О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е

Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

Н. И. АРБУЗОВА

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматривается задача стохастического линейного программирования

$$\begin{gathered} \max CX \\ AX \le B \\ X \ge 0, \end{gathered}$$

где C есть строка $\{c_j\}, j=1,\dots,n$, B - столбец $\{b_i\}$, $i=1,\dots,m$ и A - матрица $\{a_{ij}\}$. Все параметры задачи - b_i, c_j и a_{ij} - случайные величины. Ника - ких ограничений относительно независимости их не накладывается. Известны их математические ожидания и дисперсии. Пространство параметров задачи размерности $mn+m+n$ обозначим Ω. Пусть ω - его элемент и P - мера на нем.

Исследуется вопрос о стохастической ε - устойчивости задачи, определение которой, данное в I, заключается в постоянстве с вероятностью, большей $1-\varepsilon$, множества меченых индексов - индексов натянутых (в терминологии Голдмана и Такера) ограничений, то есть ограничений, которым оптимальный план удовлетворяет как точным равенством.

Пусть задача имеет единственное решение при средних зна-

чениях параметров $\overline{\omega} \in \Omega$. Будем считать ограничения и переменные перенумерованными с самого начала так, что мечеными при средних значениях параметров являются индексы $1, \ldots, K$; $K+1, \ldots, n$. Это означает, что при $\overline{\omega} \in \Omega$ натянутыми являются ограничения $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$, $i \leq K$, и $x_j \geq 0$, $j > K$. Назовем областью устойчивости $G \subset \Omega$ множество, в пределах которого индексы $1, \ldots, K, K+1, \ldots, n$ остаются мечеными. Для ε - устойчивости задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $P(G) \geq 1-\varepsilon$. Выпишем границы области G и оценим ее меру.

При $\omega \in G$ матрица меченых нормалей выписывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1K} & a_{1,K+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{K1} & \ldots & a_{KK} & a_{K,K+1} & \ldots & a_{Kn} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ее угловую подматрицу K -го порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1K} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{K1} & \ldots & a_{KK} \end{pmatrix}$$

обозначим M. При $\omega \in G$ матрица M невырождена, и случайное решение X^0 записывается в виде $X^0 = M^{-1} N$, где $N^* = (b_1, \ldots, b_K)$, или, в покомпонентной записи,

$$x_j^0 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(-1)^{i+j} \Delta_{ij}}{\Delta} b_i ,$$

где Δ - определитель матрицы M, Δ_{ij} - дополнительный минор к элементу a_{ij} матрицы M.

Множество меченых индексов может измениться по двум причинам: либо план $M^{-1}N$ перестал быть допустимым, либо целевой вектор C вышел из положительного конуса, натянутого на нормали с индексами $1,\dots,k;k+1,\dots,n$. Поэтому область G ограничена поверхностями четырех типов.

1. Поверхности $f_i(\omega)=0$, $i=k+1,\dots,m$, выражающие условие на ω, при котором ограничения с индексами $1,\dots,k,i,k+1,\dots,n$ пересекаются в одной точке. При выходе из области G за поверхность $f_i(\omega)=0$ план $M^{-1}N$ перестает удовлетворять i-ому ограничению. Уравнение этой поверхности

$$b_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu+j}\Delta_{\nu j}}{\Delta}b_\nu$$

или

$$\Delta b_i-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu+j}a_{ij}\Delta_{\nu j}b_\nu=0.$$

Это поверхности порядка $k+1$ и число их равно $m-k$.

2. Поверхности $g_j(\omega)=0$, $j=1,\dots,k$, выражающие то условие, что ограничения с индексами $1,\dots,k;\ \hat{j}$, $k+1,\dots,n$ пересекаются в одной точке. Это условие $x_j^0=0$ или $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}b_i=0$; получаем k поверхностей порядка k.

3. Поверхности $\varphi_i(\omega)=0$, $i=1,\dots,k$, на которых векторное произведение целевого вектора на нормали с индексами $1,\dots,i-1,i+1,\dots,k,k+1,\dots,n$ равно 0. При выходе ω из области через границу $\varphi_i(\omega)=0$ целевой вектор выходит из положительного конуса, натянутого на нормали с индексами $1,\dots,k;\ k+1,\dots,n$ через его грань, являющуюся оболочкой нормалей с индексами $1,\dots,i-1,i+1,\dots,k;$ $k+1,\dots,n$. Уравнение этой поверхности

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\
 & & & & & \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
c_1 & \dots & c_k & c_{k+1} & & c_n \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 & & & & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix} = 0 ,
$$

или $\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}c_j=0$. Получаем k поверхностей порядка k.

4. Поверхности типа $\phi_j(\omega)=0$, $j=k+1,\dots,n$, на которых векторное произведение целевого вектора на нормали с индексами $1,\dots k;\ k+1,\dots,j-1,\ j+1,\ \dots,n$ равно нулю.

Получаем уравнения

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,j-1} & a_{kj} & a_{k,j+1} & \dots & a_{kn} \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
c_1 & & c_k & c_{k+1} & \dots & c_{j-1} & c_j & c_{j+1} & \dots & c_n \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix} = 0,
$$

или $$\Delta c_j - \sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{i+\nu} a_{ij}\Delta_{i\nu}c_\nu = 0$$

Получаем $n-k$ поверхностей $k+1$ - ого порядка.

Итак, в пространстве Ω выписано $m+n$ граничных поверхностей области G. Заметим, что уравнения $f_i(\omega)=0$ и $\psi_j(\omega)=0$ двойственны друг другу, как и уравнения $g_j(\omega)=0$ и $\varphi_i(\omega)=0$; поэтому области устойчивости для двойственных задач совпадают, если обе разрешимы единственным образом. В этом случае ε -устойчивость одной из задач влечет ε - устойчивость второй.

Перейдем к численной оценке меры области G. Выпишем градиенты к граничным поверхностям области G, вернее,их отличные от нуля компоненты.

I. $$\frac{\partial f_i}{\partial b_i} = \Delta \ ;$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial b_\nu} = -\sum_{j=1}^{k}(-1)^{\nu+j}a_{ij}\Delta_{\nu j}\ , \quad \nu = 1,\dots,k\ ;$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_{ij}} = \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu+j}\Delta_{\nu j}b_\nu\ , \quad j=1,\dots,k\ ;$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_{\ell p}} = (-1)^{\ell+p}\Delta_{\ell p}b_i - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu+j+\ell+p}\Delta_{\nu j,\ell p}\ ;$$

$$\ell=1,\dots,k\ ;\quad p=1,\dots,k\ .$$

Через $\Delta_{\nu j,\ell p}$ обозначим минор матрицы M с вычеркнутыми строками ν и ℓ и столбцами j и p.

2. $$\frac{\partial g_j}{\partial b_i} = \Delta_{ij}(-1)^{i+j}\ , \quad i=1,\dots,k\ ;$$

$$\frac{\partial g_j}{\partial a_{\ell p}} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j+\ell+p}\Delta_{ij,\ell p}\ ;\quad \ell=1,\dots,k\ ;\ p\neq j, k+1,\dots n\ .$$

Градиенты к поверхностям $\varphi_i(\omega)=0$ и $\psi_j(\omega)=0$ выписываются аналогично по соображениям двойственности. Зная градиенты к граничным поверхностям области G в любой граничной точке ω^0, выпишем нормированные уравнения касательных поверхностей в точке ω^0. Получим четыре семейства гиперплоскостей:

$$1.\ \begin{cases} \mathcal{F}_i(\omega,\omega^0)=0 \\ f_i(\omega^0)=0 \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} \Phi_i(\omega,\omega^0)=0 \\ \varphi_i(\omega^0)=0 \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} G_j(\omega,\omega^0)=0 \\ g_j(\omega^0)=0 \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} \Psi_j(\omega,\omega^0)=0 \\ \psi_j(\omega^0)=0. \end{cases}$$

Подставим средние значения параметров $\bar\omega$ в нормированные уравнения касательных гиперплоскостей и найдем расстояния от $\bar\omega$ до граничных поверхностей области G минимизацией по параметру ω^0.

$$1.\ \min_{\omega^0:\, f_i(\omega^0)=0} \mathcal{F}_i(\bar\omega,\omega^0)=d_{f_i} \qquad 3.\ \min_{\omega^0:\, \varphi_i(\omega^0)=0} \Phi_i(\bar\omega,\omega^0)=d_{\varphi_i}$$

$$2.\ \min_{\omega^0:\, g_j(\omega^0)=0} G_j(\bar\omega,\omega^0)=d_{g_j} \qquad 4.\ \min_{\omega^0:\, \psi_j(\omega^0)=0.} \Psi_j(\bar\omega,\omega^0)=d_{\psi_j}$$

Найдем $d=\inf(d_{f_i}, d_{g_j}, d_{\varphi_i}, d_{\psi_j})$ – расстояние от $\bar\omega$ до границы области G. Далее воспользуемся обобщенным неравенством Чебышева для функции $|\omega-\bar\omega|^2$:

$$P\{|\omega-\bar\omega|>d\}<\frac{M[|\omega-\bar\omega|^2]}{d^2}.$$

Вычислим $$M[|\omega-\bar\omega|^2]=\sum_{i,j} Da_{ij}+\sum_i Db_i+\sum_j Dc_j.$$

Для ε - устойчивости задачи достаточно выполнения неравенства

$$\frac{M[|\omega-\bar{\omega}|^2]}{d^2} < \varepsilon .$$

Заметим, что при детерминированных a_{ij} и случайных b_i и c_j граничные поверхности области G становятсч гиперплоскостями, и задача существенно упрощается. Расстояние от $\bar{\omega}$ до граничной гиперплоскости находится непосредственной подстановкой координат точки $\bar{\omega}$ в нормированное уравнение этой гиперплоскости. Для задачи, сформулированной в [I], получаем достаточный признак ε - устойчивости в виде $\sum_{i=1}^{m} Db_i < \varepsilon d^2$. Расстояния d_j получаются подстановкой значений Mb_i в нормированные уравнения m гиперплоскостей, ограничивающих область G. В задаче с одним случайным столбцом (см. [2]) или с одной случайной строкой границы области G также являются гиперплоскостями.

Искренне благодарю В.Л.Данилова за постановку задачи и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н. И. А р б у з о в а, В. Л. Д а н и л о в, ДАН СССР, I962, I (I965).

2. S.Barnett, Oper. Res. Quart. 13,3,219 (1962).