О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е
Сборник трудов
1967г.   Института математики СО АН СССР   Выпуск 9

Н. А. АСХАБОВ

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАВНОВЕСИЯ

В общих моделях равновесия конкурентной экономики Мак-Кензи [3], Гейла [4], Эрроу и Дебрё [5] (см. [1] стр. 328-333) векторы производства и потребления имеют одинаковую размерность. Экономические соображения подсказывают, однако, что число производимых товаров, вообще говоря, не совпадает с числом потребляемых.

При изучении конкурентной экономики торговлю включают в сферу производства. При исследовании социалистической экономики целесообразно, видимо, рассматривать торговую сеть как некоторое связующее звено между сферой производства и сферой потребления.

I. Описание модели

Предположим, что производится m различных товаров и имеется K потребителей ($k=1, \dots, K$), потребляющих n различных товаров. Введем обозначения:

x_i – выпуск i-го товара ($i=1, \dots, m$);

$z_j^{(k)}$ – спрос k-го потребителя на j-й товар

$\pi_j^{(k)}$ – потребительская цена j-го товара, назначаемая k-м потребителем.

Пусть производственная сфера имеет некоторое множество X

возможных производственных планов, т.е. векторов вида

$$x = (x_1, \ldots, x_m).$$

Множество X принадлежит m-мерному векторному пространству E^m. Спрос k-го потребителя дается вектором вида:

$$z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}).$$

Предположим, что каждый потребитель имеет возможность в зависимости от своего дохода, рыночных цен, заменяемости товаров и т.д. спрашивать на рынке некоторое множество $Z^{(k)}$ таких векторов. Тогда векторы спроса всех потребителей

$$z = \sum_k z^{(k)} = (z_1, \ldots z_n), \quad z_j = \sum_k z_j^{(k)} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

образуют множество $Z = \sum_k Z^{(k)}$ из n-мерного пространства E^n.

Пусть каждому вектору спроса $z^{(k)}$ соответствует свой единственный вектор потребительских цен $\pi^{(k)} = (\pi_1^{(k)}, \ldots \pi_n^{(k)})$; тогда каждому вектору $z^{(k)} \in Z^{(k)}$ соответствует определенное число $(z^{(k)}, \pi^{(k)}) = \sum_j z_j^{(k)} \pi_j^{(k)}$, т.е. на множестве $Z^{(k)}$ задан функционал f:

$$f(z^{(k)}) = (z^{(k)}, \pi^{(k)}).$$

Деятельность торговой сети описывается некоторым оператором T, ставящим в соответствие каждому вектору $x \in X$ некоторое множество векторов $T(x) \subset E^n$. При этом предполагается, что всё произведенное сразу поступает в распоряжение торговой сети, причем и то, что производится некоторой производственной единицей для собственного потребления, проходит через торговую сеть. Так как мы различаем товары по месту и времени их купли-продажи, а также на рынке товары могут взаимно заменяться, то оператор каждому вектору производства ставит в соответствие некоторое множество векторов предложения.

Обозначим:

$$Y = \bigcup_{x \in X} T(x).$$

Каждый вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)$ из Y есть некоторое возможное предложение на рынке.

Пусть множество векторов потребительских цен $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

образует замкнутый симплекс S, т.е.

$$\sigma \geq 0, \quad \sum_j \sigma_j = 1,$$

причем предполагается, что потребительские цены приведены в соответствие этим относительным рыночным ценам.

Пусть для производства единицы i-го товара требуется a_{ij} единиц j-го товара, приобретаемого на рынке $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$, т.е. задана $m \times n$ - матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда на производство всех товаров затрачивается

$$\sum_i a_{ij} x_i$$

натуральных единиц j-го товара. Стоимость материальных затрат на производство вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$ определяется величиной

$$(\sigma, xA) = (A\sigma, x) = \sum_{i,j} x\, a_{ij}\, \sigma_j .$$

Мы предполагаем, что каждая производственная единица входит в число потребителей и затраты на производство составляют часть вектора спроса. Таким образом, все производственные факторы считаются приобретаемыми на рынке и входят в вектор спроса.

Пусть величина $\alpha^{(k)}(\sigma, y)$ определяет доход k-го потребителя и пусть $\alpha^{(k)} \geq 0$, $k=1,\dots,K$, $\sum_k \alpha^{(k)} = 1$.

<u>Состояние равновесия</u> экономики определяется набором векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{\sigma}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$(\bar{\sigma}, \bar{y} - \bar{x}A) = \max_{x \in X,\, y \in T(x)} (\bar{\sigma}, y - xA) \qquad (1)$$

$$\bar{x}A \leq \bar{z}; \quad \bar{z} = \sum \bar{z}^{(k)} \qquad (2)$$

$$f(\bar{z}^{(k)}) = \max_{z^{(k)} \in \hat{Z}^{(k)}} f(z^{(k)}), \tag{3}$$

где
$$\hat{Z}^{(k)} = \left\{ z^{(k)} \in Z^{(k)} : (\bar{\sigma}, z^{(k)}) \leq \alpha^{(k)} \cdot (\bar{\sigma}, \bar{y}) \right\};$$

$$\bar{y} \geq \bar{z}, \quad (\bar{\sigma}, \bar{z} - \bar{y}) = 0; \tag{4}$$

$$\bar{\sigma} \in S. \tag{5}$$

Условие (I) означает максимизацию прибыли. Условие (2) требует, чтобы затраты на производство (в натуральных единицах) не превышали спроса на товары. В условии (3) выражен тот факт, что потребитель старается наилучшим образом удовлетворить свою потребность при данных рыночных ценах и при ограниченном доходе. Условие (4) требует удовлетворения спроса и равенства нулю рыночных цен тех товаров, предложение которых превышает спрос.

Нам будет нужен следующий топологический результат, принадлежащий Гейлу [4] (см. [I] стр. 331-332).

ЛЕММА I. Пусть P - ограниченное полунепрерывное сверху точечно - множественное отображение замкнутого симплекса S в E^n, удовлетворяющего следующим условиям:

а) Для каждого $\sigma \in S$ множество $P(\sigma)$ непустое и выпуклое;

б) Если $p \in P(\sigma)$, то $(p, \sigma) \geq 0$.

Тогда существуют такие $\bar{\sigma} \in S$ и $\bar{p} \in P(\bar{\sigma})$, что $\bar{p} \geqq 0$.

2. Существование равновесия

Обозначим через $e^i = (0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots 0)$, $i = 1, \dots, m$, орты пространства E^n. Пусть выполнены следующие условия:

I^0. X - ограниченное выпуклое множество из неотрицательного ортанта пространства E^m.

2^0. T - ограниченный оператор, причем если $0 < \lambda < 1$,

то $$\lambda T(x')+(1-\lambda)T(x'')\subset T(\lambda x'+(1-\lambda)x'').$$

3^0. $e^i A\in T(e^i)$ для любого $i=1,\dots,m$.

4^0. Каждое из $Z^{(k)}$ есть выпуклое замкнутое множество из неотрицательного ортанта пространства E^n, содержащее O, причем если одна из компонент любого вектора $z^{(k)}\in Z^{(k)}$ стремится к ∞, то и все компоненты этого вектора стремятся к бесконечности.

5^0. f -непрерывный функционал, причем если $\hat{z}^{(k)}, \hat{\hat{z}}^{(k)}\in Z^{(k)}$ $\hat{z}^{(k)}\neq\hat{\hat{z}}^{(k)} 0<\lambda<1$ и $f(\hat{z}^{(k)})\leq f(\hat{\hat{z}}^{(k)})$, то

$$f(\hat{z}^{(k)})<f(\lambda\hat{\hat{z}}^{(k)}+(1-\lambda)\hat{z}^{(k)})$$

6^0. Для любого $z^{(k)}\in Z^{(k)}$ существует $\hat{z}^{(k)}\in Z^{(k)}$ такой, что $f(z^{(k)})<f(\hat{z}^{(k)})$ и $(\sigma, z^{(k)})<(\sigma,\hat{z}^{(k)})\forall\sigma\in S$.

7^0. Для любого $j=1,\dots,n$, если $\sigma_j\to 0$, то $z_j\to\infty$.

ТЕОРЕМА I. При выполнении условий I^0- 7^0 существуют векторы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и $\bar{\sigma}$, удовлетворяющие требованиям (I) - (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (близко к методу Карлина в модели Эрроу - Дебре, см. I стр. 328). В силу I^0-3^0 для всех $x\in X$ будет $xA\in T(x)$. Из I^0-2^0 и полунепрерывности сверху оператора T (что вытекает из ограниченности T) следует, что для каждого $y\in Y$ множество $T^{-1}(y)$ непустое, ограниченное, выпуклое и замкнутое. Обозначим через $X(y,\sigma)$ множество всех $x\in T^{-1}(y)$, которые минимизируют величину (σ, xA) для фиксированных y и σ. Каждому y при фиксированном σ можно сопоставить число $(\sigma, y-xA)$, где $x\in X(y,\sigma)$, т.е. для каждого σ на множестве Y определена функция

$$\varphi(y,\sigma)=(\sigma,y-xA),\ x\in X(y,\sigma),$$

используя полунепрерывность сверху оператора T и свойства скалярного произведения, легко показать непрерывность этой функции на множестве Y. Обозначим через $Y(\sigma)$ множество всех $y\in Y$, которые доставляют максимум функции $\varphi(y,\sigma)$ на Y. Положим:

$$M(\sigma)=\max_{y\in Y}\varphi(y,\sigma).$$

Для каждого $y\in Y(\sigma)$ определим множество $Z_\sigma^{(k)}(y)$:

$$Z^{(k)}(y)=\left\{z^{(k)}\in Z^{(k)}:\alpha^{(k)}(\sigma,xA)\leq(\sigma,z^{(k)})\leq\alpha^{(k)}(\sigma,y)\right\}.$$

Ясно, что каждое из множеств $Z_\sigma^{(k)}(y)$ непустое (в силу условий 4^0 и 6^0), выпуклое и компактное.

Далее, обозначим через $Z^{(k)}(\sigma)$ множество тех которые максимизируют функционал $f(Z^{(k)})$. В силу свойств множества $Z_\sigma^{(k)}(y)$ и квазивогнутости функционала $f(Z^{(k)})$, это множество непустое, так как $0 \in Z^{(k)}$ для любого $k=1,\dots,K$, $M(\sigma) \geq 0$ и выполнено условие 6^0. По определению, для всех $Z^{(k)} \in Z_\sigma^{(k)}(y)$ выполнено неравенство

$$(\sigma, Z^{(k)}) \leq \alpha^{(k)} \cdot (\sigma, y), \qquad (6)$$

где $y \in Y(\sigma)$. Покажем, что для всех $Z^{(k)} \in Z^{(k)}(\sigma)$ в (6) равенство будет точное. Действительно, допустим противное. Пусть существует $z^{(k)} \in Z^{(k)}(\sigma)$ такое, что

$$(\sigma, z^{(k)}) < \alpha^{(k)}(\sigma, y).$$

Согласно 6^0 существует $\tilde{z}^{(k)} \in Z^{(k)}$ такое, что

$$f(Z^{(k)} < f(\tilde{z}^{(k)}).$$

Если при этом $(\sigma, \tilde{z}^{(k)}) \leq \alpha^{(k)} \cdot (\sigma, y)$, то мы приходим к противоречию с определением множества $Z_\sigma^{(k)}$, поэтому остается случай, когда $(\sigma, \tilde{z}^{(k)}) > \alpha^{(k)} \cdot (\sigma, y)$. Возьмем вектор

$$\tilde{\tilde{z}}^{(k)} = \lambda \tilde{z}^{(k)} + (1-\lambda) z^{(k)},$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha^{(k)}(\sigma, y) - (\sigma, z^{(k)})}{(\sigma, \tilde{z}^{(k)}) - (\sigma, z^{(k)})}.$$

Очевидно, $0 < \lambda < 1$. Из 5^0 имеем, что

$$f(z^{(k)}) < f(\tilde{\tilde{z}}^{(k)}). \qquad (7)$$

Кроме того, справедливо бюджетное ограничение

$$(\sigma, \tilde{\tilde{z}}^{(k)}) = \alpha^{(k)} \cdot (\sigma, y). \qquad (8)$$

Соотношения (7) и (8) несовместимы с определением $Z^{(k)}(\sigma)$, поэтому для всех $z^{(k)} \in Z^{(k)}(\sigma)$ и соответотвующих $y \in Y(\sigma)$ имеем

$$(\sigma, z^{(k)}) = \alpha^{(k)} \cdot (\sigma, y). \qquad (9)$$

Нужно заметить, что при различных $y \in Y(\sigma)$ значения (σ, y) будут различные (хотя значение величины $(\sigma, y - xA)$ одно и то же для всех $y \in Y(\sigma)$ и соответствующих x) и

множество $Z^{(K)}(\sigma)$ определяется для каждого из них.

При любом $\sigma \in S$ множество $Z^{(K)}(\sigma),\ k=1,\dots,K$ непустое, выпуклое и компактное. Последнее следует из ограниченности $Z^{(K)}(\sigma)$, что, в свою очередь, вытекает из условия 4^0. Действительно, если хоть одна компонента вектора $z^{(K)} \in Z^{(K)}(\sigma)$ стремится к бесконечности, то и все его компоненты стремятся к ∞, а так как $\sigma \in S$, то $(\sigma, z^{(K)}) \longrightarrow \infty$,

что противоречит ограниченности Y (условия I^0, 2^0 обеспечивают это) и соотношению (9).

Положим
$$Z(\sigma) = \sum_K Z^{(K)}(\sigma)$$
Легко видеть, что для каждого σ множество $Z(\sigma)$ является непустым, выпуклым и компактным.

Определим теперь точечно-множественное отображение P : $S \longrightarrow E^n$ следующим образом:
$$P(\sigma) = \left\{ p \in E^n : p = y - z,\ y \in Y(\sigma),\ z \in Z(\sigma) \right\}.$$
Легко проверить, что это отображение удовлетворяет всем условиям леммы Гейла. Из неё следует, что существуют векторы $\bar\sigma \in S$ и $\bar p = \bar y - \bar z \in P(\bar\sigma)$ такие, что $\bar p \geq \mathbb{O}$, т. е.
$$\bar y \geqq \bar z. \tag{I0}$$
Учитывая (9), видим, что векторы $\bar y$, $\bar z$ и $\bar\sigma$ удовлетворяют условиям (3) - (5).

Возьмем вектор $\bar x \in X(\bar\sigma, \bar y)$.

Докажем, что
$$\bar\sigma > \mathbb{O}. \tag{II}$$
Действительно, по условию 7^0 если какая-нибудь компонента этого вектора равна нулю, то любой потребитель вправе требовать сколь угодно большое количество товара с этой нулевой ценой, ибо на его расходы это не влияет. Это противоречит неравенству (I0) и ограниченности множества Y.

Из (9), (I0) и (II) немедленно следует, что
$$\bar y = \bar z. \tag{I2}$$
Из определения $X(\bar\sigma, \bar y)$ и равенства (I2) вытекает, что
$$\bar x A \leqq \bar z. \tag{I3}$$
Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функцию полезности потребителей мы выбрали специальным образом в виде функционала $f(z^{(K)}) = (z^{(K)}, \pi^{(K)})$.

Если взять вообще некоторые функции полезности $u_k(z^{(k)})$ для каждого потребителя, то в доказательстве теоремы I нужны лишь те свойства таких функций, которые обеспечивают достижение ими максимумов на множествах $Z_G^{(k)}(y)$. Поэтому, очевидно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Если каждая функция полезности u_k, $k=1,\dots,K$, непрерывно дифференцируема на соответствующем множестве $Z^{(k)}$, для каждой из этих функций выполнены условия 5^0 – 6^0, а также выполнены условия 1^0 – 4^0, то векторы равновесия существуют.

3. Линейный случай

Если оператор T есть линейный оператор, то будем пользоваться матричным представлением этого оператора:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

таким образом, каждому вектору $x=(x_1,\dots,x_m)$ будет соответствовать вектор $y=xB$, $y\in E^n$ т.е. деятельность торговой сети описывается матричным уравнением

$$xB=y. \qquad (14)$$

Величина $x_i b_{ij}$ показывает, какое количество i-го товара (выпускаемого на производстве) предлагается на рынке в качестве j-го товара (j-я компонента вектора предложения), т. е. матрица B является некоторым индикатором, определяющим предложение в зависимости от спроса.

Так как для люього $x\in X$ имеем $xA\in T(x)$, то в линейном случае $T(x)$ будет состоять из одного вектора xA. Таким образом, $xA=xB$.

В силу же условия 3^0, мы имеем, что

$$A=B. \qquad (15)$$

Далее, если задана матрица потребительских цен $\|\pi_j^{(k)}\|$ $k=1,\ldots,k$; $j=1,\ldots,n$, и она одинакова для всех $z^{(k)}\in Z^{(k)}$, то можно выбрать некоторый способ усреднения (например, такой

$$\pi_j = \frac{\sum_k z_j^{(k)}\pi_j^{(k)}}{\sum_k \pi_j^{(k)}} \;)\,,$$

позволяющий перейти от матрицы $\|\pi_j^{(k)}\|$ к вектору потребительских цен $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n)$, назначаемому "средним" потребителем.

Тогда функцию полезности можно определить в виде линейного функционала $f(z^{(k)})=(z^{(k)},\pi)$.

В этом случае существование равновесия можно доказать, опустив некоторые из условий I^0 – 6^0 .

ТЕОРЕМА 3. Если в линейной модели выполнены условия I^0, 3^0–4^0 и 6^0–7^0, то векторы равновесия существуют , причем

$$(\bar{\sigma},\bar{x}A-\bar{z})=0, \tag{I6}$$

т.е. цены избыточных производственных факторов обращаются в нуль.

Действительно, условие 2^0 обеспечено линейностью оператора T . Условие же 5^0, используемое лишь в том единственном месте, где показывается выполнение бюджетного равновесия (9), здесь является излишним, так как если повторить здесь те же выкладки, что и при доказательстве (9), с заменой $f(z^{(k)})=(z^{(k)},\pi^{(k)})$ на линейный функционал $f(z^{(k)})=(z^{(k)},\pi)$, то бюджетное равенство доказывается без условия 5^0.

Равенство (I6) вытекает из (I2), (I3), (I5).

4. О единственности векторов равновесия

Относительно единственности равновесных рыночных цен име-

ется следующий результат Гейла (см. [2] стр. 360-362).

ЛЕММА 2. Для данной матрицы потребительских цен и данных доходов потребителей существует единственный вектор равновесных рыночных цен $\bar{\sigma}$.

Так как $\bar{y} = \bar{z}$, то достаточно установить единственность одного из этих векторов. Если выполнено условие 5^0, то единственность равновесного вектора спроса $\bar{z}$ очевидна. Действительно, пусть существует два таких вектора $\hat{z}$ и $\hat{\hat{z}}$. Тогда, очевидно, хотя бы для одного $k=1,\dots,K$ будет

$$\hat{z}^{(k)} \neq \hat{\hat{z}}^{(k)},$$

причём

$$f(\hat{z})^{(k)} = f(\hat{\hat{z}}^{(k)}).$$

Подобрав соответствующим образом число λ, $0<\lambda<1$, как и при доказательстве бюджетного равенства (9), мы приходим к тому, что вектор $z^{(k)} = \lambda \hat{\hat{z}}^{(k)} + (1-\lambda)\hat{z}^{(k)}$ принадлежит бюджетному множеству и

$$f(\hat{z}^{(k)} < f(z^{(k)}),$$

что противоречит смыслу $\hat{z}^{(k)}$. Поэтому для всех $k=1,\dots,K$ векторы $\bar{z}^{(k)}$ единственны, а следовательно, единствен вектор

$$\bar{z} = \sum_k \bar{z}^{(k)}.$$

Для единственности $\bar{x}$ достаточно, чтобы полный прообраз $T^{-1}(\bar{y})$ вектора $\bar{y}$ был строго выпуклым или же, если прообраз имеет грань или ребро, чтобы никакая грань или ребро не лежали на гиперплоскости, параллельной гиперплоскости

$$(x, A\bar{\sigma}) = Const.$$

Полученное множество сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть существуют векторы равновесия $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{\sigma}$, заданы матрица потребительских цен $\|\pi_j^{(k)}\|$ и доходы каждого потребителя. Пусть, далее выполнено условие 5^0 и граница множества $T^{-1}(\bar{y})$ состоит лишь из экстремальных точек

или в случае, когда $T^{-1}(\bar{y})$ есть многогранник, ни для каких двух различных экстремальных точек x' и x'', лежащих на одной грани $T^{-1}(\bar{y})$ не выполнено соотношение

$$(x', A\bar{\sigma}) = (x'', A\bar{\sigma}).$$

Тогда векторы равновесия $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{\sigma}$ единственны.

Автор благодарит своего руководителя Г. П. Акилова за внимание и помощь в работе, а также А.М. Рубинова за ценные советы.

Литература

1. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1964.
2. Д.Гейл. Теория линейных экономических моделей, М., ИЛ,1963

Рукопись поступила в редакцию 15 декабря 1966 г.