О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е

Сборник трудов
Института математики СО АН СССР

1966 г. Выпуск 3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л.И.Нестеренко, В.Г.Пряжинская

Во многих задачах линейного программирования коэффициенты не определены точно или изменяются с течением времени. Неопределенность исходных данных особенно часто проявляется в задачах, связанных с сельскохозяйственным производством. Не вполне определенными величинами являются уровни урожайности при перспективном планировании, возможность забора воды из источников орошения; с некоторым процентом погрешности определяются нормативы затрат воды, труда, техники. В реальных условиях неопределенность исходных данных возникает как за счет случайных природных факторов, так и за счет конъюнктурных условий производства: поставки техники, удобрений, стройматериалов и пр. В каждой практической задаче большое значение имеет определение области устойчивости решения, то есть нахождение пределов возможных колебаний параметров, не изменяющих окончательного базиса задачи; значения компонент вектора-решения при этом получают определенные приращения. Изучение допустимых пределов погрешностей или вынужденных изменений в задании исходных данных позволяет также определить направление, в котором изменяется значение линейной формы.

В настоящей работе исследуется устойчивость решения основной задачи производственного планирования, полученного на основе метода последовательного улучшения допустимого вектора [1]. Приведены основные результаты варьирования параметров стандартной задачи линейного программирования [2,3,4], решение которой получено на основе симплекс-метода [5].

Приведем формулировку задачи:

Найти вектор $X = (X_1 \dots X_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$X_j \geqslant 0, \quad j = 1 \cdots n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geqslant b_i, \quad i = 1 \dots r, \qquad (I)$$

величина $\mu = \min\limits_{r<i\leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ достигает максимума.

Решение задачи (I) имеет вид:

$$b + \mu z = \sum_{j=1}^{u} X_{s_j} a^{s_j} + \sum_{i=1}^{v} X_{n+k_i} e^{k_i}, \quad u + v = m - 1. \qquad (2)$$

Здесь

$$b = (b_1 \dots b_r, 0 \dots 0), \quad z = (0 \dots k_{r+1} \cdots k_m,$$
$$a^{s_j} = (a_{1s_j} \dots a_{ms_j}), \quad e^{k_i} = \underbrace{(\overbrace{0 \dots 0\, 1}^{i} \dots 0)}_{m}.$$

Векторы $a^{s_1} \dots a^{s_u} e^{k_1} \dots e^{k_v}$ образуют оптимальный базис B, при этом $a^{s_1} \dots a^{s_u}$ выбираются из матрицы коэффициентов задачи:

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Не уменьшая общности, вектор-решение можно представить в виде:

$$X = (\mu, X_{s_1} \dots X_{s_u}, X_{n+r} \dots X_{n+k_v}, 0 \dots 0).$$

Необходимым и достаточным условием оптимальности вектора X является существование объективно обусловленных оценок (о.о. оценок) $C_1, \dots C_m$. Согласно методу последовательного улучшения допустимого вектора [I], о.о. оценки определяются системой уравнений:

$$\sum_{t=1}^{m-z} c_{z+t} K_{z+t} = 1 ,$$

$$\sum_{t=1}^{m} c_t a_{ts_j} = 0 , \quad j = 1 \dots u , \qquad (3)$$

$$c_{R_i} = 0 , \quad i = 1 \dots v ,$$

и, кроме того, удовлетворяют условиям:

$$P_K = \sum_{t=1}^{m} C_t a_{tK} \le 0 , \; K = 1 \dots n . \qquad (5)$$

Обозначая матрицу коэффициентов (2) через $A = (Z, a^{s_1} \dots a^{s_u} e^{R_1} \dots e^{R_v})$, получаем, что решением системы (3) являются элементы первой строки обратной матрицы $A^{-1} = \{a'_{ij}\}$, то есть $C_1 = a'_{11}, \dots, C_m = a'_{1m}$.

Перейдем к изучению устойчивости решения задачи I при варьировании компонент векторов b, Z и a^j, $j = 1 \dots n$.

Предварительно введем ряд обозначений. B^∇ – множество индексов $(s_1 \dots s_u, R_1 \dots R_v)$, Q_1 и Q_2 – подмножества индексов изменяющихся компонент векторов b и Z, Q_3 – упорядоченное подмножество множества B^∇, Q_4 – упорядоченное подмножество индексов (i, j) изменяющихся элементов a_{ij} матрицы A, не принадлежащих базису B. Элементы, получающие приращение, сопровождаются звездочкой, т.е. $a + \Delta a = a^*$, элементы обратной матрицы – штрихами.

I. <u>Вариации компонент вектора</u> $b = (b_1 \dots b_z 0 \dots 0)$.

Пусть вектор b заменяется вектором $b^* = b + \Delta b$.

Так как компоненты b_i не входят в систему (3), в результате вариации могут измениться только значения x_{s_j}, $j = 1 \dots u$, и x_{n+R_i}, $i = 1 \dots v$, на соответствующие величины Δx_{s_j} и Δx_{n+z_i}.

В предположении, что варьирование изменяет оптимальный базис, уравнение (2) приводится к виду:

$$b^* + \mu^* Z = \sum_{j=1}^{u} x^*_{s_j} a^{s_j} + \sum_{i=1}^{v} x^*_{n+R_i} e^{R_i} , \; u+v = m-1 , \qquad (4)$$

где $X^* = (\mu^*, x^*_{s_1} \dots x^*_{s_u} x^*_{n+R_1} \dots x^*_{n+R_v}, 0 \dots 0)$.

Вычитая (2) из (4), получим систему уравнений для определения приращения $\Delta X = (\Delta \mu, \Delta X_{s_1} \dots \Delta X_{s_u} \Delta X_{n+R_1} \dots \Delta X_{n+R_r})$:

$$\left\{\begin{aligned} a_{1s_1}\Delta X_{s_1} + \dots + a_{1s_u}\Delta X_{s_u} + \rho_1 \Delta X_{n+1} &= \Delta b_1 \\ &\vdots \\ a_{zs_1}\Delta X_{s_1} + \dots + a_{zs_u}\Delta X_{s_u} + \rho_z \Delta X_{n+z} &= \Delta b_z \\ -K_{z+1}\Delta\mu + a_{z+1s_1}\Delta X_{s_1} + \dots + a_{z+1s_u}\Delta X_{s_u} + \rho_{z+1}\Delta X_{n+z+1} &= 0 \\ &\vdots \\ -K_m \Delta\mu + a_{ms_1}\Delta X_{s_1} + \dots + a_{ms_u}\Delta X_{s_u} + \rho_m \Delta X_{n+m} &= 0, \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где

$$\rho_t = \begin{cases} 1, \text{ если } e^t \in B; \\ 0, \text{ если } e^t \bar{\in} B. \end{cases}$$

Легко видеть, что матрица коэффициентов системы (5) - $\bar{A}$ с точностью до знака вектора z совпадает с матрицей A. Следовательно, обратная матрица $\bar{A}^{-1}$ также совпадает с A^{-1} с точностью до знака первой строки.

Решением этой системы является сумма произведений Δb_α, $\alpha = 1 \dots z$, на α - столбец матрицы $\bar{A}^{-1}$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mu &= \sum_{\alpha=1}^{z} -\Delta b_\alpha a'_{1\alpha} = -\sum_{\alpha=1}^{z} \Delta b_\alpha c_\alpha, \\ \Delta X_{s_t} &= \sum_{\alpha=1}^{z} \Delta b_\alpha a_{t\alpha}, \quad t = 2, \dots u+1, \\ \Delta X_{n+R_t} &= \sum_{\alpha=1}^{z} \Delta b_\alpha a_{t\alpha}, \quad t = u+2 \dots m. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для того, чтобы изменившееся решение задачи осталось оптимальным, необходимо потребовать, чтобы $X^* \geq 0$, т.е.

$$\mu + \Delta\mu \geq 0,$$

$$X_{s_t} + \Delta X_{s_t} \geq 0, \quad t = 2 \dots u+1,$$

$$X_{n+z_t} + \Delta X_{n+z_t} \geq 0, \quad t = u+2 \dots m,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\mu - \sum_{\alpha=1}^{z} \Delta b_\alpha c_\alpha \geq 0 , \\ &x_{s_t} + \sum_{\alpha=1}^{z} \Delta b_\alpha a'_{t\alpha} \geq 0 , \quad t = 2 \ldots u+1 , \\ &x_{n+R_t} + \sum_{\alpha=1}^{z} \Delta b_\alpha a'_{t\alpha} \geq 0 , \quad t = u+2 \cdots m . \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Отметим, что если изменения Δb_α известны, то приведенные соотношения удобны для проверки устойчивости полученного решения. Решение системы ($6'$) с целью определения допустимых вариаций Δb_α практически малоинтересно, поскольку оно не отражает характера изменения решения.

2. <u>Вариации компонент вектора</u> $z = (0 \ldots 0 \, K_{z+1} \ldots K_m)$.

Пусть изменяются компоненты вектора $z \in A$. Изложим вкратце последовательность действий. Сначала найдем разложения вектора z^* по векторам базиса A и вектора z по векторам измененного базиса $B^* = (z^*, a^{s_1}, \ldots a^{s_u}, e^{R_1} \ldots e^{R_v})$. После подстановки подправленных на основании известных соотношений о.о.оценок в систему (3) получим условия оптимальности базиса B^*.

Имеем:

$$z^* = \Delta\mu \, z + \sum_{i=1}^{u} \delta_i a^{s_i} + \sum_{i=1}^{v} \delta_{n+R_i} e^{R}, \quad u+v=m-1 .$$

Отсюда

$$z = \frac{1}{\Delta\mu} z^* - \sum_{i=1}^{u} \delta_i a^{s_i} - \sum_{i=1}^{v} \delta_{n+R_i} e^{R_i} . \quad (7)$$

Подставляя z в (2), получаем:

$$b = -\frac{\mu}{\Delta\mu} + \sum_{i=1}^{u} \left(x_i - \frac{\delta_i \mu}{\Delta\mu} \right) a^{s_i} + \sum_{i=1}^{v} \left(x_{n+n_j} - \frac{\delta_{n+R_j}\mu}{\Delta\mu} \right) e^{R_j} ,$$

Отсюда находим условия допустимости решения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu}{\Delta\mu} \geq 0 , \text{ т.е. } \Delta\mu > 0 , \\ &x_i - \frac{\delta_i \mu}{\Delta\mu} \geq 0 , \quad i = 1 \ldots u, n+R_1 \ldots n+R_v . \end{aligned}\right. \quad (8)$$

Для определения новых значений о.о.оценок достаточно найти поправки к элементам первой строки обратной матрицы A^{-1}. Вообще при замене в некотором базисе $\mathcal{E}$ только одного вектора f^{ℓ} на вектор P переход от матрицы $\mathcal{E}^{-1}$ к обратной матрице $(\tilde{\mathcal{E}})^{-1}$ нового базиса осуществляется по формулам (см.,например, [5]):

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{y_i}{y_\ell}\varepsilon_{\ell j}\,,\quad i \neq \ell\,,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\ell j} = \varepsilon_{\ell j}\cdot\frac{1}{y_\ell}\,,$$

где

$$\mathcal{E}^{-1}\cdot P = Y, \quad Y = \{Y_i\}\,.$$

В рассматриваемом случае $Y = (\Delta\mu, \delta_1, \ldots \delta_{n+R_\gamma})$ и j-ый элемент первой строки матрицы A^{-1} после поправки равен $\frac{a_{1j}}{\Delta\mu}$, т.е. $\tilde{C}_j = \frac{C_j}{\Delta\mu}$.

Для новых значений о.о.оценок система (3) удовлетворяется, поэтому оптимальность нового решения проверяется дополнительным требованием (3'): $\sum_{t=1}^{m}\tilde{C}_t a_{tK} \leq 0$, $K \bar{\in} B^{\nabla}$. Поскольку $\tilde{C}_t = \frac{C_t}{\Delta\mu}$, то получаем

$$\sum_{t=1}^{m}\frac{C_t}{\Delta\mu}a_{tK} = \frac{P_K}{\Delta\mu} \leq 0\,, \quad K \bar{\in} B^{\nabla}$$, а так как $P_K \leq 0$, то необходимо выполнение условия $\Delta\mu > 0$. В данном случае условия допустимости решения (8) являются и условиями оптимальности приращения компонент вектора Z.

$$\Delta\mu = \sum_{j=1}^{m} a'_{1j} Z^*_j = \sum_{j=1}^{m-2} C_{2+j}K^*_{2+j} = \sum_{j=1}^{m-2} C_{2+j}(K_{2+j} + \Delta K_{2+j}) =$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{m-2} C_{2+j}\,\Delta K_{2+j}\,,$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m} a'_{ij} Z^*_j = \sum_{j=1}^{m-2} a'_{i\,2+j} K^*_{2+j} = \sum_{j=1}^{m-2} a_{i2+j}\,\Delta K_{2+j}\,.$$

Таким образом, оптимальность базиса B^* определяется системой неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &1+\sum_{j=1}^{m-z} C_{z+j}\,\Delta K_{z+j} \geq 0\,, \\ &1+\sum_{j=1}^{m-z}\left(C_{z+j}-\frac{\mu}{x_i}a'_{i z+j}\right)\Delta K_{z+j} \geq 0 \quad i=1\ldots u, n+R, \ldots n+R_v \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Для приближенного решения этой системы можно воспользоваться одним из двух способов, предложенных Барнетом [3] для аналогичной системы. Эти способы изложены ниже при обзоре работ [2,3] .

3. <u>Вариация компонент базисного вектора</u>.

Пусть изменяются компоненты вектора $a^{S_\theta} \in A$. Для стандартной задачи линейного программирования, решаемой симплекс-методом, этот случай был рассмотрен Барнетом [3] . Приведенные ниже результаты оказались аналогичными.

Предположим, что вектор $a^{S_\theta} \in A$ получил приращение Δa^{S_θ}, $\tilde{a}^{S_\theta} = a^{S_\theta} + \Delta a^{S_\theta}$. По аналогии со случаем вариации компонент вектора z , имеем

$$\tilde{a}^{S_\theta} = \Delta\mu z + \delta_1 a^{S_1} + \cdots + \delta_u a^{S_u} + \sum_{i=1}^{v} \delta_{n+R_i} e^{R_i}, \quad u+v=m-1 .$$

$$a^{S_\theta} = -\frac{\Delta\mu}{\delta_\theta} - \frac{\delta_1}{\delta_\theta} a^{S_1} - \cdots + \frac{1}{\delta_\theta}\tilde{a}^{S_\theta} - \cdots - \frac{\delta_u}{\delta_\theta} a^{S_u} - \sum_{i=1}^{v}\frac{\delta_{n+R_i}}{\delta_\theta} e^{R_i}.$$

Подставляя a^{S_θ} в (2), находим:

$$b = -\left(\mu + \frac{\Delta\mu X_\theta}{\delta_\theta}\right) z + \left(X_1 - \frac{\delta_1 X_\theta}{\delta_\theta}\right) a^{S_1} + \cdots + \frac{X_\theta}{\delta_\theta}\tilde{a}^{S_\theta} + \cdots$$

$$+\left(X_u - \frac{\delta_u X_\theta}{\delta_\theta}\right) a^{S_u} + \cdots + \sum_{i=1}^{v}\left(X_{n+R_i} - \frac{\delta_{n+R_i} X_\theta}{\delta_\theta}\right) e^{R_i}, \quad u+v=m-1 .$$

Условия допустимости нового решения выражаются неравенствами:

$$\left.\begin{aligned}&\delta_\theta > 0\,,\\&\mu + \frac{\Delta\mu X_\theta}{\delta_\theta} \geq 0\,,\\&X_j - \frac{\delta_j X_\theta}{\delta_\theta} \geq 0\,,\quad j=1\ldots u,\ n+R_1\ldots n+R_\gamma\,,\ j\neq\theta\end{aligned}\right\}\quad (10)$$

В этом случае вектор $Y = (\Delta\mu, \delta_1 \ldots \delta_{n+R_\gamma})$ и j-ый элемент первой строки матрицы A получают поправку на величину $-\frac{\Delta\mu}{\delta_\theta} a'_{\theta j}$.

Как и в случае вариации вектора Z, оптимальность нового решения проверяется требованием (3'):

$\sum_{t=1}^{m} \tilde{C}_t a_{tK} \leq 0\,,\quad K\bar{\in}B^\nabla$. Так как $\tilde{C}_t = C_t - \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta} a_{\theta t}$,

то получаем:

$$\sum_{t=1}^{m}\left(C_t - \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta} a'_{\theta t}\right) a_{tK} = \sum_{t=1}^{m} C_t a_{tK} - \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta}\sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK} =$$

$$P_K - \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta}\sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK} \leq 0\,,\quad \text{или}\quad P_K \leq \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta}\sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK}\,,\ K\bar{\in}B^\nabla.$$

Пусть
$$\Phi_{1\theta} = \max_{K\bar{\in}B^\nabla} P_K \Big/ \sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK}\,,\quad \text{для}\quad \sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK} > 0\,.$$
$$\Phi_{2\theta} = \min_{K\bar{\in}B^\nabla} P_K \Big/ \sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK}\,,\quad \text{для}\quad \sum_{t=1}^{m} a'_{\theta t} a_{tK} < 0\,.$$

Тогда требование оптимальности преобразуется к виду:

$$-\Phi_{1\theta} \leq \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta} < \Phi_{2\theta}\,.$$

Таким образом, для того, чтобы новый базис остался оптимальным, необходимо выполнение условий:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_\theta > 0 \;, \\
&\mu + \frac{\Delta\mu \chi_\theta}{\delta_\theta} \ge 0 \;, \\
&\chi_j - \frac{\delta_j \chi_\theta}{\delta_\theta} \ge 0 \;, \quad j = 1 \ldots u,\ n+k_1, \ldots n+k_\nu,\ j \ne \theta, \\
&\Phi_{2\theta} \ge \frac{\Delta\mu}{\delta_\theta} \ge -\Phi_{1\theta} \;,
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где

$$\Delta\mu = \sum_{i=1}^{m} a_{1i} a^*_{is_\theta} = \sum_{i=1}^{m} a'_{1i}\,(a_{is_\theta} + \Delta a_{is_\theta}) = \sum_{i=1}^{m} a'_{1l}\,\Delta a_{is_\theta} \;;$$

$$\delta_\theta = \sum_{i=1}^{m} a'_{\theta+1i}\, a^*_{is_\theta} = \sum_{i=1}^{m} a'_{\theta+1l}(a_{is_\theta} + \Delta a_{is_\theta}) = 1 + \sum_{i=1}^{m} a'_{\theta+1,l}\,\Delta a_{is_\theta} \;;$$

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{m} a'_{j+1l}\, a^*_{is_\theta} = \sum_{i=1}^{m} a'_{j+1l}(a_{is_\theta} + \Delta a_{is_\theta}) = \sum_{i=1}^{m} a'_{j+1l}\,\Delta a_{is_\theta} \,.$$

Соотношения (11) выразим теперь через приращения компонент вектора a^{s_θ} и запишем в обобщенной форме:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\,\Delta a_{js_\theta} \le 1 \;, \quad i = 1 \ldots m+3 \;. \qquad (12)$$

Здесь

$$\alpha_{1j} = -a'_{\theta+1j} \;, \quad \alpha_{2j} = -\left(a'_{\theta+1,j} + \frac{\chi_\theta}{\mu} a'_{1j}\right) \;;$$

$$\alpha_{ij} = -a'_{\theta+1j} + \frac{\chi_\theta}{\chi_i} a'_{i+1j} \;, \quad i = 3 \ldots m+1 \,, \quad i \ne \theta \;;$$

$$\alpha_{m+2} = \frac{1}{\Phi_{2\theta}} a'_{1j} - a'_{\theta+1,j} \;; \quad \alpha_{m+3} = -\left(\frac{1}{\Phi_{1\theta}} a'_{1j} + a'_{\theta+1,j}\right) .$$

Приближенное решение этой системы также может быть получено одним из способов, предложенных Барнетом.

Пусть несколько векторов a^{s_θ}, $\theta \in Q_3$, получают заданные приращения Δa^{s_θ}, $\theta \in Q_3$. Последовательно внося в (11) поправ-

ки, обусловленные изменением каждого вектора $a^{s_\theta}, \theta \in Q_3$, получим систему неравенств, которая служит для проверки оптимальности решения. Если же требуется определить пределы допустимых вариаций, то подобный подход не дает простых аналитических соотношений.

Если изменяются элементы $a_{\nu t}$, $(\nu t) \in Q_4$, $t \bar{\in} B^{\nabla}$, то в этом случае измененные коэффициенты не входят в систему (2), поэтому о.о.оценки и само решение задачи не изменяются.

Оптимальность полученного решения проверяется условиями:

$$\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \bar{a}_{\nu t} \le 0, \quad t \bar{\in} B^{\nabla},$$

где

$$\bar{a}_{\nu t} = \begin{cases} a_{\nu t}, \text{ если } (\nu,t) \bar{\in} Q_4, \\ a^*_{\nu t} = a_{\nu t} + \Delta a_{\nu t}, \ (\nu,t) \in Q_4, \end{cases}$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{m} c_\nu a_{\nu t} \le - \sum_{\psi \in Q_5} c_\psi \Delta a_{\psi t}, \ t \in Q_6,$$

где $Q_5 \in Q_4$ и обозначает подмножество индексов вида $(\nu_1 t), (\nu_2 t), \ldots (\nu_\tau t)$. Q_6 – множество индексов всех столбцов, в которых изменяется по крайней мере одна компонента. Выписанная система уравнений определяет допустимый многогранник изменений $\Delta a_{\nu,t}$, $(\nu t) \in Q_4$.

При одновременном изменении в задаче I компонент вектора z и матрицы C исследование устойчивости проводится последовательным применением к C и z описанного итеративного процесса. В случае одновременного изменения компонент b, z или b, C или одновременно b, z и C задача определения допустимых вариаций становится нелинейной.

Перейдем к стандартной задаче максимизации $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j$ при условиях:

$$\left.\begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\,,\quad x_j \ge 0\,,\quad j=1,\dots n\,,\quad i=1,\dots m\,. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Исследование устойчивости решения задачи П на основе симплекс-метода [2,3,4] проводится с использованием исходной и окончательной симплекс-таблиц.

При решении задачи П симплекс-методом неравенства $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ преобразуются к равенствам $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i = b_i$, $i = 1,\dots m$, добавлением m неосновных переменных x_i. Введем некоторые обозначения. Элементы окончательной симплекс-таблицы будем сопровождать штрихами; элементы, получающие приращения- знаком $*$, то есть

$$a^*_{ij} = a_{ij} + \Delta a_{ij}\,;\ b^* = b + \Delta b\,;\ d^* = d + \Delta d\,,$$

R - множество индексов, соответствующих базисным столбцам в матрице $\mathcal{T}$;

R^* - множество индексов, соответствующих столбцам первоначального базиса в исходной симплекс-таблице.

Пусть q_{ij}, $i = 1,2,\dots m$, $j = 1,2,\dots n+m$ - коэффициенты разложения j-го вектора матрицы $\mathcal{T}$ по системе m базисных векторов, то есть

$$a^j = \sum q_{ij} a^i\,,\quad j = 1,2,\dots n+m\,.$$

Критерием оптимальности опорного плана $X = (x_1,\dots x_m, 0,\dots 0)$ служат неравенства:

$$W_j = d_j - z_j < 0\,,\ i = 1,2,\dots n+m, \text{ где } z_j = \sum_{i=1}^{m} d_i q_{ij}\,.$$

I. Изменение коэффициентов d_j линейной формы

Если изменяется коэффициент при небазисной переменной— $d_j, j\bar{\in} R$, (далее штрихами будем сопровождать элементы окончательной таблицы), то допустимые пределы приращений Δd_j определяются неравенствами:

$$-\infty \le \Delta d_j \le w'_j \ , \ j\bar{\in} R, \quad \text{при этом} \quad \Delta X_j = 0,$$

$$j = 1, \ldots, m+n, \ \Delta L(x) = 0 .$$

Изменяется коэффициент $d_j, j\in R$, при базисной переменной X_j. Обозначив верхний и нижний пределы изменения Δd через $\overline{\Delta d_j}$ и $\underline{\Delta d_j}$, соответственно, имеем $\underline{\Delta d_j} \le \Delta d_j \le \overline{\Delta d_j}$ и

$$\left.\begin{aligned} \underline{\Delta d_j} &= \max_K \left\{\frac{W'_K}{q'_K}, -\infty\right\}, \text{при} \quad q'_{jK} > 0, K\bar{\in} R \\ \overline{\Delta d_j} &= \min_K \left\{\frac{W'_K}{q'_{jK}}, +\infty\right\} \quad \text{при} \quad q'_{jK} < 0, K\in R \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

При этом $\Delta X_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m+n$; $\Delta L(x) = \Delta d_j \cdot X_j$.

При одновременном изменении всех коэффициентов Δd_t, $t = 1, \ldots, m+n$ многогранник допустимых изменений Δd_t определяется следующей системой уравнений:

$$W_j < \sum_{K=1}^{m_1} \Delta d_K q' - \Delta d_j, \quad j = m_1+1, \ldots, m_1+n. \qquad (14)$$

При этом

$$\Delta L(x) = \sum_{K=1}^{m_1} \Delta d_K \cdot X_K .$$

2. Изменение вектора b

Пусть изменяется какая-либо из компонент вектора ограничений b. Пределы $\underline{\Delta b_i}$, $\overline{\Delta b_i}$ изменения Δb_i, не меняющего базис, определяются из соотношений:

$$\underline{\Delta b_i} = \max_j \left\{ -\frac{x_j}{q_{ji}}, -\infty \right\} \text{ при } q'_{ji} > 0,\ j \in R \ ;$$

$$\overline{\Delta b_i} = \min_j \left\{ -\frac{x_j}{q_{ji}}, +\infty \right\} \text{ при } q'_{ji} < 0,\ j \in R \ .$$

Приращения переменных и линейной формы определяются по формулам:

$$\Delta X_j = \begin{cases} \Delta b_i \cdot q'_{ji}\ , & j \in B'\ , \quad \Delta L(x) = \Delta b_i \cdot z'_i \ ; \\ 0 & , j \bar{\in} B'\ , \quad z'_i = \sum\limits_{j \in B'} d_j q'_{ji} \end{cases}$$

При изменении всех компонент вектора ограничений b приращения ΔX_j, $j \in R$, являются линейными функциями приращений Δb_t, т.е. $\Delta X_j = \sum\limits_{t=1}^{m} \Delta X_j^{(t)}$, где $\Delta X_j^{(t)}$ –приращение X_j, когда изменяется только один коэффициент b_t.

Следующая система ограничений определяет многогранник допустимых изменений Δb:

$$\sum_{t=1}^{m_1} \Delta b_t \cdot X'_{jt} \geq -X_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, m_1 \ .$$

Максимизируемая функция $L(X)$ получает приращение

$\Delta L(x) = \sum\limits_{t=1}^{m} \Delta b_t \cdot z'_t$, где z'_t определялось выше.

3. Изменение базисного вектора

Пусть изменяется одна или несколько компонент базисного вектора $P_j \in B$, $j = 1, \ldots m+n$. При изменении вектора P_θ, принадлежащего системе базисных векторов (см. [3]) имеем

следующую систему уравнений, которая определяет допустимые изменения $a_{j\theta}$, $j = 1,2,\ldots,m_1$:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \Delta a_{j\theta} < 1, \quad i = 1,\ldots,m_1+2, \qquad (15)$$

где

$$\alpha_{\theta j} = -\beta_{\theta j} ;$$

$$\alpha_{ij} = \frac{X_\theta}{X_i} \beta_{ij} - \beta_{\theta j}, \quad i = 1,\ldots,m_1; \quad i \neq \theta;$$

$$\alpha_{m+1,j} = \Big(\sum_{i=1}^{m_1} d_i \beta_{ij}\Big) \Big/ \mu_{2\theta} - \beta_{\theta j} ;$$

$$\alpha_{m+2,j} = -\Big(\sum_{i=1}^{m_1} d_i \beta_{ij}\Big) \Big/ \mu_{1\theta} - \beta_{\theta j}, \quad j = 1,2,\ldots,m_1 .$$

Здесь β_{ij} - элементы матрицы, обратной к базисной; $\mu_{1\theta}$ и $\mu_{2\theta}$ находятся из соотношений:

$$\max_j \left(-\frac{W_j}{X_{\theta j}}\right) = \begin{cases} -\mu_{1S} < 0 \text{ при } X_{\theta j} < 0 ; \\ -\infty, \text{ если нет } X_{\theta j} < 0 ; \end{cases}$$

$$\min_j \left(-\frac{W_j}{X_{\theta j}}\right) = \begin{cases} \mu_{2\theta} > 0 \text{ при } X_{\theta j} > 0 ; \\ +\infty, \text{ если нет } X_{\theta j} > 0 . \end{cases}$$

В работе [3] даны два приближенных способа определения допустимых изменений a_{jS}, $j = 1,2,\ldots, m_1$. В соответствии с первым способом допустимые изменения Δa_{jS} заключаются в пределах :

$$\lambda_j \big/ \underline{\alpha}_j < \Delta a_{j\theta} < \lambda_j \big/ \bar{\alpha}_j , \qquad (16)$$

где λ_j - произвольные неотрицательные числа, такие, что $\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j = 1$, $\underline{\alpha}_j = \min \alpha_{ij}$ для $\alpha_{ij} < 0$ и $\bar{\alpha}_j = \max_i \alpha_{ij}$

для $\alpha_{ij} > 0$.

По второму способу Δa_{js} определяются неравенством:

$$|\Delta a_{j\theta}| < 1/(\max_i \sum_j |a_{ij}|) \qquad (17)$$

Если изменяется небазисный вектор P_μ, то приращения $\Delta a_{i\mu}$, не изменяющие оптимального базиса, должны удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{z_i}{W_\mu} \Delta a_{i\mu} \leq 1, \quad \mu \bar{\in} R.$$

Приближенные пределы допустимых изменений $\Delta a_{i\mu}$ определяются так же, как и в случае варьирования базисного вектора.

Далее сравним области устойчивости стандартной задачи линейного программирования, полученные на основе симплекс-метода и метода улучшения допустимого вектора. Для удобства применения последнего метода стандартную задачу II представим в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} \text{максимизировать } D \cdot X \\ \text{при условиях } -\Pi X \geq -b, \ X \geq 0 \ . \end{array}\right\} \quad (II')$$

Задача II' является частным случаем задачи I при $K^\mu = DX$, $z = m - 1 = m_1$ и $D = a_m = (-a_{m_1}, \ldots, -a_{mn})$. Для простоты примем $K = 1$.

Перейдем непосредственно к сравнению допустимых вариаций коэффициентов в задаче II'. Отметим, что о.о.оценки для задачи II' совпадают с z_i, получаемыми при решении этой же задачи симплекс-методом. Действительно, условия оптимальности решения (3) с учетом $K = 1$ преобразуется к виду:

$$\left.\begin{array}{ll} C_m = 1 \ , & \\ \sum_{i=1}^{m-1} C_i a_{is_j} = -a_{jm} \ , & j = 1 \ldots n, \\ C_{R_i} = 0 \ , & i = 1 \ldots r . \end{array}\right\} \quad (18)$$

Так как $(-a_{m1} \ldots -a_{mn}) = D$, то, умножая справа систему уравнений (18) на матрицу $\tilde{A}^{-1}$ $(\tilde{A} = \{a_{ij}\}$ — матрица коэффициентов системы (I8)), получим $C = +\tilde{D} \cdot \tilde{A}^{-1} = +\tilde{Z}$; $\tilde{D}$ - вектор коэффициентов линейной формы, соответствующий базисным переменным;

При варьировании вектора ограничений b из (6') и (I5) получаем полное совпадение результатов $/a'_{t\alpha} = q'_{t\alpha}/$. При изменении компонент базисного вектора a^{s_0} неравенства (I2) и (I5), определяющие пределы допустимых изменений компонент с учетом $a_{ij} = c_j = \sum_{i=1}^{n} d_i \tilde{a}'_{ij}$, совпадают полностью.

При варьировании компонент небазисного вектора результаты также совпадают.

Специфика задачи I не позволяет определить допустимые изменения коэффициентов максимизируемой функции. Однако для задачи II' оценки можно получить непосредственно . Пусть изменяется один коэффициент $d_i \in R$. В этом случае изменяются о.о.оценки и величина поправок определится системой (I8):

$$\Delta C = \Delta D \cdot \tilde{A}^{-1}, \quad \text{где } \Delta\tilde{D} = (0 \ldots \Delta d_i \ldots 0), \text{ т.е.}$$

$$\Delta C_j = \Delta d_i \tilde{a}'_{ij} .$$

Проверим требование оптимальности решения (3') :

$$\sum_{i=1}^{m} C_j^* a_{jk} \le 0, \; C_m = 1, \; C_j^* = C_j + \Delta d_i \tilde{a}'_{ij}, \; k \bar{\in} B^{\triangledown} .$$

После подстановки C^*_j в (3') получаем:

$$\sum_{j=1}^{m-1} (C_j + \Delta d_i \tilde{a}'_{ij}) a_{jk} = z_k + \Delta d_i \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{a}'_{ij} \cdot a_{jk} \le -a_{jm}, \; k \in B^{\triangledown} .$$

Так как $\sum_{j=1}^{m-1} \bar{a}'_{ij} a_{jk} = q'_{ik}$ и $d_j = -a_{jm}$, то последнее неравенство преобразуется к виду:

$$\Delta d_i q_{ik} \le d_k - z_k = W_k ,$$

и соотношения (I3) остаются в силе. В случае изменения нескольких коэффициентов линейной формы DX допустимые изменения также определяются одним соотношением (I4).

Таким образом, решая задачу линейного программирования (П) или (П') симплекс-методом или методом последовательного улучшения допустимого вектора одновременно с решением задачи по приведенным соотношениям можно получить область устойчивости решения.

Литература

I. Л.В.Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., I960 г.

2. C.M.Shetty, Sensitivity Analysis in Linear Programming. The Yournal of Industrual engineering, 1959, vol.X, 5.

3. S.Barnet, Stability of the solution to a linear programming problem. Operat.Res.Quart., 1962, vol.13, 33.

4. C.M.Shetty, Solving linear programming problems with variable parameters. The Joirnal of Industr.Engn., vol.X, 6.November-December, 1959.

5. С.Гасс. Линейное программирование. Физматгиз, I96I.