 =$$

$$= (1-\lambda+\lambda\mu_0)\, x_0 + (\lambda\mu_1)\, x_1 + \ldots + (\lambda\mu_n)\, x_n \quad \Big(\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\Big).$$

С другой стороны,

$$(\lambda\mu_1)\cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\lambda\mu_n)\cdot x_n = \Big(1-\lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i\Big)\, x_0 + (\lambda\mu_1)\, x_1 + \ldots + (\lambda\mu_n)\, x_n,$$

но $1-\lambda+\lambda\mu_0 = 1-\lambda+\lambda\Big(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i\Big) = 1-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i$,

откуда и следует $K3$.

Аксиомы $K4$ и $K5$ проверяются аналогичным образом.

Остается проверить, что элемент x_0 является нулевым элементом X_0. Действительно, для любого $x \in X_0$ квазивыпуклая комбинация $0\cdot x$ совпадает с элементом $0x + 1x_0 = x_0 \in X_0$.

Таким образом, установлена

Т е о р е м а I. Любое выпуклое подмножество произвольного линейного пространства X при соответствующем определении квазивыпуклой комбинации его элементов превращается в квазилинейное множество.

В дальнейшем будет установлено, что любое квазилинейное множество изоморфно выпуклому подмножеству некоторого линейного пространства. Рассмотрим с этой целью совокупность $\tilde{K}$ всевозможных формальных комбинаций /символов/ вида $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – элементы квазилинейного множества K, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – произвольные неотрицательные числа.

Введем в $\tilde{K}$ соотношение эквивалентности /равенства/, полагая

$$\lambda_1 x_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \lambda_m x_m = \mu_1 y_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mu_n y_n \quad \text{в} \quad \tilde{K},$$

если для некоторого $\alpha > 0$, удовлетворяющего условию $\frac{1}{\alpha} \geqslant \max\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j\right)$, в K имеет место равенство квазивыпуклых комбинаций

$$(\alpha\lambda_1)\cdot x_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\alpha\lambda_m)\cdot x_m = (\alpha\mu_1)\cdot y_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\alpha\mu_n)\cdot y_n .$$

С помощью аксиомы $K\,3$ нетрудно установить, что число в этом равенстве можно заменить любым числом α', для которого $0 < \alpha' < \alpha$.

Нетрудно проверить, что отношение равенства в $\tilde{K}$ рефлексивно и симметрично. Проверим его транзитивность.

Пусть $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n$ и

$$\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n = \gamma_1 z_1 + \ldots + \gamma_s z_s .$$

Тогда при достаточно малых $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ справедливы следующие равенства квазивыпуклых комбинаций в K:

$$(\lambda\alpha_1)\cdot x_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\lambda\alpha_m)\cdot x_m = (\lambda\beta_1)\cdot y_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\lambda\beta_n)\cdot y_n$$

и

$$(\mu\beta_1)\cdot y_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\mu\beta_n)\cdot y_n = (\mu\gamma_1)\cdot z_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\mu\gamma_s)\cdot z_s .$$

Если, например, $\lambda \leqslant \mu$, то из последнего равенства с помощью аксиомы $K\,3$, получим

$$(\lambda\beta_1)\cdot y_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\lambda\beta_n)\cdot y_n = (\lambda\gamma_1)\cdot z_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\lambda\gamma_s)\cdot z_s$$

и, таким образом,

$$(\lambda\alpha_1)\cdot x_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\lambda\alpha_m)\cdot x_m = (\lambda\gamma_1)\cdot z_1 \dot{+} \ldots \dot{+} (\lambda\gamma_s)\cdot z_s \quad \text{в} \quad K .$$

Отсюда по определению равенства в $\tilde{K}$ следует, что

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m = \gamma_1 z_1 + \ldots + \gamma_s z_s \quad \text{в} \quad \tilde{K} .$$

в чем и следовало убедиться.

Определим в $\widetilde{K}$ естественным образом действия сложения и умножения на неотрицательное число. Если $x, y \in \widetilde{K}$ и

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m, \quad y = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n,$$

то положим

$$x + y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n$$

и

$$\alpha x = (\alpha \lambda_1) x_1 + \ldots + (\alpha \lambda_m) x_m \qquad (\alpha \geqslant 0).$$

Корректность этих определений вытекает из следующих предложений.

1. Если $x' = x$ в $\widetilde{K}$, то и $x' + y = x + y$ в $\widetilde{K}$ $(x, x', y \in \widetilde{K})$.

Действительно, пусть $x' = \lambda'_1 x'_1 + \ldots + \lambda'_s x'_s$. Возьмем число $\alpha > 0$ настолько малым, что

$$\alpha(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m + \mu_1 + \ldots + \mu_n) \leqslant 1$$

и

$$\alpha(\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_m + \mu_1 + \ldots + \mu_n) \leqslant 1.$$

Тогда по определению равенства в $\widetilde{K}$

$$(\alpha \lambda'_1) x'_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \lambda'_s) x'_s = (\alpha \lambda_1) x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \lambda_m) \cdot x_m \text{ в } K.$$

По аксиоме $K2$:

$$(\alpha \lambda'_1) \cdot x'_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \lambda'_s) \cdot x'_s \dotplus (\alpha \mu_1)\, y_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \mu_n)\, y_n =$$

$$= (\alpha \lambda_1) \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \lambda_m) \cdot x_m \dotplus (\alpha \mu_1) \cdot y_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \mu_n) \cdot y_n \text{ в } K,$$

и по определению равенства в $\widetilde{K}$:

$$x' + y = x + y.$$

Аналогично доказываем, что из $y' = y$ следует $x + y' = x + y$, а тогда $x' + y' = x + y$ в $\widetilde{K}$.

Еще проще проверить корректность определения операции умножения на неотрицательное число в $\widetilde{K}$.

2. Если $x' = x$ $(x, x' \in \widetilde{K})$ и $\mu \geqslant 0$, то $\mu x' = \mu x$ в $\widetilde{K}$.

Действительно, пусть $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ и $x' = \lambda'_1 x'_1 + \ldots + \lambda'_m x'_m$. Тогда, по определению равенства в $\widetilde{K}$ при некотором $\alpha > 0$

$$(\alpha \lambda'_1) \cdot x'_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \lambda'_m) \cdot x'_m = (\alpha \lambda_1) \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha \lambda_n) \cdot x_n \quad \text{в } K.$$

Возьмем положительное число α' настолько малым, что $\alpha' \mu \leqslant \alpha$; тогда

$$(\alpha' \mu \lambda'_1) \cdot x'_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha' \mu \lambda'_m) \cdot x'_m = (\alpha' \mu \lambda_1) \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\alpha' \mu \lambda_n) \cdot x_n \text{ в } K.$$

Последнее и означает, что $\mu x' = \mu x$ в $\tilde{K}$.

Введенные в $\tilde{K}$ алгебраические операции обладают следующими свойствами.

1. $x+y=y+x \quad (x,y\in\tilde{K})$ следует из аксиомы $K1$.

2. $(x+y)+z=x+(y+z) \quad (x,y,z\in\tilde{K})$ следует из определения сложения в $\tilde{K}$.

3. Элемент 1θ, рассматриваемый как элемент $\tilde{K}$, служит нулевым элементом $\tilde{K}$.

Действительно, если $x\in\tilde{K}$, $x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$, то по определению умножения и равенства в $\tilde{K}$

$$0x=0x_1+\ldots+0x_n=1\theta.$$

Легко видеть, что элемент 1θ является также нулем $\tilde{K}$ по сложению.

4. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y \quad (x,y\in\tilde{K}, \alpha\geq 0)$ непосредственно следует из определения алгебраических операций в $\tilde{K}$.

5. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x \quad (x\in\tilde{K}, \lambda,\mu\geq 0)$ вытекает из аксиом $K1$ и $K4$.

6. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \quad (x\in\tilde{K}, \lambda,\mu\geq 0)$ следует из определения умножения в $\tilde{K}$.

7. $1x=x$ следует из определения умножения в $\tilde{K}$.

8. Из $x+z=y+z \quad (x,y,z\in\tilde{K})$ следует $x=y$ вытекает из аксиомы $K2$ и из определения равенства в $\tilde{K}$.

Любую квазивыпуклую комбинацию элементов квазилинейного множества K (в частности, любой его элемент) можно рассматривать и как элемент $\tilde{K}$. Тем самым $\tilde{K}$ представляет собой некоторое расширение K; при этом θ нулевой элемент K будет вместе с тем и нулевым элементом $\tilde{K}$.

Заметим, наконец, что любой элемент $x\in\tilde{K}$ может быть представлен в виде $\lambda x'$, где $x'\in K$ и $\lambda>0$.

Как известно, множество $\tilde{K}$ может быть расширено до линейного пространства L /например, методом формальных разностей или пар/. При этом любой элемент L может быть представлен в виде разности двух элементов $\tilde{K}$, следовательно, $\tilde{K}$ представляет собой воспроизводящий конус в пространстве L. Отсюда следует, что любой элемент L может быть представлен в виде $\lambda(x_1-x_2)$, где $x_1,x_2\in K$, а λ - произвольное число /можно предполагать, что $\lambda>0$ /.

Пусть теперь $x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$ - произвольная формаль-

ная "линейная комбинация" элементов K с /произвольными/ коэффициентами $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Эту комбинацию можно записать в виде $x=x^+-x^-$, где x^+ и x^- – элементы $\tilde{K}$. В совокупности L' всевозможных формальных комбинаций элементов K определим отношение эквивалентности /равенства/, полагая $x=y$, если $x^++y^-=x^-+y^+$ в $\tilde{K}$.

Нетрудно проверить, что L' – линейное пространство и соответствие $x\leftrightarrow x^+-x^-$ $(x\in L', x^+, x^-\in L)$ – взаимно однозначное соответствие между L и L', сохраняющее алгебраические операции, т.е. изоморфизм.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Любое квазилинейное множество K может быть расширено до линейного пространства L так, что любой элемент $x\in L$ может быть представлен в виде $x=\lambda(x_1-x_2)$, где $x_1, x_2\in K$, а λ – некоторое число; при этом K рассматриваемое как подмножество L, будет его выпуклым подмножеством.

Теоремы I и 2 могут быть объединены в одном предложении, характеризующем внутренним образом любое выпуклое подмножество произвольного линейного пространства.

Т е о р е м а 3. Классы выпуклых множеств линейных пространств и квазилинейных множеств совпадают.

Иными словами, если в выпуклом подмножестве линейного пространства определить квазивыпуклую комбинацию его элементов указанным выше путем, то оно превратится в квазилинейное множество. Вместе с тем любое квазилинейное множество изоморфно выпуклому подмножеству некоторого линейного пространства.

С помощью результатов настоящей работы можно дать внутреннюю характеристику выпуклых множеств различных классов абстрактных пространств.

Л и т е р а т у р а

I. В.В.Кузьмина, Характеризация выпуклых множеств некоторых классов абстрактных пространств. Автореферат диссертации, Калинин, 1969.

Поступила в редакцию
2.II. 1970 г.