М. К. ГАВУРИН

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ОШИБКИ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Как правило, план, составленный в задаче линейного или, более общо, математического программирования для некоторых условий, приходится реализовать в несколько отличных условиях. Это может объясняться как неточностью информации, служащей для составления плана, так и упрощениями, произведенными в условиях задачи с тем, чтобы сделать ее более доступной для решения. В частности, упрощения иногда заключаются в таком изменении условий, при котором может осуществляться группирование нескольких объектов (например, мест погрузки или разгрузки в транспортной задаче, изделий в станочной задаче) в один.

В результате различия расчетных и реальных условий фактически реализуемый план оказывается в реальных условиях неоптимальным. Цель настоящей статьи - указать метод оценки убытка, который является следствием этого. В частности, рассматриваются две простейшие задачи линейного программирования - транспортная и станочная.

Обратимся к общей задаче математического программирования (см. [I]): минимизировать функцию $\varphi(x)$ (целевую функцию) при наличии ограничений

$$g(x) \geqslant 0 . \tag{I}$$

Здесь x - вектор из m-мерного вещественного пространства R_m, $g(x)$ - вектор из R_n. Неотрицательность вектора означает неотрицательность всех его координат.

Обозначим $X = R_m$. Пусть X_g есть множество векторов $x \in X$, для которых соблюдено неравенство (I) (множество допустимых векторов, в обычной терминологии). Для целевой функции $\varphi(x)$ примем обозначение

$$\chi(g, x),$$

чтобы отметить зависимость как от условий (I), так и от x.

Подчеркнем, что $\chi(g,x)$ определена для всякой функции g (из некоторого класса G) и каждого вектора $x \in X_g$.

Будем считать, что функция g характеризует переменные условия задачи (иногда и функция φ является переменной, что лишь не намного усложняет положение вещей).

Пусть g_1 есть значение g, для которого производился расчет, и $x_1 \in X_{g_1}$ – найденный расчетом оптимальный вектор*). Однако реальные условия характеризуются вектором g_0, вообще говоря, отличным от g_1. В общем случае x_1 не будет принадлежать X_{g_0}. Это значит, что будет реализован не план x_1, а некоторый другой план $\bar{x}_0 \in X_{g_0}$. (Во многих случаях план x_1 просто невозможно реализовать в условиях g_0, например в транспортной задаче)

Будем считать, что существует оператор π_g, который каждому вектору $x \in X$ сопоставляет вектор $\pi_g(x)$ (предположение: $\pi_g(x) = x$ для $x \in X_g$ естественно, но нами не используется). Примем поэтому, что $\bar{x}_0 = \pi_{g_0}(x_1)$.

Итак, вместо плана x_0, минимизирующего $\chi(g_0,x)$ в X_{g_0}, применим план $\bar{x}_0$ и результатом будет значение целевой функции $\chi(g_0, \pi_{g_0}(x_1))$ вместо минимального значения $\chi(g_0, x_0)$.

Нашей непосредственной задачей является оценка максимального "убытка"

$$\nu(g_0, g_1) = \max_{x_1 \in \Theta(g_1)} \chi(g_0, \pi_{g_0}, (x_1)) - \chi(g_0, x_0),$$

---

*) Иногда вместо слов "вектор x" будем применять слова "план x".

где максимум берется по $\theta(g_1)$ – множеству таких векторов $x_1 \in X_{g_1}$, которые минимизируют $\chi(g_1, x)$.

Лишь в очень редких случаях можно точно указать, как именно вектор $\bar{x}_0$ строится по вектору x_1, т. е. точно указать оператор π_{g_0}. Зачастую реализацию плана, в процессе которой план x_1 заменится на $\pi_{g_0}(x_1)$, осуществляют несколько человек, каждый из которых вносит некоторую поправку. Мы, однако, заинтересованы лишь в оценке величины $\nu(g_0, g_1)$. Для нахождения этой оценки можно поступить так: найдем такой оператор $\bar{\pi}_{g_0}$, который явился бы мажорантным для всех операторов π_{g_0} (которые могут встретиться на практике) в том смысле, что

$$\max_{x_1 \in \theta(g_1)} \chi(g_0, \bar{\pi}_{g_0}, (x_1)) \geq \max_{x_1 \in \theta(g_1)} \chi(g_0, \pi_{g_0}, (x_1)).$$

Если есть точное описание такого множества алгорифмов π_{g_0}, в котором содержатся все алгорифмы, реализуемые на практике, то задачу построения $\bar{\pi}_{g_0}$ можно ставить как точную. Во многих же случаях придется строить мажорантный оператор "на глаз".

Сделаем теперь следующие, основные для наших целей, допущения. Предположим существование такой вещественной функции

$$\delta = \delta(g_0, g_1),$$

что для любых $g_0, g_1 \in G$ и для каждого $x_1 \in X_{g_1}$

$$\chi(g_0, \bar{\pi}_{g_0}(x_1)) \leq \chi(g_1, x_1) + \delta(g_1, g_0). \qquad (2)$$

Предположим, кроме того, что $\theta(g) \subset X_g$ для всех g (это условие в реальных задачах обычно оказывается справедливым).

Обозначим

$$\lambda(g_0) = \min_{x \in X_{g_0}} \chi(g_0, x), \quad \lambda(g_1) = \min_{x \in X_{g_1}} \chi(g_1, x).$$

Имеем следующие оценки. Если $x_1 \in \theta(g_1)$, то

$$\lambda(g_0) \leq \chi(g_0, \bar{\pi}_{g_0}(x_1)) \leq \chi(g_1 x_1) + \delta(g_1, g_0) = \lambda(g_1) + \delta(g_1, g_0).$$

Аналогичным образом

$$\lambda(g_1) \le \lambda(g_0) + \delta(g_0, g_1).$$

Далее,

$$\lambda(g_0, \bar{\pi}_{g_0}(x_1)) - \lambda(g_0) \le \lambda(g_1) - \lambda(g_0) + \delta(g_1, g_0) \le \delta(g_0, g_1) + \delta(g_1, g_0).$$

Отсюда

$$\nu(g_0, g_1) \le \delta(g_1, g_0) + \delta(g_0, g_1).$$

Теперь все сводится к построению функции δ. Разумеется, такое построение неоднозначно.

Мы будем заниматься двумя простейшими задачами - транспортной и станочной - строить самые грубые мажоранты $\bar{\pi}$ и связанные с ними функции δ.

Транспортная задача. Требуется минимизировать функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} |x_{ij}| \qquad (a_{ij} \ge 0,\ a_{ij} = a_{ji},\ a_{ii} = 0)$$

при условиях

$$x_{ij} = -x_{ji}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = g^i \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{4}$$

где $\{g^i\}_{i=1}^{n}$ - заданный вектор, подчиненный условию

$$\sum_{j=1}^{n} g^i = 0. \tag{5}$$

Обозначим через $\mathcal{G}$ векторы $\{g^i\}_{i=1}^{n}$, подчиненные (5), и через X_g множество $n \times n$ матриц $x = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, подчиненных условиям (3) и (4).

Пусть $g_0=\{g_0^i\}$, $g_1=\{g_1^i\}$ и пусть $\bar{x}=\{\bar{x}_{ij}\}$ есть какой-нибудь достаточно грубый план перевозок, в результате осуществления которого грузы, распределенные согласно заданию на перевозку g_1, распределяются согласно заданию g_0. Иными словами, пусть $\bar{x}$ удовлетворяет (2) и

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}=g_1^i-g_0^i \qquad (i=1,\dots,n).$$

Тогда если $x_1=\{x_{ij}\}\in X_{g_1}$ и $x_0=\{x_{ij}+\bar{x}_{ij}\}$, x_0 будет принадлежать X_{g_0}. План x_0 и можно принять за $\bar{\pi}_{g_0}(x_1)$. Ясно, что при этом

$$\lambda(g_0,\bar{\pi}_{g_0}(x_1))=\lambda(g_0,x_0)\leq\lambda(g_1,x_1)+\delta,$$

где δ есть оценка для объема перевозок по плану $\bar{x}$. Если для построения $\bar{x}$ имеется определенный алгорифм, так что $\bar{x}$ есть определенная функция от g_1 и g_0, и если оценка для объема перевозок по плану $\bar{x}$ также делается определенным образом, то $\delta=\delta(g_1,g_0)$ и при таком определении δ справедлива формула (2).

Достаточно грубым, чтобы получить мажоранту в огромном большинстве случаев, можно принять следующий способ построения $\bar{x}$. Изберем какой-нибудь номер i_0 и затем перевезем все имеющиеся в задании на перевозку $\{g_1^i-g_0^i\}$ запасы в пункт с номером i_0, а затем развезем их по местам разгрузки. Нетрудно подсчитать, что объем перевозок при этом мажорируется числом

$$\delta=\delta(g_1,g_0)=\max_j|a_{i_0j}|\sum_{i=1}^{n}|g_1^i-g_0^i|.$$

<u>Станочная задача</u>. Даны вектор с положительными составляющими $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ и матрица с неотрицательными составляющими $g=\{g_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$.

Требуется найти матрицу с неотрицательными составляющими $x = \{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ так, чтобы соблюдалась условия

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad (i=1,\dots,m, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} g_{i1} x_{i1} : \lambda_1 = \dots\dots = \sum_{i=1}^{m} g_{in} x_{in} : \lambda_n \tag{7}$$

и чтобы общее значение z отношений (7) было максимальным.

Обозначим через X_g множество матриц x (с неотрицательными элементами), удовлетворяющих условиям (6) и (7). Положим, далее, для $x \in X_g$

$$\varphi(x) = X(g, x) = -z .$$

Пусть даны матрицы $g_0 = \{g^0_{ij}\}$, $g_1 = \{g^1_{ij}\}$ и матрица $x_1 = \{x^1_{ij}\} \in Y_{g_1}$. Найдем такой индекс j_0, что

$$\sum_{i=1}^{m} g^0_{ij_0} x^1_{ij_0} : \lambda_{j_0} = \min_j \left[\sum_{i=1}^{m} g^0_{ij} x^1_{ij} : \lambda_j \right].$$

Для каждого j положим

$$x^0_{ij} = \begin{cases} x^1_{ij}, & i < m_j, \\ \kappa_j x^1_{m_j j}, & i = m_j, \\ 0, & i > m_j, \end{cases}$$

где индекс m_j и число κ_j $(0 \leq \kappa_j < 1)$ выбраны так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{m} g^0_{ij} x^0_{ij} : \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} g^0_{ij_0} x^0_{ij_0} : \lambda_{j_0} .$$

Ясно, что $x_0=\{x^0_{ij}\}\in X_{g_0}$. Положим $x_0=\bar{\pi}_{g_0}(x_1)$. Легко проверить равенство

$$\chi(g_0,\bar{\pi}_{g_0}(x_1))=-\sum_{i=1}^{m} g^0_{ij_0}x^0_{ij_0}:\lambda_{j_0}=-\sum_{i=1}^{m} g^0_{ij_0}x^1_{ij_0}:\lambda_{j_0}=$$

$$=\chi(g_1,x_1)+\sum_{i=1}^{m}(g^1_{ij_0}-g^0_{ij_0})x^1_{ij_0}:\lambda_{j_0}.$$

Отсюда ясно, что можно принять

$$\delta(g_1,g_0)=\max_j\left[\max_i(g^1_{ij}-g^0_{ij}):\lambda_j\right].$$

Замечание. В обоих приведенных примерах операторы $\bar{\pi}$ и функции δ получились очень грубыми. Не составляет особого труда построить и более экономные оценки (если только при этом не будет потеряно свойство мажорантности).

ЛИТЕРАТУРА

Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. Изд-во иностр. лит., 1961.