О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е
Сборник трудов
1967 г.   Института математики СО АН СССР   Выпуск 9

А.Е. БАХТИН

О РЕАЛИЗАЦИИ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

При разыскании решения линейно-программных задач большой размерности часто возникают серьезные вычислительные трудности. Вопросу о преодолении этих трудностей уделяется большое внимание.

Многие исследования направлены на создание эффективных алгорифмов для решения задач, имеющих некоторую специальную структуру. Так, например, в работах [6,7] описываются алгорифмы, позволяющие быстро решать большие транспортные и двухкомпонентные задачи, а в работах [2,3,4,8,9] предлагаются специальные приемы для решения задач с матрицей блочного строения.

В данной работе обсуждается блочный способ решения больших задач линейного программирования, применение которого в некоторых специальных случаях сохраняет структуру матрицы. Разложение большой задачи на малые основывается здесь на идее "замораживания" и "размораживания" двойственных переменных, которая высказывалась Л.В.Канторовичем, и на идее разложимости Розена. По существу, этот способ можно рассматривать как одну из возможных реализаций двойственного симплекс-метода.

Работа состоит из четырех параграфов. В первом парагра -

фе описан начальный этап алгорифма. Во втором параграфе формулируются и доказываются теоремы, которые можно рассматривать как некоторые обобщения теорем Розена. В третьем параграфе дается описание алгорифма, а в четвертом приведен числовой пример.

§ I. Начальный этап алгорифма

Рассматривается следующая задача линейного программирования общего вида.

Задача I. Минимизировать линейную форму

$$\sum_{j\in J} a_j x_j \tag{I}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j\in J} x_j A_{kj} = d_k, \quad k=1,2,\dots,\ell, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J. \tag{3}$$

Здесь $J=\{1,2,\dots,n\}$,

a_j - заданные вещественные числа,

A_{kj}, d_k - заданные m_k - мерные вектор-столбцы с вещественными компонентами[*],

x_j - искомые величины.

Двойственной к этой задаче является

Задача П. Максимизировать линейную форму

$$\sum_{k=1}^{\ell} d_k^T z_k \tag{4}$$

при условии:

$$\sum_{k=1}^{\ell} A_{kj}^T z_k \leq a_j, \quad j \in J, \tag{5}$$

где z_k, $k=1,2,\dots,\ell$, - неизвестные m_k - мерные векторы. При этом предполагается, что строки матрицы, составленной из $\sum_{k=1}^{\ell} m_k$ - мерных столбцов,

---

*) В дальнейшем везде под векторами подразумеваются вещественные вектор-столбцы.

$$A_j = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{\ell j} \end{pmatrix}, \quad j \in J,$$

линейно независимы.

Пусть известно некоторое допустимое решение задачи II , то есть известен вектор $z^{(0)} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \\ \vdots \\ z_\ell^{(0)} \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условию(5).

Решим тогда последовательно следующие линейно-программные задачи I_k, $k = 1, 2, \ldots, \ell$.

Задача I_k . Минимизировать линейную функцию

$$f_k + \sum_{j \in J_k} b_{kj} x_j \tag{6}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j \in J_k} x_j B_{kj} = g_k, \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J_k. \tag{8}$$

Здесь J_k -подмножество множества индексов J; f_k, b_{kj} - числа; B_{kj}, g_k -векторы.

$$J_1 = J, \quad f_1 = \sum_{k=1}^{\ell} d_k^T z_k^{(0)}, \tag{9}$$

$$b_{1j} = c_j - \sum_{k=1}^{\ell} A_{kj}^T z_k^{(0)}, \quad B_{1j} = A_{1j}, \quad g_1 = d_1,$$

а переход от I_k к I_{k+1} осуществляется следующим образом .

Пусть задача I_k решена каким-либо методом линейного программирования и в результате решения из множества индексов J_k выделены подмножество индексов базисных компонент $\mathcal{J}_k$ и подмножество индексов небазисных компонент J_{k+1}

$$J_k = \mathcal{J}_k \cup J_{k+1}, \quad \mathcal{J}_k \cap J_{k+1} = \emptyset.$$

С помощью (7) выразим переменные $x_i, i\in J_k$, через переменные x_j, $j\in J_{k+1}$,

$$x_i = \beta_{ki} - \sum_{j\in J_{k-1}} \beta_{kji}\, x_j, \quad i\in J_k\ , \tag{10}$$

где β_{ki} и β_{kji} – коэффициенты в разложениях векторов g_k и B_{kj} по векторам B_{ki}, $i\in J_k$. Подставляя в (6) вместо x_i, $i\in J_k$, выражение (10), получаем минимизируемую функцию в задаче I $_{k+1}$. Её коэффициенты вычисляются по формулам:

$$f_{k+1} = f_k + \sum_{i\in J_k} b_{ki}\, \beta_{ki}\ , \tag{11}$$

$$b_{k+1j} = b_{kj} - \sum_{i\in J_k} b_{ki}\beta_{kji},\ j\in J_{k+1}\ . \tag{12}$$

Ограничительное векторное уравнение

$$\sum_{j\in J_{k+1}} x_j\, B_{k+1j} = g_{k+1}$$

находится из уравнения

$$\sum_{j\in J} x_j\ A_{k+1j} = d_{k+1} \tag{13}$$

путем исключения из него переменных x_i, $i\in\bigcup_{t=1}^{k} J_t$. Эти переменные исключаются из (13) последовательно: сначала переменные с индексами $i\in J_1$, затем – с индексами $i\in J_2$ и т.д.; при этом используется выражение типа (10). Предположим, что x_i, $i\in\bigcup_{t=1}^{k-1} J_t$, уже исключены из (13) и в результате найдено векторное

уравнение

$$\sum_{j\in J_k} x_j\, A_{k+1,j}^{(k-1)} = d_{k+1}^{(k-1)}\ . \tag{13.k-1}$$

Выпишем формулы перехода к уравнению (13. k), которое находится из (13.k - 1) исключением переменных с индексами $i\in J_k$:

$$A^{(k)}_{k+1j} = A^{(k-1)}_{k+1j} - \sum_{i \in J_k} \beta_{kji} A^{(k-1)}_{k+1i}, \ j \in \mathcal{J}_{k+1}, \qquad (14)$$
$$d^{(k)}_{k+1} = d^{(k-1)}_{k+1} - \sum_{i \in J_k} \beta_{ki} A^{(k-1)}_{k+1i}.$$

Полагая теперь

$$B_{k+1j} = A^{(k)}_{k+1j}, \ j \in \mathcal{J}_{k+1}, \ g_{k+1} = d^{(k)}_{k+1}, \qquad (15)$$

будем иметь для задачи I_{k+1} все необходимые данные. Отметим, что при машинной реализации векторы $A^{(k)}_{k+1j}, j \in \mathcal{J}_{k+1}, d^{(k)}_{k+1}$ можно помещать на те же места, которые ранее были заняты векторами $A^{(k-1)}_{k+1j}, j \in \mathcal{J}_{k+1}, d^{(k-1)}_{k+1}$, поскольку последние нигде в дальнейшем не используются. Возможен случай, когда I_k имеет несколько различных оптимальных базисных решений и, следовательно, имеется неединственное разбиение множества $\mathcal{J}_k$ на подмножества J_k и $\mathcal{J}_{k+1}$. Тогда переход к I_{k+1} может быть осуществлен различными путями. Пока нам неважно, какой путь избрать для перехода к I_{k+1}.

В заключение отметим, что двойственной к задаче I_k будет следующая

Задача II_k. Минимизировать линейную функцию

$$f_k + g_k^T u_k \qquad (16)$$

при условии:

$$B_{kj}^T u_k \leq b_{kj}, \ j \in \mathcal{J}_k. \qquad (17)$$

§ 2. Некоторые вспомогательные предложения

В этом параграфе устанавливаются некоторые факты, которые будут использованы в дальнейшем.

ТЕОРЕМА I. Пусть все задачи $I_t, t=1,2,\dots,k$ $(k \leq \ell)$ имеют оптимальные решения и для каждой одно из этих решений отмечено. Если $\mathcal{J}_t$, $t=1,2,\dots,\kappa$, множества индексов базисных компонент в отмеченных оптимальных решениях, то квадратная матрица, составленная из столбцов

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{\kappa i} \end{pmatrix}, \quad i \in \bigcup_{t=1}^{\kappa} \mathcal{J}_t, \tag{18}$$

неособенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость теоремы вытекает из того, что система векторных уравнений

$$\sum_{i \in \bigcup_{t=1}^{\kappa} \mathcal{J}_t} x_i A_{ti} = \rho_t, \quad t=1,2,\dots,\kappa, \tag{19}$$

имеет единственное решение при любых реализациях векторов ρ_t. Это решение может быть найдено путем последовательного исключения переменных. Из первого векторного уравнения системы (19) можно однозначно выразить переменные с индексами $i \in \mathcal{J}_1$ через переменные с индексами $i \in \bigcup_{t=2}^{\kappa} \mathcal{J}_t$ и исключить их из остальных уравнений, подставив туда найденное выражение. В результате получим систему

$$\sum_{i \in \bigcup_{t=2}^{\kappa} \mathcal{J}_t} x_i A_{ti}^{(1)} = \rho_t^{(1)}, \quad t=2,3,\dots,\kappa. \tag{20}$$

Так как матрица, составленная из m_2 - мерных столбцов $A_{2i}^{(1)} = B_{2i}$, $i \in \mathcal{J}_2$, неособенная, то из первого векторного уравнения системы (20) можно однозначно выразить переменные x_i, $i \in \mathcal{J}_2$, через остальные и исключить их из других уравнений и т.д.

ТЕОРЕМА 2. I. Если исходная задача I имеет допустимое решение, то каждая задача I_κ, $\kappa=1,2,\dots,\ell$, имеет оптимальное решение. 2. Никакая из задач I_κ, $\kappa=1,2,\dots,\ell$, не может иметь неограниченного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть задача I имеет допустимое решение. Так как двойственная к ней задача П также имеет по пред -

положению допустимое решение $x^{(0)}$, то обе задачи будут иметь оптимальные решения. Покажем, что задачи Π_κ, $\kappa=1,2,\dots,\ell$, имеют в этом случае оптимальные решения. Этого будет достаточно, чтобы существовали оптимальные решения и в задачах I_κ, $\kappa=1,2,\dots,\ell$.

Рассмотрим задачу Π_1. Максимизировать

$$f_1 + g_1^T u_1$$

при условии:

$$B_{1j}^T u_1 \leq b_{1j}, \quad j \in \mathcal{J}.$$

Учитывая (9), перепишем её в виде:

максимизировать

$$\sum_{\kappa=1}^{\ell} d_\kappa^T z_\kappa^{(0)} + d_1^T u_1$$

при условии:

$$A_{1j}^T u_1 \leq a_j - \sum_{\kappa=1}^{\ell} A_{\kappa j}^T z_\kappa^{(0)}, \; j \in \mathcal{J}.$$

Очевидно, что в этой задаче нулевой вектор является допустимым решением. Задача Π_1 отличается от задачи Π тем, что в Π_1 компоненты векторов z_κ, $\kappa=2,3,\dots,\ell$, зафиксированы (они равны соответствующим компонентам векторов $z_\kappa^{(0)}$). Возможность варьирования сохраняется лишь для компонент вектора z_1. Поэтому, если Π_1 имеет неограниченное решение, то тем более Π имеет неограниченное решение, откуда следует, что I не имеет допустимого решения, а это противоречит предположению. Таким образом Π_1 имеет оптимальное решение.

Докажем теперь, что Π_κ имеет оптимальное решение в предположении, что имеют оптимальные решения все предыдущие задачи Π_t, $t=1,2,\dots,\kappa-1$.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Максимизировать

$$\sum_{t=1}^{\ell} d_t^T z_t^{(0)} + \sum_{t=1}^{\kappa} d_t^T u_t \tag{21}$$

при ограничениях:

$$\sum_{t=1}^{\kappa} A_{ti}^T u_t = a_i - \sum_{t=1}^{\ell} A_{ti}^T z_t^{(0)}, \quad i \in \bigcup_{t=1}^{\kappa-1} \mathcal{J}_t, \tag{22}$$

$$\sum_{t=1}^{\kappa} A_{tj}^T u_t \leq a_j - \sum_{t=1}^{\ell} A_{tj}^T z_t^{(0)}, \quad j \in \mathcal{J}_\kappa. \tag{23}$$

где $\mathcal{J}_t$ $(t=1,2,\ldots,k-1)$ – множество индексов базисных компонент, полученное в результате решения I_k, а $\mathcal{Z}_k$ –множество индексов небазисных компонент в I_{k-1}.

С помощью (22) можно однозначно выразить векторы $u_1, u_2, \ldots u_{k-1}$ через u_k (см. теорему I). Если затем исключить их из(21) и (23), то получим задачу П $_k$.

Положим

$$\begin{aligned} z_t &= z_t^{(0)} + u_t\ , \quad t=1,2,\ldots,k, \\ z_t &= z_t^{(0)}, \qquad t=k+1,k+2,\ldots,\ell\ , \end{aligned} \tag{24}$$

и перепишем (2I) – (23) в терминах z_t.

Максимизировать

$$\sum_{t=1}^{\ell} d_t^T z_t \tag{4}$$

при ограничениях:

$$\sum_{t=1}^{\ell} A_{ti}^T z_t = a_i\ , \quad i \in \bigcup_{t=1}^{k-1} \mathcal{J}_t\ , \tag{22'}$$

$$\sum_{t=1}^{\ell} A_{tj}^T z_t \leq a_j\ , \quad j \in \mathcal{Z}_k\ . \tag{23'}$$

Отсюда видно, что вспомогательная задача отличается от П лишь тем, что множество её допустимых решений, задаваемое с помощью (22′), (23′) и (24), уже и содержится во множестве всех допустимых решений задачи П. Это множество, тем не менее не пустое, так как в нем содержится $z^{(0)}$.

Следовательно, в том случае, когда П имеет оптимальное решение, вспомогательная задача тоже будет иметь оптимальное решение.

А тогда будет иметь оптимальное решение и задача П $_k$.

2. Утверждение следует из того, что двойственная задача П $_k$ всегда имеет допустимое нулевое решение.

Пусть решены все задачи $\bar{I}_k$, $k=1,2,\ldots,\ell$, и найдены соотношения:

$$x_i = \beta_{ki} - \sum_{j \in \mathcal{Z}_{k+1}} \beta_{kji}\, x_j\ , \quad i \in \mathcal{J}_k,\quad k=1,2,\ldots,\ell. \tag{25}$$

Тогда нетрудно найти решение системы

$$\sum_{i\in\bigcup\limits_{t=1}\mathcal{I}_t} x_i A_{ki} = d_k, \qquad k=1,2,\ldots,\ell. \tag{26}$$

Обозначим его через $\{\beta_i\},\ i\in\bigcup\limits_{k=1}^{\ell}\mathcal{I}_k$. Очевидно,

$$\begin{gathered}\beta_i=\beta_{\ell i};\ i\in\mathcal{I}_\ell,\\ \beta_i=\beta_{ki}-\sum_{j\in\bigcup\limits_{t=1}^{\ell-k}\mathcal{I}_{k+t}}\beta_{kji}\,\beta_j,\ i\in\mathcal{I}_k,\ k=\ell-1,\ell-2,\ldots,1.\end{gathered} \tag{27}$$

ТЕОРЕМА 3. Необходимым и достаточным условием того, что в результате решения задач I_k, $k=1,2,\ldots,\ell$, получится оптимальное решение задачи I, является неотрицательность чисел $\beta_i,\ i\in\bigcup\limits_{k=1}^{\ell}\mathcal{I}_k$, вычисленных по формулам (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Необходимость. Оптимальное решение в I должно быть допустимым, т.е. удовлетворять условию неотрицательности.

2. Достаточность. Пусть все $\beta_i,\ i\in\bigcup\limits_{k=1}^{\ell}\mathcal{I}_k$, неотрицательны.

Полагая

$$x_i=\begin{cases}\beta_i, & \text{если } i\in\bigcup\limits_{k=1}^{\ell}\mathcal{I}_k,\\ 0, & \text{если } i\in\mathcal{J}_{\ell+1}=\mathcal{J}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\ell}\mathcal{I}_k,\end{cases} \tag{28}$$

будем иметь допустимое решение в задаче I.

Целевая функция (I) на этом решении равна

$$\sum_{i\in\bigcup\limits_{k=1}\mathcal{I}_k} a_i\beta_i=\sum_{k=1}^{\ell} d_k^T z_k^{(1)}=f_{\ell+1},$$

где $z^{(1)}=\begin{pmatrix} z_1^{(1)}\\ z_2^{(1)}\\ \vdots\\ z_\ell^{(1)}\end{pmatrix}$ – допустимое решение в II, удовлетворяющее системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{\ell} A_{ki}^T z_k=a_i,\quad i\in\bigcup_{k=1}^{\ell}\mathcal{I}_k \tag{29}$$

Итак, имеем допустимое решение (28) прямой задачи I со значением целевой функции (I), равным значению двойственной функции (4) на двойственно-допустимом решении $z^{(1)}$. Это значит, что (28) – оптимальное решение.

ТЕОРЕМА 4. Справедливо неравенство

$$f_{k+1} \geq f_k \ , \quad k = 1,2,\dots,\ell. \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось выше (см. доказательство теоремы 2), f_{k+1} равно максимальному значению функции (21) при ограничениях (22), (23). Аналогично f_k равно

$$\max\Big(\sum_{t=1}^{\ell} d_t^T z_t^{(0)} + \sum_{t=1}^{k-1} d_t^T u_t \Big) \tag{31}$$

при ограничениях:

$$\sum_{t=1}^{k-1} A_{ti}^T u_t = a_i - \sum_{t=1}^{\ell} A_{ti}^T z_t^{(0)}, \ i \in \bigcup_{t=1}^{k-2} J_t \ , \tag{32}$$

$$\sum_{t=1}^{k-1} A_{tj}^T u_t \leq a_j - \sum_{t=1}^{\ell} A_{tj}^T z_t^{(0)}, \ j \in J_{k-1}. \tag{33}$$

Пусть $\begin{pmatrix} \hat u_1 \\ \hat u_2 \\ \vdots \\ \hat u_{k-1} \end{pmatrix}$ - оптимальное решение в (31)-(33). Так как

$$f_k = \sum_{t=1}^{\ell} d_t^T z_t^{(0)} + \sum_{t=1}^{k-1} d_t^T \hat u_t \, , \quad \text{а} \quad \begin{pmatrix} \hat u_1 \\ \hat u_2 \\ \vdots \\ \hat u_{k-1} \\ \hat u_k = 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям (22),(23), то отсюда следует,что

$$\max\Big(\sum_{t=1}^{\ell} d_t^T z_t^{(0)} + \sum_{t=1}^{k} d_t^T u_t \Big) = f_{k+1} \geq f_k \ ;$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \in (22) \cap (23) \ .$$

Поскольку в зависимости от выбора начального допустимого решения в задаче П мы приходим к I $_k$ с различными параметрами,то в дальнейшем будем применять обозначения $I_k(\bar z), f_k(\bar z), b_{kj}(\bar z)$. Это означает, что числа $f_1, b_{1j}, j \in J_1$, вычислены по формулам:

$$f_1 = f_1(\bar z) = \sum_{t=1}^{\ell} d_t^T \bar z_t \, ,$$

$$b_{1j} = b_{1j}(\bar{z}) = a_j - \sum_{t=1}^{\ell} A_{tj}^T \bar{z}_t, \quad j \in J_1,$$

где $\bar{z}$ – некоторое фиксированное допустимое решение в П.

Как уже отмечалось, в случае неединственности оптимального базисного решения в I_{k-1} переход к последующим задачам может быть осуществлен различными способами. Чтобы различать задачи I_k в зависимости от выбранного оптимального базисного решения в I_{k-1}, будем в скобках писать соответствующее множество индексов небазисных компонент этого решения: $I_k(\bar{z}, J_k)$, $b_{kj}(\bar{z}, J_k)$ и т.д.

Докажем теперь следующую лемму.

ЛЕММА. Оптимальное базисное решение в задаче $I_k(z^{(0)}, J_k)$

$$x_i = \begin{cases} \beta_{ki}, \text{ если } & i \in \mathcal{J}_k, \\ 0, \text{ если } & i \in J_{k+1}, \end{cases} \tag{34}$$

оптимально и в $I_k(z^{(1)}, J_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем задачу $I_1(z^{(1)})$.

Минимизировать

$$f_1(z^{(1)}) + \sum_{j \in J_1} b_{1j}(z^{(1)}) x_j \tag{35}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j \in J_1} x_j B_{1j} = g_1, \tag{36}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J_1,$$

где

$$f_1(z^{(1)}) = \sum_{t=1}^{\ell} d_t^T z_t^{(1)} = f_{\ell+1}(z^{(0)}),$$

$$b_{1j}(z^{(1)}) = a_j - \sum_{t=1}^{\ell} A_{tj}^T z_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & j \in \bigcup_{t=1}^{\ell} \mathcal{J}_t, \\ b_{\ell+1j}(z^{(0)}), & j \in J_{\ell+1}. \end{cases} \tag{37}$$

Так как ограничения (36) в задаче $I_1(x^{(1)})$ те же, что и в $I_1(x^{(0)})$, то оптимальное решение в $I_1(x^{(0)})$, задаваемое формулой (34) при $k=1$, является допустимым в $I_1(x^{(1)})$.

Минимизируемая функция (35) на этом решении в силу (37) равна $f_{\ell+1}(x^{(0)})$.

Рассмотрим двойственную задачу $I_1(x^{(1)})$. Допустимым решением в ней будет нулевое решение со значением целевой функции, равным $f_1(x^{(1)})=f_{\ell+1}(x^{(0)})$. Это указывает на оптимальность решения (34) в $I_1(x^{(1)})$.

Предположим теперь, что каждое оптимальное решение в $I_t(x^{(0)}, \mathcal{J}_t)\ (t=1,2,\dots,k-1)$ оптимально и в $I_t(x^{(1)}, \mathcal{J}_t)$. Покажем тогда, что система чисел (34), дающая оптимальное решение в $I_k(x^{(0)}, \mathcal{J}_k)$, определяет оптимальное решение и в $I_k(x^{(1)}, \mathcal{J}_k)$.

Перейдем от $I_{k-1}(x^{(1)}, \mathcal{J}_{k-1})$ к $I_k(x^{(1)}, \mathcal{J}_k)$. Поскольку функция (35) не зависит от переменных $x_i,\ i\in\bigcup_{t=1}^{\ell} \mathcal{J}_t$, то при переходе от $I_1(x^{(1)})$ к $I_2(x^{(1)}, \mathcal{J}_2)$, от $I_2(x^{(1)}, \mathcal{J}_2)$ к $I_3(x^{(1)}, \mathcal{J}_3)$ и т.д. она не изменит своего вида. Ограничения в $I_k(x^{(1)}, \mathcal{J}_k)$ те же, что и в $I_k(x^{(0)}, \mathcal{J}_k)$. Поэтому в $I_k(x^{(1)}, \mathcal{J}_k)$ допустимым решением будет оптимальное решение задачи $I_k(x^{(0)}, \mathcal{J}_k)$.

Значение минимизируемой функции на нем по-прежнему равно $f_{\ell+1}(x^{(0)})$. Опять-таки нулевой вектор является двойственно-допустимым решением в $I_k(x^{(1)}, \mathcal{J}_k)$, и соответствующее значение двойственной функции равно $f_{\ell+1}(x^{(0)})$. Это полностью доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 5. Если τ - наибольшее из чисел k таких, что среди чисел β_i, $i\in\mathcal{J}_k$, вычисленных по формулам (27), имеется хотя бы одно отрицательное, то задача $I_\tau(x^{(1)}, \mathcal{J}_\tau)$ имеет по крайней мере два различных оптимальных базиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем задачу $I_\tau(x^{(1)}, \mathcal{J}_\tau)$.

Минимизировать

$$f_\tau(x^{(1)}, \mathcal{J}_\tau)+\sum_{j\in\mathcal{J}_\tau} b_{\tau j}(x^{(1)}, \mathcal{J}_\tau)x_j=f_{\ell+1}(x^{(0)})+\sum_{j\in\mathcal{J}_{\ell+1}} b_{\ell+1,j}(x^{(0)})x_j \qquad (38)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_\tau} x_j B_{\tau j}=q_\tau , \qquad (39)$$

$$x_j\geq 0,\ j\in\mathcal{J}_\tau . \qquad (40)$$

Учитывая, что векторное уравнение (39) эквивалентно системе (I0) при $\kappa=\tau$, перепишем $I_\tau(x^{(\prime)}, \mathcal{J}_\tau)$ в виде:
минимизировать (38) при ограничениях:

$$x_i=\beta_{\tau i}-\sum_{j\in \mathcal{J}_{\tau+1}} \beta_{\tau j i}\; x_j\;, \quad i\in \mathcal{J}_\tau, \qquad (39')$$

$$x_i\geqslant 0,\; i\in \mathcal{J}_\tau;\; x_j\geqslant 0, \quad j\in \mathcal{J}_{\tau+1}. \qquad (40')$$

Отметим, что после решения задачи $I_\ell(x^{(0)})$ вычислены и имеются все необходимые данные для сформирования $I_\tau(x^{(\prime)}, \mathcal{J}_\tau)$ в виде (38), (39'), (40').

Как было показано в лемме, одно оптимальное базисное решение дает система чисел

$$x_j=\begin{cases}\beta_{\tau j}, & j\in \mathcal{J}_\tau,\\ 0\;, & j\in \mathcal{J}_{\tau+1}.\end{cases} \qquad (41)$$

Рассмотрим следующее решение системы уравнений (39'), зависящее от параметра θ ;

$$x_i=\begin{cases}\beta_{\tau i}-\theta \sum\limits_{j\in \bigcup_{t=1}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}} \beta_{\tau j i}\;\beta_j\,, & i\in \mathcal{J}_\tau\,,\\ \theta\beta_i\,, & i\in \bigcup\limits_{t=1}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}\,,\\ 0\;, & i\in \mathcal{J}_{\ell+1}\,.\end{cases} \qquad (42)$$

При $\theta=0$ получается решение (41), которое наряду с (39') удовлетворяет и условию неотрицательности (40'). При $\theta=1$, как это следует из определения τ, среди компонент решения с номерами $i\in \mathcal{J}_\tau$ имеется хотя бы одна отрицательная. Возьмем

$$\theta=\theta'=\min_{i\in \overset{(-)}{\mathcal{J}_\tau}} \frac{\beta_{\tau i}}{\sum\limits_{j\in \bigcup_{t=1}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}} \beta_{\tau j i}\cdot\beta_j}=\frac{\beta_{\tau i_0}}{\sum\limits_{j\in \bigcup_{t=1}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}} \beta_{\tau j i_0}\cdot\beta_j}\;, \qquad (43)$$

где

$$\overset{(-)}{\mathcal{J}_\tau}=\{i: \beta_i<0,\; i\in \mathcal{J}_\tau\} \qquad (44)$$

Очевидно, что $0<\theta'<1$.

Тогда решение системы (39')

$$x_i=\begin{cases}\beta_{\tau i}-\theta' \sum\limits_{j\in \bigcup_{t=1}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}} \beta_{\tau j i}\cdot\beta_j\;, & i\in \mathcal{J}_\tau\,,\\ \theta'\beta_i\,, & i\in \bigcup\limits_{t=1}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}\,.\\ 0\,, & i\in \mathcal{J}_{\ell+1}\,,\end{cases} \qquad (45)$$

удовлетворяет условию (40'), а его i_0 -ая компонента $(i_0 \in \overset{(-)}{\mathcal{J}_\tau})$ равна нулю.

Таким образом, в $I_\tau(x^{(1)}\mathcal{J}_\tau)$ имеется допустимое решение (45) с нулевой компонентой x_{i_0}. Это решение может оказаться небазисным, но тогда существует оптимальное базисное решение, содержащее не более m_τ нулевых компонент. Пусть новые базисные компоненты имеют индексы $i \in \mathcal{J}_\tau^{(1)} (\mathcal{J}_\tau^{(1)} \subset \bigcup_{t=0}^{\ell-\tau} \mathcal{J}_{\tau+t}, i_0 \bar{\in} \mathcal{J}_\tau^{(1)})$. Они входят в целевую функцию (38) с нулевыми коэффициентами, и потому значение (38) на новом решении равно $f_{\ell+1}(x^{(0)})$, т.е. это решение оптимально.

§ 3. Описание алгорифма

Пусть имеется задача линейного программирования (I)-(3). Предположим, что известно некоторое её двойственно-допустимое решение $x^{(0)}$.

Решим последовательно задачи $I_k(x^{(0)}), k=1,2,\ldots,\ell$. По окончании их решения будем иметь число $f_{\ell+1}(x^{(0)})=f_1(x^{(1)})$, равное значению двойственной функции (4) на двойственно-допустимом решении $x^{(1)}$; новые "невязки"

$$b_{\ell+1j}(x^{(0)})=b_{1j}(x^{(1)})=a_j-\sum_{k=1}^{\ell} A_{kj}^T x_k^{(1)}, j\in \mathcal{J}_{\ell+1}=\mathcal{J}\setminus\bigcup_{k=1}^{\ell}\mathcal{J}_k,$$

а вместо системы (2) эквивалентную ей систему

$$x_i=\beta_{ki}-\sum_{j\in\mathcal{J}_{k+1}}\beta_{kji}x_j, \quad i\in\mathcal{J}_k, \quad k=1,2,\ldots,\ell. \qquad (25)$$

По формулам (27) будем вычислять числа β_i, $i\in\mathcal{J}_{k_\ell}$, полагая $k=\ell,\ell-1\ldots$. Если получилось, что все $\beta_i, i\in\bigcup_{k=1}\mathcal{J}_k$, неотрицательны, то по теореме 3 система чисел (28) определяет оптимальное решение исходной задачи I. Если же при вычислении β_i оказалось, что числа $\beta_i\geq 0$, $i\in\bigcup_{k=\tau+1}^{\ell}\mathcal{J}_k$, а среди $\beta_i, i\in\mathcal{J}_\tau$, имеются отрицательные, то дальнейший процесс вычислений по формулам (27) прекращается.

По теореме 5 в задаче $I_\tau(x^{(1)},\mathcal{J}_\tau)$, определяемой с помощью (38), (39'), (40'), имеется альтернатива выбора оптимальных базисов. Среди оптимальных базисов найдется такой, что хотя бы одна его компонента с номером из $\overset{(-)}{\mathcal{I}_\tau}$ не является базисной. Номер i_0 такой компоненты находится с помощью (37). Возьмем такое оптимальное базисное решение. Множество индексов $\mathcal{J}_\tau = \mathcal{I}_\tau \cup \mathcal{J}_{\tau+1}$ при этом разбивается на подмножества $\mathcal{I}_\tau^{(1)}$ и $\mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)}$, соответствующие базисным и небазисным компонентам этого решения. С помощью (39') выразим переменные x_i, $i \in \mathcal{I}_\tau^{(1)}$, через x_i, $i \in \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)}$, исключим их из (25) при $k=\tau+1, \tau+2, \ldots, \ell$ и перейдем к решению задачи $I_{\tau+1}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)})$.

Минимизировать линейную функцию (38) при ограничениях:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)}} x_j B_{\tau+1\,j}^{(1)} = g_{\tau+1}^{(1)}, \tag{46}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)}, \tag{47}$$

где (46) получено из подсистемы системы (25) при $k=\tau+1$ исключением оттуда переменных x_i, $i \in \mathcal{I}_\tau^{(1)}$.

Так как все коэффициенты линейной функции (38) неотрицательны, то нулевой вектор двойственно-допустим в $I_{\tau+1}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)})$. Поэтому всякое прямое допустимое решение в $I_{\tau+1}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)})$, удовлетворяющее дополнительному условию

$$x_j = 0, \quad j \in \mathcal{J}_{\ell+1}, \tag{48}$$

будет и оптимальным. Поэтому, чтобы скорее найти оптимальное решение задачи $I_{\tau+1}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)})$, следует начать поиск, положив

$$x_j = 0, \quad j \in \mathcal{J}_{\ell+1}.$$

Кроме того, потребуем вначале от решения выполнения условия

$$x_j = 0, \quad j \in \overset{(-)}{\mathcal{J}}{}_{\tau+1}^{(1)} = \overset{(-)}{\mathcal{I}_\tau} \cap \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)}. \tag{49}$$

Если существует допустимое решение в $I_{\tau+1}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+1}^{(1)})$ с дополнительными тривиальными ограничениями (48), (49), то возьмем какое-нибудь базисное решение и перейдем к задаче $I_{\tau+2}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+2}^{(1)})$, опять-таки выдвигая требования (48), (49). В качестве минимизируемой функции в $I_{\tau+2}(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathcal{J}_{\tau+2}^{(1)})$ в этом случае будет все та же функция (38).

Если же нет допустимого решения в (38), (46)-(49), то ограничение (49) снимается и поиск продолжается.

Здесь возможны два случая:

1) допустимого решения нет,

2) допустимое решение есть.

В случае 1) снимается условие (48) и либо выясняется, что $I_{r+1}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \mathcal{J}_{r+1}^{(1)})$ вовсе не имеет допустимых решений, тогда по теореме 2 это указывает на отсутствие допустимых решений в исходной задаче I, либо находится оптимальное базисное решение со значением целевой функции $> f_1(\boldsymbol{x}^{(1)})$ (среди базисных компонент решения в этом случае будет хотя бы одна компонента с номером из множества $\mathcal{J}_{\ell+1}$) и продолжается решение последующих задач уже без каких-либо дополнительных ограничений.

В случае 2) среди допустимых базисных решений найдем такое, которое удовлетворяет условию $\mathcal{J}_{r+2}^{(-)(1)} \neq \Phi$, (50)

где $\mathcal{J}_{r+2}^{(-)(1)} = \mathcal{J}_r^{(-)} \cap \mathcal{J}_{r+2}^{(1)}$, $\mathcal{J}_{r+2}^{(1)}$ – множество индексов небазисных компонент решения.

Покажем, что это всегда можно сделать. Пусть существует и найдено решение, для которого $\mathcal{J}_{r+2}^{(-)(1)} = \Phi$. Тогда, если из системы уравнений

$$x_i = \beta_{ki} - \sum_{j \in \mathcal{J}_{k+1}} \beta_{kji} x_j, \quad i \in \mathcal{J}_k, \ k = r+2, r+3, \ldots, \ell, \qquad (50)$$

исключить переменные $x_i, i \in \mathcal{J}_r^{(1)} \cup \mathcal{J}_{r+1}^{(1)}$ с помощью выражений, найденных для них при решении задачи $I_r(\boldsymbol{x}^{(1)}, \mathcal{J}_r), I_{r+1}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \mathcal{J}_{r+1}^{(1)})$, и положить $x_j = 0, j \in \mathcal{J}_{\ell+1}$, то получится квадратная система, имеющая единственно неотрицательное решение

$$x_j = \beta_j, \ j \in \mathcal{J}_{r+2}^{(1)} \setminus \mathcal{J}_{\ell+1}. \qquad (52)$$

По теореме 2 все задачи $I_{r+t}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \mathcal{J}_{r+t}^{(1)}), t = 2, 3, \ldots, \ell - r$, с дополнительными ограничениями (48) имеют оптимальное решение, и решение этих задач привело бы в конечном счете к имеющейся системе чисел (52) и к тому же полному базису (22).

Таким образом, к задаче $I_{r+1}(\boldsymbol{x}^{(1)}, \mathcal{J}_{r+1}^{(1)})$ применима теорема 5.

Дальше рассуждения идентичны. Либо приходим к выводу, что исходная задача I не имеет допустимых решений, либо находится оптимальное базисное решение очередной рассматриваемой задачи и осуществляется переход к следующей.

Дойдя до $I_\ell(\boldsymbol{x}^{(1)}, \mathcal{J}_\ell^{(1)})$, будем иметь:

либо $f_\ell(\boldsymbol{x}^{(1)}) > f_1(\boldsymbol{x}^{(1)})$, либо $f_\ell(x^{(1)}) = f_1(x^{(1)})$ и $\overset{(-)}{\mathcal{J}}{}_\ell^{(1)} = \overset{(-)}{\mathcal{J}}_\tau \cap \mathcal{J}_\ell^{(1)} \neq \Phi$.

После решения $I_\ell(x^{(1)}, \mathcal{J}_\ell^{(1)})$ получим $f_{\ell+1}(x^{(1)}) > f_1(x^{(1)})$. Дальше отыскиваем новое τ и начинаем решать новую серию задач.

Таким образом, получаем строго возрастающую последовательность значений двойственной функции (4) и соответствующую последовательность чередующихся полных базисов задачи I. Это доказывает конечность алгорифма.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Нетрудно видеть, что если матрица коэффициентов системы (2) имеет такую структуру, как это показано на рис.I, то при описанном способе решения задачи с такой матрицей структура сохраняется.

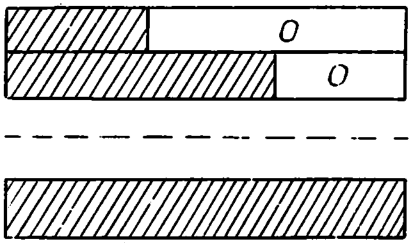

Рис. I.

2. Описанный алгорифм не нарушает структуру матрицы и в задаче Данцига и Вулфа (рис.2), если сделать в ней естественное разбиение на блоки, и совпадает в этом случае с алгорифмом Розена.

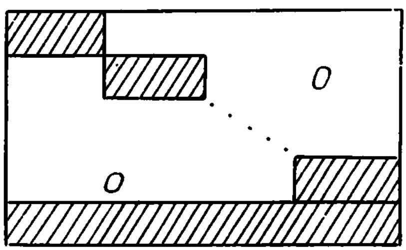

Рис.2.

§ 4. Числовой пример

Проиллюстрируем некоторые детали алгорифма на числовом примере.

<u>Исходная задача I.</u>

$$\min(x_1 + x_2 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_8 + x_{11} + x_{12}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{12} = 8\\
&-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + 2x_7 - x_8 = 4\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - x_9 = 10\\
&x_1 + 3x_2 - x_4 + 2x_5 + x_7 + 2x_8 + 3x_{11} = 7\\
&-2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_8 + 2x_9 + x_{12} = 12\\
&-4x_2 + 8x_5 + x_6 - x_8 - x_9 + 2x_{10} + x_{11} = 10
\end{aligned} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J = \{1, 2, \ldots, 12\}. \quad (3)$$

В качестве начального двойственно-допустимого решения в задаче I возьмем вектор

$$\chi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -0{,}2 \\ \hline -0{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ограничениями в задаче I являются три подсистемы уравнений(2), содержащие по два уравнения каждая, и условие неотрицатель - ности (3). То, что в каждой подсистеме содержится одинаковое количество уравнений, разумеется, не является обязательным.

По формулам (9) сформируем задачу I_1

$$f_1 = -11,$$

b_{1j}	1,2	0	0,8	0	2,4	2	1,2	3,2	1,6	0	1,6	1,8
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Задача I_1.

$$\min(-11 + 1{,}2x_1 + 0{,}8x_3 + 2{,}4x_5 + 2x_6 + 1{,}2x_7 + 3{,}2x_8 + 6x_9 + 1{,}6x_{11} + 1{,}8x_{12}) \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 3x_8 + x_{10} + 2x_{12} = 8\\
&-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + 2x_7 - x_8 = 4
\end{aligned} \quad (7.1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J_1 = J. \quad (8.1)$$

Процесс нахождения оптимальных решений в задачах I_k здесь приводить не будем. Сразу же после записи I_k будем выписывать вид минимизируемой функции в найденном "малом" оптимальном базисе (т.е. минимизируемую функцию для задачи I_{k+1}) и соотношение типа (10). При решении I_k, например, симплекс-методом, вся необходимая для этого информация содержится в окончательной симплексной таблице.

Итак, имеем

$$-11+1{,}2x_1 \quad +0{,}8x_3 \quad +2{,}4x_5+2x_6+1{,}2x_7+3{,}2x_8+1{,}6x_9 \quad +1{,}6x_{11}+1{,}8x_{12} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 4+x_1-x_2-x_3 \quad - x_5+x_6-2x_7+x_8 \\ x_{10} &= 0-3x_1+x_2+x_3 \quad + x_5-3x_6+4x_7-5x_8 \qquad -2x_{12}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Функция (6.2) ничем не отличается от (6.1), поскольку последняя не зависит от переменных x_4 и x_{10}. Исключив теперь с помощью (10.1) x_4 и x_{10} из второй подсистемы системы (2), перейдем к <u>задаче I_2</u>:

минимизировать (6.2) при ограничениях:

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2 \quad +x_5+4x_6-2x_7+x_8-x_9 \qquad &= 6 \\ 4x_2+x_3+3x_5-x_6+3x_7+x_8 \qquad +3x_{11} &= 11 \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \ j \in \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{I}_1, \ \mathcal{I}_1 = \{4, 10\}. \tag{8.2}$$

Получаем

$$-9{,}7+0{,}9x_3+2{,}3x_5+0{,}3x_6+2{,}3x_7+2{,}9x_8+2x_9+1{,}9x_{11}+1{,}8x_{12} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}08+0{,}08x_3-0{,}08x_5-1{,}42x_6+0{,}92x_7-0{,}25x_8+0{,}33x_9+0{,}25x_{11} \\ x_2 &= 2{,}75-0{,}25x_3-0{,}75x_5+0{,}25x_6-0{,}25x_7-0{,}25x_8 \quad -0{,}75x_{11}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Из третьей подсистемы системы (2) с помощью (10.1) и (10.2) исключим переменные x_4, x_{10}, x_1, x_2 и перейдем к <u>задаче I_3</u>:

минимизировать (6.3) при ограничениях:

$$\begin{aligned} -7x_3 + x_5 - 19x_6 + x_7 + 33x_8 + 20x_9 + 33x_{11} + 6x_{12} &= 49 \\ 2x_3 + 12x_5 + 3x_6 + 4x_7 - 9x_8 - 3x_9 + x_{11} - 4x_{12} &= 22 \end{aligned} \qquad (7.3)$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{I}_2,\ \mathcal{I}_2 = \{1,2\}. \qquad (8.3)$$

Находим

$$-3{,}03 + 0{,}89x_3 + 0{,}72x_6 + 1{,}49x_7 + 2{,}87x_8 + 1{,}52x_9 + 2{,}23x_{12} \qquad (6.1)^{(1)}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 1{,}71 - 0{,}18x_3 - 0{,}29x_6 - 0{,}33x_7 + 0{,}83x_8 + 0{,}30x_9 + 0{,}34x_{12} \\ x_{11} &= 1{,}43 + 0{,}21x_3 + 0{,}58x_6 - 0{,}02x_7 - 1{,}02x_8 - 0{,}61x_9 - 0{,}19x_{12}. \end{aligned} \qquad (10.3)$$

Здесь $\mathcal{I}_3 = \{5, 11\}$, $\mathcal{J}_4 = \mathcal{J}_3 \setminus \mathcal{I}_3 = \{3, 6, 7, 8, 9, 12\}$.

На этом заканчивается подготовительный, или начальный, этап вычислений. Дальше по формулам типа (27) переходим к определению чисел β_i, $i \in \bigcup_{k=1}^{3} \mathcal{I}_k$. Делаем это последовательно, полагая сначала $i \in \mathcal{I}_3$, затем $i \in \mathcal{I}_2$ и $i \in \mathcal{I}_1$. Получаем

$$i \in \mathcal{I}_3 = \{5, 11\} \quad \begin{aligned} \beta_5 &= 1{,}71 \\ \beta_{11} &= 1{,}43 \end{aligned}$$

$$i \in \mathcal{I}_2 = \{1, 2\} \quad \begin{aligned} \beta_1 &= 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}71 + 0{,}25 \cdot 1{,}43 = 1{,}29 \\ \beta_2 &= 2{,}75 - 0{,}75 \cdot 1{,}71 - 0{,}76 \cdot 1{,}43 = 0{,}38. \end{aligned}$$

$$i \in \mathcal{I}_1 = \{4, 10\} \quad \begin{aligned} \beta_4 &= 4 + 1{,}29 - 0{,}38 - 1{,}71 = 3{,}19 \\ \beta_{10} &= 0 - 3 \cdot 1{,}29 + 0{,}38 + 1{,}71 = -1{,}79. \end{aligned}$$

Все β_i, $i \in \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$, положительны, а среди β_i, $i \in \mathcal{I}_1$ имеется отрицательное число β_{10}, следовательно, мы не пришли к оптимуму. Следуя изложенному алгорифму, в I$_1$ $(z^{(1)})$ необходимо произвести замену множества $\mathcal{I}_1$ множеством $\mathcal{I}_1^{(1)}$ индексов новых базисных компонент, соответствующих другому оптимальному базисному решению, и рассмотреть новую серию малых задач.

Задача I$_1$ $(z^{(1)})$.

Минимизировать $(6.1)^{(1)}$ при ограничениях:

$$x_4 = 4 + x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + x_6 - 2x_7 + x_8 \qquad (7.1)^{(1)}$$
$$x_{10} = 0 - 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 - 3x_6 + 4x_7 - 5x_8 - 2x_{12}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \mathcal{J}_1 \qquad (8.1)^{(1)}$$

Так как в нашем примере множество $\overset{(-)}{\mathcal{I}_1} = \{10\}$ (см. формулу (44)) содержит лишь один элемент, то из (43)-(45) следует, что в множество $\mathcal{I}_1^{(1)}$ не должен входить индекс 10. Находим

$$\mathcal{I}_1^{(1)} = \{4, 5\}, \quad \mathcal{J}_2^{(1)} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

$$-3{,}03 + 0{,}89x_3 + 0{,}72x_6 + 1{,}49x_7 + 2{,}87x_8 + 1{,}52x_9 + 2{,}23x_{12} \qquad (6.2)^{(1)}$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 \qquad - 2x_6 + 2x_7 - 4x_8 - x_{10}$$
$$x_5 = 0 + 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_6 - 4x_7 + 5x_8 + x_{10} + 2x_{12}. \qquad (10.1)^{(1)}$$

Дальше переходим к $I_2(z^{(1)})$, исключив с помощью $(10.1)^{(1)}$ в (10.2) переменные с индексами из $\mathcal{I}_1^{(1)}$. Это удобнее сделать, умножив предварительно первое уравнение (10.2) на 12, а второе на 4.

<u>Задача $I_2(z^{(1)})$.</u>

Минимизировать $(6.2)^{(1)}$ при ограничениях:

$$15x_1 - x_2 - 2x_3 + 20x_6 - 15x_7 + 8x_8 - 4x_9 + x_{10} - 3x_{11} + 2x_{12} = 13 \qquad (7.2)^{(1)}$$
$$9x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_6 - 9x_7 + 16x_8 \quad + 3x_{10} + 3x_{11} + 6x_{12} = 11$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \mathcal{J}_2^{(1)}, \qquad (8.2)^{(1)}$$
$$x_{10} = 0 \qquad (*)$$

В целях ускорения разыскания оптимального решения в $I_2(z^{(1)})$ поставим дополнительное ограничение $x_i = 0, i \in \mathcal{J}_4$. В результате находим

$$-3{,}03 + 0{,}89x_3 + 0{,}72x_6 + 1{,}49x_7 + 2{,}87x_8 + 1{,}52x_9 + 2{,}23x_{12} \qquad (6.3)^{(1)}$$
$$x_1 = 1 + 0{,}16x_3 - 1{,}16x_6 + x_7 - x_8 + 0{,}16x_9 - 0{,}16x_{10} - 0{,}33x_{12}$$

$$x_2 = 2 + 0{,}5x_3 + 2{,}5x_6 - 7x_8 - 1{,}5x_9 - 1{,}5x_{10} - 3x_{11} - 3x_{12}$$

$$\mathcal{I}_2^{(1)} = \{1,2\}, \quad \mathcal{J}_3^{(1)} = \{3,6,7,8,9,10,11,12\}. \qquad (10.2)^{(1)}$$

Задача $I_3(z^{(1)})$.

Минимизировать $(6.3)^{(1)}$ при ограничениях:

$$\left.\begin{aligned} -0{,}81x_3 - 2{,}70x_6 - 0{,}66x_7 + 8{,}16x_8 + 1{,}69x_9 + 2x_{10} + 3x_{11} + 3{,}65x_{12} &= 0{,}71 \\ -0{,}21x_3 - 0{,}58x_6 - 0{,}02x_7 + 1{,}02x_8 + 0{,}61x_9 \qquad + x_{11} + 0{,}19x_{12} &= 1{,}43 \end{aligned}\right\} \quad (7.3)^{(1)}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in \mathcal{J}_3^{(1)}. \qquad (8.3)^{(1)}$$

Находим

$$-0{,}29 + 0{,}77x_3 + 0{,}94x_7 + 6{,}76x_8 + 1{,}41x_9 + 1{,}52x_{10} + 4{,}58x_{12} \qquad (6.1)^{(2)}$$

$$\begin{aligned} x_6 &= 3{,}78 - 0{,}17x_3 - 0{,}76x_7 + 5{,}37x_8 - 0{,}15x_9 + 2{,}11x_{10} + 3{,}24x_{12} \\ x_{11} &= 3{,}64 + 0{,}11x_3 - 0{,}47x_7 + 2{,}11x_8 - 0{,}70x_9 + 1{,}23x_{10} + 1{,}70x_{12} \end{aligned} \qquad (10.3)^{(1)}$$

$$\mathcal{I}_3^{(1)} = \{6,11\}, \quad \mathcal{J}_4^{(1)} = \{3,7,8,9,10,12\}.$$

Вычисляем $\beta_i^{(1)}, \quad i \in \bigcup_{k=1}^{3} \mathcal{I}_k^{(1)}$,

$$i \in \mathcal{I}_3^{(1)} = \{6,11\} \qquad \begin{aligned} \beta_6^{(1)} &= 3{,}78 \\ \beta_{11}^{(1)} &= 3{,}64 \end{aligned}$$

$$i \in \mathcal{I}_2^{(1)} = \{1,2\} \qquad \begin{aligned} \beta_1^{(1)} &= 1 - 1{,}16 \cdot 3{,}78 = -3{,}41 \\ \beta_2^{(1)} &= 2 + 2{,}5 \cdot 3{,}78 - 3 \cdot 3{,}64 = 0{,}52 \end{aligned}$$

Дальнейший процесс вычисления чисел $\beta_i^{(1)}$ на этом прекращается. Найдены новое τ, равное 2, и $\bar{\mathcal{I}}_2^{(1)} = \{1\}$.

Таким образом, мы проделали одну типичную для алгоритма итерацию. Вторую итерацию, приводящую к оптимальному решению исходной задачи I, приведем без дополнительных разъяснений.

Задача $I_2(z^{(2)})$.

Минимизировать $(6.1)^{(2)}$ при ограничениях:

$$x_1 = 1 + 0{,}16x_3 - 1{,}16x_6 + x_7 - x_8 + 0{,}16x_9 - 0{,}16x_{10} - 0{,}33x_{12} \qquad (7.2)^{(2)}$$

$$x_2 = 2 + 0{,}5x_3 + 2{,}5x_6 - 7x_7 \quad - 1{,}5x_9 - 1{,}5x_{10} - 3x_{11} - 3x_{12}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in \mathcal{J}_3^{(1)} = \mathcal{J}_3^{(2)}, \qquad (8.2)^{(2)}$$

$$x_1 = 0. \qquad (**)$$

Находим

$$x_6=0{,}85-0{,}85x_1+0{,}14x_3+0{,}85x_7-0{,}85x_8+0{,}14x_9-0{,}14x_{10}-0{,}28x_{12} \qquad (10.2)^{(2)}$$

$$x_{11}=1{,}38-0{,}71x_1-0{,}33x_2+0{,}28x_3+0{,}71x_7-3{,}04x_8-0{,}38x_9-0{,}61x_{10}-1{,}23x_{12}$$

$$\mathcal{I}_2^{(2)}=\{6,11\},\quad \mathcal{J}_3^{(2)}=\{1,2,3,7,8,9,10,12\}.$$

Задача $I_3(\mathbf{z}^{(2)})$.

Минимизировать $(6.1)^{(2)}$ при ограничениях:

$$-0{,}85x_1+0{,}31x_3+1{,}62x_7-6{,}23x_8+0{,}29x_9-2{,}25x_{10}-3{,}53x_{12}=2{,}92$$
$$(7.3)^{(2)}$$
$$-0{,}71x_1-0{,}33x_2+0{,}16x_3+1{,}18x_7-5{,}16x_8+0{,}32x_9-1{,}85x_{10}-2{,}94x_{12}=2{,}26$$

$$x_j\geq 0,\quad j\in\mathcal{J}_3^{(2)} \qquad (8.3)^{(2)}$$

$$2{,}93+1{,}53x_1+3{,}82x_2+1{,}28x_3+17{,}57x_8+5{,}27x_{10}+10{,}90x_{12}$$

$$x_7=1{,}57+0{,}37x_1-0{,}56x_2-0{,}29x_3+2{,}76x_8+1{,}02x_{10}+1{,}53x_{12}$$

$$x_9=1{,}23+0{,}83x_1+3{,}08x_2+0{,}56x_3+5{,}81x_8+1{,}96x_{10}+3{,}44x_{12}$$

$$\mathcal{I}_3^{(2)}=\{7,9\},\quad \mathcal{J}_4^{(2)}=\{1,2,3,8,10,12\}.$$

$$i\in\mathcal{I}_3^{(2)}\qquad \beta_7^{(2)}=1{,}57$$
$$\beta_9^{(2)}=1{,}23$$
$$i\in\mathcal{I}_2^{(2)}\qquad \beta_6^{(2)}=2{,}38$$
$$\beta_{11}^{(2)}=2{,}03$$
$$i\in\mathcal{I}_1^{(2)}=\mathcal{I}_1^{(1)}\qquad \beta_4^{(2)}=2{,}38$$
$$\beta_5^{(2)}=0{,}85$$

Все $\beta_i^{(2)}$ положительны, следовательно, система чисел

$$x_i=\begin{cases}\beta_i^{(2)}, & i\in\bigcup_{k=1}^{3}\mathcal{I}_k^{(2)},\\ 0, & i\in\mathcal{J}\setminus\bigcup_{k=1}^{3}\mathcal{I}_k^{(2)}=\mathcal{J}_4^{(2)}\end{cases}$$

определяет оптимальное решение задачи I со значением линейной формы (I), равным 2,93.

В заключение автор благодарит Г.Ш. Рубинштейна за внимание к работе, ряд ценных советов и критических замечаний.

Литература

1. В.А.Булавский. Об одном алгорифме решения транспортной задачи.–Оптимальное планирование.Новосибирск, 1964, вып.2(алгорифмы), стр. 41–50 .

2. Е.Г.Гольштейн. Методы блочного программирования.–Экономика и матем. методы, 1966, т.II, вып.I.

3. G.B.Dantzig,P.Wolfe. Decomposition principle for linear programs.–J.Oper.Res.Soc.Am., 8 (1960).

4. Р.А. Звягина. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами.–Оптимальное планирование.Новосибирск, 1964, вып. 2 (алгорифмы), стр. 50– 62.

5. Л.В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.

6. Rosen. Promal partition programming for block diagonal matrices. Numerische mathematik. 6,1964

7. Г.Ш.Рубинштейн. Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником.– ДАН СССР, (1957),т.113, № 5, стр. 987–991.

8. Г.Ш.Рубинштейн. О решении задач линейного программирования большого объема. – Оптимальное планирование. Новосибирск, вып.2 (алгорифмы), 1964, стр. 3–23.

9. М.А. Яковлева. Двухкомпонентная задача линейного программирования.–Оптимальное планирование. Новосибирск, вып. 2 (алгорифмы), 1964, стр. 23–41.

Рукопись поступила в
редакцию I октября
1966 г.