ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Сборник трудов
Института математики СО АН СССР

1966 г. Выпуск 3

О СТОХАСТИКЕ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ОРОШАЕМОГО ЗЕМЛЕДЕЛИЯ

В.А. Кардаш, В.Г. Пряжинская

Задачи определения экономически эффективной структуры орошаемого земледелия являются стохастическими. Действительно, на результаты сельскохозяйственного производства весьма существенное влияние оказывают погодные условия, характеризующиеся совокупностью случайных величин: количеством осадков, солнечного тепла, температурой воздуха, почвы, скоростью ветра и пр. Все они влияют на степень увлажнения почвы и приводят к непрерывному изменению во времени условий роста и развития растений. В результате этого влияния степень увлажнения почвы является случайной величиной y_t с некоторым непрерывным распределением во временном промежутке $[0, T]$, охватывающем, например, весь вегетационный период. Диапазон и характер ее колебаний, различные для разных районов, в большой степени определяют как стратегию ведения орошаемого земледелия (где и какие культуры орошать), так и тактику орошения (нормы, интенсивность, технику и способы поливов).

Выбор оптимальной структуры орошаемого земледелия в рамках модели линейного программирования сводится, таким образом, к решению следующей задачи:

Найти $\max \bar{C}\bar{X}$ при условиях $A\bar{X} \leq \bar{B}$, $\bar{X} \geq 0$ (I),
где A – $m \times n$ – матрица, $\bar{C}$ и $\bar{X}$ – n-мерные векторы, $\bar{B}$ – m-мерный вектор, и некоторые (или все) элементы из $A, \bar{B}, \bar{C}$ случайны [I,2].

Однако влияние погоды на урожайность культур и технологию производства (а следовательно, и производственные затраты, на-

пример на поливы), сказывается лишь через определенные интервалы значений y_t; каждому интервалу значений соответствует определенный набор нормативов в матрице A и векторах $\bar{B}$ и $\bar{C}$. Это обстоятельство позволяет задачу (I) рассматривать как дискретную стохастическую задачу. Если промежуток $[0,T]$ разбить на ряд, например, T интервалов времени, то в каждом из них можно выделить N промежутков возможных значений y_t^{ν}, $t=1,2,\ldots,T$; $\nu=1,2,\ldots,N$ таких, что если $y_t \in (y_t^{\nu-1}, y_t^{\nu}]$, то

$$A(y_t)=A_{t\nu};\ \bar{C}(y_t)=\bar{C}_{t\nu};\ \bar{B}(y_t)=\bar{B}_{t\nu}.$$

Интервалы должны выбираться так, чтобы охватить все случаи изменений в затратах и урожайности для наиболее влаголюбивой культуры во всем диапазоне колебаний y_t в течение вегетационного периода. Общее число таких фиксированных исходов равно NT.

При планировании сельскохозяйственного производства по усредненным нормативам влияние случайных факторов почти не учитывается. Между тем, например в Кулунде, размах колебаний урожайности в засушливые и влажные годы для отдельных культур характеризуется отношениями I:I0, I:I5 и даже I:20. Поэтому случайные колебания погодных условий, как правило, низводят практическое значение сельскохозяйственных производственно-финансовых планов до роли ненадежных прогнозов.

Привлечение аппарата теории вероятностей позволяет в какой-то мере учесть влияние случайных факторов на производственный процесс в сельском хозяйстве. Если имеется статистика погодных условий, складывавшихся в данном районе за длительный ряд (50-60) лет, то закономерности повторения условий естественного увлажнения правомерно интерполировать на будущее, взяв частоту $p_{t\nu}$ в качестве вероятностей естественного увлажнения. Эти вероятности можно использовать при численном решении дискретных стохастических задач, которые сводятся к обычным задачам линейного программирования. Так, задача (I) принимает вид: максимизировать $E\bar{C}\bar{X}$ при условиях

$$A_{t\nu}\bar{X} \leqslant \bar{B}_{t\nu},\ t=1,\ldots,T,\ \nu=1,\ldots,N,\ x \geqslant 0, \tag{2}$$

E – символ математического ожидания; C и X – $N{\cdot}T{\cdot}n$-мерные векторы. Задача имеет блочную структуру.

Однако стохастические задачи сельскохозяйственного планирования имеют следующую специфику. Структуры посевов и отраслей нельзя резко изменить в течение года, чтобы приспособиться к складывающимся погодным условиям. Поэтому наиболее соответствующая природным условиям производственная структура хозяйства (района) должна быть определена заранее. Эта особенность при

математической формулировке задачи требует обязательной постановки условий равенства площадей под определенными культурами или севооборотами при любых исходах естественного увлажнения, то есть закрепления некоторых компонент вектора-решения. Таким образом, формулировка задачи планирования орошаемого земледелия принимает вид:

Найти $\bar{X}_{t\nu} \geq 0, \; t=1,\dots,T, \; \nu=1,\dots,N$

$$\left.\begin{aligned} &\text{при условиях } A_{t\nu}\bar{X}_{t\nu} \leq \bar{B}_{t\nu} \\ &E\bar{C}_{t\nu}\bar{X}_{t\nu} \to max \\ &\sum_{j=0}^{K} x_{t\nu}^{ij} = U_i, \; t=1,2,\dots,T; \; \nu=1,2,\dots,N; \; i=1,2,\dots,m. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

U_i – константа по t и по ν;

$x_{t\nu}^{ij}$ – (ij)-ая компонента вектора $x_{t\nu}$, обозначающая площадь i-ой культуры, поливаемой j-м способом; $(i0)$ – способ без полива.

При решении такой задачи выбор структуры посевов и размещений их на поливных и богарных землях осуществляется с учетом возможности поливов в каждый из NT исходов и вероятностей их повторения.

Пусть, кроме того, вектор $\bar{B}$ зависит от некоторой другой случайной величины z_t, значения которой в интервале $[0,T]$ разбиваются на M групп с вероятностями повторения $P_{t\mu}, \mu=1,2,\dots,M$. Тогда вероятность $(t_0\nu_0\mu_0)$-ой ситуации(в предположении независимости случайных событий рассматриваемой группы [3]) определится числом $P_{t_0\nu_0\mu_0} = P_{t_0\nu_0} \cdot P_{t_0\mu_0}$.

Соответствующая задача линейного программирования формулируется так:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Найти } x_{t\nu\mu} \geq 0 \text{ при условиях:} \\ &A_{t\nu\mu}\bar{x}_{t\nu\mu} \leq \bar{B}_{t\nu\mu}; \\ &E\bar{C}_{t\nu\mu}\bar{x}_{t\nu\mu} \to max; \\ &\sum_{j=0}^{K} x_{t\nu\mu}^{ij} = U_i, \; t=1,2,\dots,T; \; \nu=1,2,\dots,N; \; \mu=1,2,\dots,M; \\ &U_i \text{ – константа по всем } t, \nu \text{ и } \mu. \quad i=1,2,\dots,m; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Задача состоит из TNM блоков. Для решения задач блочно-диагональной структуры разработан специальный алгоритм [4].

В настоящем сборнике помещена работа [5], в которой исследуются проблемы планирования орошаемого земледелия на основе рассмотренной модели (3) при $N=3$, $T=1$ (год).

Остановимся более подробно на методике расчета вероятностей исходов естественного увлажнения при планировании орошаемого земледелия. На основе данных о динамике урожайности яро-

вой пшеницы по Кулунде и осадков за вегетационный период с 1901 по 1963 годы выявлено следующее соотношение между уровнями урожайности и осадками (табл. I).

Таблица I

Группировка лет по урожайности яровой пшеницы

Подразделение лет по урожайности	Урожайность яровой пшеницы, ц/га	Количество осадков за период вегетации, мм	Количество лет	Частота повторений
Засушливые	от 0 до 5,0	от 0 до 150	26	0,41
Средние	от 5,1 до 7,0	от 120 до 180	13	0,20
Относительно влажные	от 7,1 и выше	от 130 до 250	24	0,39
Итого	x	x	63	1,00

Интервалы в мм взяты в соответствии с интервалами урожайности пшеницы. Частичное наложение их говорит о том, что на урожай влияют еще такие факторы, как накопление влаги в почве за зимний период, благоприятность распределения осадков за вегетационный период и др.

Дискретные оценки лет по засушливости необходимы для сравнения прироста урожая при орошении и без него. Однако эффективность сельскохозяйственного производства определяется не только объемом получаемой продукции, но и уровнем затрат на производство этой продукции. Доход от орошения будет тем выше, чем больше объем продукции и чем меньше издержки на поливы, каждый из которых связан с определенными затратами труда, техники и т.д. Система же поливов для каждой культуры зависит от складывающихся погодных условий. Дефицит влаги в почве рассчитывается для каждой культуры и выражается формулой:

$$q_{it\nu} = Q_{it} - (W_{t\nu} + W_t),$$

здесь Q_{it} - потребность i -ой культуры в воде в t -ый месяц вегетационного периода, $t=1,2,3,4$; $W_{t\nu}$ - количество влаги от осадков при определенном исходе $\nu=1,2,\ldots,N$ естественного увлажнения в t -ый месяц, с учетом потерь на фильтрацию, испарение и пр., W_t - запас продуктивной влаги в почве к началу месяца. Вероятностные характеристики величин $W_{t\nu}$ определяются так, как указано выше. В зависимости от величи-

Т а б л и ц а 2

Определение вероятностей годовых исходов естественного увлажнения по месячным исходам

Рассматриваемые периоды	Вероятности исходов	Номера комбинаций																													
		I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	20	2I	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3I	32
Межвегетационный	P_{10}^{-3} ж) P_{20}^{-8} ж)	в	в	в	з	з	з	з	з	з	з	з	з	в	з	в	в	в	в	з	з	з	в	в	в	в	в	в	в	в	з	з	з
Май	P_{11}^{-3} P_{21}^{-8}	з	з	з	в	з	з	з	в	з	з	з	з	в	в	в	з	з	з	з	в	в	в	з	в	в	в	в	з	в	в	в	в
Июнь	P_{12}^{-3} P_{22}^{-8}	з	з	з	з	в	в	з	з	з	в	з	з	з	з	з	в	в	з	в	в	з	з	в	в	з	в	в	в	в	в	в	в
Июль	P_{13}^{-3} P_{23}^{-8}	з	з	в	з	в	з	в	з	з	з	з	в	в	в	з	в	з	в	в	з	з	з	з	в	в	з	в	в	з	в	з	в
Август	P_{14}^{-3} P_{24}^{-8}	з	з	в	в	з	в	в	з	з	з	з	в	в	в	з	в	з	в	в	з	з	з	з	в	в	в	з	в	з	в	в	в
Характеристика года в целом		з	з	з	з	з	з	з	з	з	з	з	з	ср	ср	ср	ср	ср	ср	ср	ср	ср	ср	ср	в	в	в	в	в	в	в	в	в
Вероятности возможных годовых исходов		$p^{(1)}$	$p^{(2)}$	. . .									$p^{(12)}$	$p^{(13)}$	. . .									$p^{(23)}$	$p^{(24)}$	. . .							$p^{(32)}$
Формулы для расчета вероятностей трех годовых исходов (з., в., ср.)		$P_1 = \sum_{\ell=1}^{\ell_1} p^{(\ell)}$												$P_2 = \sum_{\ell=\ell_1+1}^{\ell_2} p^{(\ell)}$											$P_3 = \sum_{\ell=\ell_2+1}^{32} p^{(\ell)}$								

ж) Условные сокращения: з – засушливый, в – влажный, ср – средний исходы.

ны $q_{it\nu}$, а также водно-физических свойств почвы определяется число поливов при заданном способе орошения, а тем самым материальные и денежные затраты на проведение поливов.

В каждом месяце вегетационного периода можно учитывать по крайней мере два возможных исхода - относительно влажный (допускается уменьшение числа поливов профилирующей культуры)и засушливый, когда требуется максимальное число поливов. При этом, если рассматривается T месяцев и N возможных исходов в каждом из них, то можно составить $(N)^T$ наборов различных исходов за вегетационный период в целом с известными вероятностями $p_{t\nu}$.Совокупность этих наборов для конкретного района определит степень засушливости года.Применительно к условиям Сибири и Алтайского края мы рассматриваем четыре месячных периода вегетации (май - август) и межвегетационный период с двумя вероятными исходами вкаждом. Общее число комбинаций равно при этом 2^5. Разбиение лет по увлажненности проводится следующим образом. Год считается влажным, если в нем не менее трех месяцев периода вегетации достаточно влажные, средним - когда два-три месяца влажные, остальные засушливые; наконец,год считается засушливым,когда два-три месяца засушливые. Если же формально год можно отнести сразу и к среднему,и влажному или среднему и засушливому, то решающую роль должен играть учет увлажненности в мае и июне, а также учет запаса влаги к началу вегетационного периода, так как эти запасы существенно влияют на урожайность культур и, следовательно, должны окончательно определять характеристику года по засушливости.

Приведем пример расчета вероятностей годовых исходов согласно описанным правилам. Будем считать, что количества выпадающих осадков в каждый месяц составляют группу независимых событий [4]. Полный набор различных исходов за весь вегетационный период и разбиение всей группы на три исхода приведено в таблице 2. По данным Ключевской метеостанции об осадках за 30 лет распределение засушливых (до 15 мм) и относительно влажных (выше 15 мм) месячных исходов имеет вид:

Исходы, мм	май	июнь	июль	август	общее число лет
0 - 15	26	21	18	16	30
выше 15	4	9	12	14	

Отсюда вероятности месячных исходов равны: $p_{11} = 0{,}866$, $p_{21} = 0{,}133$, $p_{12} = 0{,}7$, $p_{22} = 0{,}3$, $p_{13} = 0{,}6$, $p_{23} = 0{,}4$, $p_{14} = 0{,}533$, $p_{24} = 0{,}466$, $p_{1t} + p_{2t} = 1$, $t = 1, 2, 3, 4$.

Вероятности исходов за межвегетационный период ρ_{10} =0,5, ρ_{20} =0,5. По правилу вычисления вероятности пересечения независимых событий каждое из $\rho^{(\ell)}$, $\ell = 1,2,\ldots,32$, в таблице 2 находится как произведение $\rho_{t\nu}$ относящихся к ℓ -му набору месячных исходов. Вероятности годовых исходов получились равными 0,684, 0,249, 0,067 соответственно для засушливого, среднего и относительно влажного. Формулы расчета приведены в таблице 2. Эти вероятности отражают зависимость уровней урожайности от количества и распределения осадков. Поэтому расчет вероятностей по такой схеме(с учетом взаимной зависимости исходов в разные месяцы некоторые комбинации их должны быть исключены из таблицы 2) является более правильным, чем расчет, описанный ранее (таблица I). Для сравнения укажем, что вероятности повторения годовых исходов естественного увлажнения, вычисленные для Ключей (Кулунда), по уровням урожайности за 43-летний период равны соответственно 0,5, 0,I3, 0,37.

При орошении поверхностными водами водообеспеченность источников орошения также носит стохастический характер. Вероятности возможных исходов определяются на основании гидрологических данных.

Литература

I. G.B. Dantzig, Linear Programming under uncertainty; "Management Sci", Vol. I (I955), pp. I57 - 206.

2. A.Madansky. Inequalities for stochastic Linear Programming Problems. "Management Science", 6, I960.

3. Е.С. Вентцель. Теория вероятности. "Наука", М., I964.

4. Р.А. Звягина. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. "Оптимальное планирование", вып. 2 Новосибирск, I964.

5. В.А. Кардаш, В.Г. Пряжинская. Планирование использования действующих оросительных систем.(Данный сборник,стр.57-79).