ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

А.М. РУБИНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

1°. Модель, рассматриваемая в настоящей работе, описывается в терминах отображений, ставящих в соответствие точке некоторого конечномерного пространства ограниченное подмножество другого конечномерного пространства.

Пусть n_1 и n_2 - натуральные числа, X_i $(i=1,2)$ n_i -мерное нормированное пространство, элементы которого будем рассматривать как n_i -членные наборы чисел. Через $K^{(i)}$ обозначим конус векторов пространства X_i с неотрицательными компонентами. Будем считать, что X_i $(i=1,2)$ частично упорядочено с помощью $K^{(i)}$ (если $x', x'' \in X_i$, то $x' \geq x''$ тогда и только тогда, когда $x' - x'' \in K^{(i)}$).

Рассмотрим отображение a , сопоставляющее каждой точке $x \in K^{(1)}$ ограниченное*) подмножество $a(x)$ пространства X_2. При исследовании экономических моделей естественно считать, что отображение a удовлетворяет тем или иным условиям. Перечислим основные из этих условий.

---

*) Отметим, что в рассматриваемом случае ограниченность множества по норме равносильна ограниченности в смысле частичного упорядочивания.

1) **Монотонность**. Если $x', x'' \in K^{(1)}$, $x' \geqslant x''$, то

$$a(x') \supset a(x''). \qquad (1.1)$$

2) **Полунепрерывность сверху.** Если $x_n \in K^{(1)}$,

$x_n \to x$, $y_n \in a(x_n)$, $y_n \to y$, то

$$y \in a(x). \qquad (1.2)$$

3) **Вогнутость.** Если $x', x'' \in K^{(1)}$, $\alpha \in [0,1]$, то

$$a(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \supset \alpha a(x') + (1-\alpha) a(x''). \qquad (1.3)$$

4) **Положительная однородность.** Если $x \in K^{(1)}$, $\lambda \geqslant 0$, то

$$a(\lambda x) = \lambda a(x). \qquad (1.4)$$

5) **Полуаддитивность.** Если $x', x'' \in K^{(1)}$, то

$$a(x' + x'') \supset a(x') + a(x''). \qquad (1.5)$$

6) $a(0) = O$. (1.6)

(Здесь и в дальнейшем $O = \{0\}$).

7) Если $x \in K^{(1)}$, то $0 \in a(x)$. (1.7)

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Из полуаддитивности a следует, что $a(0) = O$.

2) Из полуаддитивности и положительной однородности a следует его вогнутость.

3) Из вогнутости и положительной однородности a следует его полуаддитивность.

4) Из положительной однородности a следует, что $a(0) = O$.

5) Если $0 \in a(x)$ для любого $x \in K^{(1)}$, то из полуаддитивности a следует его монотонность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как a полуаддитивно, то

$$a(0)=a(0+0)\supset a(0)+a(0). \qquad (1.8)$$

Предположим, что $a(0)\neq 0$. Пусть $x\in a(0)$, $x\neq 0$. Из (1.8) легко следует, что в данном случае $2^n x\in a(0)$ при любом натуральном n, а это противоречит ограниченности $a(0)$.

2) $a(\alpha x'+(1-\alpha)x'')\supset a(\alpha x')+a((1-\alpha)x'')=$
$=\alpha a(x')+(1-\alpha)a(x'')$.

3) $a(x'+x'')=a(2\cdot\frac{x'+x''}{2})=2a(\frac{x'}{2}+\frac{x''}{2})\supset$
$\supset 2(a(\frac{x'}{2})+a(\frac{x''}{2}))=2a(\frac{x'}{2})+2a(\frac{x''}{2})=a(x')+a(x'')$

4) $a(0)=0\cdot a(0)=0$

5) Пусть $x'\geqslant x''$. Тогда $a(x')=a(x''+(x'-x''))\supset$
$\supset a(x'')+a(x'-x'')\supset a(x'')$.

Теорема доказана.

Пусть $\xi\subset K^{(1)}$. Положим

$$A(\xi)=\bigcup_{x\in\xi} a(x).$$

ТЕОРЕМА 1.2. 1) Из монотонности a и ограниченности ξ следует ограниченность $A(\xi)$.

2) Из полунепрерывности сверху a, ограниченности и замкнутости ξ следует замкнутость $A(\xi)$.

3) Из вогнутости a и выпуклости ξ следует выпуклость $A(\xi)$.

4) Из положительной однородности a и того, что ξ конус, следует, что $A(\xi)$ — конус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лишь утверждение 1) теоремы, поскольку доказательство остальных утверждений очевидно.

Положим $\bar{x}=\sup\xi$. Из монотонности a следует, что для любого $x\in\xi$

$$a(x)\subset a(\bar{x}),$$

и потому

$$\bigcup_{x\in\xi} a(x)\subset a(\bar{x}).$$

Так как $\alpha(\bar{x})$ ограниченно, то и $\bigcup_{x\in\xi}\alpha(x)=A(\xi)$ ограниченно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $x\in K^{(1)}$. Ясно, что множество $\{x\}$ ограниченно, замкнуто и выпукло. Так как $A(\{x\})=\alpha(x)$, то из полунепрерывности сверху α следует замкнутость множества $\alpha(x)$, из вогнутости α следует выпуклость этого множества.

Пусть $\xi\subset K^{(1)}$. В прямом произведении пространств X_1 и X_2 рассмотрим множество $Z(\xi)$, определяемое следующим образом:

$$Z(\xi)=\{(x,y)\in X_1\times X_2 / x\in\xi,\ y\in a(x)\} \qquad (I.9)$$

Заметим, что, зная только множество $Z(K^{(1)})$, можно восстановить отображение α, с помощью которого это множество построено. Именно для $x\in K^{(1)}$

$$a(x)=\{y\in X_2/(x,y)\in Z(K^{(1)})\}.$$

ТЕОРЕМА I.3. I) Если ξ ограниченно и α монотонно, то $Z(\xi)$ ограниченно. Если $Z(\xi)$ ограниченно, то и ξ ограниченно.

2) Если ξ замкнуто и α полунепрерывно сверху, то $Z(\xi)$ замкнуто. Если $Z(\xi)$ замкнуто, то α полунепрерывно сверху; если, кроме того, $Z(\xi)$ ограниченно, то ξ замкнуто.

3) Для выпуклости $Z(\xi)$ необходимо и достаточно, чтобы α было вогнуто и ξ было выпукло.

4) Для того, чтобы $Z(\xi)$ было конусом, необходимо и достаточно, чтобы α было положительно однородным и ξ было конусом.

Справедливость утверждений 2), 3) и 4) теоремы, а также второй части утверждения I) следует непосредственно из определений. Первая часть утверждения I) может быть доказана с помощью тех же рассуждений, что и пункт I) теоремы I.2.

2^0. Опишем модель, которая будет рассматриваться в настоящей заметке.

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_t \ldots$ – последовательность на -

туральных чисел. Рассмотрим систему конечномерных нормированных пространств

$$X_1, X_2, \ldots X_t \ldots$$

Здесь X_t есть n_t - мерное пространство, элементы которого будем рассматривать как n_t -членные наборы чисел.

Через $K_t (t=1,2,\ldots)$ обозначим конус векторов пространства X_t с неотрицательными компонентами, через Ξ_t $(t=1,2\ldots)$ - совокупность всех ограниченных подмножеств K_t. Будем считать, что пространство $X_t (t=1,2\ldots)$ частично упорядочено с помощью конуса K_t.

Модель, которую мы будем рассматривать, задается

а) последовательностью натуральных чисел

$$n_1, n_2, \ldots, n_t ;$$

б) системой пространств $X_t (t=1,2,\ldots)$;

в) системой отображений $a_t (t=1,2\ldots)$, действующих из K_t в Ξ_{t+1}, причем

$$\bigcup_{x \in K_t} a_t(x) = K_{t+1}. \tag{2.1}$$

Экономически t можно интерпретировать как номер временного периода, числа $1,2,\ldots, n_t$ как номера продуктов, имеющихся к началу периода t.

Множество $a_t(x)$ состоит из всех векторов выпуска $y=(y^1, y^2, \ldots, y^{n_{t+1}}) \in K_{t+1}$, которые могут быть получены к концу периода t при затратах $x=(x^1, x^2, \ldots, x^{n_t}) \in K_t$, сделанных в начале этого периода.

Пусть $\mathcal{E} \subset K_1$. Положим

$$A^0(\mathcal{E}) = \mathcal{E}, \quad A^{(t)}(\mathcal{E}) = \bigcup_{x \in A^{t-1}(\mathcal{E})} a_t(x) \quad (t=1,2,\ldots).$$

Из теоремы 1.2 легко вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2.1. 1) Пусть отображения $a_1, a_2, \ldots, a_T$ монотонны и множество $\mathcal{E}$ ограничено. Тогда множество $A^T(\mathcal{E})$ ограничено.

2) Пусть отображения $a_1, a_2, \ldots a_T$ монотонны и полунепрерывны сверху, $\mathcal{E}$ ограничено и замкнуто. Тогда $A^T(\mathcal{E})$ замкнуто.

3) П у с т ь о т о б р а ж е н и я $a_1, a_2, \dots, a_T$ в о г н у т ы и ξ в ы п у к л о. Т о г д а $A^T(\xi)$ в ы п у к л о.

Пусть $x \in K_1$. Условимся в дальнейшем вместо $A^t(\{x\})$ писать $A^t(x)$.

Пусть $\xi \subset K_1$. Условимся в дальнейшем множества $Z(A^{t-1}(\xi))$ $(t=1,2,\dots)$, определяемые для $A^{t-1}(\xi)$ по формуле (I.9), обозначать через $Z_t(\xi)$. Отметим, что рассматриваемая модель может быть задана не с помощью отображений a_t, а с помощью множеств

$$Z_t(K_1) \qquad (t=1,2\dots).$$

3°. Приведем два примера.

а) Модель Гейла (см. [I] , [2]).

Пусть $X^{(n)}$ есть n - мерное нормированное пространство, элементы которого суть n - членные наборы чисел. K -конус векторов из $X^{(n)}$ с неотрицательными компонентами.

Модель Гейла определяется замкнутым выпуклым конусом $Z \subset K \times K$. Мы будем предполагать, что конус Z обладает следующими свойствами:

1) $(0,y) \notin Z$ при $y \neq 0$, (3.I)

2) $(x,0) \in Z$ для любого $x \in K$, (3.2)

3) каков бы ни был $y \in K$, найдется $x \in K$ такой, что $(x,y) \in Z$.

Положим для $x \in K$

$$a(x)=\{y \in K / (x,y) \in Z\} . \qquad (3.3)$$

В силу (3.2) множество $a(x) \neq \varnothing$ при любом $x \in K$. Легко показать, используя (3.I), что $a(x)$ ограниченно при всех $x \in K$. Отсюда следует, что отображение a, определенное по формуле (3.3), действует из K в Ξ (где Ξ -совокупность всех ограниченных подмножеств K).

Модель Гейла является частным случаем рассматриваемой нами модели. В этом случае $n_1 = n_2 = \dots = n_t = \dots = n$;

$$X_1 = X_2 = \dots X_t = \dots = X^{(n)}; \quad a_1 = a_2 = \dots$$

$\dots = a_t = \dots = a$. При этом, как следует из теоремы I.3 a - полунепрерывное сверху, вогнутое и положительно однородное отображение. В силу теоремы I.I отображение a монотонно, полуад-

дитивно и

$$a(0)=0.$$

Таким образом, модель Гейла может быть задана одним отображением, удовлетворяющим условиям (I-I) - (I.7).

б) Модель типа Гейла (см. например, [3]) .Эта модель задается последовательностью натуральных чисел $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_t \leq \ldots$; последовательностью пространств $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_t \subset \ldots$, системой выпуклых замкнутых конусов $Z_t \subset K_t \times K_{t+1}$ $(t=1,2,\ldots)$ и последовательностью векторов $u_t \in K_t$ $(t=2,3,\ldots)$. Рассмотрим сначала случай, когда $u_2=u_3=\ldots=u_t=\ldots=0$ (модель типа Гейла без нагрузки). Будем предполагать в этом случае, что конусы Z_t $(t=1,2,\ldots)$ обладают следующими свойствами:

1) $(0,y) \notin Z_t$ при любом $y \in K_{t+1}$, $y \neq 0$; (3.4)

2) $(x,0) \in Z_t$ для любого $x \in K_t$; (3.5)

3) каков бы ни был $y \in K_{t+1}$, найдется $x \in K_t$ такой, что $(x,y) \in Z_t$.

Рассуждая так же, как в случае модели Гейла, легко показать, что конус Z_t порождает отображение a_t, действующее из K_t в Ξ_{t+1}, удовлетворяющее условиям (I.I) - (I.7) .

Рассмотрим теперь общий случай (модель типа Гейла с нагрузкой). Будем считать в этом случае, что конусы Z_t $(t=1,2,\ldots)$ обладают свойствами (3.4) и (3.6), а также следующим свойством:

если $(x,y) \in Z_t$, $y' \leq y$, то $(x,y') \in Z_t$ (3.5')

Ясно, что из (3.5') следует (3.5), а потому и в этом случае конус Z_t порождает отображение, которое мы обозначим через a_t', действующее из K_t в Ξ_{t+1} и удовлетворяющее условиям (I.I)- (I.7).

Рассмотрим отображение a_t $(t=1,2,\ldots)$, действующее из K_t в Ξ_{t+1}, положив для $x \in K_t$

$$a_t(x)=(a_t'(x)-u_{t+1}) \cap K_{t+1}, \tag{3.7}$$

если множество, стоящее в правой части, не пусто и

$$a_t(x)=0 \tag{3.8}$$

–в противном случае.

Ясно, что модель типа Гейла может быть задана с помощью отображений a_t . Выясним некоторые свойства этих отображений.

Из (3.7) следует, что $a_t(x) \neq 0$ тогда и только тог -

да, когда существует $y\in a_t'(x)$ такой, что $y>u_{t+1}$. В этом случае в силу (3.5) $u_{t+1}\in a_t'(x)$, и, следовательно, $0\in a_t(x)$.

ТЕОРЕМА 3.1. **Отображение** a_t, **определенное по формулам** (3.7) **и** (3.8), **монотонно и полунепрерывно сверху.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Монотонность. Пусть $x_1 \geq x_2$. Тогда $a_t'(x_1)\supset a_t'(x_2)$, и, следовательно, $(a_t'(x_1)-u_{t+1})\cap K_{t+1}\supset(a_t'(x_2)-u_{t+1})\cap K_{t+1}$, откуда легко следует, что $a_t(x_1)\supset a_t(x_2)$.

2. Полунепрерывность сверху. Пусть $x_n\in K_t$, $x_n\to x$, $y_n\in a_t(x_n)$, $y_n\to y$. Если в последовательности $\{y_n\}$ найдется подпоследовательность, состоящая из нулей, то $y=0\in a_t(x_n)$. В противном случае можно считать, что $y_n\neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$. Так как $y_n+u_{t+1}\in a_t'(x)$, то в силу полунепрерывности сверху отображения a_t' имеем $y+u_{t+1}\in a_t'(x)$, откуда $y\in a_t(x)$.

Теорема доказана.

Покажем, что отображение a_t, рассматриваемое в области своего определения, не вогнуто, если $u_{t+1}\neq 0$.

Пусть $y>u_{t+1}$, $y\in K_{t+1}$. Из (3.6) следует, что найдется $x_0\in K_t$ такой, что $y\in a_t'(x_0)$. Ясно, что $a_t(x_0)\neq 0$.

Из вогнутости a_t должно следовать, что при $\alpha\in[0,1]$,

$$a_t(\alpha x_0)=a_t(\alpha x_0+(1-\alpha)0)\supset\alpha a_t(x_0)+(1-\alpha)a_t(0)=\alpha a_t(x_0). \quad (3.9)$$

Выбрав достаточно малое α, можно добиться того, чтобы $a_t(\alpha x_0)=0$, что противоречит (3.9).

ТЕОРЕМА 3.2. **Пусть** $\mathcal{S}$ **- выпуклое подмножество** K_t **такое, что** $u_t\in a_t(x)$ **для любого** $x\in\mathcal{S}$. **Тогда отображение** a_t, **рассматриваемое на** $\mathcal{S}$, **вогнуто.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x\in\mathcal{S}$, то $a_t(x)=(a_t(x)-u_{t+1})\cap K_{t+1}$. Используя вогнутость a_t', имеем при $\alpha\in[0,1]$,

$$a_t(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=[a_t'(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)-u_{t+1}]\cap K_{t+1}\supset$$

$$\supset[\alpha a_t'(x_1)+(1-\alpha)a_t'(x_2)-u_{t+1}]\cap K_{t+1}\supset$$

$$\supset[\alpha(a_t'(x_1)-u_{t+1})+(1-\alpha)(a_t'(x_2)-u_{t+1})]\cap K_{t+1}\supset$$

$$\supset[\alpha(a_t'(x_1)-u_{t+1})]\cap K_{t+1}+[(1-\alpha)(a_t'(x_2)-u_{t+1})]\cap K_{t+1}=$$

$$=\alpha[(a_t'(x_1)-u_{t+1})\cap K_{t+1}]+(1-\alpha)[(a_t'(x_2)-u_{t+1})\cap K_{t+1}]=$$

$$=\alpha a_t(x_1)+(1-\alpha)a_t(x_2)$$

Теорема доказана.

В заключение этого пункта отметим близость рассматриваемой модели с моделью Ю.Н.Тюрина [4] .

4^0. Обозначим через X_t^* пространство, сопряженное к X_t $(t=1,2\ldots)$, через K_t^* – конус, сопряженный к K_t

$$K_t^*=\{f\in X_t^* \mid f(x)\geq 0,\ x\in K_t\}.$$

Если $f\in K_t^*$, $\xi\in\Xi_t$, то положим $f(\xi)=\sup_{x\in\xi} f(x)$.

Мы будем рассматривать модель, определенную в 2^0. Будем предполагать, что отображения $a_t (t=1,2\ldots)$ монотонны и полунепрерывны сверху.

Пусть T – натуральное число, $x\in K_1$. Назовем (x,T) – траекторией последовательность $\{x\}_{t=1}^T$, такую, что $x_1=x$, $x_t\in a_{t-1}(x_{t-1})$ $(t=2,3,\ldots T)$; назовем (x,∞) –траекторией последовательность $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ такую, что $x_1=x$, $x_t\in a_{t-1}(x_{t-1})$ $(t=2,3\ldots)$.

Пусть $f\in K_T^*$; назовем (x,T,f) –оптимальной траекторией (x,T) – траекторию $\{x_t\}_{t=1}^T$ такую, что $f(x_T)=f(A^{T-1}(x))$. Из полунепрерывности сверху и монотонности отображений $a_t (t=1,2\ldots)$ следует, что множество $A^{T-1}(x)$ $(T=1,2,\ldots)$ замкнуто и ограничено, и потому (x,T,f) – оптимальная траектория существует при любых x,T и f .

Пусть $\xi\subset K_1$. Рассмотрим тройку последовательностей $\sigma=(\bar{\mathfrak{X}},\bar{\varphi},\alpha)$. Здесь $\bar{\mathfrak{X}}=\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ –(x,∞) – траектория при некотором $x\in\xi$; $\bar{\varphi}=\{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty}$ $(\bar{f}_t\in K_t^*,\ \|f_t\|=1,\ t=1,2,\ldots)$, $\alpha=\{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}$ (α_t – вещественное число; $0<\alpha_t<\infty$, $t=1,2,\ldots$).

Тройку $\sigma=(\bar{\mathfrak{X}},\bar{\varphi},\alpha)$ назовем равновесной на ξ системой , если

1) $\bar{f}_1(\bar{x}_1)>0,$ (4.I)

2) $\bar{f}_{t+1}(a_t(x))\leq\alpha_t\bar{f}_t(x)$ $(x\in A^{t-1}(\xi),\ t=1,2,\ldots)$ (4.2)

3) $\bar{f}_{t+1}(\bar{x}_{t+1})=\alpha_t\bar{f}_t(\bar{x}_t)$ $(t=1,2,\ldots).$ (4.3)

Из (4.I) и (4.3) следует, что $\bar{f}_t(\bar{x}_t)>0$ при всех t . Из (4.2) следует, что если $\bar{f}_t(x)=0$, то и $\bar{f}_{t+1}(a_t(x))=0$. Будем считать в этом случае, что $\dfrac{\bar{f}_{t+1}(a_t(x))}{\bar{f}_t(x)}=\alpha_t$.

Выясним геометрический смысл равновесной системы. В пространстве $X_t\times X_{t+1}$ рассмотрим линейный функционал $\bar{g}_t=(\alpha_t f_t,-f_{t+1})$. (Если $z=(x,y)\in X_t\times X_{t+1}$, то $\bar{g}_t(z)=\alpha_t\bar{f}_t(x)-\bar{f}_{t+1}(y)$). Из (4.2) и (4.3) следует, что $\bar{g}_t(z_t(\xi))\geq 0$,

причем равенство достигается на паре $\bar{z}_t = (\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$. Через $H\bar{g}_t$ обозначим гиперплоскость функционала $\bar{g}_t$ $(H\bar{g}_t = \{(x,y) \in X_t \times X_{t+1} / \bar{g}_t(x,y) = 0\}$. Из сказанного выше следует, что гиперплоскость $H\bar{g}_t$ опорна к множеству $Z_t(\xi)$ и касается этого множества в точке $\bar{z}_t$.

Введем еще следующее определение. Для $\varepsilon \in (0,1)$, $t = 1,2,\ldots$ и равновесной на ξ системы $\sigma = (\bar{\chi}, \bar{\varphi}, \alpha)$ положим

$$W_\varepsilon^t(\sigma) = \{(x,y) \in Z_t(\xi) / \alpha_t (1-\varepsilon)\, \bar{f}_t(x) \geq \bar{f}_{t+1}(y)\}.$$

Условие $(x,y) \in W_\varepsilon^t(\sigma)$ означает, что $x \in A^{t-1}(\xi)$, $y \in a_t(x)$ и либо $\bar{f}(x) = 0$, либо $\frac{\bar{f}_{t+1}(y)}{\bar{f}_t(x)} \leq$

$$\leq \alpha_t (1-\varepsilon) = (1-\varepsilon) \sup_{x' \in A^{t-1}(\xi)} \ \sup_{y' \in a_t(x')} \frac{\bar{f}_{t+1}(y')}{\bar{f}_t(x')}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $x \in \xi$ таков, что $\bar{x}_\tau \in A^{\tau-1}(x)$ при некотором натуральном τ. Пусть, далее, $k' \geq k''$ – произвольные положительные числа, $T \geq \tau$, $f \in K_T^*$ и выполняется следующее условие:

$$k'' \bar{f}_T \geq f \geq k' \bar{f}_T. \tag{4.4}$$

Тогда, какова бы ни была (x,T,f) – оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^T$, число пар (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho((x_t, x_{t+1}), H\bar{g}_t) > \varepsilon \|x_t\|$ не превышает числа

$$M(\varepsilon) = \frac{\ln\left(\frac{k''}{k'} \frac{\bar{f}_1(\bar{x}_1)}{\bar{f}_1(x)}\right)}{\ln(1-\varepsilon)}. \tag{4.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим (x,T,f) – оптимальную траекторию $\{x_t\}_{t=1}^T$. Покажем прежде всего, что в предположениях теоремы $\bar{f}_t(x_t) > 0$ $(t = 1,2,\ldots T)$. Действительно, если $\bar{f}_t(x_t) = 0$ при некотором $t < T$ то, как следует из (4.2),

$$\bar{f}_{t+1}(x_{t+1}) = \bar{f}_{t+2}(x_{t+2}) = \ldots = \bar{f}_T(x_T) = 0,$$

но в то же время, учитывая (4.4) и то обстоятельство, что $\bar{x}_T \in A^{T-1}(x)$, получим

$$\bar{f}_T(x_T) \geq \frac{1}{k''} f(x_T) = \frac{1}{k''} f(A^{T-1}(x)) \geq \frac{k'}{k''} \bar{f}_T(A^{T-1}(x)) \geq \frac{k'}{k''} \bar{f}_T(\bar{x}_T) > 0.$$

Из полученного противоречия и следует справедливость высказанного утверждения.

Предположим теперь, что при $i=1,2,\ldots m$ пары $(x_{t_i}, x_{t_i+1})\in \in W_\varepsilon^{t_i}(\sigma)$, и покажем, что m не превышает числа $M(\varepsilon)$, определенного по формуле (4.5).

Из (4.2) следует, что при $t=1,2,\ldots,T$ выполняется $\frac{\bar f_{t+1}(x_{t+1})}{\bar f_t(x_t)}\le\alpha_t$. Кроме того, так как

$$(x_{t_i}, x_{t_i+1})\in W_\varepsilon^{t_i}(\sigma) \text{ и } \bar f_{t_i}(x_{t_i})>0,$$

то $\frac{\bar f_{t_i+1}(x_{t_i+1})}{\bar f_{t_i}(x_{t_i})}\le\alpha_{t_i}(1-\varepsilon)$. Используя приведенные выше неравенства, имеем

$$\frac{\bar f_T(x_T)}{\bar f_1(x)}=\frac{\bar f_T(x_T)}{\bar f_{T-1}(x_{T-1})}\cdot\frac{\bar f_{T-1}(x_{T-1})}{\bar f_{T-2}(x_{T-2})}\cdots\cdots\frac{\bar f_2(x_2)}{\bar f_1(x)}\le$$

$$\le\Big(\prod_{t=1}^{T-1}\alpha_t\Big)(1-\varepsilon)^m.$$

Учитывая, что $\prod_{t=1}^{T-1}\alpha_t=\frac{\bar f_2(\bar x_2)}{\bar f_1(\bar x_1)}\cdot\frac{\bar f_3(\bar x_3)}{\bar f_2(\bar x_2)}\cdots\cdots\frac{\bar f_T(\bar x_T)}{\bar f_{T-1}(\bar x_{T-1})}=$

$=\frac{\bar f_T(\bar x_T)}{\bar f_1(\bar x_1)}$, имеем после простых преобразований

$$\frac{\bar f_T(x_T)}{\bar f_T(\bar x_T)}\cdot\frac{\bar f_1(\bar x_1)}{\bar f_1(x)}\le(1-\varepsilon)^m. \tag{4.6}$$

Так как в силу (4.4) $\bar f_T(x_T)\ge\frac{1}{K'}f(x_T)$ и

$\bar f_T(\bar x_T)\le\frac{1}{K''}f(\bar x_T)$, то

$$\frac{\bar f_T(x_T)}{\bar f_T(\bar x_T)}\ge\frac{K''}{K'}\,\frac{f(x_T)}{f(\bar x_T)}. \tag{4.7}$$

Покажем, что $\frac{f(x_T)}{f(\bar x_T)}\ge 1$. Действительно, из соотношения $\bar x_\tau\in A^{\tau-1}(x)$ следует, что $\bar x_{\tau+1}\in a_\tau(\bar x_\tau)\subset A^\tau(x)$,

$\bar x_{\tau+2}\in a_{\tau+1}(\bar x_{\tau+1})\subset A^{\tau+1}(x),\ldots\bar x_T\in a_{T-1}(\bar x_{T-1})\subset A^{T-1}(x)$,
откуда, используя оптимальность рассматриваемой траектории, получим, что

$$f(\bar x_T)\le f(A^{T-1}(x))=f(x_T).$$

Из (4.7) теперь следует, что $\frac{\bar f_T(x_T)}{\bar f_T(\bar x_T)}\ge\frac{K''}{K'}$, откуда,

используя (4.6), заключаем, что

$$\frac{K''}{K'}\frac{\bar f_1(\bar x_1)}{f_1(x)} \leq (1-\varepsilon)^m .$$

Прологарифмировав последнее неравенство, получим $m \leq M(\varepsilon)$. Для завершения доказательства надо показать справедливость следующего утверждения: если пара (x_t, x_{t+1}) обладает тем свойством, что

$$\rho((x_t, x_{t+1}),\ H\bar g_t) > \varepsilon \|x_t\|, \tag{4.8}$$

то

$$(x_t, x_{t+1}) \in W_\varepsilon^t(\sigma).$$

Пусть t таково, что пара (x_t, x_{t+1}) удовлетворяет условию (4.8). Положим

$$\delta_t = \frac{\bar g_t(x_t, x_{t+1})}{\bar g_t(x_t, 0)} = \frac{\alpha_t \bar f_t(x_t) - \bar f_{t+1}(x_{t+1})}{\alpha_t \bar f_t(x_t)}.$$

Так как $(x_t, x_{t+1}) \notin H\bar g_t$, то $\delta_t > 0$; так как $\bar f_t(x_t) > 0$, то $\delta_t < \infty$. Легко проверить непосредственным подсчетом, что $\bar g_t((1-\delta_t)x_t, x_{t+1}) = 0$, и потому

$$\frac{((1-\delta_t)x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|} \in H\bar g_t .$$

Из (4.8) теперь следует, что

$$\delta_t \|x_t\| = \|(x_t, x_{t+1}) - ((1-\delta_t)x_t, x_{t+1})\| \geq \varepsilon \|x_t\|,$$

откуда вытекает, что $\delta_t \geq \varepsilon$. Используя определение δ_t, имеем

$$\alpha_t \bar f_t(x_t) - \bar f_{t+1}(x_{t+1}) \geq \varepsilon \alpha_t \bar f_t(x_t).$$

Последнее неравенство и означает, что пара $(x_t, x_{t+1}) \in W_\varepsilon^t(\sigma)$.

Теорема доказана.

Теореме (4.1) можно придать несколько другую форму.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть вектор $x \in \xi$ и последовательность функционалов $\{f_t\}_{t=1}^\infty$ $(f_t \in K_t^*)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $$\inf_{t \geq 1} \frac{f_t(A^{t-1}(x))}{\bar f_t(\bar x_t)} = c > 0, \tag{4.9}$$

б) $$\sup_t \ \inf\{K / f_t \leq K \bar f_t\} = \bar K < \infty . \tag{4.10}$$

Тогда, какова бы ни была (x, T, f_T) - оптимальная траектория $\{x\}_{t=1}^{T}$, число пар (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho((x_t, x_{t+1}), H\bar{g}_t) > \varepsilon\|x_t\|$, не превышает числа

$$M_1(\varepsilon) = \frac{\ln\left(\frac{c}{\bar{K}}\frac{\bar{f}_1(\bar{x})}{f_1(x)}\right)}{\ln(1-\varepsilon)} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим (x, T, f_T) - оптимальную траекторию $\{x_t\}_{t=1}^{T}$, и пусть пары $(x_{t_i}, x_{t_i+1}) \in W_\varepsilon^{t_i}(\sigma)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $m \le M$.

Из соотношения (4.9) следует, что $\bar{f}_T(A^{T-1}(x)) > 0$. Следовательно, при $t = 1, 2, \ldots T$ имеем $\bar{f}_t(x_t) > 0$, а тогда справедливо неравенство (4.6), которое мы перепишем в следующем виде:

$$\frac{\bar{f}_T(x_T)}{\bar{f}_T(\bar{x}_T)} \le \frac{\bar{f}_1(x)}{\bar{f}_1(\bar{x}_1)}(1-\varepsilon)^m .$$

Используя (4.9) и (4.10), имеем:

$$C = \inf_t \frac{f_t(A^{T-1}(x))}{\bar{f}_t(\bar{x}_t)} \le \frac{f_T(A^{T-1}(x))}{\bar{f}_T(\bar{x}_T)} = \frac{f_T(x_T)}{\bar{f}_T(\bar{x}_T)} \le \bar{K}\frac{\bar{f}_T(x_T)}{\bar{f}_T(\bar{x}_T)} \le$$

$$\le \bar{K}\frac{\bar{f}_1(x)}{f_1(\bar{x}_1)}(1-\varepsilon)^m .$$

Прологарифмировав последнее неравенство, получим $m \le M_1(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Покажем, что в случае модели типа Гейла без нагрузки (см. 3[0]) теорему 4.I можно несколько усилить. Пусть $\sigma = (\bar{X}, \bar{\varphi}, \alpha)$ - равновесная на K_1 система. В этом случае при $\lambda > 0$ система $\sigma' = \{\lambda \cdot \bar{X}, \bar{\varphi}, \alpha\}$ также равновесна. Отсюда легко показать, что условие $\bar{x}_\tau \in A^{\tau-1}(x)$, фигурирующее в теореме 4.I, может быть заменено более слабым условием

$$\{\lambda \cdot \bar{x}_\tau\}_{\lambda>0} \cap A^{\tau-1}(x) \ne \emptyset .$$

В рассматриваемом случае луч $\{\lambda\bar{x}_t\}_{\lambda>0}$ уместно назвать равновесным лучом. Приведенное выше условие означает, что из точки x за τ шагов можно выйти на равновесный луч.

Отметим, что понятие равновесной системы можно рассматривать как обобщение понятия равновесия в модели Гейла, а тео-

ремы 4.I., 4.2 – как обобщение теорем о магистрали в слабой форме, имеющих место в этой модели (см. например, [3]).

5^0. Пусть ζ – замкнутое ограниченное подмножество конуса K_t. Введем в рассмотрение множество $m(\zeta)$, определяемое следующим образом: элемент $x \in m(\zeta)$ тогда и только тогда, когда $x \in \zeta$ и найдется отличный от нуля функционал $f \in K_t^*$ такой, что $f(x)=f(\zeta)$.

Будем предполагать, что отображения $a_t (t=1,2,\ldots)$ вогнуты, монотонны и полунепрерывны сверху. Пусть ξ – ограниченное замкнутое подмножество K_1. Назовем (ξ,∞) – оптимальной траекторией (x,∞) – траекторию $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ такую, что $x=x_1 \in \xi$ и $x_t \in m(A^{t-1}(\xi))$ $(t=1,2,\ldots)$. В случае, если $\xi=\{x\}$, (ξ,∞) – оптимальную траекторию назовем (x,∞) – оптимальной.

ТЕОРЕМА 5.I. Каково бы ни было замкнутое, ограниченное, выпуклое множество $\xi \subset K_1$, существует (ξ,∞) – оптимальная траектория.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 5.I. Пусть ξ – замкнутое, ограниченное подмножество K_1. Тогда множество $m(A^{t-1}(\xi))(t=1,2,\ldots)$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n \in m(A^{t-1}(\xi))$, $x_n \to x$.

По определению множества $m(A^{t-1}(\xi))$ найдутся функционалы $f_n \in K_t^*$ такие, что $f_n(x_n)=f_n(A^{t-1}(\xi))$ $(n=1,2,\ldots)$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $\|f_n\|=1$ и существует $\lim f_n=f$. Ясно, что $f(x)=f(A^{t-1}(\xi))$, а это и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 5.I. I. Докажем сначала следующее утверждение. Пусть $y \in m(A^{t-1}(\xi))$. Тогда найдется (x,T) – траектория $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ такая, что $x_1=x \in \xi$, $x=y$ и $x_t \in m(A^{t-1}(\xi))(t=1,2\ldots T)$. Действительно, пусть $y=x_T \in a_{T-1}(x'_{T-1})$ $(x'_{T-1} \in A^{T-2}(\xi))$. Легко показать, используя выпуклость $A^{t-1}(\xi)$, что существует элемент $x_{T-1} \in$ $\in m(A^{T-1}(\xi))$ такой, что $x_{T-1} \geq x'_{T-1}$. Из монотонности отображения a_{T-1} следует, что $a_{T-1}(x_{T-1}) \supset a_{T-1}(x'_{T-1})$, а это означает, что $x_T \in a_{T-1}(x_{T-1})$. Таким же образом найдется элемент $x_{T-2} \in m(A^{T-3}(\xi))$, такой, что $x_{T-1} \in a_{T-1}(x_{T-2})$. Рассуждая так же, найдем элементы x_{T-3}, x_{T-4} и т.д., пока не спустимся до элемента $x_1 \in m(\xi)=m(A^0(\xi))$.

Траектория,составленная из выделенных нами элементов, и будет искомой. (x,T) – траектории $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ такие,что $x_t \in m(A^{t-1}(\xi))$, назовем (x,T) – оптимальными траекториями.

2. Рассмотрим множество $A^0(\xi)=\xi$ и его подмножества $B_T^0(\xi)$ $(T=1,2,\ldots)$, определяемые следующим образом: элемент $y \in B_T^0(\xi)$ тогда и только тогда, когда найдется (y,T) – оптимальная траектория. Множества $B_T^0(\xi)$ не пусты, и $B_1^0(\xi) \supset B_2^0(\xi) \supset \ldots$ Покажем, что $B_T^0(\xi)$ замкнуто $(T=1,2,\ldots)$.

Пусть $y^k \in B_T^0(\xi)$, $y^k \to y$. По определению $B_T^0(\xi)$ найдутся (y^k,T) – оптимальные траектории $\{x_t^k\}_{t=1}^{T}$. (При этом по определению (y^k,T) – траектории $x_1^k=y^k$, $k=1,2,\ldots$). Не уменьшая общности,можно считать, что существует $\lim_k x_t^k = x_t$ ($t=1,2,\ldots T$).Из полунепрерывности сверху отображений a_t и леммы 5.I следует, что последовательность $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ является (y,T) –оптимальной траекторией, а это означает,что $y \in B_T^0(\xi)$.

Таким образом,множества $B_T^0(\xi)$ замкнуты и, следовательно, компактны, а потому $\bigcap_T B_T^0(\xi) \neq \emptyset$. Выберем $x_1' \in \bigcap_T B_T^0(\xi)$

3. Пусть для некоторого $\tau \geq 1$ найдены элементы $x_1', x_2', \ldots x_\tau'$, обладающие следующими свойствами:

а) $x_t' \in a_{t-1}(x_{t-1}')$ $(t=2,3,\ldots \tau)$,

б) $x_t' \in m(A^{t-1}(\xi))$ $(t=1,2,\ldots \tau)$,

в) для любого $T \geq \tau$ найдется (x,T) – оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ такая, что $x_t = x_t'$ $(t=1,2,\ldots,\tau)$.

Рассмотрим множество $A^\tau(\xi)$ и его подмножество $B_T^\tau(\xi,x_1',\ldots,x_\tau')$ $(T=\tau+1,\tau+2,\ldots)$. Элемент y принадлежит $B_T^\tau(\xi,x_1',\ldots,x_\tau')$ тогда и только тогда, когда найдется (x_1',T) – оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ такая,что $x_t=x_t'(t=1,2,\ldots,\tau)$; $x_{\tau+1}=y$. Легко показать, что $\bigcap_T B_T^\tau(\xi,x_1',\ldots,x_\tau') \neq \emptyset$.
Пусть $x_{\tau+1}' \in \bigcap_T B_T^\tau(\xi,x_1',\ldots,x_\tau')$. При этом

$$x_{\tau+1}' \in a_\tau(x_\tau') \quad \text{и} \quad x_{\tau+1}' \in m(A^\tau(\xi)).$$

Ясно,что построенная таким образом последовательность $\{x_t'\}_{t=1}^{\infty}$ и будет (ξ,∞) – оптимальной траекторией. Теорема доказана.

Следующая теорема описывает связь между понятиями (ξ,∞)-оптимальной траектории и равновесной на ξ системы.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть ξ есть замкнутое, ограниченное подмножество K_1 и существует равновесная на ξ система $\sigma=(\bar{\chi},\bar{\varphi},\alpha)$ $(\bar{\chi}=\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty};\ \bar{\varphi}=\{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty};\ \alpha=\{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty})$. Предположим, что $\bar{f}_1(\bar{x}_1)=\bar{f}_1(\xi)$. Тогда $\bar{\chi}$ есть (ξ,∞) - оптимальная траектория; при этом

$$\bar{f}_T(\bar{x}_T)=\bar{f}_T(A^{T-1}(\xi))\quad (T=2,3,\dots).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему по индукции. Предположим, что при некотором T

$$\bar{f}_T(A^{T-1}(\xi))=\bar{f}_T(\bar{x}_T).$$

Имеем для $y\in A^{T-1}(\xi)$, используя (4.2) и (4.3)

$$\bar{f}_{T+1}(\bar{x}_{T+1})=\alpha_T\bar{f}_T(\bar{x}_T)\geq\alpha_T\bar{f}_T(y)\geq\bar{f}_{T+1}(a_T(y)),$$

откуда и следует, что $\bar{f}_{T+1}(A^T(\xi))=\bar{f}_{T+1}(\bar{x}_{T+1})$.

Теорема доказана.

Используя понятие (ξ,∞) - оптимальной траектории, можно показать, что в положительно однородных моделях существуют равновесные системы. Точнее говоря, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть отображения $a_t\ (t=1,2\dots)$, определяющие модель, монотонны, полунепрерывны сверху, вогнуты и положительно однородны. Пусть, далее, v - внутреняя точка конуса K_1. Тогда для любой (v,∞) - оптимальной траектории $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ существует равновесная на K_1 система $\sigma=\{\bar{\chi},\bar{\varphi},\alpha\}$ такая, что $\bar{\chi}$ совпадает с $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Покажем прежде всего, что в условиях теоремы множество $A^{t-1}(v)\ (t=1,2,\dots)$ содержит внутреннюю точку конуса K_t. При $t=1$ наше утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо при некотором $t\geq 1$, и пусть $x\in A^{t-1}(v)$, x - внутренняя точка K_t. Покажем, что $a_t(x)$ содержит внутреннюю точку K_{t+1}. Предполагая противное, легко показать, что при любом $\lambda>0$ множество $a_t(\lambda x)=\lambda a_t(x)$ не содержит внутренней точки K_{t+1} и, следовательно, $\bigcup_{\lambda>0}a_t(\lambda x)\neq K_{t+1}$. С другой стороны, так как x - внутренняя точка K_t, то для любого $x'\in K_t$ найдется $\lambda'>0$ такое, что $x'<\lambda' x$. В силу монотонности a_t имеем $a_t(x')\subset$

$\subset a_t(\lambda' x)$, откуда следует, что

$$a_t(K_t) \subset \bigcup_{\lambda \ge 0} a_t(\lambda x).$$

С другой стороны, в силу (2.I) $a_t(K_t) = \bigcup_{x \in K_t} a_t(x) = K_{t+1}$. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего утверждения.

2. Рассмотрим конечную последовательность $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\tau+1}$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$.

Пусть функционал $f_{\tau+1} \in K^*_{\tau+1}$ $(f_{\tau+1} \ne 0)$ таков, что $f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}) = f_{\tau+1}(A^\tau(v))$ (Такой функционал найдется, так как $\bar{x}_{\tau+1} \in m(A^\tau(v))$).

Определим на K_τ функционал φ_τ, положив для $x \in K_\tau$

$$\varphi_\tau(x) = f_{\tau+1}(a_\tau(x)). \tag{5.I}$$

Из монотонности, вогнутости и положительной однородности a_τ следует, что φ_τ есть неубывающий, вогнутый и положительный однородный функционал. Ясно, что φ_τ положителен и $\varphi_\tau(0) = 0$. Из определения функционала $f_{\tau+1}$ и (5.I) вытекает, что

$$\varphi_\tau(\bar{x}_\tau) = f_{\tau+1}(a_\tau(\bar{x}_\tau)) \ge f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}) = f_{\tau+1}(A^\tau(v)) \ge f_{\tau+1}(a_\tau(\bar{x}_\tau)),$$

откуда $$\varphi_\tau(\bar{x}_\tau) = f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}).$$

Покажем, что функционал φ_τ достигает максимума на множестве $A^{\tau-1}(v)$ в точке $\bar{x}_\tau$. Действительно,

$$\varphi_\tau(\bar{x}_\tau) = f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}) = f_{\tau+1}(A^\tau(v)) = \max_{y \in A^\tau(v)} f_{\tau+1}(y) =$$

$$= \max_{x \in A^{\tau-1}(v)} f_{\tau+1}(a_\tau(x)) = \max_{x \in A^{\tau-1}(v)} \varphi_\tau(x).$$

Пусть $$\Omega'_\tau = \{(x, \lambda) \in K_\tau \times R^1 / x \in K_\tau,\ \lambda \le \varphi_\tau(x)\},$$

$$\Omega''_\tau = \{(y, \mu) \in K_\tau \times R^1 / y \in A^{\tau-1}(v),\ \mu > \varphi_\tau(\bar{x}_\tau)\}.$$

Ясно, что множества Ω'_τ и Ω''_τ выпуклы и не пересекаются. Их замыкания содержат общую точку $(\bar{x}_\tau, \varphi_\tau(\bar{x}_\tau))$. Кроме того, из положительной однородности φ_τ следует, что Ω'_τ есть конус.

Из сказанного выше следует, что Ω'_τ и Ω''_τ можно разделить гиперплоскостью, проходящей через ноль и точку $(\bar{x}_\tau, \varphi_\tau(\bar{x}_\tau))$.

Иными словами, найдутся функционал $h\in X_\tau^*$ и число ν, такие, что h и ν не равны нулю одновременно и

а) $$h(\bar{x}_\tau)+\nu\psi_\tau(\bar{x}_\tau)=0 \quad , \tag{5.2}$$

б) $$h(x)+\nu\lambda\le 0\le h(y)+\nu\mu, \tag{5.3}$$

$$(x\in K_\tau,\ \lambda\le\psi_\tau(x),\ y\in A^{\tau-1}(v);\ \mu>\psi_\tau(\bar{x}_\tau)).$$

Так как ψ_τ - положительный функционал, то при $x\in K_\tau$ пары $(x,0)\in\Omega'_\tau$, и потому из (5.3) следует, в частности, что $h(x)\le 0$ для $x\in K_\tau$, или, что то же самое, $h\le 0$.

Из (5.2) вытекает, что

$$\nu=-\frac{h(x_\tau)}{\psi_\tau(x_\tau)}\ge 0.$$

Если предположить, что $h=0$, то, так как h и ν не равны нулю одновременно, $\nu>0$. Однако, с другой стороны, $\nu=-\frac{h(\bar{x}_\tau)}{\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}=0$. Полученное противоречие показывает, что $h\ne 0$. Предполагая, что $\nu=0$, имеем из (5.3) при всех $x\in K_\tau$

$$-h(x)\ge -h(A^{\tau-1}(v)).$$

Последнее неравенство означает, что $-h(A^{\tau-1}(v))=0$, а это противоречит тому, что множество $A^{\tau-1}(v)$ содержит внутреннюю точку конуса K_τ.

Таким образом, $\nu>0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\nu=1$.

Из (5.2) теперь имеем:

$$h(\bar{x}_\tau)=\psi_\tau(\bar{x}_\tau)=f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}). \tag{5.4}$$

Из левой части (5.3) следует, что для $x\in K_\tau$

$$\psi_\tau(x)+h(x)=f_{\tau+1}(a_\tau(x))+h(x)\le 0. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и правой части (5.3) следует, что для $y\in A^{\tau-1}(v)$

$$-h(y)\le\psi_\tau(\bar{x}_\tau)\le -h(\bar{x}_\tau). \tag{5.6}$$

Оценим норму функционала h (или, что то же самое, функционала $-h$).

Имеем, используя (5.5), при $x\in K_\tau$

$$f_{\tau+1}(a_\tau(x))\le -h(x)\le\|h\|\,\|x\|,$$

откуда

$$\|h\|\ge\sup_{x\in K_\tau,\|x\|\le 1} f_{\tau+1}(a_\tau(x))=f_{\tau+1}\Big(\bigcup_{\substack{x\in K_\tau\\ \|x\|\le 1}} a_\tau(x)\Big).$$

Ясно, что множество $\bigcup_{x \in K_\tau, \|x\| \le 1} a_\tau(x)$ телесно. Это означает, что найдутся точка x_0 и шар S_{z_τ} ($S_{z_\tau} = \{x \in X_\tau / \|x\| \le z_\tau\}$ такие, что $x_0 + S_{z_\tau} \subset \bigcup_{x \in K_\tau, \|x\| \le 1} a_\tau(x)$.

Учитывая, что $x_0 \ge 0, \|f_{\tau+1}\| = 1, f_{\tau+1} \ge 0$, имеем

$$\|h\| \ge f_{\tau+1}\Big(\bigcup_{x \in K_\tau, \|x\| \le 1} a_\tau(x)\Big) \ge f_{\tau+1}(x_0 + S_{z_\tau}) \ge$$
$$\ge f_{\tau+1}(S_{z_\tau}) = \sup_{\|x\| \le z_\tau} f_{\tau+1}(x) = z_\tau \|f_{\tau+1}\| = z_\tau . \tag{5.7}$$

Пусть $x' \in A^{\tau-1}(v), x'$ — внутренняя точка K_τ. Множество $\langle 0, x' \rangle = \{y \in K_\tau / y \le x'\}$ телесно, т.е. найдутся точка x'' и шар $S_{\gamma\tau}$ такие, что $x'' + S_{\gamma_\tau} \subset \langle 0, x' \rangle$.

Имеем, используя (5.4) и (5.6),

$$\|\bar{x}_{\tau+1}\| \ge f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}) = -h(\bar{x}_\tau) \ge -h(x') \ge$$
$$\ge -h(x'' + S_{\gamma_\tau}) \ge -h(S_{\gamma_\tau}) = \|h\| \gamma_\tau ,$$

откуда

$$\|h\| \le \frac{\|\bar{x}_{\tau+1}\|}{\gamma_\tau} . \tag{5.8}$$

Полагая $\|h\| = \alpha_\tau$ и $-\frac{h}{\|h\|} = f_\tau$, получим, учитывая формулы (5.4) - (5.8),

1) $f_\tau \in K^*_\tau, \quad \|f_\tau\| = 1,$ (5.9)

2) $f_{\tau+1}(a_\tau(x)) \le \alpha_\tau f_\tau(x) \quad (x \in K_\tau),$ (5.10)

3) $f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1}) = \alpha_\tau f_\tau(\bar{x}_\tau),$ (5.11)

4) $f_\tau(\bar{x}_\tau) = f_\tau(A^{\tau-1}(v)),$ (5.12)

5) $z_\tau \le \alpha_\tau \le \frac{\|\bar{x}_{\tau+1}\|}{\gamma_\tau}$. (5.13)

3) Пусть $T \ge 2$. Рассмотрим функционал $f^T_T \in K^*_T$ такой, что $\|f^T_T\| = 1$ и $f^T_T(x_T) = f^T_T(A^{T-1}(v))$. Рассуждая так же, как в пункте 2) доказательства, найдем функционал f^T_{T-1} и число α^T_{T-1}, удовлетворяющие соотношениям (5.9) - (5.13). Поскольку $\|f^T_{T-1}\| = 1$ и $f^T_{T-1}(\bar{x}_{T-1}) = f^T_{T-1}(A^{T-2}(v))$, то по функционалу f^T_{T-1} можно отыскать функционал f^T_{T-2} и число α^T_{T-2}. Рассуждая таким же образом, построим последовательности $\{f^T_t\}^T_{t=1}$ и $\{\alpha^T_t\}^T_{t=1}$ такие, что f^T_t и α^T_t удовлетворяют условиям (5.9)- (5.13) $(t = 1, 2, \ldots, T-1)$.

4) Построим функционалы f^T_t и числа α^T_t для всех

$T=1,2,\ldots$ и $t \leq T$. Так как $\|f_t^T\|=1$ и константы z_t и γ_t, фигурирующие в (5.13), не зависят от T, последовательности

$$\{f_t^T\}_{T=t}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{\alpha_t^T\}_{T=t}^{\infty} \qquad (t=1,2,\ldots)$$

имеют предельные точки. Используя диагональный процесс, легко показать, что найдутся такие предельные точки этих последовательностей (обозначим их через $\bar{f}_t$ -и $\bar{\alpha}_t$, $t=1,2,\ldots$), что

1) $\qquad \bar{f}_t \in K_t^*, \qquad \|\bar{f}_t\|=1, \qquad\qquad (5.14)$

2) $\qquad \bar{f}_{t+1}(a_t(x)) \leq \alpha_t \bar{f}_t(x) \qquad (x \in K_t), \qquad\qquad (5.15)$

3) $\qquad \bar{f}_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) = \alpha_t \bar{f}_t(\bar{x}_t), \qquad\qquad (5.16)$

4) $\qquad \bar{f}_t(A^{t-1}(v)) = \bar{f}_t(\bar{x}_t),$

5) $\qquad z_t \leq \alpha_t \leq \dfrac{\|\bar{x}_{t+1}\|}{\gamma_t} \qquad (z_t>0,\ \gamma_t>0) \qquad\qquad (5.17)$

Положим $\qquad \bar{\chi}=\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}, \quad \bar{\varphi}=\{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty}, \quad \alpha=\{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}$

Из (5.14) - (5.17) следует, что тройка $\sigma=\{\bar{\chi},\bar{\varphi},\alpha\}$ является равновесной на K_1 системой. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь неоднородную модель. Пусть отображения a_t вогнуты и $a_t(0)=0$ $(t=1,2,\ldots)$. Тогда при $\mu\in[0,1]$, $x\in K_t$,

$$a_t(\mu x)=a_t(\mu x+(1-\mu)0)\supset \mu a_t(x). \qquad (5.18)$$

Пусть $\chi=\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ - (x,∞)-траектория, иными словами, $x_1=x$, $x_{t+1}\in a_t(x_t)$ $(t=1,2\ldots)$. Учитывая (5.18), получим при $0\leq\mu\leq 1$

$$\mu x_{t+1}\in \mu a_t(x_t)\subset a_t(\mu x_t).$$

Это означает, что последовательность $\mu\chi=\{\mu x_t\}_{t=1}^{\infty}$ есть $(\mu x,\infty)$ - траектория.

Обозначим через S_χ супремум чисел μ таких, что $\mu\chi$ является $(\mu x,\infty)$ - траекторией. Ясно, что $1\leq S_\chi\leq\infty$. Число S_χ обладает следующим свойством: если $\mu>S_\chi$, то последовательность $\mu\chi$ не является траекторией; если $\mu<S_\chi$, то эта последовательность есть $(\mu x,\infty)$ - траектория.

Пусть теперь $\sigma=(\bar{\chi},\bar{\varphi},\alpha)$ - равновесная на K_1 система. ($\bar{\chi}=\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\bar{\varphi}=\{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\alpha=\{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty}$). Используя определение равновесной системы, легко показать, что при

$\mu < S_{\bar{x}}$ система $\sigma_\mu = (\mu\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha)$ равновесна на K_1. (Множество $\{\mu \bar{x}_t\}_{0<\mu<S_{\bar{x}}}$ уместно назвать равновесным отрезком, если $S_{\bar{x}} < \infty$, и равновесным лучом, если $S_{\bar{x}} = \infty$).

Пусть $v = \bar{x}_1$. Так как система σ равновесна на K_1, то она будет равновесной и на $\{v\}$, а потому, в силу теоремы 5.2, последовательность $\bar{x}$ будет (v, ∞)-оптимальной траекторией, причем $\bar{f}_t(\bar{x}_t) = \bar{f}_t(A^{t-1}(v))$ $(t = 1, 2, \ldots)$. Поскольку система σ_μ равновесна на $\{\mu v\}$ $(0 < \mu \le 1)$, то $\mu\bar{x}$ есть $(\mu v, \infty)$ - оптимальная траектория и

$$\bar{f}_t(\mu\bar{x}_t) = \bar{f}_t(A^{t-1}(\mu v)) \quad (t = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, если некоторая (v, ∞) -оптимальная траектория $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ порождает равновесную на K_1 систему, то 1) $\{\mu\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ $(0<\mu\le 1)$ есть $(\mu v, \infty)$ -оптимальная траектория; 2) множество $A^{t-1}(\mu v)$ имеет ту же "форму" вблизи точки $\bar{x}_t$, что и множество $A^{t-1}(v)$ вблизи точки $\mu\bar{x}_t$, иными словами, существует функционал $f \in K_{t1}^*$, опорный к множеству $A^{t-1}(v)$ в точке $\bar{x}_t$ и к множеству $A^{t-1}(\mu v)$ в точке $\mu\bar{x}_t$.

Для доказательства существования равновесной на K_1 системы нам понадобятся, однако, несколько более сильные предположения.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть отображения α_t $(t = 1, 2, \ldots)$ монотонны, полунепрерывны сверху, вогнуты и, кроме того, $\alpha_t(0) = 0$. Пусть, далее, $v \in K_1$ и $\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ (v, ∞) - оптимальная траектория, причем

а) при $\mu \in (0, 1]$ последовательность $\{\mu\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ есть $(\mu v, \infty)$ - оптимальная траектория;

б) функционал $f \in K_t^*$ удовлетворяет условию $f(\bar{x}_t) = f(A^{t-1}(v))$ тогда и только тогда, когда

$$f(\mu\bar{x}_t) = f(A^{t-1}(\mu v)) \quad (0 < \mu \le 1;\ t = 1, 2, \ldots);$$

в) множество $A^t(v)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ содержит внутреннюю точку конуса K_{t+1}. Тогда существует равновесная на K_1 система $\sigma = (\bar{x}, \bar{\varphi}, \alpha)$, такая, что

$$\bar{x} = \{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительная однородность отображений a_t использовалась при доказательстве теоремы 5.3, во-первых, для того, чтобы показать, что множество $A^t(v)\,(t=1,2,\ldots)$ содержит внутреннюю точку конуса K_{t+1}; во-вторых, для того, чтобы было возможно разделить множества Ω'_τ и Ω''_τ гиперплоскостью, проходящей через ноль; в-третьих, для того, чтобы показать, что множество $\bigcup\limits_{x\in K_t,\,\|x\|=1} a_t(x)$ телесно.

В нашем случае множества $A^t(v)$ содержат внутреннюю точку конуса K_{t+1} в силу условия теоремы. Нетрудно проверить, что телесность множества $\bigcup\limits_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} a_t(x)$ следует лишь из вогнутости отображения a_t. Действительно, поскольку это множество выпукло и содержит ноль, из предположения о том, что оно нетелесно, должно следовать, что оно содержится в некотором подпространстве Y пространства X_{t+1}. Так как $\bigcup\limits_{x\in K_t} a_t(x)=K_{t+1}$, то найдется $x_0\in K_t,\ \|x_0\|>1$, такой, что $a_t(x_0)\not\subset Y$. Пусть $\mu=\frac{1}{\|x_0\|}<1$. Тогда $\|\mu x_0\|<1$, и потому $a_t(\mu x_0)\subset Y$. С другой стороны, из (5.18) следует, что $a_t(\mu x_0)\supset \mu a_t(x_0)$. Поскольку множество $\mu a_t(x_0)$ не содержится в Y, мы получили противоречие, которое и показывает, что интересующее нас множество телесно.

Если мы покажем теперь, что множества Ω'_τ и Ω''_τ, фигурирующие в доказательстве теоремы 5.3, в условиях теоремы, которую мы сейчас рассматриваем, могут быть разделены гиперплоскостью, проходящей через ноль, то дальнейшее доказательство нашей теоремы может быть проведено с помощью тех же рассуждений, что и доказательство теоремы 5.3.

Пусть τ - натуральное число, функционал $f_{\tau+1}\in K^*_{\tau+1}$, таков, что $f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1})=f_{\tau+1}(A^\tau(v))$. Тогда неубывающий вогнутый функционал φ_τ, определенный на $A^{\tau-1}(v)$ по формуле (5.1) $\varphi_\tau(x)=f_{\tau+1}(a_\tau(x))$, достигает максимума на множестве $A^{\tau-1}(v)$ в точке $\bar{x}_\tau$, причем $\varphi_\tau(\bar{x}_\tau)=$ $=f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1})$. Напомним, что

$$\Omega'_\tau=\{(x,\lambda)\in K_\tau\times R^1/x\in K_\tau,\qquad \lambda\le\varphi_\tau(\bar{x}_\tau)\},$$

$$\Omega''_\tau=\{(y,\mu)\in K_\tau\times R^1/y\in A^{\tau-1}(v),\quad \mu>\varphi_\tau(\bar{x}_\tau)\}.$$

Рассмотрим коническую оболочку $C(\Omega'_\tau)$ множества Ω'_τ

$$C(\Omega'_\tau)=\{(z,\nu)/z=\alpha x,\ \nu=\alpha\lambda;\ (x,\lambda)\in\Omega'_\tau,\ \alpha\ge 0\}.$$

Ясно, что множества $C(\Omega'_\tau)$ и Ω''_τ выпуклы. Допустим, что эти множества пересекаются, и пусть точка $(u,\beta)\in\Omega''_\tau\cap C(\Omega'_\tau)$. Из определения Ω''_τ и $C(\Omega'_\tau)$ следует, что

$$u\in A^{\tau-1}(v),\quad \beta>\psi_\tau(\bar{x}_\tau),\qquad u=\alpha x,\quad \beta=\alpha\lambda\quad (\alpha\geq 0,\, x\in K_\tau,\ \lambda\leq\psi_\tau(x)).$$

Заметим, что из приведенных соотношений, в частности, вытекает, что

$$x\in\frac{1}{\alpha}A^{\tau-1}(v)\ ,\qquad \alpha>\frac{\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}{\psi_\tau(x)}\ . \qquad (5.19)$$

Рассмотрим отдельно два случая.

I) $\alpha\geq 1$. По условию теоремы в этом случае последовательность $\{\frac{1}{\alpha}\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ есть $(\frac{1}{\alpha}v,\infty)$ -оптимальная траектория и $\bar{f}_{\tau+1}(\frac{1}{\alpha}\bar{x}_{\tau+1})=f_{\tau+1}(A^{\tau}(\frac{1}{\alpha}v))$.
Имеем поэтому

$$\max_{z\in A^{\tau-1}(\frac{1}{\alpha}v)}\psi_\tau(z)=\max_{z\in A^{\tau-1}(\frac{1}{\alpha}v)}f_{\tau+1}(a_\tau(z))=f_{\tau+1}(A^{\tau}(\tfrac{1}{\alpha}v))=$$
$$=f_{\tau+1}(\tfrac{1}{\alpha}\bar{x}_{\tau+1})=\tfrac{1}{\alpha}f_{\tau+1}(\bar{x}_{\tau+1})=\tfrac{1}{\alpha}\psi_\tau(\bar{x}_\tau). \qquad (5.20)$$

Из (5.18) легко следует, что

$$A^{\tau-1}(\tfrac{1}{\alpha}v)\supset\tfrac{1}{\alpha}A^{\tau-1}(v).$$

Используя это соотношение, а также (5.19) и (5.20), получим

$$\alpha>\frac{\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}{\psi_\tau(x)}\geq\frac{\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}{\max\limits_{z\in\frac{1}{\alpha}A^{\tau-1}(v)}\psi_\tau(z)}\geq\frac{\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}{\max\limits_{z\in A^{\tau-1}(\frac{1}{\alpha}v)}\psi_\tau(z)}=\frac{\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}{\frac{1}{\alpha}\psi_\tau(\bar{x}_\tau)}=\alpha\ ,$$

что невозможно.
2) $\alpha<1$. Так как множество Ω_τ' выпукло и содержит ноль, то вместе с точкой (x,λ) оно должно содержать и точку $\alpha(x,\lambda)=(u,\beta)$. Это, однако, невозможно, поскольку $\Omega_\tau'\cap\Omega_\tau''=\emptyset$.

Таким образом, наше предположение о том, что $\Omega_\tau''\cap C(\Omega_\tau')\neq\emptyset$, неверно.

Множества Ω_τ'' и $C(\Omega_\tau')$ выпуклы и не пересекаются. Их замыкания содержат общую точку $(\bar{x}_\tau,\psi_\tau(\bar{x}_\tau))$. Так как $C(\Omega_\tau')$, кроме того, являются конусом, то найдется гиперплоскость, проходящая через ноль и точку $(\bar{x}_\tau,\psi_\tau(\bar{x}_\tau))$, разделяющая $C(\Omega_\tau')$ и Ω_τ''. Ясно, что эта гиперплоскость будет разделять и множества Ω_τ' и Ω_τ''.

Теорема доказана.

В заключение отметим одно свойство совокупности всех равновесных на K_1 систем.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть отображение $a_t\ (t=1,2,\ldots)$ таково, что $\bigcup_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} a_t(x)$ — телесное в K_{t+1} множество. Тогда

$$\inf_{\sigma} \alpha_t > 0 .$$

(Здесь инфимум берется по всем равновесным на K_1 системам).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma=(\bar{x},\bar{\varphi},\alpha)$ $(\bar{x}=\{\bar{x}_t\}_{t=1}^{\infty},\ \bar{\varphi}=\{\bar{f}_t\}_{t=1}^{\infty},\ \alpha=\{\alpha_t\}_{t=1}^{\infty})$-равновесная на K_1 система. Так как функционал $\bar{f}_t$ положителен, то $\|\bar{f}_t\| = \sup_{x\ge 0,\,\|x\|\le 1} \bar{f}_t(x)$. Учитывая это обстоятельство, имеем

$$\bar{f}_{t+1}\Big(\bigcup_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} a_t(x)\Big) = \sup_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} \bar{f}_{t+1}(a_t(x)) =$$

$$= \alpha_t \sup_{x\in K_t,\,\|x\|=1} \bar{f}_t(x) = \alpha_t \|\bar{f}_t\| = \alpha_t .$$

Так как множество $\bigcup_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} a_t(x)$ телесно, то найдется точка x_0 и шар S_{z_t} такие, что $x_0 + S_{z_t} \subset \bigcup_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} a_t(x)$.

Имеем теперь

$$\alpha_t = \alpha_t \|\bar{f}_t\| \ge \bar{f}_{t+1}\Big(\bigcup_{x\in K_t,\,\|x\|\le 1} a_t(x)\Big) \ge$$

$$\ge \bar{f}_{t+1}(x_0 + S_{z_t}) \ge \bar{f}_{t+1}(S_{z_t}) = z_t .$$

Заметим, что число z_t определяется лишь отображением a_t, но не системой σ, и потому

$$\inf_{\sigma} \alpha_t = z_t > 0,$$

что и требовалось доказать.

Автор глубоко благодарен В.А.Булавскому и В.Л.Макарову за помощь, оказанную при написании настоящей работы.

Литература

1. Д.Гейл. Замкнутая линейная модель производства.-Линейные неравенства и смежные вопросы, Москва, 1959, стр. 382-400.
2. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программирования и экономике. "Мир", 1964, стр. 391-394.
3. В.Л. Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики - Сибирский математический журнал, т.7, № 4, стр. 832-854.
4. Ю.Н. Тюрин. Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования. - Экономика и математические методы, 1965 г., т.1, стр. 391-409.

Рукопись поступила в редакцию 15 июля 1966 г.