ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Сборник трудов

1966 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 5

В. Л. МАКАРОВ

# ОПТИМАЛЬНОЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Как отмечалось в § 4 главы II, при нахождении оптимального функционирования динамических моделей методами линейного программирования приходится задаваться числом периодов времени $T$, и план модели, особенно в последние периоды, существенно зависит от $T$. Однако замечено, что план для начальных периодов зависит от $T$ в меньшей степени, и чем больше $T$, тем меньше эта зависимость.

В связи с этим возникает задача выяснения поведения решения (особенно для начальных периодов) при $T \to \infty$. С этим вопросом тесно связана так называемая проблема забалансового периода. При решении динамической задачи на конечном временном интервале необходимо задавать некоторые дополнительные ограничения, связанные с объемом мощностей на конец планового периода. Это связано с тем, что большинство критериев оптимальности не дают плана, который обеспечивает достаточно большой задел для будущего.

Одно из решений проблемы забалансового периода состоит в том, что модель доопределяется на весь бесконечный временной интервал определенным регулярным образом. Именно считается, что исключая начальный плановый период, экономика описывается с помощью замкнутой линейной модели Неймана. Т.е., в частности, конечное потребление и ресурсы природы и труда заданы не в виде ограничений, а с помощью производственных способов.

Мы начнем описание с модели Неймана.

## § I. Модель Неймана и ее обобщения

Работы самого Неймана по этому вопросу мало доступны, но имеется хорошее изложение модели в [ I ], которому мы здесь будем следовать.

Обобщенная модель Неймана $M$ задается парой матриц $A, B$ с неотрицательными элементами. Кроме того, 1) $A$ не имеет нулевых строк, 2) $B$ не имеет нулевых столбцов.

Пара строк (векторов) $a, b$ с одинаковыми номерами есть технологический способ, заданный в канонической форме, описанной в главе I § 2.

Условие 2), накладываемое на матрицу $B$, есть так называемое условие замкнутости, в соответствии с которым в модели производятся все продукты.

$M'$ называется <u>подмоделью</u> $M$, если $M'$ образуется подмножеством способов из $M$ и сама является замкнутой моделью.

<u>Определение</u>. Моделью типа фон Неймана называется объект $\mathfrak{M}(A(t), B(t), X_0, T, f(t), q(t), K)$, где $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы обычной модели Неймана для каждого $t$, причем, $B(t)$ не обязательно удовлетворяет условию 2), $X_0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$ – начальные количества продуктов, $T$ – число периодов времени, $f(t)$ и $q(t)$ – заданные вектор-функции, определенные для $t = 1, 2, \dots, T$, значениями которых являются $n$-мерные векторы, показывающие в случае $f(t)$ количества продуктов, которые поступают извне в конце периода $t$, в случае $q(t)$ – количества продуктов, которые изымаются из системы в конце периода $t$. Вектор $K = (K_1, \dots, K_n)$ указывает соотношение, в котором надо иметь продукты в период $T$.

$X(t)$ – вектор количеств продуктов в начале периода $t$ – будем называть состоянием $\mathfrak{M}$ в момент $t$.

$$X_i(t+1) = \sum_s (b_i^s - a_i^s) h^s(t) + f(t) - q(t) \qquad (\text{III}.1.1)$$

$$\sum_s a_i^s h^s(t) = X_i(t)$$
$$t = 1, \dots, T. \quad X(1) = X_0. \qquad (\text{III}.1.2)$$

Вектор $H(t) = (h^1(t) \dots h^s(t))$, удовлетворяющий условиям (III.1.2), называется допустимым планом в состоянии

$X(t)$. Последовательность планов $H=(H(1), H(2)\dots)$ называется допустимой, если каждый $H(t)$ является допустимым планом в состоянии $X(t)$. Здесь $X=(X_0, X(2), X(3)\dots)$ – последовательность состояний модели, порожденная планом $H$.

Множество всех $X(t)$, соответствующее множеству всех допустимых планов $H=(H(1)\dots H(t))$ при начальном состоянии и нагрузке $f(t)$ и $q(t)$, будем обозначать через $R_{x_0,t}(f,q)$. Для математически замкнутых моделей, т.е. для которых $f(t)=q(t)=0$, будем писать просто $R_{x_0,t}$.

Для модели $\mathfrak{M}$ могут быть указаны различные постановки экстремальных задач.

Например. Задана $\mathfrak{M}(A(t), B(t), X_0, T, f(t), q(t), K)$. Требуется найти такой допустимый план $\{H(t)=(h^1(t)\dots h^s(t))\}$ $t=1,\dots,T$, чтобы $X(T)=\mu K$ и $\mu - max$. Эта задача является обычной динамической задачей линейного программирования, сформулированной в форме (I.2.3).

Основная экстремальная задача, которая будет изучаться в этой главе:

Задача ($\Delta$). Задана $\mathfrak{M}(A(t), B(t), X_0, f(t), q(t))$, $T=\infty$. Требуется найти такой план $H=\{H(t)\}_{t=1}^{t=\infty}$, что соответствующая ему траектория состояний $X=\{X(t)\}_{t=1}^{t=\infty}$ удовлетворяет следующему условию: не существует допустимого плана $H(t)$, что $X'(t)=\lambda X(t)$, $\lambda>1$. План $H=\{H(t)\}$, являющийся решением задачи ($\Delta$), будем называть $\infty$-оптимальным.

## § 2. О критерии оптимальности в динамических моделях

В этом параграфе мы обсудим экономическую целесообразность критериев оптимальности, которые не зависят от величины рассматриваемого периода.

Как уже отмечалось во введении к этой главе, план первых периодов времени тем меньше зависит от момента, в который ищется оптимум, чем дальше расположен этот конечный момент. Поэтому естественна предельная постановка вопроса, когда $T\to\infty$.

Задача ($\Delta$) есть как раз реализация этой постановки. Заметим, что любая конечная часть $\infty$-оптимального плана оптимальна в обычно линейнопрограммном смысле, (т.е. является решением задачи линейного программирования с соответствующим образом выбранном ассортиментным вектором $K$ или линейной формой с $X$). Экономический аргумент в пользу разумности постановки задачи ( $\Delta$ ), в частности, таков:

$\infty$ -оптимальная траектория $X = \{X(t)\}$ единственная, которая обладает тем свойством, что не существует другой допустимой траектории $X'(t)$, что $X'(t) = \lambda X(t)$, $\lambda > 1$ для какого-нибудь $t$. Т.е. для любой траектории $X'(t)$, которая не является $\infty$ -оптимальной, найдется такой момент $t_0$, что точки $X(t_0), X(t_0+1)$ будут внутренними в соответствующих допустимых многогранных множествах в пространстве продуктов. Поскольку $\infty$ -оптимальная траекория $X$ такова, что векторы $X(t)$ меняют свое направление при изменении $t$, то решение динамической задачи линейного программирования может только случайно совпадать с отрезком $\infty$ -оптимального плана. Другими словами, в большинстве случаев оказывается так, что при решении задачи на экстремум функционала в момент $T$, полученный на интервале $[0,T]$ план нельзя продолжить до оптимального по любому критерию на отрезке $[0,T']$, $T' > T$.

Практически задача ( $\Delta$ ) не может быть сформулирована в полном объеме, т.к. мы не знаем заранее последовательности матриц $A(t)$ и $B(t)$, а можем знать только начальный кусок этих последовательностей до текущего момента. Действительно, мы не можем предугадать, какие новые технологические способы появятся через некоторое время. Правда, с другой стороны, практически нам не надо знать и всего $\infty$ -оптимального плана, а только его некоторый начальный кусок. Однако, легко видеть, что $\infty$ -оптимальный план в момент $t_1$ зависит от матриц $A(t)$ и $B(t)$ в моменты $t > t_1$. (Например, если бы было известно, что в таком-то году, в таком-то месте откроют залежи руды, то туда заранее провели бы железную дорогу).

Таким образом, вместо задачи ( $\Delta$ ) практически мы вынуждены рассматривать задачу ($\Delta\Delta$) :

<u>Задача ($\Delta\Delta$)</u>. Имеется $\mathfrak{M}(A,B,X_0,f(t),q(t)), T=\infty$
Требуется найти план $H(1)$, такой, что его можно продолжить до $\infty$ -оптимального плана, являющегося решением задачи ($\Delta$), в которой $A(t)=A$, $B(t)=B$ для любого $t=1,2,\ldots$ .

Обсудим критерий оптимальности, предлагаемый в задаче ($\Delta\Delta$). Этот критерий основан на том, что матрицы $A$ и $B$ все время будут оставаться неизменными. Матрицы $A$ и $B$ характеризуют существующее состояние техники, а также ее ближайшее будущее. (Т.к. в технологические матрицы входят все известные к настоящему моменту способы изготовления продуктов, в том числе и те, до реального внедрения в производство которых еще может быть очень далеко).

Таким образом, в задаче ($\Delta\Delta$) план на первый период выбирается на основании знания всего технологического состояния производства, в предположении, что этот технический уровень будет реально осуществляться.

План $H(1)$ будет не слишком сильно отличаться от $\bar{H}(1)$ - начального курса $\infty$ -оптимального плана задачи ($\Delta$)

Действительно, в модели, описывающей некоторую реальную экономическую систему, число технологических способов очень велико. В каждый период времени новых технологических способов открывается не так уж много, притом большинство из них основано на тех же физических принципах, что и старые способы. Поэтому матрицы $A(t)$ и $B(t)$ расширяются при переходе от одного периода к другому очень незначительно по отношению к общей их размерности, и по своей структуре добавленные способы мало отличаются от старых.

Кроме того ясно, что решение $H(1)$ задачи ($\Delta\Delta$) будет ближе к $\bar{H}(1)$ в среднем (для каждой конкретной реализации это, конечно, может быть и не так), чем план, полученный из решения соответствующей задачи линейного программирования с любым критерием оптимальности и любым периодом времени $T$ .

Случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ не являются константными функциями, в настоящей работе не исследован, хотя он не сомненно представляет интерес. Заметим только, что если в модели $\mathfrak{M}$ матрицы $A(t)$ и $B(t)$ не являются константами лишь для конечного числа периодов, то можно построить эквивалентную $\mathfrak{M}$ модель $\mathfrak{M}'$ , у которой матрицы $A'(t)$ и $B'(t)$ не изменяются во времени.

Наконец, чтобы закончить вопрос о критериях оптимальности в динамических задачах, следует сказать, что в настоящей работе оставлен в стороне вопрос о моделировании конечного потребления продуктов. Другими словами структура и объем конечного потребления предполагаются фиксированными, определенными из соображений, лежащих за рамками модели. Поэтому основная проблема о выборе доли продукции, идущей на дальнейшее расширение производства в ущерб текущему конечному потреблению, здесь не рассматривается. Рассматривается лишь вопрос, как наилучшим образом распорядиться продукцией идущей на накопление. Ниже ( в §4), где речь идет об обменных ценах, мы еще раз возвращаемся к вопросу о критерии оптимальности.

## § 3. Еще о замкнутой модели Неймана.

Прежде чем говорить о возможности решения задач ( $\Delta$ ) и ( $\Delta\Delta$ ) введем необходимые понятия и сформулируем потребующиеся далее результаты.

Пусть имеется модель фон Неймана $M(A, B)$ .

$$A = \|a_i^s\| \quad , \quad B = \|b_i^s\| \quad i = 1,\dots,n, \; s = 1,\dots,S$$

I. Технологический темп роста модели $M$

$$\alpha = \max_{h,\, h>0} \min_i \frac{\sum_s b_i^s h^s}{\sum_s a_i^s h^s} \qquad (\text{Ш}.3.1)$$

II. Экономический темп роста модели $M$

$$\beta = \min_{p} \max_{s} \frac{(b^s p)}{(a^s p)} \quad , \qquad (\text{Ш}.3.2)$$

где $p$ - любой вектор размерности $n$ с неотрицательными компонетами $\sum_i p_i > 0$ .

Ш. $p$ , на котором достигается $\min$ в выражении (Ш. 3.2), называется <u>оптимальным вектором цен</u> модели $M$ .

IУ. $\bar{H} = (\bar{h}^1, \dots, \bar{h}^s)$ , на котором достигается $\max$ в выражении (Ш.3.1), называется оптимальным планом модели $M$ .

В дальнейшем будем рассматривать только такие замкнутые модели Неймана, для которых $\alpha = \beta$ . Условия, накладываемые на $M$ , при которых $\alpha = \beta$ , можно найти в работе [ 2 ]. Точная формулировка этих условий довольна громоздка и к тому же требует введения новых понятий, которые дальше не используются. Поэтому мы ограничимся несколько вольным толкованием результа - тов из [ 2 ], чтобы только показать, что в моделях, описывающих реальные экономические процессы, условия, при которых $\alpha = \beta$ , как правило, выполняются.

Итак, условия в грубой формулировке таковы :

$\alpha = \beta$ , если выполнено одно из 2-х следующих усло - вий :

1. Найдется оптимальный план, выпускающий все продукты, участвующие в модели.

2. Нет оптимального плана, выпускающего все продукты, и часть модели, которая выпускает продукты, не участвующие ни в

каком оптимальном плане, не может обеспечить темпа роста этих продуктов, превосходящего $\alpha$ , каким бы темпом в нее не поступали продукты, только затрачиваемые ею.

Введем еще некоторые понятия :

У. План $H = (h^1, \ldots, h^s)$ называется равновесным, если найдется такой вектор цен $p$ , что удовлетворяются соотношения :

$$h^s \sum_i b_i^s p_i = \sum_i \frac{h^s a_i^s \sum_s h^s b_i^s p_i}{\sum_s h^s a_i^s} \qquad (\text{Ш.3.3})$$

для всех $s = 1, \ldots, S$ .

$$\frac{\sum_s h^s b_1^s}{\sum_s h^s a_1^s} = \ldots = \frac{\sum_s h^s b_k^s}{\sum_s h^s a_k^s} = \alpha(H) \qquad (\text{Ш.3.4})$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ таких, что $p_i > 0$ .

$$\frac{\sum h^s b_i^s}{\sum h^s a_i^s} \geqslant \alpha(H) \qquad (\text{Ш.3.5})$$

для всех $i = k+1, \ldots, n$ таких, что $p_i = 0$ .

Условие (Ш.3.3) означает, что стоимость продукции, произведенной $S$ -тым способом должна быть равна стоимости продукции, получаемой $S$ -тым способом на следующем шаге согласно плану $H$ , т.е. если продукция, которая была произведена на первом шаге, распределяется пропорционально первоначальному распределению, то стоимость продукции, полученной каждым способом, должна быть равная стоимости произведенной этим способом продукции.

Условие (Ш.3.4) означает, что продукты, имеющие ненулевые цены, должны возрастать одинаковым темпом.

По условию (Ш.3.5) в равновесном плане продукты, имеющие нулевую цену, должны возрастать в не меньшем темпе, чем остальные.

Вектор $p$ , удовлетворяющий условиям (Ш.3.3), (Ш.3.4), (Ш.3.5) называется <u>вектором цен равновесия.</u>

УI. $\alpha_i^s(H)$ -темп роста продукта $[i]$ в способе $[S]$ при плане $H$ .

<u>Теорема Ш.I.</u> Оптимальный по Нейману план является равно -

весным, и оптимальный вектор цен является для него вектором цен равновесия.

Доказательство. Условия (Ш.3.4), (Ш.3.5) выполнены для оптимальных $\bar{H}$ и $\bar{p}$ [I]. Покажем, что для них и условие (Ш.3.3) будет выполнено. Пусть $\alpha_i(H)$ темп роста продукта в оптимальном плане $H$. Тогда $\alpha_i^s(\bar{H}) = \alpha_i(\bar{H})$, т.к. в противном случае $\alpha_i(H)$ не может быть постоянным при переходе от каждого предыдущего момента к последующему. Однако, если это так, то величина $\sum_s h^s b_i^s$ должна распределяться по способам $S$ пропорционально распределению на предыдущем шаге. Остается показать, что $p$ удовлетворяет уравнениям (Ш.3.3). По определению

$$\frac{b^s, \bar{p}}{a^s, \bar{p}} \leq \alpha(\bar{H}) \qquad (Ш.3.6)$$

Вектор цен равновесия $p$ удовлетворяет (Ш.3.6). Действительно, если бы для некоторого $[S]$ было

$\dfrac{b^s p}{a^s p} > \alpha(\bar{H})$, то этот способ оказался бы в привелигированном положении и нарушил бы равновесие (неизменность пропорциональности).

Теорема (Ш.I) выясняет экономический смысл цен в оптимальном состоянии модели Неймана. Именно, цены определяются теми пропорциями, в которых технологические способы обмениваются продуктами. Т.е. $\bar{p}$ действительно выполняет функции цен и модели в том смысле, что в соответствии с ними продаются и покупаются продукты.

## § 4. О свойствах решения задачи ($\Delta\Delta$) и способах его отыскания.

I. Сначала рассматривается математически замкнутые модели, т.е. такие, у которых $f(t)$ и $q(t) = 0$.

Заметим, что если в периоде $t$ участвует $n$ технологических способов, составляющих квадратные матрицы $A$ и $B$, то переход от состояния $X(t)$ к $X(t+1)$ можно записывать так:

$$X(t+1) = B^* A^{*-1} X(t), \qquad (Ш.4.I)$$

в предположении, конечно, что $A$ существует. Здесь $*$ -значок транспонирования.

Действительно, $x(t)=A^*H(t)$, $H(t)=A^{*-1}x(t)$

$$X(t+1)=B^*H(t)$$

Соответственно, для нахождения о.о.оценок имеем

$$\pi(t+1)=B^{-1}A\pi(t) \qquad (\text{Ш}.4.2)$$

ибо по теореме о характеристике оптимального плана

$$B\pi(t+1)=A\pi(t)$$

Самый простой класс моделей типа Неймана, для которых нахождение $\infty$ -оптимального плана очень просто, есть класс моделей $\mathfrak{M}(E,B,x_0)$, $f(t)=g(t)\equiv 0$, $T=\infty$.

$E$ -единичная матрица, следовательно, число способов равно числу продуктов. Ясно, что $\infty$-оптимальный план определяется по формулам

$$\bar{X}(t+1)=B\bar{X}(t)=B^tX_0$$

$$\bar{H}(t)=\bar{X}(t) \qquad (\text{Ш}.4.3)$$

В частности, если $X_0=\bar{\bar{H}}$, где $\bar{\bar{H}}$ оптимальный план модели Неймана с матрицами $E,B$, то

$$\bar{X}(t+1)=\alpha\bar{X}(t)=\alpha^tX_0,$$

где $\alpha$ темп роста модели. Таким образом, $\alpha$ есть наибольшее по модулю собственное число матрицы $B$. Известно, что если максимальное по модулю собственное число матрицы единственное, то $B^tX_0$ стремится к главному собственному вектору при $t\to\infty$. Это означает, что $\infty$ -оптимальный план для периода $t$ $\bar{H}(t)$ задачи ($\Delta$), для которой $A(t)=E$, $B(t)=B$, стремится (по направлению) к оптимальному плану соответствующей модели Неймана, независимо от того, каково было начальное состояние $X_0$, (кроме особых случаев).

Из (Ш.4.3) видно, что $\infty$ -оптимальный план $\{\bar{H}(t)\}_{t=1}^{t=\infty}$ единственный. Т.е. задание начального состояния полностью определяет дальнейшую траекторию состояния модели.

Попытаемся выяснить свойства $\infty$ -оптимальных планов. Естественно предположить, что о.о.оценки $\infty$ -оптимального плана должны удовлетворять соотношению (Ш.3.3). Запишем (Ш.3.3) в таком виде

$$\sum_i(b_i^s-\alpha_i(t)a_i^s)\pi_i(t)\leq 0 \qquad (\text{Ш}.4.4)$$

Знак равенства имеет место для тех $s$, для которых $h^s(t)>0$.

Здесь $\alpha_i(t)=\dfrac{\sum_s h^s(t)b_i^s}{\sum_s h^s(t)a_i^s}$ есть темп роста продукта $[i]$

в период $t$ по плану $H(t)$ .

С другой стороны, свойства оптимального плана задачи линейного программирования (теорема П.I) дают

$$\sum_i (b_i^s \pi_i(t+1) - a_i^s \pi_i(t)) \leqslant 0 \qquad (Ш.4.5)$$

(Равенство для тех $s$ , для которых $h^s > 0$ ).

Сопоставляя (Ш.4.4) и (Ш.4.5), получаем

$$\pi_i(t+1) = \frac{\pi_i(t)}{\alpha_i(t)} \qquad (Ш.4.6)$$

для всех $i = 1,\dots,n$ .

Равенство (Ш.4.6) означает, что в $\infty$ -оптимальном плане о.о.оценка продукта $[i]$ уменьшается в последующем периоде пропорционально темпу роста этого продукта. Запишем все условия, которым удовлетворяет $\bar{H}(1)$ .

$$A^* \bar{H}(1) = X_0 \qquad (Ш.4.7)$$

$$\sum_i (b_i^s \pi_i(1) - \alpha_i(1) a_i^s \pi_i(1)) \leqslant 0$$

$$H \geqslant 0,\ \pi \geqslant 0,\ \sum_i \pi_i > 0 \qquad (Ш.4.8)$$

(Для $h^s > 0$ имеет место равенство).

Применительно к модели $\mathfrak{M}(E, B, X_0)$ условие (Ш.4.8) запишется так

$$\sum_i \pi_i \left( b_i^s - \frac{\sum b_i^s x_0^s \delta_{i,s}}{X_0} \right) = 0,$$

где $\delta_{i,s}$ -символ Кронекера, $x_0^s$ -интенсивность применения способа $s$ , равная начальному количеству продукта $s$ .

Обозначим матрицу $\left\| b_i^s - \frac{\sum b_i^s x_0 \delta_{i,s}}{x_0^i} \right\|$ через $C$ ,

$$C\pi = 0 \qquad (Ш.4.9)$$

Из условия (Ш.3.3) для моделей $\mathfrak{M}(E,B)$ легко получить экономическую интерпретацию оценок $\{\pi_i\}$ . Имеем

$$h^s \sum_i b_i^s \pi_i = \sum_i \frac{h^s a_i^s \sum_s h^s b_i^s \pi_i}{\sum_s h^s a_i^s} .$$

Заменяя $\| a_i^s \|$ на единичную матрицу, получаем

$$x_0^s \sum_i b_i^s \pi_i = \sum_j x_0^j b_s^j \pi_s . \qquad (Ш.4.10)$$

Правая часть (Ш.4.10) есть сумма денег способа $[S]$ , которую он получает от продажи всех произведенных им продуктов, левая часть (Ш.4.10)-цена всей произведенной продукции $[S]$ . Таким образом, $\pi$ показывает, в каких пропорциях происходит движение продуктов между способами. Из (Ш.4.9) видно, что обменные соотношения для продуктов между способами могут быть установлены справедливо только в том случае, когда определитель матрицы $C$ равен нулю. Например, в двухпродуктовой модели $\mathfrak{M}(E,B,x_0)$ справедливые обменные соотношения устанавливаются всегда, если $x_0>0$. Действительно, любая двухпродуктовая модель, у которой $A=E$, эквивалентна, в смысле обменных соотношений между способами, модели с матрицами

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & b_1 \\ b_2, & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{Vmatrix} -\dfrac{b_2 x_0^{(2)}}{x_0^{(1)}} & b_1 \\ b_2 & -\dfrac{b_1 x_0^{(1)}}{x_0^{(2)}} \end{Vmatrix}$$

$\det C=0$ для любых $x_0>0$.

Рассмотрим пример 2-х продуктовой модели

$$A=\begin{Vmatrix} I & 2 \\ I & I \\ I & I \\ 2 & I \end{Vmatrix} \qquad B=\begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$$

$$x_0 = (I;\ I,I).$$

Легко показать, что $\infty$ -оптимальный план для $t=1$

$$\bar{H}(I) = (0{,}I;\ 0{,}I5;\ 0{,}75;\ 0\ ).$$

Соответсвенно, о.о.оценки $\sigma(I) = (4;I\ )$, $\sigma(2) = (I;I)$, т.е. соотношения (Ш.3.3) для этой модели в первый период не выполняются. Поэтому указанные соотношения не могут характеризовать $\infty$ -оптимальный план в любых моделях типа Неймана и в любой момент времени.

П. Введем понятие эквивалентных относительно некоторой модели наборов продуктов.

Пусть имеется модель типа Неймана $\mathfrak{M}(A,B,f(t),g(t))$, у которой не фиксировано начальное состояние. Наборы продуктов $x'$ и $x''$ называются эквивалентными относительно $\mathfrak{M}$, если не существует такого $t$, что множество $R_{x;t}(f,g)$

строго содержится в множестве $R_{x'';t}$ или наоборот. Термин „ $R_{x;t}$ строго содержится в $R_{x'';t}$ " здесь понимается в следующем смысле: любая граничная точка множества $R_{x;t}$ кроме тех, которые лежат на гранях $x_i = 0$ , является внутренней точкой $R_{x'';t}$ . Другими словами, для любого $x \in R_{x;t}(f,g)$ найдется число $\lambda > 1$ , что $\lambda x \in R_{x'';t}(f,g)$ . Выясним, какие наборы продуктов будут эквивалентными относительно математически замкнутых моделей $\mathfrak{M}(E,B)$ .

Предварительно установим такой факт.

Пусть имеются две точки $x_0$ и $\pi_0$ , с которых начинаются последовательности

$$x_0,\ A^1x_0,\ A^2x_0,\dots,A^tx_0,\dots$$

$$\pi_0,\ A^{*-1}\pi_0,\ A^{*-2}\pi_0,\dots,A^{*-t}\pi_0,\dots$$

Тогда $(A^t x_0,\ A^{*-t}\pi_0) = (A^{t+1}x_0,\ A^{*-t-1}\pi)$.

Действительно, $(A^{t+1}x_0,\ A^{*-t-1}\pi_0) = (A^t x_0,\ A\cdot A^{*-t-1}\pi_0)$

по определению сопряженного оператора.

Кроме того, $(A^t x_0, A^{*-t+1}\pi_0) = (A^{t+1}x_0,\ A^{*-t}\pi_0)$

также по определению сопряженного оператора.

Поэтому

$$\frac{(A^t x_0,\ A^{*-t+1}\pi_0)}{(A^{t-1}x_0,\ A^{*-t+1}\pi_0)} = \alpha$$

для любого $t$ , $t = 1,2,\dots$

Перейдем к определению свойства эквивалентных наборов.

Пусть $\pi_0$ –собственный вектор матрицы $B$ (оптимальный вектор цен модели Неймана $\mathfrak{M}(E,B)$ ) и пусть

$$(\pi_0, x') = (\pi_0, x'') \ . \qquad (\text{Ш.4.13})$$

На основании только что установленного факта

$$(\pi_0, x') = \left(\frac{\pi_0}{\beta}, Bx'\right);\ (\pi_0, x'') = \left(\frac{\pi_0}{\beta}, Bx''\right) .$$

Тогда

$$\left(\frac{\pi_0}{\beta}, Bx'\right) = \left(\frac{\pi_0}{\beta}, Bx''\right), \qquad (\text{Ш.4.II})$$

где $\frac{1}{\beta}$ собственное число, соответствующее вектору $\pi_0$ . Сокращая в выражении (Ш.4.II) $\beta$, получим

$$(\pi_0, Bx') = (\pi_0, Bx'')$$

или в общем виде

$$(\pi_0, B^t x') = (\pi_0, B^t x'') \qquad (\text{Ш.4.12})$$

для любого $t$ .

Уравнение (Ш.4.12) означает, что точки $B^t x'$ и $B^t x''$ лежат в гиперплоскости с одной и той же нормалью. Эти гиперплоскости являются опорными к соответствующим множествам $R_{x',t}$ и $R_{x'',t}$ . Следовательно, $R_{x',t}$ не может полностью состоять из внутренних точек $R_{x'',t}$ ни для какого $t$ и наоборот.

Таким образом, классы эквивалентности для моделей $\mathfrak{M}(E,B)$ определяются равенством (Ш.4.13). Знак неравенства будет указывать, какое множество поглотит какое. Словесно можно сказать так: наборы эквивалентны относительно $\mathfrak{M}(E,B)$ , если они равны по оптимальным ценам решения модели Неймана $\mathfrak{M}(E,B)$ .

Характеристические свойства, установленные для эквивалентных наборов для класса моделей $\mathfrak{M}(E,B)$, распространяются и на более широкий класс моделей. Однако, наша основная задача состоит в том, чтобы дать алгоритм решения задачи ($\Delta\Delta$), и для этой цели достаточно того, что установлено для класса $\mathfrak{M}(E,B)$ .

Для обоснования этого алгоритма требуется еще следующий важный факт (теорема Ш.2), касающийся характеристики асимптотического поведения замкнутых моделей типа Неймана.

Пусть имеется модель типа Неймана $\mathfrak{M}(A,B,x_0)$ , такая, что $f(t) = g(t) = 0$ . Обозначим матрицы столбцов, участвующих в оптимальном плане соответствующей модели Неймана $\mathfrak{M}(A,B)$ через $\bar{A}$ и $\bar{B}$ . На $\bar{A}$ и $\bar{B}$ накладываются следующие дополнительные условия :

а) $\bar{A}$ и $\bar{B}$ - квадратные матрицы, т.е. оптимальный по Нейману план содержит $n$ способов.

б) Матрица $\bar{A}^{-1}$ -существует.

в) Наибольшее по модулю собственное число матрицы $\bar{B}^*\bar{A}^{*-1}$ единственное.

Случай, когда матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ содержат строк (способов) меньше, чем столбцов (продуктов), порождается теми же причинами, что и вырождение в линейном программировании.

<u>Теорема Ш.2.</u> Всякий $\infty$ -оптимальный план $\bar{H}$ (ре-

шение задачи ($\Delta$) ) модели $\mathfrak{M}(A,B,x_\circ)$, удовлетворяющей перечисленным свойствам и еще некоторым свойствам математического характера, характеризуется тем, что, начиная с некоторого момента $t_\circ$, в $\bar{H}$ входят только оптимальные по Нейману способы, т.е. способы, составляющие матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Иначе говоря, для любого $t \geq t_\circ$

$$\bar{\bar{x}}(t+1) = \bar{B}^*\bar{A}^{*-1}\bar{\bar{x}}(t).$$

Эта теорема относится к так называемым теоремам о магистрали. Доказательство ее имеется в работе [3]. В этой же работе можно найти все сведения и факты, относящиеся к магистральным теоремам.

Теперь имеются все сведения для того, чтобы изложить и обосновать алгоритм решения задачи ($\Delta\Delta$).

Алгоритм состоит в следующем.

1. Находятся оптимальные $\bar{H}$ и $\bar{\pi}$ для модели Неймана $\mathfrak{M}(A,B)$.

2. Выбирается некоторое $T$ и решается динамическая задача линейного программирования с начальным состоянием $x_\circ$, плановым периодом $T$ и критерием оптимальности $(\bar{\pi}, x_H(T))$, где $x_H(T)$ — состояние модели в момент $T$ при плане $H$. В случае, если в решении в период $T$ участвуют только способы, составляющие матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$, то оно является решением задачи ($\Delta\Delta$). В противном случае операции пункта 2 повторяются с $T', T' > T$.

Доказательство разрешимости описанного алгоритма.

Обозначим через $\Omega(A,B)$ множество всех $x$, для которых $(\bar{B}^*\bar{A}^{*-1})^t x \geq 0$ для всех $t,\ t=1,2,\ldots$. Из того обстоятельства, что последовательность $\{(\bar{B}^*\bar{A}^{*-1})^t x\}$ $t=1,2,\ldots$ сходится к оптимальному состоянию модели $\mathfrak{M}(A,B)$ следует, что найдется такое $\bar{t}$, что множество, определенное неравенствами $(\bar{B}^*\bar{A}^{*-1})^{\bar{t}} \geq 0$ полностью лежит в множестве $\Omega(A,B)$. Теперь заметим, что если $x'$ и $x'' \in \Omega(A,B)$, то легко установить, зная $\bar{\pi}$, эквивалентны они относительно $\mathfrak{M}(A,B)$ или нет. Действительно, поскольку $x'$ и $x'' \in \Omega(A,B)$, то вместо $\mathfrak{M}(A,B)$ можно рассматривать $\mathfrak{M}(E, B^{-1}A)$. Поэтому, если решение задачи линейного программирования $max(x,\bar{\pi})$ при $x \in R_{x_\circ T}$ дает $\bar{x} \in \Omega$, то это $\bar{x}$ принадлежит $\infty$-оптимальной траектории. Из теоремы III.2 следует, что всегда найдется такое (может быть достаточно большое) $T$, что решение указанной задачи линейного программирования с этим

$T$ даст $\bar{x} \in \Omega(A,B)$.

## § 5. Простейшая модель функционирования экономической системы.

I. В качестве технологической основы для модели функционирования экономики рассматривается модель несколько более общая, чем $\mathfrak{M}(E,B)$. Обобщение состоит в том, что каждому продукту $i$ сопоставляется не один способ, его затрачивающий, а несколько способов, т.е. единичная матрица затрат заменяется на матрицу вида

$$
I = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \quad & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & \vdots & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

Матрица выпуска $B$ продолжает сохранять произвольный для Неймановской модели вид.

Описанную модель будем обозначать через $\mathfrak{M}(I,B)$.

П. В этом параграфе излагается существенно иной подход к вопросу о выборе критерия оптимальности для модели экономической системы, иной подход к самому понятию оптимального плана.

До сих пор в работе рассматривались модели экономических систем, в которых механизм их функционирования остался неопределенным. По существу эти модели надо понимать как модели планирования экономики, а не самой экономики. Действительно, для того, чтобы модель описывала экономику, в ней должен быть указан (формально описан) некоторый процесс реализации получающегося из решения экстремальной задачи оптимального плана. В рассмотренных до сих пор в этой работе моделях ниоткуда не следует, почему исполнители плана (отрасли, объединения, предприятия) будут реализовывать именно рассчитанный оптимальный план. Приведенные во П главе § 2. рассуждения об организации вычислительной схемы для нахождения оптимального плана носят приблизительный характер и могут служить лишь некоторым обоснованием тому, что можно, повидимому, так установить систему показателей и регламент работы предприятий, чтобы оптимальный по некоторому критерию план и соответствующие ему о.о.оценки не противоречили собственным интересам предприятий.

Проблема в данном случае состоит в том, чтобы формально описать механизм функционирования модели при известных гипотезах относительно законов поведения коллективов людей. Простейшая гипотеза, например, может быть такой: каждая ячейка экономической системы действует так, в рамках имеющейся у нее свободы, чтобы максимизировать собственную выгоду.

Ш. Опишем модель функционирования экономики, технология которой задается с помощью матриц I и B, а начальное состояние с помощью вектора $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Предположим, что имеется $n$ производителей, которым поставлены в I-I значное соответствие виды продукции. Т.е. каждый производитель может потреблять только один продукт и обладает несколькими способами производства различных продуктов. В начальный момент времени у производителя $i$ имеется количество продукта $x_i^0$.

Процесс функционирования системы состоит в следующем:

I. Каждый производитель выбирает (например, случайным образом) способ производства. В результате определяется объем произведенной продукции каждым производителем. Производитель $i$ становится обладателем $x_i^0 b^{s_i}$ количеств каждого вида продукции. Здесь $s_i$ -номер применяемого способа, $b^{s_i}$ -вектор выпуска, $x_i^0$ -интенсивность применения способа $s_i$.

Теперь производители обмениваются между собой произведенной продукцией, чтобы иметь возможность продолжать производство дальше, т.е. в частности производитель $i$ должен получить всю произведенную продукцию вида $i$. Этот обмен происходит с помощью механизма рынка. Для того, чтобы произошел эквивалентный обмен, цены на рынке $p=(p_1,\dots,p_n)$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$x_\bullet^{s_i}\sum_i b_i^{s_i}p_i = p_i\sum_s x_\bullet^s b_i^s \qquad (\text{III}.5.1)$$
$$i=1,\dots,n.$$

Правая часть уравнения (III.5.I) есть общее количество продукта $i$, произведенное всеми способами и измеренное в ценах $p_i$. Левая часть уравнения представляет собой произведенную продукцию способа $s_i$ в ценах $p$.

Система уравнений (III.5.I) однородна относительно неизвестных $p$, поэтому заранее не ясно, существует ли решение, отличное от нулевого. Для случая двух продуктов в предыдущем параграфе было показано существование положительного решения, определенного, естественно, с точностью до постоянного положительного множителя. Для случая $n$ продуктов существование ненулевого решения системы (III.5.I) будет доказано ниже.

2. В результате решения системы (III.5.I) получены цены всех продуктов $p(1)$. Следовательно, определена прибыль каждого производителя $i$ $\dfrac{x_\bullet^i(b^{s_i}p(1))}{x_\bullet^i p_i(1)}-1$

и общая прибыль всей системы $\dfrac{\sum x_\bullet^i b^{s_i}p(1)}{\sum\limits_i x_\bullet^i p_i(1)}-1.$

Примем теперь гипотезу относительно закона поведения производителей, состоящую в том, что каждый производитель в каждый период времени стремится получить максимальную в этот период времени прибыль. Тогда, если найдется производитель $i_0$, у которого в распоряжении имеется способ производства, дающий большую прибыль по ценам $p(1)$, чем способ $s_{i_0}$, то этот производитель согласно закону своего поведения выберет для производства наиболее рентабельный способ - способ, приносящий ему наибольшую прибыль. Однако когда каждый производитель выберет самый выгодный по ценам $p(1)$ способ производства, цены на рынке соответственным образом изменяется,т.е. будут осуществлены операции, описанные в пункте I). Процесс выбора способов и расчета обменных цен на базе этих способов продолжается до тех пор, пока не станет невозможным дальнейшее увеличение прибыли для всех производителей.

Производственные способы,на которых достигается максимальная для каждого производителя прибыль,и соответствующие им цены образуют состояние обменного равновесия.

Таким образом, состояние обменного равновесия $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n, p)$ при начальном состоянии экономики $X_0$ определяется следующими условиями:

$$\text{а)}\quad x_0^{\bar{s}_i} \sum_i b_i^{\bar{s}_i} \bar{p}_i = p_i \sum_s x_0^s b_i^s \qquad (i=1,\ldots,n)\ ,$$

$$\text{б)}\quad \max_{s_i} \frac{x_0^i (b^{s_i} \bar{p})}{x_0^i \bar{p}_i} = \frac{x_0^i (b^{\bar{s}_i} \bar{p})}{x_0^i \bar{p}_i} \ (i=1,2,\ldots,n).$$

3. Пункты I) и 2) описания механизма функционирования экономики касались очень малого промежутка времени, т.е. здесь делается предположение, что процесс установления состояния обменного равновесия занимает время, пренебрежительно малое по сравнению с единичным периодом. Это означает, что производители обладают большой подвижностью, моментально переходят на другой способ производства, если им выгодно.

Принятое предположение позволяет считать, что уже в самом начале периода производители выбрали способы обменного равновесия. Следовательно, механизм функционирования экономики таков, что он переводит экономику из начального состояния $X_0$ в состояние $X_1 = \sum_i b^{\bar{s}_i} x_0^i$ .

Дальнейшее развитие во времени происходит аналогичным образом, т.е. $X_1$ принимается за начальное состояние, совершаются действия, описанные в пунктах I) - 3), получается состояние $X_2$ и т.д.

4. Эта последняя часть параграфа посвящена обоснованию законности описанных в пунктах I) - 3) действий.

(I) Доказательство существования нетривиального решения системы (Ш.5.I)

Уравнение $x_0^{s_i} \sum_i b_i^{s_i} p_i = p_i \sum_s x_0^s b_i^s$ отражает эквивалентность обмена между производителем $i$ и всеми другими производителями. Эквивалентность же обмена между парой производителей $i$ и $j$ может не соблюдаться, т.е.

$$b_i^{s_j} p_i = b_j^{s_i} p_j + x_{ij}\,, \tag{Ш.5.2}$$

где $x_{ij}$ некоторое число, вообще говоря, отличное от нуля, показывающее "долг" производителя $i$ производителю $j$ при $x_{ij} < 0$ или наоборот, если $x_{ij} > 0$ . Число уравнений (Ш.5.2) равно $\frac{n(n-1)}{2}$, т.е. числу неупорядоченных пар $(i,j)$,

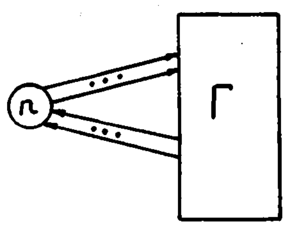
$i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots,n$ . Для того, чтобы уравнения (Ш.5.2) определяли те же значения переменных $p$ , что и уравнения (Ш.5.1), необходимо наложить дополнительные ограничения на вспомогательные переменные $x_{ij}$ :

$$\sum_j x_{ij} = 0 \qquad (j \neq i) \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (Ш.5.3)$$

Уравнение (Ш.5.3) означает, что производитель $i$ "должен" другим производителям ровно столько, сколько они должны ему, т.е. "долги" взаимно погашаются.

Наша цель теперь - показать, что любое из $n$ уравнений (Ш.5.3) является следствием остальных $n$-I уравнений.

Для этого рассмотрим произвольное ненулевое решение $\{\bar{x}_{ij}\}$ системы (Ш.5.3). Это решение $\{\bar{x}_{ij}\}$ однозначно представимо с помощью графа с $n$ вершинами (по числу производителей). От вершины $i$ к вершине $j$ идет стрелка, если $\bar{x}_{ij} > 0$ . Стрелка отсутствует, если $\bar{x}_{ij} = 0$ . Каждой стрелке приписано соответствующее ей число $|\bar{x}_{ij}|$ , которое можно интерпретировать как величину потока, протекающего через ребро $(i,j)$ . Поскольку $\{\bar{x}_{ij}\}$ является решением системы (Ш.5.3), то для каждой вершины графа сумма втекающих потоков равна сумме вытекающих из нее потоков. Обратно, любое распределение потоков на графе, которое сохраняет балансы по каждой вершине, является решением системы (Ш.5.3). Следовательно нам надо показать, что если на произвольном графе в $n$- I вершине имеет место баланс входных и выходных потоков, то такой баланс имеется и в $n$-ой вершине. Это можно сделать на следующей схеме:




Здесь кружок представляет $n$ - ную вершину графа, а прямоугольник Г-все остальные вершины графа. Стрелки показывают связи вершины $n$ с графом Г. Поскольку для любой вершины из Г сохраняется баланс входных и выходных потоков, то и для всего Г, рассматриваемого как одна вершина со входами и выходами, идущими к вершине $n$, баланс также сохраняется. Это и означает, что в вершине $n$ имеется баланс потоков. Итак, окончательно имеем для определения цен $p$ и "долгов" $\{x_{ij}\}$ систему уравнений:

$$b_i^{s_j} p_i = b_j^{s_i} p_j + x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Общее число уравнений равно $\frac{n(n-1)}{2} + n - 1$, а общее число неизвестных равно $\frac{n(n-1)}{2} + n$, т.е. на единицу больше. Это обстоятельство показывает, что существует ненулевое решение системы (Ш.5.I) Неотрицательность цен будет показана ниже.

(2) Существование состояния обменного равновесия

Запишем уравнение (Ш.5.I) в следующем виде:

$$\sum_i b_i^{s_i} p_i - \alpha_i p_i = 0,$$

где $\alpha_i = \dfrac{\sum x_i^s b^s}{x_\circ^{s_i}}$, т.е. $\alpha_i$ есть темп роста продукта $i$ при применении способов $\{s_i\}$.

Введем обозначения: $p_i = \pi_i(1)$, $\alpha_i p_i = \pi_i(0)$

Тогда векторы $\pi(0)$, $\pi(1)$ будут о.о.оценками для плана $\{s_i\}$

Если для всех остальных способов $s$ выполняется неравенство $\sum_i b_i^s \pi_i(1) - \pi_i(0) \leq 0$, то легко видеть, что план $\{s_i\}$ является планом обменного равновесия. И обратно, если для некоторого плана $\{s_i\}$ $\sum_i b_i^{s_i} p_i - \alpha_i p_i \leq 0$ для всех способов модели, то план $\{s_i\}$ есть план обменного равновесия. Поэтому, когда среди способов модели имеются способы уничтожения продукции, цены обменного равновесия неотрицательны.

Для доказательства существования состояния обменного равновесия достаточно заметить, что функции $X_1 = X_1(H)$ и $p = p(H)$ являются непрерывными. План $\bar{H} = (h^1, \dots, h^s)$ дает состояние обменного равновесия, когда функция $\dfrac{X_1(H)\,p(H)}{X_\circ p(H)}$ достигает на нем максимума, где $H$ пробегает замкнутое множество $\{H : HI = X_\circ,\ H \geq 0\}$

(3) Для случая, когда матрица выпуска B модели $\mathfrak{M}(I, B)$ имеет в каждой строке не более одной компоненты, отличной от нуля, можно показать, что описанный процесс для каждого временного интервала приводит к состоянию обменного равновесия, а в це-

лом порождает $\infty$ -оптимальную траекторию, причем, обменные цены равновесия будут являться о.о.оценками этой $\infty$ -оптимальной траектории. Действительно, докажем это утверждение для случая, когда $\mathfrak{M}(I,B)$ не содержит отличных от себя подмоделей. Выберем какой-нибудь начальный план $H_1$, в котором ни один производитель не уничтожает свою продукцию. Тогда $H_1B$ -строго положительный вектор, т.е. по плану $H_1$ все продукты выпускаются, ибо в противном случае какие-то два производителя выпускали бы один и тот же продукт, что невозможно в силу отсутствия подмодели. Обменные цены для плана $H_1$ определяются очень просто, т.к. производство продукции по плану $H_1$ можно изобразить циклом: $(b_1 \to b_2 \to b_3 \to \ldots \to b_n \to b_1)$. Здесь $b_i$ — количество произведенной продукции вида $i$. Связь $b_i \to b_{i+1}$ показывает, что продукт $i+1$ производится с помощью продукта $i$. Ясно, что после того как установились обменные цены, каждый производитель, стремясь максимизировать свою прибыль, выберет способ, производящий наибольшее количество продукта. При этом наступит состояние обменного равновесия. В дальнейшем каждый производитель будет применять именно этот способ, дающий наибольшее количество продукта. При этом, если $p_i(t)$ -есть обменная цена в момент $t$, то обменная цена в момент $t+1$ определяется по формуле $p_i(t+1) = \dfrac{p_i(t)}{\alpha_i(t)}$, где $\alpha_i(t)$-темп роста продукта $i$ при переходе от момента $t$ к моменту $t+1$. Очевидно, что обладающие таким свойством обменные цены являются о.о.оценками получающегося в результате описанного процесса плана, а сам план тем самым является $\infty$ -оптимальным.

## § 6. Об открытых динамических моделях.

Перейдем теперь к гораздо более интересной и более реальной ситуации, когда модель типа Неймана не является замкнутой. В этих условиях асимптотическое поведение модели во многом зависит от вида функций $f(t)$ и $g(t)$, поэтому при любой постановке задачи приходится делать различные предположения относительно этих функций.

Рассмотрим случай, когда $g(t)=0$, $f(t)$ есть показательная функция, т.е. $f(t)=C\alpha^t$, где $C$ некоторый вектор. Покажем, что такую модель можно свести к замкнутой. Действительно, пара технологических матриц задачи, если функцию $f(t)$ записать в виде способа, будет такова:

$$
\left[\begin{array}{c|c}
0 & -A \\
\hline
-1 & c_1 \quad \ldots \quad c_n
\end{array}\right]
\qquad\qquad
\left[\begin{array}{c|c}
0 & B \\
\hline
\alpha & 0
\end{array}\right]
$$

Эти матрицы не удовлетворяют требованиям модели Неймана, т.к. матрица затрат содержит положительные компоненты. Чтобы избавиться от этого, воспользуемся следующим приемом. Разобьем единичный временной интервал на две части так, чтобы матрица затрат тоже была разбита на две части, где во вторую часть попадут положительные компоненты.

Запишем общую матрицу технологических способов для двух интервалов времени

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & -E & 0 & E & \multicolumn{2}{c|}{0} & & & & \\
-1 & 0 & \alpha & C & \multicolumn{2}{c|}{} & & & & \\
\hline
\multicolumn{2}{|c|}{0} & 0 & -A & 0 & B & & & & \\
\multicolumn{2}{|c|}{} & -1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
\hline
& & & & 0 & -E & 0 & E & \multicolumn{2}{c|}{0} \\
& & & & -1 & 0 & \alpha & C & \multicolumn{2}{c|}{} \\
\cline{5-10}
& & & & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & -A & 0 & B \\
& & & & \multicolumn{2}{c|}{} & -1 & 0 & 1 & 0 \\
\cline{5-10}
\end{array}
$$

Эта матрица также не удовлетворяет нужным требованиям. Однако, из нее легко сформировать уже матрицы затрат и выпуска замкнутой модели Неймана, модели, которая будет эквивалентна первоначальной открытой модели.

Действительно, чтобы получить нужные технологические способы, надо избавиться от подматрицы

$$\begin{array}{|c|c|} \hline O & E \\ \hline \alpha & C \\ \hline O & -A \\ \hline -1 & O \\ \hline \end{array} \qquad (\text{Ш.6.I})$$

Это избавление осуществляется с помощью техники последовательного исключения ингредиентов, описанной в § 2 главы П. Применение этого способа исключения здесь вполне законно, т.к. вектор ограничений для ингредиентов матрицы (Ш.6.I) равен нулю. Легко видеть, что в результате осуществления этой процедуры технологические способы приобретают требуемый вид. Таким образом, модель типа Неймана, у которой $f(t)=C\alpha^t$ $g(t)\equiv O$, несложными преобразованиями сводится к замкнутой модели.

Заметим, что, вообще говоря, это сведение может быть осуществлено полностью не для всех моделей типа Неймана с указанными функциями $f(t)$ и $g(t)$. Действительно, если матрицы $A$ и $B$ образуют модель Неймана, т.е. $B$ не содержит нулевых столбцов, и технологический темп роста этой модели больше $\alpha$, то получаемая в результате преобразований замкнутая модель типа Неймана содержит в качестве подмодели такую, которая не использует способ $(-1, C, \dots, C_n, \alpha \dots)$, и именно на этой подмодели реализуется оптимальный по Нейману план.

Модель, для которой $f(t)=C'\alpha^t$ и $g(t)=C''\alpha^t$, также может быть сведена таким методом к замкнутой. Однако, это сведение годится не для всех моделей по приведенным выше причинам. Здесь эти причины даже усугубляются, т.к. может оказаться, что в оптимальном плане выгодно меньше брать продуктов извне и меньше соответственно отдавать во вне, чем это предписывается функциями $f(t)$ и $g(t)$. Другими словами, приведенный метод хорош для тех моделей, где заранее известно, что в $\infty$-оптимальном плане ( в частности, в оптимальном плане модели Неймана) обмен с "внешним миром" осуществляется в соответствии с функциями $f(t)$ и $g(t)$. В частности, для моделей, у которых технологические способы способны обеспечить темп роста $\geqslant \alpha$ и которые не могут функционировать без поступления продуктов извне (т.е. $B$ содержит нулевые столбцы), $\infty$ -оптимальный план должен использовать полностью поступление извне.

Отсюда ясно также, что приведенный способ сведения моделей с "нагрузкой" к замкнутым не годится для таких, у которых $f(t)=0$, а $g(t)>0$. Заметим, что если для описанного способа несущественно, что $f(t)$ показательная функция, если $f(t)=Ct$, то пара матриц с замыкающим способом будет иметь вид

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & -A & \\ \hline & C_1 & & C_n \\ & C_1 & & C_n \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline & 0 \end{array}\right]$$

Действительно, два последние способа перерабатывают два первых продукта следующим образом $(1, 0) \longrightarrow (1, 1) \longrightarrow (1, 2) \longrightarrow \dots \quad (1, t)$. Для того, чтобы построить модель с замыкающими способами, растущими как $t^2$, можно воспользоваться такой парой матриц

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \qquad (\text{Ш}.6.2)$$

которые следует установить на том же месте, где в предыдущем случае стояли матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

Чтобы убедиться, что (Ш.6.2) обладают нужным свойством, построим последовательность перерабатываемых наборов продуктов, из которой легко понять принцип работы этих матриц.

$(1,1,1) \to (1,3,4) \to (1,5,9) \longrightarrow \quad \dots \quad (1, 2t-1, t^2) \to$

Аналогичным образом можно построить матрицы, у которой некоторый ингредиент растет в соответствии с функциями $t^3, t^4$ и т.д.[x)]

x) Действительно, построение таким способом возможно в силу следующего свойства: $n$-ая разность последовательности $1, 2^n, 3^n, \dots t^n$ есть константа.

В самом общем виде условия, накладываемые на функции $f(t)$ и $g(t)$ для того, чтобы эти функции могли быть записаны в виде способов, таковы: значения функций $f(t)$ и $g(t)$ в точке $t$ должны быть линейной комбинацией значений этих функций в точках интервала $[t-\tau, t-1]$. Точная формулировка теоремы об эквивалентности замкнутых и открытых моделей имеется в работе [4].

Эквивалентность некоторых открытых моделей замкнутым показывает, что асимптотическое поведение этих моделей аналогично поведению замкнутых, т.е. открытые модели также имеют некоторый $\infty$-оптимальный план $\{\bar{H}(t)\}$ $t=1,2,\ldots$, обладающий свойствами, что $\bar{H}(t) \to \bar{H}$ при $t \to \infty$, где $\bar{H}$ – некоторое наилучшее состояние моделируемой экономической системы, состояние равновесия. Поэтому естественна постановка вопроса об условиях, накладываемых на $A, B$ и $f(t), g(t)$ (необходимых, достаточных) для осуществления состояния равновесия. Более сложные проблемы, касающиеся свойств асимптотического поведения моделей типа Неймана, возникают при снятии предположения о неизменности матриц $A$ и $B$ во времени, т.е. $A(t)$ и $B(t)$ есть некоторые заданные (или может быть даже случайные) функции.

В заключение автор выражает благодарность Л.В.Канторовичу за постановку и обсуждение ряда проблем и Г.Ш. Рубинштейну, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний, которые были учтены в окончательном варианте.

## Литература


I. Д.Гейл. Замкнутая линейная модель производства. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М. 1959 г.

2. В.Л.Макаров.Об условии равновесия в модели Неймана.Сиб.м.ж. № 3. 1962 г.

3. В.Л.Макаров. Ассимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. Сиб.мат.ж. №4. 1966 г.

4. В.Л.Макаров. Асимптотика решений линейных динамических моделей экономических систем с дискретным временем. ДАН т.165 № 4. 1965 г.



Рукопись поступила в редакцию 30 декабря 1965 г.