ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
Сборник трудов
1967г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

И.А.КРАСС

ТЕОРЕМЫ О МАГИСТРАЛИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГЕЙЛА С НАГРУЗКОЙ

1°. Рассматриваемый вариант модели Гейла задается выпуклым замкнутым конусом $Z \subset R_{2n}^{+}$ и последовательностью векторов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $f_i \in R_n$. Каждый элемент $z \in Z$, называемый процессом, может быть представлен в виде пары векторов $z = (x, y)$, где $x, y \in R_n^{+}$. На конус Z налагаются следующие условия:

1. Если $y \neq 0$, то $(0, y) \bar{\in} Z$.
2. Если $(x,y) \in Z$, то и $(x, y') \in Z$, где $y' \leq y$

(здесь имеется в виду покоординатное сравнение).

Будем, кроме того, считать, что каждый вектор $f_i \in \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, называемый вектором нагрузки (или просто нагрузкой), удовлетворяет условию

$$f_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots$$

Пусть $\Xi = \{\xi\}$ есть множество всех выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств R_n^{+}. Определим оператор A из Ξ в Ξ следующим равенством (см. [I]):

$$A(\xi) = \{y \,/\, \exists\, (x \in \xi),\ z = (x, y) \in Z\}.$$

(То, что оператор A действительно действует из Ξ в Ξ будет доказано в дальнейшем).

Для любого $f \in R_n$ определим оператор A_f равенством:

$$A_f(\xi) = \{\tilde{y} \,/\, \tilde{y} - f,\ y \in A(\xi),\ y \geqslant f\}.$$

Введём следующие обозначения:

если задана последовательность векторов $f_1 \ldots f_k$ $(f_i \in R_n, 1 \leqslant i \leqslant k)$ и $\xi \in \Xi$, то

$$Af_k \dots f_1(\xi) = Af_k\, Af_{k-1} \dots Af_1(\xi)$$

$$Ax = A(\{x\});\quad Afx = Af(\{x\}).$$

ЛЕММА I. Если $\xi \in \Xi$, то и $A(\xi) \in \Xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $y_n \in A(\xi)$ и $y_n \to y$. Тогда для каждого y_n существует $x_n \in \xi$ такое, что $y_n \in Ax_n$. Ввиду замкнутости и ограниченности ξ, можно считать, что последовательность $\{y_n\}$ выбрана так, что $x_n \to x \in \xi$. Тогда $(x_n, y_n) \to (x, y)$, а в силу замкнутости конуса $\underset{\sim}{Z}$ имеем $(x, y) \in Z$, то есть $y \in A(\xi)$.

Докажем ограниченность $A(\xi)$.

Пусть существует последовательность $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$x_n \in \xi,\ y_n \in Ax_n \quad \text{и}\ \|y_n\| \to \infty.$$

Рассмотрим тогда новую последовательность $\left\{\left(\frac{x_n}{\|y_n\|}; \frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой по-прежнему входит в Z. Так как $x_n \in \xi$ ($n = 1, 2, \dots$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|y_n\|} = 0$. С другой стороны, последовательность $\frac{y_n}{\|y_n\|}$ ограничена, поэтому существует подпоследовательность $\frac{y_{nk}}{\|y_{nk}\|} \xrightarrow[k\to\infty]{} \tilde{y} \neq 0$. Ввиду замкнутости $A(\xi)$, получаем $(0, \tilde{y}) \in Z$, что противоречит условию I), наложенному на конус Z.

Выпуклость $A(\xi)$ проверяется просто.

ЛЕММА 2. Если $\xi \in \Xi$, то множество $B(\xi) = \{x / x \in \xi,\ \exists y(y \in Ax,\ y \geq f)\} \in \Xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n \in B(\xi)$ и $x_n \to x \in \xi$. Для каждого x_n существует вектор $y_n \in Ax_n$ такой, что $y_n \geq f$. Выберем подпоследовательность x_{n_k} так, чтобы $y_{n_k} \to y$, что можно сделать ввиду компактности множества $A(\xi)$. Тогда $y \geq f$ и, как было показано в лемме I, $y \in Ax$, то есть $x \in B(\xi)$.

Легко проверить, что множество $B(\xi)$ выпукло и ограничено.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\xi \in \Xi$, то и $Af(\xi) \in \Xi$, ибо множество $Af(\xi)$ получается из множества $A[B(\xi)] \cap (R_n^+ + f)$ сдвигом на вектор f.

Пусть $\xi_0 \in \Xi$, введём в рассмотрение множества

$$\mathfrak{A}f_1(\xi_0) = \{z = (x, y) / y \in A(x),\ y \geq f,\ x \in \xi\},$$

$$\mathfrak{A}_{f_k \dots f_1}(\xi_0) = \{z=(x,y)/x\in A_{f_{k-1},\dots f_1}(\xi_0),\ y\in Ax,\ y\geq f_k\}.$$

Введем следующие определения.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть функционал $P\in R_n^{*+}$; будем говорить, что P самосогласован, если для любого k и любого *) $\xi\in\Xi$

$$\max_{(x,y)\in\mathfrak{A}_{f_k\dots f_1}(\xi)} \frac{P(y-f_k)}{Px} = \alpha_k(P,\xi) < +\infty, \qquad (I)$$

в случае $\xi=\{x\}$ мы будем писать $\alpha_k(P,x)$ вместо $\alpha_k(P,\xi)$.

Термин „самосогласованный функционал" введён потому, что в работе [3] для модели типа Гейла без нагрузки была построена последовательность функционалов $\{P_t\}_{t=1}^{\infty}$, обладающая свойством $P_t\geq 0$ ($t=1,2,\dots$)

$$\max_{x\in A^t(\xi),\,y\in Ax} \frac{P_{t+1}y}{P_t x} < +\infty,$$

где, вообще говоря, $P_{t-1}\neq P_t$. В нашем случае $P_{t+1}=P_t=P$, то есть функционал P "согласован сам с собой".

Известно, что самосогласованные функционалы существуют, например функционалы, определяющие равновесную систему цен для данной модели (см. [4]). Вообще функционалы, для которых

$$\max_{(x,y)\in Z} \frac{Py}{Px} = \alpha(P) < +\infty, \qquad (2)$$

также являются самосогласованными, что следует из условия 2, наложенного на модель, и неотрицательности нагрузок. В дальнейшем рассматриваются только те самосогласованные функционалы, которые удовлетворяют условию (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\xi_0\in\Xi$, T - натуральное число или ∞. Будем говорить, что последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{i=T}$ образует (ξ_0,T) - траекторию, если

---

*) Здесь R_n^{*+} есть положительный ортант сопряженного к R_n пространства R_n^*.

1. $x_0 \in \xi$,

2. $x_{i+1} \in A_{f_{i+1}} x_i$ для $0 \le i \le T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть дан функционал $c \in R_n^{*+}$; будем говорить, что (ξ_0, T) – траектория $\{x_i\}_{i=1}^{i=T}$ является (c, ξ_0, T)-оптимальной, если выполняется соотношение:

$$c\,x_T = \max_{x \in A_{f_T} \ldots f_1(\xi_0)} c\,x .$$

(Здесь подразумевается, что $T \neq \infty$). По поводу этих определений см. [2] .

Прежде чем переходить к теоремам о магистрали, исследуем вопрос о существовании (ξ_0, ∞) – траектории $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что

$$\frac{P\bar{x}_{i+1}}{P\bar{x}_i} = \alpha_i(P, \xi_0), \quad i = 1, 2 \ldots ,$$

где P – некоторый самосогласованный функционал.

Предварительно заметим, что для любого $k > 1$, ввиду замкнутости множеств $\mathcal{U}_{f_k} \ldots f_1(\xi_0)$, где $\xi_0 \in \Xi$ (см. леммы I,2), существует вектор $z = (x, y) \in \mathcal{U}_{f_k} \ldots f_1(\xi_0)$ такой, что

$$P(y - f_k) = \alpha_k(P, \xi_0) P x. \tag{3}$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть P – самосогласованный функционал ; через $\mathcal{Q}(P)$ будем обозначать любое множество $X \subset R_n^+, X \neq \varnothing$, такое, что если $x \in X$, то существует вектор $y \in X$, для которого

1. $y \in Ax$,

2. $Py = \alpha(P) Px$.

В любой модели Гейла найдутся функционалы, для которых существует $\mathcal{Q}(P)$, например, функционалы, определяющие равновесные цены в данной модели (см. [4]). Более того, пока не удалось показать существование самосогласованных функционалов, для которых имеется по крайней мере одно $\mathcal{Q}(P)$, и от-

личных от тех, которые определяют равновесные цены.

Сформулированная ниже теорема I особенно просто выглядит для модели Неймана, что будет показано в дальнейшем.

ТЕОРЕМА I. Пусть самосогласованный функционал P таков, что для него существует $Q(P)$, и пусть выполняются следующие условия:

А. $f_t \in Q(P)$, $t=1,2\ldots$

Б. Существует $\bar{x}_0 \in Q(P)$ такой, что найдётся $\bar{y}_1 \in A\bar{x}_0 \cap Q(P)$ и $\bar{y}_1 - f_1 \in Q(P)$, а для любого $t \geq 2$ найдётся $\bar{y}_t \in A(A_{f_{t-1}} \ldots A_{f_1}\bar{x}_0) \cap Q(P)$ и $\bar{y}_t - f_t \in Q(P)$.

Тогда существует траектория $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ такая, что

$$\frac{P\bar{x}_{t+1}}{P\bar{x}_t} = \alpha_t(P,\bar{x}_0), \qquad t=1,2\ldots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведём индукцией по t. Построим первый элемент – $\bar{x}_1$ искомой траектории. Рассмотрим величину $\frac{P(y-f_1)}{P\bar{x}_0}$, где $y \in A\bar{x}_0$. Имеем

$$\frac{P(y-f_1)}{P\bar{x}_0} = \frac{Py}{P\bar{x}_0} - \frac{Pf_1}{P\bar{x}_0} \leq \alpha(P) - \frac{Pf_1}{P\bar{x}_0}.$$

Так как $\bar{x}_0 \in Q(P)$, то существует $\bar{y}_1 \in Q(P) \cap A\bar{x}_0$. Ввиду условия Б, $\bar{y}_1$ можно выбрать так, что $\bar{y}_1 - f_1 \in Q(P)$. Полагая $\bar{y}_1 - f_1 = \bar{x}_1$, имеем

$$\frac{P\bar{x}_1}{P\bar{x}_0} = \alpha(P) - \frac{Pf_1}{P\bar{x}_0} = \max_{y \in A\bar{x}_0} \frac{P(y-f_1)}{P\bar{x}_0} = \alpha_1(P,\bar{x}_0).$$

Заметим, что функционал P является опорным к множеству $A_{f_1}\bar{x}_0$ в точке $\bar{x}_1$, ибо

$$\max_{y \in A\bar{x}_0} \frac{P(y-f_1)}{P\bar{x}_0} = \frac{\max\limits_{y \in A x_0} P(y-f_1)}{P\bar{x}_0} = \alpha_1(P,\bar{x}_0) = \frac{P\bar{x}_1}{P\bar{x}_0}.$$

Предположим, что искомая траектория построена до $t=j$, то есть имеется последовательность $\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_j$ такая, что:

$$\bar{x}_i \in A_{f_i}\bar{x}_{i-1}, \quad \bar{x}_i \in Q(P) \qquad \text{и}$$

$$\frac{P\bar{x}_i}{P x_{i-1}} = \alpha_i(P, x_0) \qquad (i = 1, \ldots, j).$$

Продолжим траекторию на один шаг.

Заметим, прежде всего, что функционал P является опорным к множеству $A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0$ в точке $\bar{x}_j$. Действительно, для любого $y_j \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0$

$$\frac{P\tilde{y}_j}{P\bar{x}_0} = \frac{P\tilde{y}_j}{P\tilde{y}_{j-1}} \cdot \frac{P\tilde{y}_{j-1}}{P\tilde{y}_{j-2}} \cdots \frac{P\tilde{y}_1}{P\bar{x}_0},$$

где $\{\tilde{y}_i\}_{i=1}^{i=j}$ - последовательность такая, что $\tilde{y}_1 \in A\bar{x}_0$, $\tilde{y}_i \in A_{\ell_i} \tilde{y}_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, j)$.

Поэтому

$$\max_{y_j \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 x_0} \frac{P y_j}{P\bar{x}_0} \leq \max_{\substack{y_j \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0 \\ y_j \in A_{\ell_j} y_{j-1}}} \frac{P y_j}{P y_{j-1}} \times \max_{\substack{y_{j-2} \in A_{\ell_{j-2}} \ldots \ell_1 \bar{x}_0 \\ y_{j-1} \in A_{\ell_{j-1}} y_{j-2}}} \frac{P y_{j-1}}{P y_{j-2}} \times \ldots \times \max_{y_1 \in A_{\ell_1} \bar{x}_0} \frac{P y_1}{P\bar{x}_0} =$$

$$= \alpha_j(P, \bar{x}_0) \cdot \alpha_{j-1}(P, \bar{x}_0) \ldots \alpha_1(P, \bar{x}_0).$$

Так как, с другой стороны, по индукционному предположению

$$\frac{P\bar{x}_j}{P\bar{x}_0} = \alpha_j(P, \bar{x}_0) \ldots \alpha_1(P, \bar{x}_0), \text{ то } \frac{P\bar{x}_j}{P\bar{x}_0} = \max_{y \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0} \frac{P y}{P\bar{x}_0},$$

следовательно, P опорен к множеству $A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0$ в точке $\bar{x}_j$.

На основании этого имеем:

$$\max_{\substack{x \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0 \\ y \in Ax}} \frac{P(y - \ell_{j+1})}{Px} = \max_{\substack{x \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0 \\ y \in Ax}} \frac{Py}{Px} - \frac{P\ell_{j+1}}{\max\limits_{x \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0} Px} =$$

$$= \max_{\substack{x \in A_{\ell_j} \ldots \ell_1 \bar{x}_0 \\ y \in Ax}} \frac{Py}{Px} - \frac{P\ell_{j+1}}{P\bar{x}_j} = \alpha(P) - \frac{P\ell_{j+1}}{P\bar{x}_j}.$$

Но по предположению индукции и по условию Б теоремы существует $\bar{y}_{j+1} \in A(A_{f_j \ldots f_1} \bar{x}_0)$ такой, что

$$\bar{y}_{j+1} - f_{j+1} \in Q(P), \quad \alpha(P) P \bar{x}_j = P \bar{y}_{j+1}.$$

Поэтому можно положить $\bar{x}_{j+1} = \bar{y}_{j+1} - f_{j+1}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим, как интерпретируются условия А и Б указанной теоремы для случая модели Гейла с многогранным конусом, то есть модели Неймана. В этом случае конус Z может быть описан так:

$$Z = \{ z = (x, y) / z = \sum_{i=1}^{m} v_i (a_i, b_i); \; v_i \geq 0, \; (a_i, b_i) \in R^+_{2n} \}.$$

Векторы (a_i, b_i) называются базисными процессами, вектор $v \in R^+_m$ с компонентами $v_1, \ldots, v_m$ называется вектором интенсивности. Матрица A, строками которой являются векторы $a_i \in R^+_n$, называется матрицей потребления ; таким же образом вводится матрица выпуска B. Поэтому, если $(x, y) \in Z$, то существует $v \in R^+_m$ такой, что $x = vA$ и $y \in vB$.

Пусть P – самосогласованный функционал. Тогда существует процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ такой, что

$$\alpha(P) = \max_{y \in Ax} \frac{Py}{Px} = \frac{P\bar{y}}{P\bar{x}} = \frac{\bar{v}BP}{\bar{v}AP}.$$

Среди всех векторов v таких, что

$$\alpha(P) = \frac{vBP}{vAB},$$

выберем вектор $\bar{v}$ с максимальным числом (i_0) отличных от нуля координат , и пусть эти координаты будут $\bar{v}_1, \ldots ; \bar{v}_{i_0}$.

Как известно [5],

$$b_i P \leq \alpha(P) a_i P, \quad i = 1, \ldots, m;$$

поэтому из равенства

$$\sum_{i=1}^{i_0} \bar{v}_i (\alpha(P) a_i P - b_i P) = 0$$

имеем

$$P b_i = \alpha(P) a_i P \quad (i = 1, \ldots, i_0). \qquad (4)$$

Чтобы упростить условие Б теоремы I, наложим на модель следующее ограничение: для любого процесса $(x_1, x_2)=\sum_{i=1}^{m} v_i^1(a_i, b_i)$ существует процесс $(x_2, x_3)=\sum_{i=1}^{m} v_i^2 (a_i, b_i)$ такой, что $v_i^2 \neq 0$, если $v_i^1 \neq 0$. Другими словами, если состояние x_2 достигается из состояния x_1 использованием некоторых базисных процессов, то существует хотя бы один процесс, не использующий новых базисных процессов, который может быть начат из состояния x_2.

Отсюда легко следует, что множество

$$X(P)=\{x/x\in R_n^+,\ x=\sum_{i=1}^{i_0} v_i a_i,\ v_i\geq 0\}$$

есть $\Omega(P)$

Действительно, если $x_1 \in X(P)$ и $x_1=\sum_{i=1}^{i_0} v_i^1 a_i$, то $x_2=\sum_{i=1}^{i_0} v_i^1 b_i$ удовлетворяет, благодаря равенству (4) , соотношению:

$$\alpha(P)Px_1=Px_2\,.$$

Но, ввиду предположения, существует такой вектор $v^2\in R_m^+$, что $x_2=\sum_{i=1}^{i_0} v_i^2 a_i$ (где v_i^2 - компоненты вектора v^2) , то есть $x_2 \in X(P)$.

Тогда условие Б теоремы I сводится к достижимости вектора φ^t из состояния $x_0 \in X(P)$, другими словами, для любого $t\geq 2$ существуют векторы $\bar y \in A(A_{f_{t-1}}\dots f_1 x_0)$ и $\bar v\in R_{i_0}^t$ такие, что $\bar y = A\bar v$ и $\bar v \geq \varphi^t$.

При этом условии имеем: $\bar y - f_t \in \Omega(P)$. Действительно,

$$\bar y=\sum_{i=1}^{i_0} \bar v_i a_i\ ;$$

тогда

$$\bar y - f_t=\sum_{i=1}^{i_0}(\bar v_i-\varphi_i^t)a_i\ ,$$

а так как $\bar v_i \geq \varphi_i^t$, то $\bar y - f_t \in \Omega(P)$.

Таким образом, из теоремы I в случае модели Неймана следует

ТЕОРЕМА I'. Пусть самосогласованный функционал P таков, что для него существует $\Omega(P)$, и пусть выполняются следующие условия:

А. $f_t \in \Omega(P)$, $t = 1, 2, \ldots$;

Б. существует $x_0 \in \Omega(P)$ такой, что найдутся $\bar{y}_1 \in A\bar{x}_0$ и $\bar{v}_1 \in R^+_{i_\alpha}$ такие, что $\bar{y}_1 = A\bar{v}_1$ и $\bar{v}_1 \geq \varphi^1$, а для любого $t \geq 2$ найдутся $\bar{y}_t \in A(A_{f_{t-1}} \ldots f_1 \bar{x}_0)$ и $\bar{v}_t \in R^+_{i_\alpha}$ такие, что $\bar{y}_t = A\bar{v}_t$ и $\bar{v}_t \geq \varphi_t$.

Тогда существует траектория $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ такая, что

$$\frac{P\bar{x}_{t+1}}{P\bar{x}_t} = \alpha_t(P, \bar{x}_0),\ t = 1, 2$$

Итак, показано, что если P - самосогласованный функционал в модели Гейла, то при определённых условиях на нагрузку для любого t существует $(P, \xi_0, t)_t$ - оптимальная траектория $\{x_i\}_{i=0}^{i=t}$ такая, что $P\bar{x}_t = \prod_{i=1} \alpha_i(P, \bar{x}_0)P\bar{x}_0$ (где $\bar{x}_0 \in \Omega(P)$). Аналогичный результат в случае отсутствия нагрузки установлен в [4], а в случае модели Гейла с последовательностью конусов Z_t ($t = 0, 1, \ldots$)-в работе[3]; правда, в последней работе вместо одного функционала P была взята последовательность функционалов P_t ($t = 0, 1, \ldots$) (согласованная система цен).

3^0. Перейдем теперь к теоремам о магистрали.

Пусть P - самосогласованный функционал и $\xi_0 \in \Xi$. Определим тогда функционалы $g_k \in R^*_{2n}$,

$$g_k = (\alpha_k(P, \xi_0)P, -P)$$

и рассмотрим множества:

$$H_{g_k} = \{z / g_k(z) = 0\} \subset R_{2n}.$$

Пусть $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ -траектория такая, что для любого t справедливо $\frac{P\bar{x}_{t+1}}{P\bar{x}_t} = \alpha_t(P, x_0)$; тогда из теоремы 4.I работы [3] следует

ТЕОРЕМА 2. (Теорема о магистрали в слабой форме). Пусть P - самосогласованный функционал и вектор $x_0 \in R^+_n$ таков, что при некотором $\tau > 2$ имеем $\bar{x}_\tau \in A f_{\tau-1} \ldots f_1 x_0$. Пусть, далее, $k' \geq k''$ - произвольные положительные числа, $T \geq \tau$ и функцио-

ная $c \in R_n^{*+}$ удовлетворяет условию:

$$k''P \leq c \leq k'P. \qquad (5)$$

Тогда, если $c(A_{f_T} \dots f_1 x_0) > 0$ *), то, какова бы ни была (c, x_0, T) - оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{t=T}$, число пар (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho[(x_t, x_{t+1}), H_{g_t}] \geq \varepsilon \|x_t\|$, не превышает числа

$$M(\varepsilon) = \frac{\ln\left(\frac{k''}{k'} \frac{P\bar{x}_0}{Px_0}\right)}{\ln(1-\varepsilon)}$$

Рассмотрим множество функционалов

$$\mathcal{P}_k = \left\{ P_k \Big/ \max_{z \in \mathcal{U} f_k \dots f_1(\xi_0)} \frac{P_k(y - f_k)}{P_k x} = \alpha_k(P, \xi_0) = \frac{P_k(\bar{y}_k - f_k)}{P_k \bar{x}_k} \right\},$$

где $\bar{z}_k = (\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in \mathcal{U} f_k \dots f_1(\xi_0)$ удовлетворяет соотношению (3), и множество

$$\bar{G}_k = \{ g_k / g_k = (\alpha_k(P, \xi_0) P_k, -P_k); P_k \in \mathcal{P}_k \}.$$

Кроме того, для каждого функционала $g_k \in G_k$ введём множество

$$Qg_k = H_{g_k} \cap \mathcal{U} f_k \dots f_1(\xi_0)$$

и положим

$$\mathcal{N}_k = \bigcap_{g_k \in G_k} Q g_k.$$

Множество $\mathcal{N}_k$ называется неймановской гранью на k - шаге, соответствующей функционалу $g_k = (\alpha_k(P, \xi_0) P_k, -P_k)$. (В случае отсутствия нагрузки ($f_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$) это совпадает с обычным определением неймановской грани [2]). Пусть $\tilde{\mathcal{P}}_k$ ($\tilde{G}_k$) есть открытое ядро множества $\mathcal{P}_k$ (G_k) относительно его линейной оболочки. Пусть для $g_k \in \tilde{G}_k$ и существует $z \in \mathcal{U} f_k \dots f_1(\xi_0)$ такой, что $g_k(z) = 0$; тогда для любого $\bar{g}_k \in G_k$ существует $\bar{\bar{g}}_k$ такой, что

$$g_k = \lambda \bar{g}_k + (1 - \lambda) \bar{\bar{g}}_k, \quad \text{где} \quad 0 < \lambda < 1,$$

ибо $\tilde{G}_k$ есть открытое ядро выпуклого множества G_k. Так как $\bar{g}_k(\mathcal{U} f_k \dots f_1(\xi_0)) \geq 0$ и $\bar{\bar{g}}_k(\mathcal{U} f_k \dots f_1(\xi_0)) \geq 0$, то $\bar{g}_k(z) = \bar{\bar{g}}_k(z) = 0$, ввиду произвольности $\bar{g}_k$ имеем:

$$z \in \mathcal{N}_k:$$

*) Здесь $c(A_{f_T} \dots f_1 x_0) = \min_{y \in A_{f_T} \dots f_1 x_0} cy$

Пусть L_k есть линейная оболочка N_k и $z \in L_k \cap \mathcal{O}\!\mathcal{L} f_k \ldots f_1(\xi_0)$. Тогда $g_k(z)=0$ для всех $g_k \in G_k$, поэтому $L_k \cap \mathcal{O}\!\mathcal{L} f_k \ldots f_1(\xi_0) = N_k$. Пусть Π_k – проектор на ортогональное дополнение к L_k. Если для $z \in \mathcal{O}\!\mathcal{L} f_k \ldots f_1(\xi_0)$ выполнено $\Pi_k z \neq 0$, то есть $z \notin N_k$, то для любого $g_k \in \tilde{G}_k$ имеем $g_k(z)>0$, а поэтому

$$\min_{\substack{z \in \Pi_k(\mathcal{O}\!\mathcal{L} f_k \ldots f_1(\xi_0)) \\ \|z\|=1}} g_k(z) = \beta(P) > 0, \tag{9}$$

ибо минимум в (9) ищется по компактному множеству.

Из теоремы 2 работы [7] вытекает

ТЕОРЕМА 3. (Теорема о магистрали в сильной форме). Пусть P – самосогласованный функционал и $x_0 \in R_n^+$ таково, что при некотором τ имеем $\bar{x}_\tau \in A^{\tau-1}(x_0)$. Пусть, далее, $k''<k'$ – произвольные положительные числа, $T \geq \tau$ и функционал c удовлетворяет условию (5). Тогда, если $c(Af_T \ldots f_1 x_0)>0$, то, какова бы ни была (c, x_0, T) – оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{t=T}$, число пар (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho((x_t, x_{t+1}), N_t) \geq \varepsilon \|x_t\|$, не превышает числа

$$M = \frac{\ln\left(\frac{k''}{k'} \; \frac{P\bar{x}_1}{P x_0}\right)}{\ln(1-\beta(P)\varepsilon)} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя при доказательстве теорем 2 и 3 считалось, что Z – постоянный конус, это требование может быть снято, ибо в доказательстве участвуют только множества $\mathcal{O}\!\mathcal{L} f_t \ldots f_1(\xi_0)$, которые могут быть построены и при переменном $Z_t \subset R_{2n}^+$.

4°. Рассмотрим вопрос о существовании самосогласованных функционалов.

Как уже отмечалось выше, любой функционал $P \in R_n^{*+}$ такой, что

$$\max_{(x,y) \in Z} \frac{Py}{Px} = \alpha(P) < +\infty , \tag{10}$$

является самосогласованным ввиду условия $f_i \geq 0$ (для

всех i); поэтому являются самосогласованными все функционалы, определяющие равновесные цены в данной модели [4] .

Рассмотрим случай модели с переменными конусами $Z_t \subset R_{2n}^+$ и предположим, что существует выпуклый замкнутый конус $Z_M \subset R_{2n}^+$, не содержащий процесса $(0,y)$, где $y \neq 0$, и такой , что $Z_t \subset Z_M$ $(t=1,2,\ldots)$. Тогда условие (10) можно заменить следующим:

$$\max_{(x,y)\in Z_M} \frac{Py}{Px} = \alpha_M(P) < +\infty \quad .$$

Рассмотрим ещё один класс самосогласованных функционалов.

Пусть $c_j = \max\limits_{y \in A f_{j-1} \ldots f_1(\xi_0)} \|y\|$ ($j > 1$) и $c_1 = 1$ (здесь $\xi_0 = \{x / \|x\| = 1\}$).

Положим $\tilde{f}_j = f_j / c_j$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для $P \in R_n^{*+}$ и некоторого j_0

$$\max_{(x,y)\in \mathcal{O}\!\mathcal{L}\tilde{f}_{j_0}(\xi_0)} \frac{P(y - \tilde{f}_{j_0})}{Px} = \beta < +\infty, \tag{II}$$

а для всех $j \neq j_0$

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_{j_0} \quad . \tag{I2}$$

Тогда P - самосогласованный функционал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\alpha_j(P) = \max_{(x,y)\in \mathcal{O}\!\mathcal{L}_{f_j \ldots f_1}(\xi_0)} \frac{P(y - f_j)}{Px} = \max_{\substack{\tilde{y} \in A\tilde{f}_j \tilde{x} \\ \tilde{x} \in \xi_j \subset \xi}} \frac{P(\tilde{y} - \tilde{f}_j)}{P\tilde{x}} =$$

$$\leq \max_{(\tilde{x},\tilde{y})\in \mathcal{O}\!\mathcal{L}\tilde{f}_j(\xi_0)} \frac{P(\tilde{y} - \tilde{f}_j)}{P\tilde{x}} \leq \max_{(\tilde{x},\tilde{y})\in \mathcal{O}\!\mathcal{L}_{f_{j_0}}(\xi_0)} \frac{P(\tilde{y} - \tilde{f}_{j_0})}{P\tilde{x}} = \beta ,$$

что и требовалось доказать. Последнее неравенство написано ввиду условия (I2) (ибо для любого $y \in R_n^+$ выполняется

$P(y-\tilde{f}_j) \leq P(y-\tilde{f}_{j_0})$ и $\mathcal{U}\tilde{f}_j(\xi_0) \subset \mathcal{U}\tilde{f}_{j_0}(\xi_0)$,

так как если $\tilde{y} \geq f_j$, то $\tilde{y} \geq \tilde{f}_{j_0}$).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для модели Гейла с переменными конусами , удовлетворяющими условию $Z_M = Z_{j_0}$, теорема 4 остается в силе.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть нагрузка, кроме условия (I2), удовлетворяет ещё следующим условиям:

а) существует вектор $y \in Af_{j_0} \dots f_1(\xi_0)$ такой, что $y > f_{j_0}$,

б) $\xi_{j_0} = \{\tilde{x} / (\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{z} = \frac{z}{c_j} ;\ z \in \mathcal{U}_{f_{j_0}} \dots f_1(\xi_0)\} \supset \xi_0$.

Тогда величина

$$\alpha(f_{j_0}) = \max_{(x,y) \in \mathcal{U}_{f_{j_0}} \dots f_1(\xi_0),\ 1 \leq i \leq n} \min \frac{y_i - f_{ij_0}}{x_i} > 0, \tag{I3}$$

а ввиду компактности $\mathcal{U}_{f_{j_0}} \dots f_1(\xi_0)$ максимум в (I3) достигается. Из этого следует [4] , что существует функционал $P_{j_0} \in R_n^{*+}$ такой, что

$$\max_{(x,y) \in \mathcal{U}_{f_{j_0}} \dots f_1(\xi_0)} \frac{P_{j_0}(y - f_{j_0})}{P_{j_0} x} = \alpha(f_{j_0}) < +\infty$$

и, следовательно, в качестве функционала P , удовлетворяющего условиям теоремы, можно взять P_{j_0} .

5° Рассмотрим вопрос об оценке величин $\alpha_k(P, \xi_0)$.

Предположим сначала, что $f_i = 0$ для всех i . В этом случае $\alpha_1(P,\xi_0) = \alpha_2(P,\xi_0) = \dots = \alpha(P,\xi_0)$, ибо

$$\alpha_k(P,\xi_0) = \max_{\substack{y \in A^k x \\ x \in \xi_0}} \frac{Py}{Px} = \max_{\substack{y \in A^k x \\ x \in \xi_0}} \frac{P(\frac{y}{\|x\|})}{P(\frac{x}{\|x\|})} = \max_{\substack{\tilde{y} \in A^k \tilde{x} \\ \tilde{x} \in \xi_0}} \frac{P\tilde{y}}{P\tilde{x}} = \alpha(P) . \tag{I4}$$

Известно, что модель Гейла имеет конечное число состояний равновесия с темпами роста $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, причём $\alpha_1 > \dots > \alpha_m$ (см. [5]). Рассмотрим оптимальный вектор $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = \bar{z}_i$, входящий в неймановскую грань N_{α_i} (отвечающую темпу роста α_i) и имеющий наибольшее число отличных от нуля компонент среди всех векторов из N_{α_i} .

Пусть J_i' – множество индексов этих компонент. Тогда

$$\bar{y}_{ij} \geq \alpha_i \bar{x}_{ij}\,, \quad j \in \mathcal{J}_i'\,; \; i=1,\dots,m, \qquad (15)$$

а множество индексов, для которых в (15) имеется равенство, будет $\mathcal{J}_i'' \subset \mathcal{J}_i'$. Как следует из [5], $\mathcal{J}_\ell' \cap \mathcal{J}_k' = \Phi$ при $k \neq \ell$ и $\bigcup_{1 \leq i \leq m} \mathcal{J}_i' = \{1,\dots,n\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что средний темп роста продукта i менее α, если нет ни одной траектории $\{x(t)\}_{t=1}^{\infty}$ такой, что $x_i(t) \geq c\,\alpha^t$ ($t=1,\dots$), где $c>0$, в противном случае темп роста i-го продукта более или равен α и, наконец, если существует траектория $\{x(t)\}_{t=1}^{\infty}$ такая, что $x_i(t) \geq c\alpha_1^t$ ($t=1,2,\dots$), где $\alpha_1 > \alpha_0$, то темп роста более α (см. [2]).

Введём обозначение:

$$\delta_i = \max_{(x,y) \in N_{\alpha_i}} \; \max_{j \in \mathcal{J}_i' \setminus \mathcal{J}_i''} \frac{y_{ij}}{x_{ij}} \,.$$

ЛЕММА 3. Пусть

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq m} \delta_i < +\infty \,.$$

Тогда средний темп роста любого продукта меньше или равен

$$\alpha_0 = \max(\delta, \alpha_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим противное, пусть темп роста продукта j_0 будет больше α_0. Тогда $j_0 \notin \bigcup_{1 \leq i \leq m} \mathcal{J}_i''$, ибо в противном случае существовал бы функционал P_{i_0} (где i_0 - номер того $\mathcal{J}_{i_0}''$, в которое входит j_0) такой, что $P_{i_0} x(t) > 0$ (здесь $\{x(t)\}_{t=1}^{\infty}$ - траектория, на которой $x_{j_0}(t) \geq c\alpha^t (\alpha > \alpha_0)$, а $P_{i_0} \in \mathcal{P}$). Но тогда $P_{i_0} x(t) \geq P_{i_0 j_0} x_{j_0}(t) \geq c\,\alpha^t$, чего не может быть, так как средний темп роста последовательности $P_i x(t)$ менее α_1 [4]. Следовательно, $j_0 \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{J}_i' \setminus \mathcal{J}_i''$. Заметим тогда, что если обозначить $\bar{z}(t) = (\bar{x}(t), \bar{x}(t+1)) = \left(\frac{x(t)}{\|z(t)\|}, \frac{x(t+1)}{\|z(t+1)\|}\right)$, а множество индексов продуктов, для которых средний темп роста больше α, - через $\mathcal{J}_0$, то

$$\sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \mathcal{J}_0} x_j(t) \Big/ \sum_{j \in \mathcal{J}_0} x_j(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

или $\sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \mathcal{J}_0} \bar{x}_j(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$, где $\|z\| = \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)$.

Но это означает, что $P_i \bar{x}(t) \to 0$, где $P_i \in \widetilde{\mathcal{P}}$, и, следо -

вательно (из определения $\widehat{\mathcal{P}}$), $\rho[\, x(t), x(t+1), \mathcal{N}_{\alpha_i}] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, что противоречит определению δ.

ТЕОРЕМА 5. Пусть P — произвольный самосогласованный функционал, $f_i = 0$ ($i=1,2,\dots$) и существует (ξ_0,∞) - траектория $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $\alpha(P)=\frac{P\bar{x}_{i+1}}{P\bar{x}_i}(i=1,2\dots)$. Тогда

$$\alpha_0 \geq \alpha(P) \geq \min_{1\leq i\leq m} \alpha_i \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha(P)>\alpha_0$. Тогда для траекторий $\{\bar{x}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ (где $\bar{x}(t)$ удовлетворяет равенству (3)) средний темп роста последовательности $\{Px(t)\}_{t=1}^{\infty}$ равен $\alpha(P)>\alpha_0$, а это противоречит тому, что средний темп роста любого продукта менее α_0. Положим теперь, что $\alpha(P)<\min\limits_{i=1,\dots m} \alpha_i$. Тогда из определения $\alpha(P)$ следует, что

$$\alpha(P)Px \geq Py, \quad (x,y)\in Z,$$

откуда $\alpha_i Px > \alpha(P)Px \geq Py$ ($i=1,\dots,m$). Пусть $P_j \neq 0$, где $j\in \mathcal{J}_i'$; тогда $P\bar{y}_i>0$ и, так как $\bar{y}_i = \alpha_i \bar{x}_i$, $P\bar{y}_i = \alpha_i P\bar{x}_i$, следовательно, $\alpha_i \leq P\bar{y}_i / P\bar{x}_i$, что противоречит определению $\alpha(P)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если модель имеет единственный оптимальный вектор $\bar{y}>0$ и существует $P\in\widehat{\mathcal{P}}$ такой, что $P>0$ (например, модель Леонтьева с неразложимой технологической матрицей [6]), то $\alpha(P)=\alpha$ для всех самосогласованных функционалов.

Чтобы получить оценки и в случае ненулевой нагрузки нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Состояние равновесия на k-ом шаге определяется тройкой $(\alpha(f_k), P_k, (\bar{x}_k, \bar{y}_k))$, где $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\in \mathcal{U}_{f_k\dots f_1}(\xi_0)$, а $P_k \in R_n^{*+}$ такой, что выполняются неравенства:

$$\bar{y}_k - f_k \geq \alpha(f_k)\bar{x}_k,$$

$$P_k(y-f_k) \leq \alpha(f_k)P_k x, \quad (x,y)\in \mathcal{U}_{f_k\dots f_1}(\xi_0)$$

$$P_k(\bar{y}-f_k) > 0.$$

Таких состояний равновесия конечное число - m_k штук. Это утверждение основывается на работе [5], в которой при доказательстве конечности множества состояний модели Гейла ис-

пользуется только выпуклость конуса Z, а множества $\mathcal{U}_{f_k \dots f_1}(\xi_0)$ выпуклы для любого k.

Пусть J_{ki} есть множество индексов для i -го состояния равновесия на k -ом шаге, таких, что $\bar{y}_{kij} - f_{kj} \neq 0$ при $j \in J_{ki}$. (Здесь $\bar{y}_{ki} - f_k$ - вектор с максимальным количеством неравных нулю компонент, входящий в определение i -го состояния равновесия на k -ом шаге). Так же, как и в [5], можно показать, что

$$J_{k\ell} \cap J_{km} = \emptyset \ (\ell \neq m) \text{ и } \bigcup_{\ell=1}^{m} J_{k\ell} = \{1, \dots n\}.$$

Поэтому так же, как и в теореме 3, можно получить, что для любого самосогласованного функционала и $\xi_0 \in \Xi$

$$\alpha_k(P, \xi_0) = \min_{i=1 \dots m_k} \alpha_i(f_k)$$

(здесь $\alpha_i(f_k)$ -темп роста в i -ом состоянии равновесия на k -ом этапе).

Так как $\mathcal{U}_{f_k \dots f_1}(\xi_0) \subset A^k(\xi_0)$, то, как и в (16),

$$\alpha_k(P, \xi_0) \leq \alpha_0.$$

Эту оценку можно улучшить, если при некотором k

$$f_{jk} > 0 \quad \text{для} \quad j \in J(P) = \{ j / P_j \neq 0 \}. \qquad (17)$$

Действительно, пусть

$$\gamma_k = \min_{y \in A_{f_k \dots f_1}(\xi_0)} \ \min_{j \in J(P)} \gamma_{jk}(y), \text{ где } \gamma_{jk}(y) = \frac{f_{jk}}{y_j}.$$

Тогда $\gamma_k > 0$ ввиду (17), и для $j \in J(P)$

$$\frac{P_j(y_j - f_{jk})}{Px} \leq \frac{P_j y_j (1 - \gamma_{jk}(y))}{Px} \leq (1 - \gamma_k) \frac{P_j y_j}{Px}.$$

Отсюда

$$\frac{P(y - f_k)}{Px} \leq (1 - \gamma_k) \frac{Py}{Px}, \text{ где } y \in A^k(\xi_0), x \in A^{k-1}(\xi_0),$$

или

$$\alpha_k(P, \xi_0) \leq (1 - \gamma_k) \alpha(P) \leq (1 - \gamma_k) \alpha_0.$$

Окончательно имеем

$$(1 - \gamma_k) \alpha_0 \geq \alpha_k(P, \xi_0) = \min_{i=1 \dots m_k} \alpha_i(f_k).$$

Автор выражает благодарность В.Л.Макарову и А.М.Руби - нову за ценные советы.

Литература

I.А.М.Рубинов. Об одной математико-экономической модели. - Оптимальное планирование.Новосибирск,Изд-во, "Наука",Сибирское отделение, 1966,вып.5,стр.II2-II8.

2.В.Л.Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. - Сибирский математический журнал, 1966, т. 4 стр. 832-854.

3. А.М.Рубинов Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.- Данный сборник, стр. 87-III .

4. Д.Гейл.Замкнутая линейная модель производства. - Линейные неравенства и смежные вопросы . ИЛ,Москва,1965,

5. В.Л.Макаров.Состояния равновесия замкнутой модели расширяющейся экономики.-Экономика и математические методы, т. I,вып.5,1965, стр.736-738.

6. Д.Гейл.Теория линейных экономических моделей.ИЛ,Москва , 1963,

7. А.М.Рубинов и К.Ш.Шапиев.Неймановская грань в моделях типа Гейла.- Данный сборник., стр.II3-II9.

Рукопись поступила в редакцию 3 ноября 1966 г.