О П Т И М А Л Ь Н О Е П Л А Н И Р О В А Н И Е
Сборник трудов
1967г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

А.М.РУБИНОВ, К.Ш. ШАПИЕВ

НЕЙМАНОВСКАЯ ГРАНЬ В МОДЕЛЯХ ТИПА ГЕЙЛА

В настоящей работе рассматривается модель типа Гейла без нагрузки.

Пусть $n_1, n_2, \dots n_t \dots$ – последовательность натуральных чисел и $X_1, X_2, \dots X_t \dots$ – система конечномерных евклидовых пространств, где X_t – n_t – мерное арифметическое пространство. Обозначим через $K_t (t=1,2,\dots)$ конус векторов пространства X_t ($t=1,2,\dots$)с неотрицательными компонентами. Предположим,что пространство X_t ($t=1,2,\dots$) частично упорядочено с помощью конуса K_t, т.е. если $x', x'' \in X_t$, то $x' \geq x''$ тогда и только тогда, когда $x'-x'' \in X_t$.

Рассматриваемая модель задается системой выпуклых замкнутых конусов $Z_t \subset K_t \times K_{t+1}$, удовлетворяющих условиям:

1) $(0,y)\notin Z_t$ при любом $y \in K_{t+1}, y \neq 0$. (1)
2) $(x,0)\in Z_t$ для любого $x \in K_t$. (2)
3) Каков бы ни был $y \in K_{t+1}$,найдется $x \in K_t$ такой,что $(x,y)\in Z_t$.

Положим для $x \in K_t$

$$a_t(x)=\{y \in K_{t+1} \mid (x,y)\in Z_t\} \quad (t=1,2,\dots) \qquad (4)$$

Пусть $\xi \subset K_1$. Положим

$$A^0(\xi)=\xi, \quad A^t(\xi)=\bigcup_{x\in A^{t-1}(\xi)} a_t(x) \qquad (t=1,2,\dots); \tag{5}$$

$$Z_t(\xi)=\{(x,y)\in X_t\times X_{t+1} / x\in A^{t-1}(\xi),\ y\in a_t(x)\}. \tag{6}$$
$$(t=1,2,\dots)$$

Символом $[\ ,\ ]$ будем обозначать скалярное произ - ведение как в пространстве X_t ,так и в пространстве $X_t\times X_{t+1}$ Из контекста будет ясно, в каком из этих пространств рассматривается скалярное произведение.

Если $f\in K_t$, ξ - ограниченное подмножество K_t , то положим $f(\xi)=\sup_{x\in\xi}[f,x]$

Пусть T - натуральное число, $x\in K_1$. (x, T)-траекторией назовем конечную последовательность $\{x_t\}_{t=1}^T$ такую, что $x_1=x,\quad x_t\in a_{t-1}(x_{t-1})\quad (t=2,3,\dots,T)$.

(x,∞) - траекторией назовем последовательность $\{x_t\}_{t=1}^\infty$ такую,что $x_1=x,\quad x_t\in a_{t-1}(x_{t-1})\quad (t=2,3,\dots)$.

Если $f\in K_T$,то (x,T,f) - оптимальной траекторией назовем (x,T) - траекторию $\{x_t\}_{t=1}^T$ такую, что $[f,x_T]=f(A^{T-1}(x))$.

Пусть ξ конус, $\xi\subset K_1$.Рассмотрим тройку последовательностей $\sigma=(\bar{x},\bar{\varphi},\alpha)$, где $\bar{x}=\{\bar{x}_t\}_{t=1}^\infty$ — (x,∞) - траектория при некотором $x\in\xi$; $\bar{\varphi}=\{\bar{f}_t\}_{t=1}^\infty$ $(\bar{f}_t\in K_t, \|\bar{f}_t\|=1, t=1,2,\dots)$; $\alpha=\{\alpha_t\}_{t=1}^\infty$ (α_t - вещественное число, $0<\alpha_t<\infty,\quad t=1,2,\dots$).

Тройку $\sigma=(\bar{x},\bar{\varphi},\alpha)$ назовем равновесной на ξ системой, если

1) $[\bar{f}_1,\ \bar{x}_1]>0$; (7)

2) $\bar{f}_{t+1}(a_t(x))\le\alpha_t[\bar{f}_t,x]\quad (x\in A^{t-1}(\xi),\ t=1,2,\dots)$; (8)

3) $[\bar{f}_{t+1},\ \bar{x}_{t+1}]=\alpha_t[\bar{f}_t,\bar{x}_t]\qquad (t=1,2,\dots)$, (9)

Геометрический смысл равновесной системы заключается в следующем: гиперплоскость $H_{\bar{g}_t}$ функционала $\bar{g}_t=(\alpha_t\bar{f}_t,-\bar{f}_{t+1})$ ($t=1,2,\dots$) опорна к конусу $Z_t(\xi)$ и касается его по лучу $\{\lambda\bar{z}_t\}_{\lambda\ge0}$ ($\bar{z}_t=(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$), т.е. для $z\in Z_t(\xi)$ $[\bar{g}_t,z]\ge0$ и, кроме того, $[\bar{g}_t,\bar{z}_t]=0$.

Положим для $t=1,2,\dots$

$$G_\sigma^t = \{ g \in X_t \times X_{t+1} \mid [g, z] \geq 0 \quad (z \in Z_t(\sigma)), [g, \bar z_t] = 0 \}.$$

Ясно, что G_σ^t не пусто, так как $\bar g_t \in G_\sigma^t$. Легко проверить, что G_σ^t есть выпуклый замкнутый конус. Каждому $g \in G_\sigma^t$ поставим в соответствие множество

$$Q_g = H_g \cap Z_t(\sigma),$$

где H_g - гиперплоскость функционала g.

Положим

$$N_\sigma^t = \bigcap_{g \in G_\sigma^t} Q_g = \left(\bigcap_{g \in G_\sigma^t} H_g\right) \cap Z_t(\sigma)).$$

Множество N_σ^t уместно назвать неймановской гранью конуса Z_t, соответствующей равновесной системе σ. (В случае, когда рассматривается модель Гейла, определяемая одним конусом Z, и равновесная система σ определяется некоторым состоянием равновесия, N_σ^t совпадает с неймановской гранью Z (см. [3]).

Обозначим через $\mathcal{L}(G_\sigma^t)$ линейную оболочку G_σ^t, а через $\mathring{G}_\sigma^t$ - внутренность G_σ^t в $\mathcal{L}(G_\sigma^t)$. Ясно, что $\mathring{G}_\sigma^t$ не пусто.

ЛЕММА. Если $g \in \mathring{G}_\sigma^t$, то $Q_g = N_\sigma^t$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in Q_g$, тогда $[g, z] = 0$. Возьмем любой $g' \in G_\sigma^t$. Поскольку g - внутренний элемент в линейной оболочке $\mathcal{L}(G_\sigma^t)$ и $-g' \in \mathcal{L}(G_\sigma^t)$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $g - \varepsilon g' \in G_\sigma^t$, в силу чего $[g - \varepsilon g', z] \geq 0$. Так как $[g, z] = 0$, то из последнего неравенства следует, что $[g', z] \leq 0$. С другой стороны, так как $g' \in G_\sigma^t$, то $[g', z] \geq 0$. Следовательно, $[g', z] = 0$, откуда вытекает, что $z \in Q_{g'}$ при любом $g' \in G_\sigma^t$, то есть $z \in \bigcap_{g' \in G_\sigma^t} Q_{g'} = N_\sigma^t$. Последнее соотношение показывает, что $Q_g \subset N_\sigma^t$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $Q_g = N_\sigma^t$, и лемма доказана.

Через L_t обозначим линейную оболочку N_σ^t, через M_t -ортогональное дополнение к L_t (в пространстве $X_t \times X_{t+1}$), через P_{L_t} и P_{M_t} - проекторы на L_t и M_t, соответственно ($t = 1, 2, \ldots$). Отметим, что если $g \in G_\sigma^t$, то $g(L_t) = 0$.

Пусть $z \in Z_t(\sigma)$ $P_{M_t} z \neq 0$. Тогда $z \notin L_t$, откуда следует, что $z \notin N_\sigma^t$. Из леммы вытекает, что для $g \in \mathring{G}_\sigma^t$

$$[g,z]>0$$

и, следовательно,

$$[g,P_{M_t}z]=[g,P_{M_t}z]+[g,P_{L_t}z]=[g,z]>0.$$

Так как последнее соотношение справедливо для любого нерав - ного нулю вектора $z'\in P_{M_t}(Z_t(\xi))$, то

$$\gamma_g=\min_{\substack{z'\in P_{M_t}(Z_t)\\ z'\neq 0}}\frac{[g,z']}{\|g\|\|z'\|}>0. \qquad (10)$$

Число $\gamma_{\bar g_t}$, вычисленное для функционала $\bar g_t$ по формуле (10), будем в дальнейшем обозначать через $\bar\gamma_t$.

Положим для $\varepsilon\in(0,1)$, равновесной на ξ системы $\sigma=(\bar x,\bar\varphi,\alpha)$ и $t=1,2,\ldots$

$$W_\varepsilon^t(\xi)=\{(x,y)\in Z_t(\xi)\mid \alpha_t(1-\varepsilon)[\bar f_t,x]\geq[\bar f_{t+1},y]\}.$$

То, что пара $(x,y)\in W^t(\sigma)$ означает, что $x\in A^{t-1}(\xi)$, $y\in a_t(x)$ и либо $[\bar f_t,x]=0$, либо

$$\frac{[\bar f_{t+1},y]}{[\bar f_t,x]}\leq\alpha_t(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon)\sup_{x'\in A^{t-1}(\xi)}\ \sup_{y'\in a_t(x')}\frac{[\bar f_{t+1},y']}{[\bar f_t,x']}.$$

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что

1) $\bar g_t\in\mathring{G}_\varepsilon^t$ $(t=1,2,\ldots)$,

2) $\inf_t\bar\gamma_t=\bar\gamma>0$.

Тогда, если пара $z=(x,y)\in Z_t(\xi)$ такова, что

$$\rho((x,y),L_t)\geq\varepsilon\|x\|, \qquad (11)$$

то $(x,y)\in W^t_{\bar\gamma\varepsilon}(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие (11) выполнено. Положим

$$\delta=\frac{[\bar g_t,z]}{[\bar g_t,(x,0)]}=\frac{\alpha_t[\bar f_t,x]-[\bar f_{t+1},y]}{\alpha_t[\bar f_t,x]}. \qquad (12)$$

Покажем, что $\delta>0$. Возьмем $\bar g_t\in\mathring{G}_\varepsilon^t$. Если

$[\bar{g}_t, z]=0$, то $z \in \mathcal{N}_\epsilon^t$. Но так как $\rho(z, L_t)>0$, то $z \notin L_t$, т.е. $z \notin \mathcal{N}_\epsilon^t$, что означает, что $\alpha_t[\bar{f}_t\, x]-[\bar{f}_{t+1}, y]>0$, т.е. $\delta>0$.

Теперь покажем, что $\delta<\infty$. Если $[\bar{f}_t, x]=0$, то $\bar{f}_{t+1}(a_t(x))=0$, т.е. $[\bar{f}_{t+1}, y]=0$. Отсюда следует, что $[\bar{g}_t, z]=0$, т.е. $z \in \mathcal{N}_\epsilon^t$, что противоречит предположению. Следовательно, $[f_t, x]>0$, т.е. $\delta<\infty$.

Учитывая, что по теореме о проекциях

$$\rho(z, L_t)=\|P_{M_t} z\|,$$

имеем

$$\varepsilon\|x\|=\rho(z, L_t)=\|P_{M_t} z\|=\frac{[\bar{g}_t, P_{M_t} z]}{[\bar{g}_t, \frac{P_{M_t} z}{\|P_{M_t} z\|}]}=$$

$$=\frac{[\bar{g}_t, z]}{|\bar{g}_t,(x,0)|} \frac{\alpha[\bar{f}_t, x]}{[\bar{g}_t, \frac{P_{M_t} z}{\|P_{M_t} z\|\|g\|}]\|g\|}.$$

Так как $\|\bar{f}_t\|=1$ и

$$\frac{\alpha_t}{\|\bar{g}_t\|}=\frac{\alpha_t}{\sqrt{\|\alpha_t \bar{f}_t\|^2+\|\bar{f}_{t+1}\|^2}}=\frac{\alpha_t}{(\alpha_t^2+1)^{1/2}}<1,$$

то, воспользовавшись формулами (10) и (12), имеем

$$\varepsilon\|x\|<\delta\|x\|\frac{1}{\bar{\gamma}}.$$

Таким образом, $\delta>\bar{\gamma} \varepsilon$.

Из (12) теперь имеем, что

$$\alpha_t[\bar{f}_t, x]-[\bar{f}_{t+1}, y]>\bar{\gamma} \varepsilon \alpha_t[\bar{f}_t, x].$$

Последнее неравенство и означает, что пара $(x, y) \in W_{\bar{\gamma}_\varepsilon}^t(\sigma)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\sigma=(\bar{X}, \bar{\varphi}, \alpha)$ — равновесная на ξ система, $x \in \xi$ таков, что при некотором τ и $\lambda \geq 0$ $\lambda \bar{x}_\tau \in A^{\tau-1}(x)$, $k' \geq k''$ — произвольные положительные числа, $T \geq \tau$ и фун-

кционал $f \in K_T^*$ удовлетворяет условию

$$k''\bar{f}_T \leq f \leq k'\bar{f}_T.$$

Пусть, далее, выполнены условия теоремы I. Тогда, какова бы ни была (x, T, f) - оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^T$, число пар (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho((x_t, x_{t+1}), L_t) \geq$ $\geq \varepsilon \|x\|$, не превышает числа

$$\frac{\ln\left(\lambda \frac{k''}{k'} \frac{[\bar{f}_1, \bar{x}_1]}{[\bar{f}_1, x]}\right)}{\ln(1-\bar{\gamma}\varepsilon)}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x \in \xi$ и последовательность функционалов $\{f_t\}_{t=1}^{\infty}$ ($f_t \in K_t^*$) удовлетворяет следующим условиям:

а) $$\inf_{t=1} \frac{f_t(A^{t-1}(x))}{[\bar{f}_t, \bar{x}_t]} = c > 0;$$

б) $$\sup_t \inf\{k \mid f_t \leq k\bar{f}_t\} = \bar{k} < \infty.$$

Пусть, далее, выполнены условия теоремы I. Тогда, какова бы ни была (x, T, f) - оптимальная траектория $\{x_t\}_{t=1}^T$, число пар (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho((x_t, x_{t+1}), L_t) \geq$ $\geq \varepsilon \|x\|$, не превышает числа

$$\frac{\ln\left(\frac{c}{\bar{k}} \frac{[\bar{f}_1, \bar{x}_1]}{[\bar{f}_1, x]}\right)}{\ln(1-\bar{\gamma}\varepsilon)}.$$

Доказательства теорем 2 и 3 легко провести, пользуясь теоремой I и рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.I и 4.2 из [2]

Литература

1. Д. Гейл. Замкнутая линейная модель производства. В сборнике "Линейные неравенства и смежные вопросы", изд-во ИЛ, Москва, 1959.

2. А.М.Рубинов. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства.-Оптимальное планирование, вып.9, Новосибирск, 1967. стр.

3. В.Л.Макаров. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. Сибирский математический журнал, т.7, № 4, стр. 832-854.

Рукопись поступила в редакцию 20 января 1967 г.