ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Сборник трудов

1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

Д. А. ЗИЯУДИНОВА, А. М. РУБИНОВ

МИНИМИЗАЦИЯ СУБЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТАХ МЕТРИЗУЕМЫХ ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

В настоящей работе предлагаются методы для минимизации непрерывных сублинейных функционалов на выпуклых компактах метризуемых локально-выпуклых пространств. Их можно рассматривать как обобщение методов, рассматриваемых в [1], [2].

Сублинейные функционалы

Пусть X - метризуемое локально-выпуклое пространство. Функционал p, заданный в X, назовем сублинейным, если

1) p - полуаддитивный функционал

$$p(x_1+x_2) \leq p(x_1)+p(x_2),$$

2) p - положительно-однородный функционал: если $\lambda > 0$, то

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь непрерывные сублинейные функционалы.

Линейный функционал $f \in X^*$ называется опорным к p, если для всех $x \in X$: $f(x) \leq p(x)$. Если f опорен к p, то будем писать $f \leq p$.

Для любого $x \in X$ положим

$$Fx = \{ f \in X^* / f \leq p, \ f(x) = p(x) \}. \qquad (\mathrm{I})$$

Применяя теорему Хана-Банаха, легко показать, что для любого $x \in X$ множество Fx не пусто. Действительно, как следует из этой теоремы, для каждого $x_0 \in X$ найдется такой аддитивный и однородный функционал f, что для $x \in X$

$$f(x) \leq p(x) \qquad \text{и} \qquad f(x_0) = p(x_0)$$

(см., например, следствие I § 3 гл. I в [3]). Покажем, что f непрерывен. Так как $f(x) \leq p(x)$, то $f(x) = -f(-x) \geq p(-x)$, откуда $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$.

Пусть теперь последовательность $x_n \to 0$. Тогда $p(x_n) \to 0$, $p(-x_n) \to 0$ и, следовательно, $f(x_n) \to 0$. Отсюда и следует непрерывность f.

Отметим, что отображение F, определяемое формулой (I), полунепрерывно сверху : если $x_n \to x$, $f_n \in Fx_n$, $f_n \to f$, то $f \in Fx$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в неравенстве $f_n(x) \leq p(x)$ и равенстве $f_n(x_n) = p(x_n)$. Важным примером сублинейного функционала в нормированном пространстве является функционал

$$p(x) = \|x\|.$$

Легко показать, что для этого функционала

$$Fx = \{ f \in X^* / \|f\| = 1 ; f(x) = \|x\| \}. \qquad (\mathrm{I}')$$

В дальнейшем мы будем считать известным, как по данному p построить отображение F. Отметим, что в [4] приведена методика, позволяющая находить отображение F для широкого класса сублинейных функционалов в нормированных пространствах.

Функционалы $P_{g_1, g_2, \ldots, g_n}$.

Пусть $g_1, g_2, \ldots g_n \in X^*$. Положим

$$P_{g_1, \ldots, g_n} = \max_{k \leq n} g_k(x).$$

Легко проверить, что $P_{g_1, \ldots, g_n}$ - непрерывный сублинейный функционал.

Пусть p - сублинеен. Из того, что $Fx \neq \emptyset$ для любого $x \in X$, следует, что

$$p(x) = \max_{f \leq p} f(x).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что, если $g_i \leq p \quad (i = 1, \ldots, n)$, то для $x \in X$

$$P_{g_1, \ldots, g_n}(x) \leq p(x).$$

В [4] приведено следующее утверждение: для того, чтобы $f \leq P_{g_1, \ldots, g_n}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \qquad \left(\alpha_k \geq 0, \; k = 1, \ldots, n; \; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right).$$

Положим

$$F_{g_1, \ldots, g_n}(x) = \{ f \in X^* / f \leq P_{g_1, \ldots, g_n}; \; f(x) = P_{g_1, \ldots, g_n}(x) \}$$

($F_{g_1, \ldots, g_n}$ - это отображение, определяемое формулой (I) по функционалу $P_{g_1, \ldots, g_n}$). Пусть $x \in X$ и $P_{g_1, \ldots, g_n}(x) = \max_{k \leq n} g_k(x) = g_{k_s}(x) \; (s = 1, \ldots, t)$. Положим $I = \{ k_1, k_2, \ldots, k_s, \ldots, k_t \}$.

Легко видеть, что

$$F_{g_1, \ldots, g_n}(x) = \{ f \in X^* / f = \sum_{k_s \in I} \alpha_{k_s} g_{k_s}, \alpha_{k_s} \geq 0, s = 1, \ldots, t, \sum_{k_s \in I} \alpha_{k_s} = 1 \}. \quad (2')$$

В частности, если $\max g_k(x)$ достигается лишь на одном функционале $g_{k'}$, то $F_{g_1, \ldots, g_n} = \{ g_{k'} \}$.

Отображение G_Ω

Пусть Ω - замкнутое ограниченное множество в X, обладающее тем свойством, что каждый линейный функционал $f \in X^*$ достигает минимума на Ω.

Для $f \in X^*$ положим

$$G_\Omega f = \{ x \in \Omega / f(x) = \min_{y \in \Omega} f(y) \}. \qquad (3)$$

Легко видеть, что отображение G_Ω, определяемое формулой (3), полунепрерывно сверху: если $f_n \to f$, $x_n \in G_\Omega f_n$, $x_n \to x$, то $x \in G_\Omega f$.

Покажем, как находить $G_\Omega f$ для некоторых множеств Ω.

I) Пусть Ω - выпуклый многогранник в конечномерном нормированном пространстве X, заданный системой линейных неравенств. Элементы множества $G_\Omega f$ могут быть найдены решением задачи линейного программирования.

2) Пусть φ - дифференцируемый по Фреше квазивыпуклый функционал в банаховом пространстве X со слабо компактной сферой.

Положим

$$\Omega = \{ x \in X / \varphi(x) \le c \}, \qquad \Omega' = \{ x \in X / \varphi(x) = c \}.$$

Предположим, что Ω ограничено. Ясно, что в этом случае G_Ω определеко для любого $f \in X^*$ и $G_\Omega = G_{\Omega'}$. Будем считать, что для $x \in \Omega$

$$\operatorname{grad} \varphi(x) \ne 0$$

Пусть $f \in X^*$. Поскольку для любого $x \in X$

$$\operatorname{grad} f(x) = f,$$

то, как следует из теоремы Люстерника (см., например, [5], теорема I2.I), элементы множества $G_{\Omega'}$ (и значит множества G_Ω) должны удовлетворять при некотором μ уравнению

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \mu f.$$

3) Пусть Ω - единичный шар банахова пространства X и $f \in X^*$. Надо найти, если он существует, элемент $x \in \Omega$, на котором достигается

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in \Omega} (-f)(x).$$

Обозначим через S единичный шар X^{**}. Тогда

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = -\sup_{x \in \Omega} (-f)(x) = -\max_{\varphi \in S} (-f)(\varphi) =$$

$$= -\max_{\varphi \in S} \varphi(-f) = -\|f\| = -F_{X^*}(f)(f).$$

(Здесь через F_{X^*} обозначено отображение, определяемое формулой (I) или, что то же самое, (I$'$) по функционалу p : $p(f) = \|f\|$, заданному в пространстве X^*).
Таким образом, $\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$ достигается, если $-F_{X^*}(-f) \cap X \neq \emptyset$, и в этом случае $G_\Omega f = -F_{X^*}(f) \cap X$.

Отметим, что если X - рефлексивное пространство, то

$$G_\Omega f = -F_{X^*}(f).$$

4) Пусть B - линейный оператор, действующий из пространства Y в пространство X, $\mathcal{U}$ - выпуклое множество в Y такое, что каждый линейный функционал достигает минимума на $\mathcal{U}$,

$$\Omega = B(\mathcal{U}).$$

Тогда для любого $f \in X^*$

$$G_\Omega f = B G_\mathcal{U} B^* f.$$

Действительно,

$$\min_{x \in \Omega} f(x) = \min_{y \in \mathcal{U}} f(By) = \min_{y \in \mathcal{U}} B^* f(y) =$$

$$= B^* f(G_\mathcal{U} B^* f) = f(B G_\mathcal{U} B^* f).$$

Отметим, что во многих задачах теории приближения и теории оптимального управления приходится иметь дело с множествами вида $B(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ - единичный шар некоторого банахова пространства, B – вполне непрерывный оператор.

В дальнейшем мы будем считать, что Q – выпуклый компакт. В этом случае множество $G_Q f \neq \emptyset$ для любого $f \in X^*$. Мы будем предполагать, что рассматриваемое множество таково, что известно решение задачи о минимизации линейного функционала на этом множестве (иными словами, известен способ, позволяющий для каждого $f \in X^*$ находить хотя бы один элемент множества $G_Q f$).

Постановка задачи

Сформулируем основную задачу, решением которой мы будем заниматься.

З а д а ч а I. Пусть Q – выпуклый компакт в метризуемом локально-выпуклом пространстве X, p – сублинейный функционал, определенный на X. Требуется минимизировать p на Q, то есть найти элемент $x \in Q$ такой, что

$$p(x) = \min_{y \in Q} p(y).$$

Вспомогательная задача

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_q \in Q$. Положим

$$Q_{x_1, \dots, x_q} = \left\{ x \in X \,/\, x = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, q;\ \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1 \right\}$$

($Q_{x_1, \dots, x_q}$ есть выпуклый многогранник, натянутый на элементы $x_1, \dots, x_q$).

Рассмотрим следующий частный случай задачи I.

З а д а ч а 2. Пусть $x_1, \dots, x_q \in X$; $g_1, \dots, g_n \in X^*$. Требуется минимизировать функционал $P_{g_1, \dots, g_n}$ на многограннике $Q_{x_1, \dots, x_q}$.

Покажем, что задача 2 совпадает с основной задачей теории матричных игр и, следовательно, может быть решена методами линейного программирования.

Нам надо найти элемент $x^{(q)} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i' x_i$ такой, что

$$P_{g_1,\ldots,g_n}(x^{(q)}) = \min_{x \in \Omega_{x_1,\ldots,x_q}} P_{g_1,\ldots,g_n}(x) = \min_{x \in \Omega_{x_1,\ldots,x_q}} \max_{k \le n} g_k(x) =$$

$$= \min_{\alpha} \max_{k \le n} g_k\Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_i x_i\Big) = \min_{\alpha} \max_{k \le n} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_k(x_i).$$

Здесь минимум берется по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$,где $\alpha_i \ge 0$ $(i=1,\ldots,n)$, $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$. Таким образом, для решения задачи 2 надо указать набор $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_q')$, который реализует минимакс, а это и есть основная задача теории матричных игр.

Рассмотрим двойственную задачу. Пусть $\Gamma \subset X^*$ - выпуклая оболочка множества $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$:

$$\Gamma = \Big\{ f \subset X^* / f = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k,\ \gamma_k \ge 0,\ k=1,\ldots,n;\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 1 \Big\}.$$

Тогда по теореме о минимаксе

$$P_{g_1,\ldots,g_n}(x^{(q)}) = \min_{\alpha} \max_{k \le n} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_k(x_i) =$$

$$= \max_{\gamma} \min_{i \le q} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k(x_i) = \max_{f \in \Gamma} \min_{i \le q} f(x_i).$$

Пусть $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$ - набор, который реализует максмин. Положим

$$f^{(q)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' g_k .$$

Отметим некоторые свойства функционала $f^{(q)}$.

I) По теореме о минимаксе

$$f^{(q)}(x^{(q)}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i' \gamma_k' g_k(x_i) = P_{g_1,\ldots,g_n}(x^{(q)}).$$

2) Из (2) следует, что $f^{(q)} \le P_{g_1,\ldots,g_n}$.
Таким образом, $f^{(q)} \in F_{g_1,\ldots,g_n}(x^{(q)})$.

3) Так как набор $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$ реализует $\max_{\gamma} \min_{i \le q} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k(x_i)$, то

$$f^{(q)}(x^{(q)}) = P_{g_1,\dots,g_n}(x^{(q)}) = \max_{\gamma} \min_{i \le q} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k(x_i) =$$

$$= \min_{i \le q} \sum_{k=1}^{n} \gamma'_k g_k(x_i) = \max_{i \le q} f^{(q)}(x_i),$$

то есть $\quad f^{(q)}(x^{(q)}) \le f^{(q)}(x_i) \quad (i=1,2,\dots,q)$.

Учитывая, что $\Omega_{x_1,\dots,x_q}$ есть выпуклая оболочка элементов $\{x_i\}$, имеем для любого $x \in \Omega_{x_1,\dots,x_q}$

$$f^{(q)}(x^{(q)}) \le f^{(q)}(x).$$

Таким образом, функционал $f^{(q)}$ выделяет множество $\Omega_{x_1,\dots,x_q}$.

Минимизация функционала $P_{g_1,\dots,g_n}$

Построим метод для решения следующей задачи.

З а д а ч а 3. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n \in X^*$; Ω -выпуклый компакт в X . Требуется минимизировать $P_{g_1,\dots,g_n}$ на Ω .

Предлагаемый метод заключается в следующем. Выберем произвольно элементы $\bar{z}_i \in \Omega$ $(i=1,2,\dots,r;\ r \ge 2)$. Построим многогранник $\Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_r}$ и, решая задачу 2, найдем элемент z_1 такой, что

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_1) = \min_{x \in \Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_r}} P_{g_1,\dots,g_n}(x).$$

Решая двойственную задачу, найдем функционал $f_1 = \sum_{k=1}^{n} \gamma'_k g_k \in F_{g_1,\dots,g_n}(z_1)$, выделяющий $\Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_r}$. Найдем какой-либо элемент множества $G_\Omega f_1$ и обозначим его через $\bar{z}_{r+1}$ (см. рис. I).

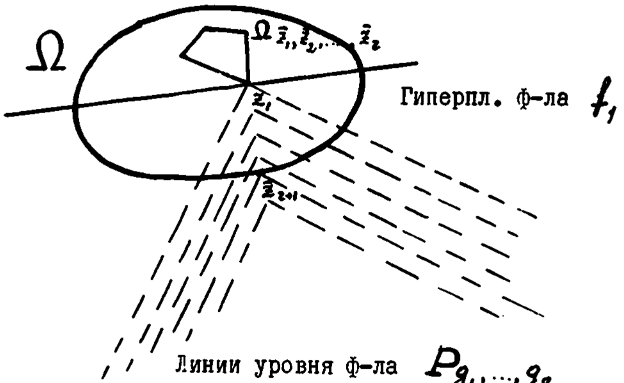

Рис. I

Рассмотрим теперь многогранник $\Omega_{\bar z_1,\ldots,\bar z_r, \bar z_{r+1}}$ и, решая задачу 2 и двойственную ей, найдем элемент z_2 и функционал f_2. После этого найдем элемент $\bar z_{r+2} \in G_\Omega f_2$. Затем строим многогранник $\Omega_{\bar z_1,\ldots,\bar z_{r+2}}$ и т.д. В случае, если существует m, для которого

$$f_m(z_m) = f_m(\bar z_{r+m}) = \min_{x \in Q} f_m(x),$$

то на элементе z_m, как будет показано ниже, реализуется искомый минимум и процесс оканчивается.

В противном случае у нас выделяются последовательности

$$z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots,$$
$$\bar z_{r+1}, \bar z_{r+2}, \ldots, \bar z_{r+m}, \ldots,$$
$$f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$$

При этом, так как $\Omega_{\bar z_1,\ldots,\bar z_{r+m-1}} \subset \Omega_{\bar z_1,\ldots,\bar z_{r+m-1}, \bar z_{r+m}}$, то

$$P_{g_1,\ldots,g_n}(z_{m+1}) \leq P_{g_1,\ldots,g_n}(z_m).$$

Т е о р е м а I. Если существует m_0 такое, что $f_{m_0}(z_{m_0}) = f_{m_0}(\bar z_{r+m_0})$, то

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_{m_0}) = \min_{x\in\Omega} P_{g_1,\dots,g_n}(x).$$

Если такого m_0 не существует, то искомый минимум достигается на предельных точках последовательности $\{z_m\}$.

Доказательство. Поскольку $\bar z_{r+m} \in G_\Omega f_m$, то

$$f_m(z_m) \geq f_m(\bar z_{r+m}).$$

Пусть для некоторого m_0

$$f_{m_0}(z_{m_0}) = f_{m_0}(\bar z_{r+m_0}).$$

Тогда, используя свойства функционала f_{m_0}, имеем для $x\in\Omega$

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_{m_0}) = f_m(z_{m_0}) = f_{m_0}(\bar z_{r+m_0}) \leq f_{m_0}(x) \leq P_{g_1,\dots,g_n}(x),$$

откуда и следует, что z_{m_0} - искомый элемент.

Предположим теперь, что для всех m

$$f_m(z_m) > f_m(\bar z_{r+m}). \tag{4}$$

Так как Ω - компакт, то последовательности $\{z_m\}$ и $\{\bar z_{r+m}\}$ имеют предельные точки. Так как функционалы f_m принадлежат выпуклой оболочке конечного числа функционалов $\{g_1,\dots,g_n\}$, то последовательность $\{f_m\}$ также имеет предельные точки.

Выберем последовательность номеров $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots$ так, чтобы существовали

$$\lim z_{m_j} = z, \quad \lim z_{r+m_j} = \bar z, \quad \lim f_{m_j} = f.$$

Переходя к пределу в (4), имеем

$$f(z) \geq f(\bar z). \tag{5}$$

Положим для простоты записи

$$\Omega_{\bar z_1,\dots,\bar z_{r+m}} = \Omega_m.$$

Функционал f_m обладает тем свойством, что

$$f_m(z_m) \leq f_m(\Omega_{m-1}).$$

В частности,

$$f_{m_{j+1}}(x_{m_{j+1}}) \leq f_{m_{j+1}}(\Omega_{m_{j+1}-1}).$$

Учитывая теперь, что

$$\bar{x}_{r+m_j} \in \Omega_{m_{j+1}-1},$$

имеем

$$f_{m_{j+1}}(x_{m_{j+1}}) \leq f_{m_{j+1}}(\bar{x}_{r+m_j}),$$

откуда

$$f(x) \leq f(\bar{x}).$$

Из последнего неравенства и (5) следует, что $f(x)=f(\bar{x})$.

Из полунепрерывности сверху отображения $F_{g_1,\dots,g_n}$ следует, что $f \in F_{g_1,\dots,g_n} x$. Таким же образом из полунепрерывности сверху отображения G_Ω следует, что $\bar{x} \in G_\Omega f$.

Имеем теперь для $x \in \Omega$

$$P_{g_1,\dots,g_n}(x) = f(x) = f(\bar{x}) \leq f(x) \leq P_{g_1,\dots,g_n}(x),$$

что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и я. I. Минимум достигается на каждой предельной точке последовательности $\{x_m\}$. Если функционал $P_{g_1,\dots g_n}$ достигает минимума на Ω в единственной точке, то последовательность $\{x_m\}$ сходится.

2. Дадим двустороннюю оценку сходимости. Положим

$$\mu = \min_{x\in\Omega} P_{g_1,\dots,g_n}(x) = P_{g_1,\dots,g_n}(x).$$

Тогда

$$f_m(\bar{x}_{r+m}) \leq \mu \leq f_m(x_m).$$

Правая часть неравенства следует из того, что

$$f_m(x_m) = P_{g_1,\dots,g_n}(x_m) \geq \mu,$$

левая часть - из соотношений

$$f_m(\bar{x}_{r+m}) \leq f_m(x) \leq P_{g_1,\dots,g_n}(x) = \mu.$$

Модифицированный процесс для минимизации функционала $P_{g_1,\dots;g_n}$.

Метод, предложенный в предыдущем номере для минимизации $P_{g_1,\dots g_n}$ монотонен, т.е. $P_{g_1,\dots,g_n}(x_{m+1}) \le P_{g_1,\dots,g_n}(x_m)$. Недостатком этого метода является то обстоятельство, что из равенства $x_{m+1} = x_m$ не следует, что x_m — искомый элемент (см. рис.2)

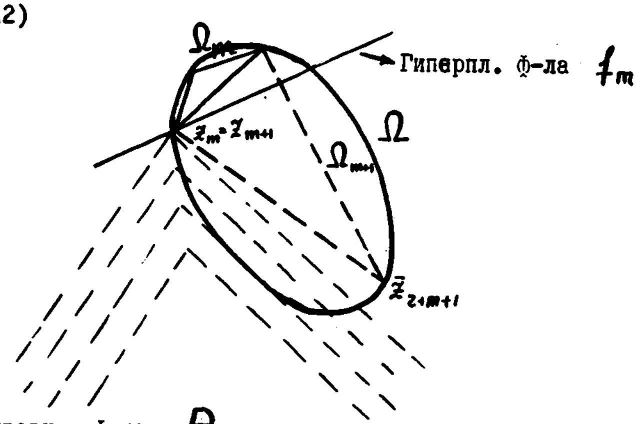

Рис. 2

В этом случае $m+1$ - й шаг заключается в том, что не изменяя m -того приближения, мы отыскиваем функционал, минимизация которого позволит сделать следующее приближение. При этом, поскольку процесс сходится, нужный нам функционал $\tilde{f}$ найдется за конечное число шагов. Ясно, что этот функционал будет элементом множества $F_{g_1,\dots,g_n,\, x_m}$, выделяющим $\Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_{z+m-1}}$ (т.е. $\tilde{f}(x_m) = P_{g_1,\dots,g_n}(x_m)$;

$$\tilde{f}(x) \le P_{g_1,\dots,g_n}(x) \qquad (x \in X),$$

$$\tilde{f}(x) \ge \tilde{f}(x_m) \qquad (x \in \Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_{z+m-1}}).$$

Отметим, что эти свойства $\tilde{f}$ совпадают с теми свойствами функционала f_m, которые использовались при доказательстве сходимости.

Положим

$$\tilde{F}_{g_1,\dots,g_n} z_m = \{ f \in F_{g_1,\dots,g_n} z_m \,/\, f(\Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_{r+m-1}}) \geq f(z_m) \}.$$

Используя (2), легко описать $\tilde{F}_{g_1,\dots,g_n} z_m$. Пусть

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_m) = \max_{k \leq n} g_k(z_m) = g_{k_s}(z_m) \quad (s=1,\dots,t);\ I = \{k_1,\dots,k_s,\dots,k_t\}.$$

Тогда

$$\tilde{F}_{g_1,\dots,g_n}(z_m) = \{ f \in X^* / f = \sum_{k_s \in I} \gamma_{k_s} g_{k_s},\ \gamma_{k_s} \geq 0,\ s=1,\dots,t,\ \sum_{k_s \in I} \gamma_{k_s} = 1;$$

$$\sum_{k_s \in I} \gamma_{k_s} g_{k_s}(\bar{z}_i - z_m) \geq 0,\ i=1,2,\dots,r+m-1 \}.$$

Как было отмечено выше, существует $\tilde{f} \in \tilde{F}_{g_1,\dots,g_n}(z_m)$ такой, что если выбрать этот функционал в качестве f_m, то из равенства

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_m) = P_{g_1,\dots,g_n}(z_{m+1})$$

будет следовать, что z_m - искомый элемент. Естественно поэтому модифицировать рассматриваемый метод таким образом: в качестве функционала f_m брать не решение задачи, двойственной к задаче 2, а функционал $\tilde{f}$. При этом, однако, возникает задача об отыскании $\tilde{f}$ (более простым путем, чем отыскание этого функционала с помощью рассматриваемого процесса).

Мы рассмотрим более подробно другую модификацию процесса, которая может быть описана следующим образом.

I) Так же, как и в основном процессе, выберем произвольно элементы $\bar{z}_i \in \Omega$ $(i=1,\dots,r)$ и обозначим через Ω_0 их выпуклую оболочку ($\Omega_0 = \Omega_{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_r}$). Решая задачу 2 и двойственную к ней, найдем элемент z_1, минимизирующий $P_{g_1,\dots,g_n}$ на Ω_0, и функционал $f_1 \in F_{g_1,\dots,g_n}(z_1)$, выделяющий Ω.

2) Пусть уже построено множество Ω_{m-1}, элементы $z_1,\dots,z_m$, функционалы $f_1,\dots,f_m$ $(m=1,2,\dots)$. Пусть функционалы g_{k_s} $(s=1,\dots,t)$ тако..., что

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_m) = \max_{k \leq n} g_k(z_m) = g_{k_s}(z_m).$$

Положим

$$\sigma^{(m)}=\{x\in Q / P_{g_1,\dots,g_n}(x)\le P_{g_1,\dots,g_n}(x_m)\},$$

и пусть

$$x^m_{k_s}\in G_{\sigma^{(m)}}\, g_{k_s}, \quad \bar{x}_{r+m}\in G_{\sigma^{(m)}}\, f_m .$$

Через Ω_m обозначим выпуклую оболочку множества Ω_{m-1} и элементов $\bar{x}_{r+m}, x^m_{k_s}$ $(s=1,2,\dots,t)$. Решая задачу 2 и двойственную ей, найдем элемент x_{m+1}, минимизирующий $P_{g_1,\dots,g_n}$ на Ω_m, и функционал $f_{m+1}\in F_{g_1,\dots,g_n}(x_{m+1})$, выделяющий Ω_m (см. рис. 3).

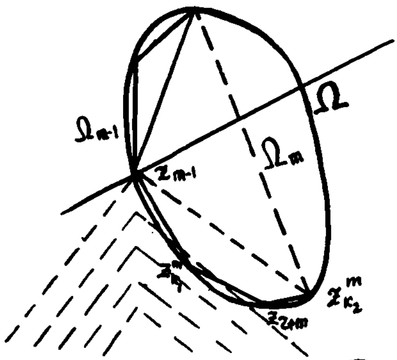

Рис. 3

Точно также, как и при доказательстве теоремы I, можно показать, что на предельных точках последовательности $\{x_m\}$ достигается искомый минимум.

Т е о р е м а 2. Если в модифицированном процессе для некоторого m

$$P_{g_1,\dots,g_n}(x_{m+1})=P_{g_1,\dots,g_n}(x_m),$$

то x_m есть искомый элемент, т.е. решение задачи 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы опирается на следующую лемму.

Л е м м а I. Пусть $\mu=\min\limits_{x\in\Omega} P_{g_1,\dots,g_n}(x)=\min\limits_{x\in\Omega}\max\limits_{k\le n} g_k(x)$. Найдется по крайней мере один функционал $g_{k'}$, обладающий следующим свойством: для любого $x \in \Omega$ такого, что $P_{g_1,\dots,g_n}(x)=\mu$, выполняется $P_{g_1,\dots,g_n}(x)=g_{k'}(x)$.

Доказательство леммы. Пусть

$$\Omega_\mu = \{ x \in \Omega / P_{g_1,\dots,g_n}(x)=\mu \}.$$

Ясно, что Ω_μ выпукло. Пусть $\tilde{x} \in \Omega_\mu$ и

$$P_{g_1,\dots,g_n}(\tilde{x}) = \max_{k \in n} g_k(\tilde{x}) = g_{k_1}(\tilde{x}) = g_{k_2}(\tilde{x}) = \dots = g_{k_q}(\tilde{x}).$$

Рассмотрим множества индексов

$$I_1 = \{k_1, k_2, \dots, k_q\} \quad \text{и} \quad I_2 = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I_1 .$$

Положим $\varepsilon = P_{g_1,\dots,g_n}(\tilde{x}) - \max_{\beta \in I_2} g_\beta(\tilde{x}) = \mu - \max_{\beta \in I_2} g_\beta(\tilde{x}) > 0$

и $V_\varepsilon = \{ x \in X / P_{g_1,\dots,g_n}(\tilde{x}-x) < \frac{\varepsilon}{2},\ P_{g_1,\dots,g_n}(x-\tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{2} \}$.

Пусть $x \in V_\varepsilon$. Из равенства $g_\alpha(\tilde{x}) = g_\alpha(x) + g_\alpha(x-\tilde{x})$

следует, что $\mu = \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(\tilde{x}) \le \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(x) + \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(\tilde{x}-x) \le$

$$\le \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(x) + P_{g_1,\dots,g_n}(\tilde{x}-x) < \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(x) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Отсюда $\max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(x) > \mu - \frac{\varepsilon}{2}$.

С другой стороны, из равенства $g_\beta(x) = g_\beta(\tilde{x}) + g_\beta(x-\tilde{x})$

следует, что $\max_{\beta \in I_2} g_\beta(x) \le \max_{\beta \in I_2} g_\beta(\tilde{x}) + \max_{\beta \in I_2} g_\beta(x-\tilde{x}) \le$

$$\le \max_{\beta \in I_2} g_\beta(x) + P_{g_1,\dots,g_n}(x-\tilde{x}) < \max_{\beta \in I_2} g_\beta(\tilde{x}) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Вспоминая, что $\max_{\beta \in I_2} g_\beta(\tilde{x}) = \mu - \varepsilon$, имеем

$$\max_{\beta \in I_2} g_\beta(x) < \mu - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Таким образом,

$$\max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(x) > \mu - \frac{\varepsilon}{2} > \max_{\beta \in I_2} g_\beta(x).$$

Из последних неравенств следует, что если $x \in V_\varepsilon$, то

$$P_{g_1,\dots,g_n}(x) = \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(x).$$

Покажем, что по крайней мере один из функционалов g_α $(\alpha \in I_1)$ – искомый. Допустим, что это не так. Тогда для любого

$\alpha \in I_1$ найдется $x_\alpha \in \Omega_\mu$ такой, что $g_\alpha(x_\alpha) < \mu$.
Положим $y = \sum_{\alpha \in I_1} \lambda_\alpha x_\alpha + \lambda_0 \tilde{x}_0$, где $\sum_{\alpha \in I_1} \lambda_\alpha + \lambda_0 = 1$;
$\lambda_\alpha > 0$ $(\alpha \in I_1)$, $\lambda_0 > 0$. Очевидно, что, выбрав λ_0 достаточно близким к I, можно добиться того, что $y \in V_\varepsilon$, а, значит, $P_{g_1,\dots,g_n}(y) = \max_{\alpha \in I_1} g_\alpha(y)$. Но для любого α имеем $g_\alpha(y) = \sum_{\alpha \in I_1} \lambda_\alpha g_\alpha(x_\alpha) + \lambda_0 g_\alpha(\tilde{x}) < \mu$, откуда $P_{g_1,\dots,g_n}(y) < \mu$.
Это противоречит тому, что $\mu = \min_{x \in \Omega} P_{g_1,\dots,g_n}(x)$.

Доказательство теоремы 2. Так как
$z^m_{k_1}, z^m_{k_2}, \dots, z^m_{k_t} \in \mathfrak{S}^{(m)}$, то

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z^m_{k_s}) \leq P_{g_1,\dots,g_n}(z_m) \quad (s = 1, 2, \dots, t).$$

Но поскольку $P_{g_1,\dots,g_n}(z_{m+1}) = P_{g_1,\dots,g_n}(z_m) = \min_{x \in \Omega_m} P_{g_1,\dots,g_n}(x)$, то строгое неравенство невозможно, т.е.

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_{m+1}) = P_{g_1,\dots,g_n}(z^m_{k_s}).$$

По лемме I существует функционал $g_{k'}$ такой, что

$$P_{g_1,\dots,g_n}(z_m) = g_{k'}(z_m) = g_{k'}(z^m_{k_s}) \quad (s = 1, \dots, t).$$

Ясно, что найдется s_0 такое, что $k' = k_{s_0}$.
В силу определения $z^m_{k_{s_0}}$

$$\min_{x \in \mathfrak{S}^{(m)}} g_{k_{s_0}}(x) = g_{k_{s_0}}(z^m_{k_{s_0}}),$$

поэтому

$$\min_{x \in \mathfrak{S}^{(m)}} g_{k_s}(x) = g_{k_{s_0}}(z^m_{k_{s_0}}) = g_{k_{s_0}}(z_m) = P_{g_1,\dots,g_n}(z_m)$$

и, значит, для любого $x \in \mathfrak{S}^{(m)}$

$$P_{g_1,\dots,g_n}(x) = \max_{k \leq n} g_k(x) \geq g_{k_{s_0}}(x) \geq$$
$$\geq \min_{x \in \mathfrak{S}^{(m)}} g_{k_{s_0}}(x) = P_{g_1,\dots,g_n}(z_m).$$

Доказательство теоремы следует из того обстоятельства, что

$$\min_{x\in\Omega} P_{g_1,\dots,g_n}(x) = \min_{x\in б(m)} P_{g_1,\dots,g_n}(x).$$

Решение задачи I

Решение задачи I (задачи о минимизации сублинейного функционала p на выпуклом компакте Ω) может быть сведено к решению последовательности задач о минимизации на Ω функционалов вида $P_{g_1,\dots,g_n}$.

Опишем предлагаемый метод.

I) Выбираем произвольно элементы $y_k \in \Omega$ и найдем функционалы $g_k \in F y_k \quad (k=1,2,\dots,r), \quad r \geq 2$.

2) Пусть уже построены элементы $y_1, y_2, \dots, y_n \quad (n \geq r)$ и функционалы $g_k \in F y_k \quad (k=1,2,\dots,n)$.

Рассмотрим функционал $P_{g_1,\dots,g_n}$ и, решая задачу 3, найдем элемент y_{n+1} , доставляющий минимум функционалу $P_{g_1,\dots,g_n}$ на Ω . Затем находим функционал $g_{n+1} \in F y_{n+1}$. Если $y_n = y_{n+1}$, то процесс оканчивается (как будет показано ниже, в этом случае y_n - искомый элемент).

В противном случае у нас выделяется последовательность

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

Выясним некоторые свойства этой последовательности и функционалов $P_{g_1,\dots,g_n}$.

I) $$P_{g_1,\dots,g_n}(x) \leq P_{g_1,\dots,g_{n+1}}(x) \leq p(x). \qquad (6)$$

Действительно, учитывая, что $g_k \leq p \quad (k=1,\dots,n+1)$, имеем

$$P_{g_1,\dots,g_n}(x) = \max_{k\leq n} g_k(x) \leq \max_{k\leq n+1} g_k(x) = $$
$$= P_{g_1,\dots,g_{n+1}}(x) \leq p(x).$$

2) Пусть

$$\mu_n = p(y_n).$$

Так как $g_k(y_n) \le p(y_n)$ $(k=1,\dots,n)$ и на функционале g_n реализуется равенство, то

$$\mu_n = p(y_n) = g_n(y_n) = \max_{k\le n} g_k(y_n) = P_{g_1,\dots,g_n}(y_n). \qquad (7)$$

Очевидно, что

$$\mu_n = P_{g_1,\dots,g_{n+q}}(y_n) \quad (q=1,2,\dots).$$

3) Пусть

$$\lambda_n = P_{g_1,\dots,g_{n-1}}(y_n).$$

Покажем, что последовательноть $\{\lambda_n\}$ не убывает. Действительно,

$$\lambda_n = P_{g_1,\dots,g_{n-1}}(y_n) = \min_{x\in\Omega} P_{g_1,\dots,g_{n-1}}(x) =$$

$$= \min_{x\in\Omega}\max_{k\le n-1} g_k(x) \le \min_{x\in\Omega}\max_{k\le n} g_k(x) = P_{g_1,\dots,g_n}(y_{n+1}) = \lambda_{n+1}.$$

Пусть теперь

$$\mu = \min_{x\in\Omega} p(x).$$

Л е м м а 2. При $n=1,2,\dots$

$$\lambda_n \le \mu \le \mu_n. \qquad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть элемент u реализует минимум p на Ω, т.е.

$$p(u) = \mu.$$

Так как $y_n \in \Omega$, то

$$p(y_n) = \mu_n \ge \mu.$$

С другой стороны, $\mu = p(u) \ge \max_{k\le n-1} g_k(u) \ge$

$$\ge \min_{x\in\Omega}\max_{k\le n-1} g_k(x) = P_{g_1,\dots,g_{n-1}}(y_n) = \lambda_n.$$

Т е о р е м а 3. Если при некотором n

$$y_n = y_{n+1},$$

то элемент y_n является решением задачи I.

В противном случае искомый минимум достигается на предельных точках последовательности $\{y_n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (8) следует, что если $\lambda_n = \mu_n$, то y_n - искомый элемент. В частности, y_n реализует минимум, если $y_n = y_{n+1}$. Действительно, в этом случае можно считать, что и $g_n = g_{n+1}$, а потому

$$\lambda_{n+1} = P_{g_1, \dots, g_n}(y_{n+1}) = \max_{k \le n} g_k(y_{n+1}) =$$

$$= \max_{k \le n+1} g_k(y_{n+1}) = g_{n+1}(y_{n+1}) = p(y_{n+1}) = \mu_{n+1}.$$

Пусть теперь $\lambda_n < \mu_n \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Выделим из последовательности $\{y_n\}$ сходящуюся подпоследовательность y_{n_j}, и пусть $y = \lim y_{n_j}$. Положим $\mu' = p(y)$, $\lambda = \lim \lambda_n$. Из (6) следует, что

$$\lambda \le \mu \le \mu'. \tag{9}$$

С другой стороны, используя (6) и (7), имеем

$$\mu_{n_{j-1}} = P_{g_1, \dots, g_{n_{j-1}}}(y_{n_{j-1}}) = P_{g_1, \dots, g_{n_{j-1}}}(y_{n_{j-1}} + y_{n_j} - y_{n_j}) \le$$
$$\le P_{g_1, \dots, g_{n_{j-1}}}(y_{n_j}) + P_{g_1, \dots, g_{n_{j-1}}}(y_{n_{j-1}} - y_{n_j}) \le$$
$$\le P_{g_1, \dots, g_{n_{j-1}}}(y_{n_j}) + p(y_{n_{j-1}} - y_{n_j}) = \lambda_{n_j} + p(y_{n_{j-1}} - y_{n_j}).$$

Переходя к пределу, имеем

$$\mu' \le \lambda.$$

Последнее неравенство вместе с (9) дает

$$\lambda = \mu = \mu',$$

откуда и следует, что y - искомый элемент.

З а м е ч а н и я. I. Минимум достигается на каждой предельной точке последовательности $\{y_n\}$. Если p достигает минимума на Ω в единственной точке, то последовательность $\{y_n\}$ сходится.

2. $\mu_n \longrightarrow \mu$.

3. Неравенства (8) дают удобную двустороннюю оценку сходимости.

Модификация рассматриваемых методов для минимизации нормы в сепарабельном банаховом пространстве

Пусть X - сепарабельное банахово пространство, $p(x)=\|x\|$, Ω - выпуклый компакт в X. Для решения задачи 1 в данном случае можно модифицировать предлагавшиеся ранее методы следующим образом:

I) Выберем произвольно $r \geqslant 2$ элементов

$$\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_r \qquad (\bar{z}_i \in \Omega, \ i=1,2,\ldots,r)$$

и s нормированных функционалов $g_1, g_2, \ldots, g_s$ $(s \geqslant 2)$.

2) Пусть уже построены элементы $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_{r+m}$ и функционалы $g_1, g_2, \ldots, g_{s+m}$ $(m=0,1,2,\ldots)$. Рассмотрим функционал $P_{g_1,\ldots,g_{s+m}}$ и многогранник $\Omega_{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_{r+m}}$. Решая задачу 2 и двойственную ей, найдем элемент z_{m+1}, минимизирующий $P_{g_1,\ldots,g_{s+m}}$ на $\Omega_{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_{r+m}}$, и функционал $f_{m+1} \in F_{g_1,\ldots g_{s+m}} z_{m+1}$, выделяющий $\Omega_{\bar{z}_1,\ldots \bar{z}_{r+m}}$. Выберем затем $g_{s+m+1} \in F z_{m+1}$ и $\bar{z}_{r+m+1} \in G_\Omega f_{m+1}$. В результате у нас построены последовательности

$$z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots,$$
$$\bar{z}_{r+1}, \bar{z}_{r+2}, \ldots, \bar{z}_{r+m}, \ldots,$$
$$f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots,$$
$$g_{s+1}, g_{s+2}, \ldots, g_{s+m}, \ldots$$

Т е о р е м а 4. Предельные точки последовательности $\{z_m\}$ являются решениями задачи I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\bar{z}_{r+m} \in G_\Omega f_m$, то

$$f_m(z_m) \geq f_m(\bar{z}_{r+m}). \tag{10}$$

Так как $f_m \in F_{g_1,\dots,g_{s+m-1}} z_m$, то f_m принадлежит выпуклой оболочке функционалов $g_1,\dots,g_{s+m-1}$. Поскольку $g_k \in F z_k$, то, как следует из (I), $\|g_k\|=1$ $(k=1,\dots,s+m-1)$, а потому и $\|f_m\|=1$.

Из сепарабельности X теперь следует, что последовательность $\{f_m\}$ имеет предельные точки в (w^*) - топологии.

Выберем теперь подпоследовательность номеров $m_1, m_2, \dots$ $\dots, m_j, \dots$, так, чтобы существовали

$$\lim z_{m_j} = z, \quad \lim \bar{z}_{r+m_j} = \bar{z}, \quad (w^*)-\lim f_{m_j} = f.$$

Переходя к пределу в (I0), имеем

$$f(z) \geq f(\bar{z}).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы I, доказывается справедливость обратного неравенства.

Таким образом,

$$f(z) = f(\bar{z}).$$

Для того, чтобы показать, что z есть элемент с наименьшей нормой на Q, достаточно проверить, что

$$f \in F z, \tag{11}$$

$$\bar{z} \in G_Q f. \tag{12}$$

(Напомним, что в силу соотношения (I′) соотношение (II) равносильно тому, что $\|f\|=1$ и $\|x\| = f(x)$). Действительно, если (II) и (I2) справедливы, то для $x \in Q$

$$\|z\| = f(z) \leq f(x) \leq \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|.$$

Справедливость (I2) следует из полунепрерывности G_Q.

Докажем теперь, что $f(z) = \|z\|$. Положим

$$\lambda_{s+m} = P_{g_1,\dots,g_{s+m-1}}(z_m),$$

$$\mu_{s+m} = \|z_m\|.$$

Так как $f_m \in F_{g_1,\dots,g_{s+m-1}} z_m$, то

$$f_m(x_m) = P_{g_1,\dots,g_{s+m-1}}(x_m) = \lambda_{s+m}.$$

Так, как и при доказательстве соотношения (7), легко показать, что

$$\mu_{s+m} = P_{g_1,\dots,g_{s+m}}(x_m).$$

Ясно, что

$$\lambda_{s+m} \le \mu_{s+m}.$$

Переходя к пределу, имеем

$$f(x) = \lambda \le \mu' = \|x\|.$$

Обратное неравенство доказывается теми же рассуждениями, что и в теореме 3. Таким образом,

$$f(x) = \|x\|. \qquad (13)$$

Покажем, что $\|f\| = 1$. Действительно, так как $f(x) \le \|f\| \cdot \|x\|$, то из (13) следует, что $\|f\| \ge 1$. С другой стороны, $f = (w^*)\text{-}\lim f_{m_j}$, откуда $\|f\| \le \underline{\lim} \|f_{m_j}\| = 1$. Таким образом, соотношение (11) справедливо. Это и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Акилов, А. М. Рубинов. Метод последовательных приближений для разыскания полинома наилучшего приближения. ДАН СССР, т. 157, стр. 503-505, 1964.
2. А. М. Рубинов. Минимизация нормы на компакте.-Вестник Ленинградского Университета, № 1, вып. 1, стр. 140-142, 1965.
3. М. М. Дей. Нормированные линейные пространства. ИЛ, 1965.
4. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений.-Журнал вычислительной математики и математической физики, т.5, стр.395-453, 1965.
5. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1965.