1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I (18)

УДК 512.25/26

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В.А. Булавский

В этой работе описывается способ решения транспортной задачи на сети с дополнительными ограничениями общего вида. Хотя в принципе предлагаемый метод годится для любой транспортной задачи, при его разработке имелось в виду, что большинство узлов сети являются лишь пунктами назначения, то есть отсутствуют дуги, выходящие из этих узлов. В частности, это означает, что узлы указанной основной группы не связаны непосредственно друг с другом дугами сети. Строго говоря, последнее свойство и является существенным, однако, чтобы не усложнять изложение, мы будем предполагать, что выполнено сформулированное выше более жесткое условие. Не будет затронут и вопрос об учете ограничений сверху на отдельные переменные: это делается стандартным для линейного программирования способом, лишь несущественно усложняющим процесс решения. Следует, возможно, отметить, что к написанию данной статьи автора побудила задача о загрузке прокатного оборудования.

Различные стороны специфики рассматриваемой здесь задачи использовались ранее при разработке ряда методов. Так, В.И.Шмыров [1] изучал распределительную задачу, в которой число потребителей существенно превосходит число средств производства; Р.А.Звягина [2] и Г.Ш.Рубинштейн [3] рассматривали задачи, в которых основная масса ограничений – это ограничения на непересекающиеся группы переменных. Частично при разработке метода были использованы и ранее опубликованные работы автора [4,5].

Рассматриваемая задача линейного программирования может быть поставлена следующим образом. Для $\kappa = 0,1,\dots,N$ заданы столбцы $B_\kappa \in R^{2+1}$ и номера $i(\kappa) \in \{0,1,\dots,m\}$. Кроме того, для $\kappa = 0,1,\dots,M$ заданы номера $j(\kappa) \in \{0,1,\dots,m\}$, а для $\kappa = M+1, M+2,\dots,N$ – номера $s(\kappa) \in \{1,2,\dots,n\}$. Введем также в рассмотрение следующие множества номеров:

$$I_\mu = \{\kappa : \ i(\kappa) = \mu\}, \quad \mu = 0,1,\dots,m,$$

$$J_\mu = \{\kappa : \ j(\kappa) = \mu\}, \quad \mu = 0,1,\dots,m,$$

$$S_\nu = \{\kappa : \ s(\kappa) = \nu\}, \quad \nu = 1,2,\dots,n.$$

Заметим, что $J_\mu \subset \{0,1,\dots,M\}$ и $S_\nu \subset \{M+1, M+2,\dots,N\}$ при всех μ и ν, для которых эти множества определены. Мы, кроме того, будем считать, что $i(0) = j(0) = 0$, так что $0 \in I_0 \cap J_0$. В этих условиях при заданных $B \in R^{2+1}$, вещественных $V_\mu, \mu = 1,2,\dots,m$, и d_ν, $\nu = 1,2,\dots,n$, требуется определить такие неотрицательные значения неизвестных x_κ, $\kappa = 1,2,\dots,N$, и произвольного знака значение неизвестной x_0, что

$$\sum_{\kappa=0}^{N} x_\kappa B_\kappa = B \,, \tag{1}$$

$$\sum_{\kappa \in J_\mu} x_\kappa - \sum_{\kappa \in I_\mu} x_\kappa = V_\mu, \quad \mu = 1,2,\dots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{\kappa \in S_\nu} x_\kappa = d_\nu \,, \qquad \nu = 1,2,\dots,n, \tag{3}$$

и достигает минимума величина x_0. Заметим, что задачу с минимизируемой формой $\sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa x_\kappa$ произвольного вида можно свести к указанной форме введением вспомогательной переменной x_0 и ограничения $\sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa x_\kappa - x_0 = 0$. Нам в дальнейшем изложении будет удобна именно такая форма задачи, причем компоненты столбцов пространства R^{2+1} (точнее, столбцов B_κ и B) мы будем нумеровать, начиная с нуля.

Будем понимать под e_μ столбец из m компонент, среди которых лишь μ-я равна единице, а остальные – нулю. При этом через e_0 будем обозначать нулевой столбец из m компонент. Любой столбец матрицы системы ограничений (1)-(3) можно представить тройкой (B_κ, V_κ, D_κ), где

$$V_k = \begin{cases} e_{j(k)} - e_{i(k)}, & k = 0,1,\dots,M, \\ -e_{i(k)}, & k = M+1, M+2,\dots,N, \end{cases} \tag{4}$$

а $\mathcal{D}_k$ – нулевой столбец длины n при $k=0,1,\dots,M$ и столбец из нулей с единственной единицей на месте $s(k)$ при $k=M+1$, $M+2,\dots,N$. Если через v и d обозначить столбцы правых частей в (2) и (3) соответственно, то систему (I)–(3) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{N} x_k (B_k, V_k, \mathcal{D}_k) = (b, v, d) .$$

При решении поставленной задачи методом последовательного улучшения допустимого плана [6,7] к началу очередного шага предполагается выделенным базисное множество номеров $K \subset \{0,1,\dots,N\}$, то есть такое множество номеров, что семейство $\{(B_k, V_k, \mathcal{D}_k)\}_{k\in K}$ является базисом пространства $R^{z+1} \times R^m \times R^n$. Поскольку на переменную x_0 не наложено условие неотрицательности, то номер нуль должен входить в K. Нам будет удобно базисное множество номеров разбить на три подмножества K_1, K_2 и K_3 таким образом, чтобы семейство $\{(V_k, \mathcal{D}_k)\}_{k\in K_2 \cup K_3}$ являлось базисом пространства $R^m \times R^n$, а семейство $\{\mathcal{D}_k\}_{k\in K_3}$ – базисом пространства R^n. Первое условие означает, что множество $K_2 \cup K_3$ является базисным множеством номеров для системы транспортного типа (2)–(3), а второе – что множество $\{s(k) : k \in K_3\}$ совпадает с множеством $\{1,2,\dots,n\}$, причем среди $s(k)$, $k\in K_3$, нет равных. Поэтому можно считать, что $K_3 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, причем упорядочение сделано так, что

$$s(\gamma_\nu) = \nu, \quad \nu = 1,2,\dots,n . \tag{5}$$

Для каждого $k \geq M+1$ можно доопределить номер $j(k)$, положив $j(k) = i(\gamma_{s(k)})$. Если столбцы H_k определить формулой

$$H_k = \begin{cases} V_k - V_{\gamma_{s(k)}}, & M+1 \leq k \leq N, \\ V_k, & 0 \leq k \leq M, \end{cases} \tag{6}$$

то при всех $k \in K_1 \cup K_2$ окажется:

$$H_k = e_{j(k)} - e_{i(k)} . \tag{7}$$

Напомним, что среди номеров $j(k)$ и $i(k)$ могут встретиться

нулевые, и что e_0 – нулевой столбец. Поскольку $(H_\kappa, O) = (V_\kappa, \mathcal{D}_\kappa) - (V_{\gamma_s(\kappa)}, \mathcal{D}_{\gamma_s(\kappa)})$, то в силу выбора множеств K_2 и K_3 семейство $\{H_\kappa\}_{\kappa \in K_2}$ является базисом пространства R^m. При этом, согласно (7), базис $\{H_\kappa\}_{\kappa \in K_2}$ состоит лишь из столбцов, которые фигурируют в задачах транспортного типа. Поэтому [4] можно так упорядочить множество $K_2 = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$, чтобы матрица

$$H = [H_{\beta_1} H_{\beta_2} \cdots H_{\beta_m}] \tag{8}$$

отличалась от верхней треугольной лишь нумерацией строк. Это же условие на упорядочение множества K_2 может быть выражено в следующей форме.

С в о й с т в о   т р е у г о л ь н о с т и . Для каждого $\mu = 1, 2, \ldots, m$ один и только один из номеров $j(\beta_\mu)$ и $i(\beta_\mu)$, называемый в дальнейшем нижним для β_μ, обладает тем свойством, что он отличен от нуля и не встречается среди номеров $j(\beta_\tau)$ и $i(\beta_\tau)$ при $\tau = 1, 2, \ldots, \mu - 1$.

Что касается множества $K_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, то способ его упорядочения безразличен. Мы предположим лишь, что $\alpha_0 = 0$ (номер нуль заведомо должен принадлежать K_1, так как V_0 и $\mathcal{D}_0$ – нулевые столбцы).

Хотя это и не существенно, но для определенности предположим, что решать задачу мы будем прямым методом. Поэтому нужно дополнительно потребовать, чтобы решение системы

$$\sum_{\kappa \in K} \xi_\kappa (B_\kappa, V_\kappa, \mathcal{D}_\kappa) = (b, v, d) \tag{9}$$

было неотрицательным за исключением, быть может, ξ_0. Вопрос о существовании множества K, обладающего нужными свойствами, мы здесь подробно обсуждать не будем. Отметим лишь, что для этого во всяком случае необходима непустота множеств S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, и множеств $\mathcal{J}_\mu \cup I_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, хотя некоторые из множеств I_μ и $\mathcal{J}_\mu$ могут быть и пустыми.

Один шаг метода последовательного улучшения допустимого плана состоит в следующем. Для строк $Y = (y_0, y_1, \ldots y_l)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} Y B_0 = 1, \\ Y B_\kappa + z V_\kappa + w \mathcal{D}_\kappa = 0, \quad \kappa \in K \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{10}$$

проверяют выполнение условий оптимальности:

$$Y B_\kappa + z V_\kappa + w \mathcal{D}_\kappa \leqslant 0, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Если эти условия выполнены, то решение системы (9) дает решение задачи: $x_\kappa = \xi_\kappa$ при $\kappa \in K$ и $x_\kappa = 0$ при $\kappa \notin K$. В противном случае найдется номер $\varkappa$, для которого

$$Y B_\varkappa + z V_\varkappa + w \mathcal{D}_\varkappa > 0.$$

Тогда определяют коэффициенты g_κ, $\kappa \in K$, из системы

$$\sum_{\kappa \in K} g_\kappa (B_\kappa, V_\kappa, \mathcal{D}_\kappa) = (B_\varkappa, V_\varkappa, \mathcal{D}_\varkappa) \tag{12}$$

и находят номер $\kappa' \in K \setminus \{o\}$, для которого $g_{\kappa'} > 0$ и

$$\min_{g_\kappa > 0,\ \kappa \neq o} \left\{ \frac{\xi_\kappa}{g_\kappa} \right\} = \frac{\xi_{\kappa'}}{g_{\kappa'}} . \tag{13}$$

Если $g_\kappa \leqslant 0$ при всех κ из $K \setminus \{o\}$ и, следовательно, номер κ' найти не удается, то это свидетельствует о неразрешимости задачи ввиду неограниченности снизу минимизируемой формы (в нашем случае – переменной x_o). После нахождения номера κ' переходят к новому базисному множеству номеров $\bar{K} = (K \setminus \{\kappa'\}) \cup \{\varkappa\}$, которое заведомо обладает всеми нужными свойствами. При этом новые значения коэффициентов $\bar{\xi}_\kappa$ разложения правой части (9) по базису $\{(B_\kappa, V_\kappa, \mathcal{D}_\kappa)\}_{\kappa \in \bar{K}}$ находятся по формулам:

$$\bar{\xi}_\varkappa = \frac{\xi_{\kappa'}}{g_{\kappa'}}; \qquad \bar{\xi}_\kappa = \xi_\kappa - \bar{\xi}_\varkappa g_\kappa, \quad \kappa \in K \setminus \{\kappa'\}.$$

Затем шаг повторяется снова.

Нам будет удобно считать началом шага тот момент, когда известны строки Y и z. Для вычисления левых частей условий оптимальности (11) при $\kappa = 1, 2, \ldots, M$ строка w не нужна, так как для этих κ столбец $\mathcal{D}_\kappa$ нулевой и, согласно (4), условие оптимальности принимает вид:

$$Y B_\kappa + z_{j(\kappa)} - z_{i(\kappa)} \leqslant 0.$$

При проверке же группы условий оптимальности для $\kappa \in S_0$ тре-

буется лишь ν-ая компонента строки ω, так как для этих κ условия оптимальности превращаются в неравенства:

$$YB_\kappa + \omega_\nu - z_{i(\kappa)} \leq 0.$$

Так что при проверке очередной группы условий оптимальности нужно вычислять соответствующую компоненту строки ω, используя уравнение из (10) при $\kappa = \gamma_\nu$:

$$YB_{\gamma_\nu} - z_{i(\gamma_\nu)} + \omega_\nu = 0 \tag{14}$$

Предположим теперь, что найден номер $\varkappa$ и нужно решить систему (12). Искомые коэффициенты g_κ объединим в три столбца: g - столбец с компонентами $g_{\alpha_0}, g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_\ell}$; h - столбец с компонентами $g_{\beta_1}, g_{\beta_2}, \dots, g_{\beta_m}$ и ρ - столбец с компонентами $g_{\gamma_1}, g_{\gamma_2}, \dots, g_{\gamma_n}$. Мы несколько преобразуем систему (12), для чего заметим, что эта система может быть записана в виде:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\kappa \in K} g_\kappa B_\kappa &= B_\varkappa, \\ \sum_{\kappa \in K} g_\kappa V_\kappa &= V_\varkappa, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\sum_{\kappa \in (K_1 \cup K_2) \cap S_\nu} g_\kappa + g_{\gamma_\nu} = \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \tag{16}$$

где $\delta_\nu = 0$, если $\varkappa \notin S_\nu$, и $\delta_\nu = 1$, если $\varkappa \in S_\nu$. Разрешив (16) относительно g_{γ_ν} и использовав полученные равенства

$$g_{\gamma_\nu} = \delta_\nu - \sum_{\kappa \in (K_1 \cup K_2) \cap S_\nu} g_\kappa \tag{17}$$

для исключения неизвестных $g_{\gamma_1}, g_{\gamma_2}, \dots, g_{\gamma_n}$ в (15), получим

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\kappa \in K_1} g_\kappa G_\kappa + \sum_{\kappa \in K_2} g_\kappa G_\kappa &= G_\varkappa, \\ \sum_{\kappa \in K_1} g_\kappa H_\kappa + \sum_{\kappa \in K_2} g_\kappa H_\kappa &= H_\varkappa, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где H_κ определены согласно (6), а G_κ находятся аналогично:

$$G_\kappa = \begin{cases} B_\kappa - B_{\gamma_{s(\kappa)}}, & M+1 \leq \kappa \leq N, \\ B_\kappa, & 0 \leq \kappa \leq M. \end{cases}$$

Если использовать обозначение (8), то второе равенство в (I8) можно переписать в виде:

$$\sum_{\kappa\in K_1} g_\kappa H_\kappa + Hh = H_{æ},$$

откуда получаем:

$$h = H^{-1}H_{æ} - \sum_{\kappa\in K_1} g_\kappa H^{-1}H_\kappa . \qquad (I9)$$

Введем в рассмотрение матрицу:

$$G = [G_{\beta_1} G_{\beta_2} \dots G_{\beta m}].$$

Тогда первое равенство в (I8) примет вид:

$$\sum_{\kappa\in K_1} g_\kappa G_\kappa + Gh = G_{æ}.$$

Используя (I9), получим

$$\sum_{\kappa\in K_1} g_\kappa (G_\kappa - GH^{-1}H_\kappa) = G_{æ} - GH^{-1}H_{æ}.$$

Если теперь ввести в рассмотрение столбцы

$$W_\kappa = G_\kappa - GH^{-1}H_\kappa \qquad (20)$$

и матрицу

$$W = [W_{\alpha_0} W_{\alpha_1} \dots W_{\alpha_\tau}],$$

то уравнение относительно столбца g примет вид:

$$Wg = W_{æ}. \qquad (2I)$$

Поскольку исходная система (I2) разрешима при любой правой части, то разрешима при любой правой части и система (2I), так что квадратная матрица W порядка $\tau+1$ неособенная. Мы будем исходить из того, что на каждом шаге имеется матрица W^{-1}, подправляемая при переходе к новому шагу, когда вместе с базисным множеством номеров меняется и матрица W. Проследим порядок действий при решении системы (I2). Прежде всего, согласно (7), $H_{æ} = e_{j(æ)} - e_{i(æ)}$, и можно найти столбец h^0 из системы

$$Hh^0 = H_{æ} . \qquad (22)$$

Поскольку это система транспортного типа, причем столбцы матрицы H упорядочены надлежащим образом, то ее решение не является трудоемким: нужно совершить лишь один просмотр столбцов матрицы H в порядке, обратном естественному [4]. Заметим,

что компонентами столбца h° могут оказаться лишь числа 0, -1 и +1.

После нахождения h° можно вычислить столбец

$$W_{\varkappa} = O_{\varkappa} - Oh^\circ = B_{\varkappa} - \sum_{\mu=1}^{m} h_\mu^\circ B_{\beta_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{\beta_\mu \in S_\nu} h_\mu^\circ - \delta_\nu \Big) B_{\gamma_\nu}$$

и, наконец, столбец

$$g = W^{-1} W_{\varkappa} .$$

После вычисления компонент столбца g можно из системы

$$Hh = H_{\varkappa} - \sum_{\kappa \in K_1} g_\kappa H_\kappa \qquad (23)$$

найти столбец h (способ решения такой же, как и для системы (22)) и по формулам (17) вычислить компоненты столбца p. Заметим, что при этом отличными от нуля будут лишь те g_{γ_ν}, для которых множество $(K_1 \cup K_2 \cup \{\varkappa\}) \cap S_\nu$ непустое, то есть не более $\tau + m + 1$ коэффициентов g_{γ_ν}. Если число n велико по сравнению с τ и m, то большинство компонент столбца p окажутся нулями и их можно не вычислять. Равным образом при нахождении минимума в (13) не будут участвовать соответствующие ξ_κ.

Пусть теперь найден номер κ', заменяемый в базисном множестве номеров на номер $\varkappa$. Чтобы перейти к следующему шагу, нужно, образовав новое базисное множество номеров $\bar{K} = (K \setminus \{\kappa'\}) \cup \{\varkappa\}$, выбрать новое разбиение $\bar{K} = \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2 \cup \bar{K}_3$, множества $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ и $\bar{K}_3$ упорядочить надлежащим образом, а также подправить матрицу W^{-1} и найти строки $\bar{Y}$ и $\bar{z}$ в решении системы

$$\left.\begin{aligned} &\bar{Y} B_0 = 1, \\ &\bar{Y} B_\kappa + \bar{z} V_\kappa + \bar{\omega} \mathcal{D}_\kappa = 0, \quad \kappa \in \bar{K} \setminus \{0\}, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

аналогичной системе (10).

Рассмотрим различные случаи, которые могут встретиться. При этом новые значения всех величин, которые получаются к началу нового шага, будем отмечать чертой сверху: $\bar{H}_\kappa$, $\bar{W}_\kappa$, $\bar{O}_\kappa$ и т.д. Кроме того, через f_s будем обозначать столбец длины $\tau+1$, у которого на s-м месте стоит единица, а на остальных – нули. Штрих у столбца будет всюду обозначать транспонирование его в строку.

I. Пусть $\kappa' = \alpha_s \in K_1$. В этом случае можно положить $\bar{K}_2 = K_2$ и $\bar{K}_3 = K_3$, сохранив в них упорядочение. В множестве же K_1 нужно α_s заменить на $\varkappa$. При такой замене не меняются столбцы G_κ, H_κ и W_κ, но в матрице W столбец с номером s меняется на столбец $W_\varkappa$, так что

$$\overline{W} = W + (W_\varkappa - W f_s) \cdot f_s'.$$

Поэтому

$$\overline{W}^{-1} = W^{-1} - \frac{1}{g_{\kappa'}} (g - f_s)(f_s' W^{-1}).$$

II. Пусть $\kappa' = \beta_{\bar{\mu}} \in K_2$, причем $h^\circ_{\bar{\mu}} \neq 0$. Так как компонента с номером $\bar{\mu}$ в решении системы (22) отлична от нуля (и, следовательно, равна +I или -I), то после замены в матрице H столбца $H_{\beta_{\bar{\mu}}}$ на столбец $H_\varkappa$ получится снова неособенная матрица. Хотя в данном случае $\bar{H}_\kappa = H_\kappa$ и $\bar{G}_\kappa = G_\kappa$ при всех κ, вообще говоря, эту матрицу нельзя взять в качестве $\bar{H}$, так как в ней может нарушиться свойство треугольности. Необходимая перестановка столбцов полученной матрицы (или, что то же, элементов множества K_2 после замены κ' на $\varkappa$) будет сделана впоследствии при нахождении строки $\bar{z}$, что же касается матрицы $\overline{W}$, то она не зависит от порядка элементов множества $\bar{K}_2$ и может быть найдена уже сейчас. Действительно, $\bar{H} = (H - H e_{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}}' + H_\varkappa e_{\bar{\mu}}')T$ и $\bar{G} = (G - G e_{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}}' + G_\varkappa e_{\bar{\mu}}')T$, где T - некоторая (пока нам неизвестная) перестановочная матрица. Поэтому аналогично (20) имеем

$$\begin{aligned}
\overline{W}_\kappa &= G_\kappa - (G - G e_{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}}' + G_\varkappa e_{\bar{\mu}}')(TT^{-1})(H - H e_{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}}' + H_\varkappa e_{\bar{\mu}}')^{-1} H_\kappa = \\
&= G_\kappa - (G - G e_{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}}' + G_\varkappa e_{\bar{\mu}}')\left(H^{-1} - \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}} (h^\circ - e_{\bar{\mu}})(e_{\bar{\mu}}' H^{-1})\right) H_\kappa = \\
&= G_\kappa - G H^{-1} H_\kappa + \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}} G (h^\circ - e_{\bar{\mu}})(e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa + G e_{\bar{\mu}} (e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa - \\
&- G e_{\bar{\mu}} \left(1 - \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}}\right)(e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa - G_\varkappa (e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa + G_\varkappa \left(1 - \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}}\right)(e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa = \\
&= W_\kappa + \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}} G h^\circ (e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa - \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}} G_\varkappa (e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa = W_\kappa - \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}} W_\varkappa (e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa.
\end{aligned}$$

Если положить $\lambda_\kappa = (e_{\bar{\mu}}' H^{-1}) H_\kappa$ и $\lambda = (\lambda_{\alpha_0}, \lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_s})$, то получим

$$\overline{W} = W - \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}}} W_\varkappa \lambda, \qquad \overline{W}^{-1} = W^{-1} + \frac{1}{h^\circ_{\bar{\mu}} - \lambda g} g (\lambda W^{-1}).$$

Но, согласно (19), $h^{\circ}_{\bar\mu} - \lambda g = g_{\beta_{\bar\mu}} = g_{\kappa'}$, так что окончательно получим :

$$\overline{W}^{-1} = W^{-1} + \frac{1}{g_{\kappa'}} g(\lambda W^{-1}).$$

Заметим, что для нахождения строки λ нужно определить сначала строку u из системы $uH = e'_{\bar\mu}$. Поскольку матрица транспортного типа H обладает свойством треугольности, то нахождение строки u осуществляется за один просмотр столбцов матрицы H. Кроме того, либо все отличные от нуля элементы строки u равны +I, либо все они равны -I. Поэтому λ_κ также могут быть равными только 0, +I или -I. Отметим также, что $\lambda_{\alpha_0} = \lambda_0 = 0$, поскольку H_0 - нулевой столбец.

III. Пусть $\kappa' = \gamma_{\bar\nu} \in K_3$ и $S_{\bar\nu} \cap K = \{\kappa'\}$. В этом случае заведомо $\varkappa \in S_{\bar\nu}$ и можно номер $\gamma_{\bar\nu}$ заменить на $\varkappa$. Поскольку при этом $S_{\bar\nu} \cap K_1 = S_{\bar\nu} \cap K_2 = \phi$, то ни матрица H, ни матрица W не изменятся.

В рассмотренных трех случаях можно было номер $\varkappa$ ставить непосредственно на место выбывающего номера κ', и, хотя в случае II в дальнейшем потребуется переупорядочение множества K_2, перемещения элементов между множествами K_1, K_2 и K_3 не происходило. В случаях, рассматриваемых ниже, так сделать не удается. Поэтому в этих случаях делается предварительная перестановка элементов в множестве K, после которой дело сводится к одному из рассмотренных выше случаев.

IV. Пусть $\kappa' = \beta_{\bar\mu} \in K_2$, но $h^{\circ}_{\bar\mu} = 0$. Как уже было отмечено, $g_{\kappa'} = h^{\circ}_{\bar\mu} - \lambda g$. В данном случае $g_{\kappa'} = -\lambda g$, и так как $g_{\kappa'} \neq 0$, то среди компонент строки λ найдется отличная от нуля. Пусть это $\lambda_{\bar\imath}$. Поменяем в старом базисном множестве номеров K местами элементы $\beta_{\bar\mu}$ и $\alpha_{\bar\imath}$. При такой перестановке не изменятся столбцы H_κ и G_κ, а новая матрица

$$\widetilde{H} = H + (H_{\alpha_{\bar\imath}} - He_{\bar\mu})e'_{\bar\mu}$$

окажется неособенной, поскольку

$$\widetilde{H}^{-1} = H^{-1} - \frac{1}{\lambda_{\bar\imath}} H^{-1}(H_{\alpha_{\bar\imath}} - He_{\bar\mu})e'_{\bar\mu}H^{-1}, \qquad (25)$$

причем $\lambda_{\bar\imath} \neq 0$. Заметим, что

$$\widetilde{G} = G + (G_{\alpha_{\bar\imath}} - Ge_{\bar\mu})e'_{\bar\mu}.$$

Используя это равенство и равенство (25), получим

$$\widetilde{W}_\kappa = G_\kappa - \widetilde{G}\widetilde{H}^{-1}H_\kappa = G_\kappa - (G + (G_{\alpha_{\bar{s}}} - Ge_{\bar{\mu}})e'_{\bar{\mu}})(H^{-1} - \frac{1}{\lambda_{\bar{s}}}H^{-1}(H_{\alpha_{\bar{s}}} -$$

$$- He_{\bar{\mu}})u)H_\kappa = G_\kappa - GH^{-1}H_\kappa + \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_{\bar{s}}}GH^{-1}(H_{\alpha_{\bar{s}}} - He_{\bar{\mu}}) +$$

$$+ \lambda_\kappa(G_{\alpha_{\bar{s}}} - Ge_{\bar{\mu}}) - \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_{\bar{s}}}(G_{\alpha_{\bar{s}}} - Ge_{\bar{\mu}})(\lambda_{\bar{s}} - 1) = W_\kappa - \frac{\lambda_\kappa}{\lambda_{\bar{s}}}W_{\alpha_{\bar{s}}}.$$

Так что

$$\widetilde{W} = W - \frac{1}{\lambda_{\bar{s}}}W_{\alpha_{\bar{s}}}\lambda - \frac{1}{\lambda_{\bar{s}}}W_{\alpha_{\bar{s}}}f'_{\bar{s}}.$$

Второе вычитаемое возникло в связи с тем, что на место нулевого столбца $\widetilde{W}_{\alpha_{\bar{s}}}$ нужно поставить столбец $\widetilde{W}_{\beta_{\bar{\mu}}} = W_{\beta_{\bar{\mu}}} - \frac{1}{\lambda_{\bar{s}}}W_{\alpha_{\bar{s}}} = -\frac{1}{\lambda_{\bar{s}}}W_{\alpha_{\bar{s}}}$. Таким образом, после сделанной перестановки матрицу W^{-1} следует заменить матрицей

$$\widetilde{W}^{-1} = W^{-1} - f_{\bar{s}}(\lambda + f'_{\bar{s}})W^{-1}.$$

Затем дело сводится к случаю I. Нужно лишь иметь в виду, что в столбце g следует $\bar{s}$-ую компоненту заменить на $g_{\kappa'}$. Кроме того, поскольку в матрице H столбец с номером $\bar{\mu}$ заменен на столбец $H_{\alpha_{\bar{s}}}$, то может иметь место нарушение свойства треугольности, аналогичное имевшему место в случае II.

V. Пусть $\kappa' = \gamma_{\bar{v}} \in K_3$ и $S_{\bar{v}} \cap K_2 \neq \Phi$. Выберем в качестве $\bar{\mu}$ наименьший из номеров $\mu \in \{1, 2, \ldots, m\}$, при которых $\beta_\mu \in S_{\bar{v}}$, и поменяем местами номера $\gamma_{\bar{v}}$ и $\beta_{\bar{\mu}}$. При такой перестановке окажется:

$$\widetilde{j}(\gamma_{\bar{v}}) = i(\beta_{\bar{\mu}}), \qquad \widetilde{i}(\gamma_{\bar{v}}) = j(\beta_{\bar{\mu}});$$

$$\widetilde{j}(\kappa) = i(\beta_{\bar{\mu}}), \qquad \widetilde{i}(\kappa) = i(\kappa), \quad \kappa \in S_{\bar{v}} \setminus \{\gamma_{\bar{v}}; \beta_{\bar{\mu}}\},$$

а для остальных κ номера $j(\kappa)$ и $i(\kappa)$ не изменятся. Так как в качестве $\beta_{\bar{\mu}}$ выбран первый номер в множестве $K_2 \cap S_{\bar{v}}$, то новая матрица

$$\widetilde{H} = H - He_{\bar{\mu}}(e'_{\bar{\mu}} + \sum_{\beta_\mu \in S_{\bar{v}}} e'_\mu),$$

как и матрица H, будет обладать свойством треугольности.

Поскольку $\widetilde{G}$ получается из G умножением справа на ту же матрицу, на которую умножается H для получения $\widetilde{H}$, то $GH^{-1}=\widetilde{G}\widetilde{H}^{-1}$. Поэтому при $\kappa\notin S_{\bar{\nu}}$ оказывается $\widetilde{W}_\kappa=W_\kappa$. При $\kappa\in S_{\bar{\nu}}$ аналогично получим: $\widetilde{W}_\kappa=W_\kappa-W_{\beta_{\bar{\mu}}}$. Но поскольку столбец $W_{\beta_{\bar{\mu}}}$ нулевой, то и для этих κ имеем $\widetilde{W}_\kappa=W_\kappa$. Таким образом, при сделанной перестановке номеров матрица W не меняется. Следует лишь иметь в виду, что

$$\widetilde{H}_{\varkappa}=H_{\varkappa}-\delta_{\bar{\nu}}He_{\bar{\mu}}, \tag{26}$$

и так как $\widetilde{H}^{-1}=H^{-1}-e_{\bar{\mu}}(e'_{\bar{\mu}}+\sum_{\beta_\mu\in S_{\bar{\nu}}}e'_\mu)H^{-1}$, то

$$\widetilde{h}^\circ=\widetilde{H}^{-1}\widetilde{H}_{\varkappa}=h^\circ+\delta_{\bar{\nu}}e_{\bar{\mu}}-(h^\circ_{\bar{\mu}}+\sum_{\beta_\mu\in S_{\bar{\nu}}}h^\circ_\mu)e_{\bar{\mu}}.$$

В частности, $\widetilde{h}^\circ_{\bar{\mu}}=\delta_{\bar{\nu}}-\sum_{\beta_\mu\in S_{\bar{\nu}}}h^\circ_\mu$. В результате сделанной перестановки рассмотренный случай сводится к случаю II, если $\widetilde{h}^\circ_{\bar{\mu}}\neq 0$, и к случаю IV, если $\widetilde{h}^\circ_{\bar{\mu}}=0$. При этом, конечно, вместо H и G нужно взять полученные в случае V матрицы $\widetilde{H}$ и $\widetilde{G}$.

VI. Пусть $\kappa'=\gamma_{\bar{\nu}}\in K_3$, $S_{\bar{\nu}}\cap K_2=\phi$, а $S_{\bar{\nu}}\cap K_1\neq\phi$. В качестве $\bar{s}$ выберем такой номер из $\{1,2,\ldots,r\}$, при котором $\alpha_{\bar{s}}\in S_{\bar{\nu}}$, и поменяем местами номера $\alpha_{\bar{s}}$ и $\gamma_{\bar{\nu}}$. Поскольку $K_2\cap S_{\bar{\nu}}$ пусто, то матрица H при этом не изменится. Не изменятся и столбцы H_κ, G_κ и W_κ при $\kappa\notin S_{\bar{\nu}}$, а при $\kappa\in S_{\bar{\nu}}$ получим:

$$\widetilde{G}_\kappa=G_\kappa-G_{\alpha_{\bar{s}}},\quad \widetilde{H}_\kappa=H_\kappa-H_{\alpha_{\bar{s}}},\quad \widetilde{W}_\kappa=W_\kappa-W_{\alpha_{\bar{s}}}.$$

Кроме того, на место столбца $W_{\alpha_{\bar{s}}}=0$ в матрицу W встанет столбец $\widetilde{W}_{\gamma_{\bar{\nu}}}=-W_{\alpha_{\bar{s}}}$. Таким образом, вместо матрицы W получим матрицу

$$\widetilde{W}=W-W f_{\bar{s}}(f'_{\bar{s}}+\sum_{\alpha_s\in S_{\bar{\nu}}}f'_s),$$

и поэтому следует взять:

$$\widetilde{W}^{-1}=W^{-1}-f_{\bar{s}}(f'_{\bar{s}}+\sum_{\sigma\in S_{\bar{\nu}}}f'_s)W^{-1}.$$

После этого дело сводится к случаю I.

Рассмотрим теперь вопрос о решении системы (24). Прежде всего, аналогично (14) имеем:

$$\bar{Y} B_{\bar{\gamma}_\nu} - \bar{z}_{i(\bar{\gamma}_\nu)} + \bar{\omega}_\nu = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Если эти равенства разрешить относительно $\bar{\omega}_\nu$ и подставить в остальные уравнения системы (24), то получим:

$$\begin{aligned} &\bar{Y} B_0 = 1, \\ &\bar{Y} \bar{G}_\kappa + \bar{z} \bar{H}_\kappa = 0, \quad \kappa \in (\bar{K}_1 \cup \bar{K}_2) \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{27}$$

В матричной записи уравнения из (27) при $\kappa \in \bar{K}_2$ имеют вид:

$$\bar{Y} \bar{G} + \bar{z} \bar{H} = \mathbf{0}.$$

Поэтому $\bar{z} = -\bar{Y} \bar{G} \bar{H}^{-1}$. Подставив это равенство в уравнения (27) при $\kappa \in K_1$, получим

$$\bar{Y} \bar{W}_0 = 1, \qquad \bar{Y} \bar{W}_\kappa = 0, \qquad \kappa \in \bar{K}_1 \setminus \{0\}.$$

Таким образом, строка $\bar{Y}$ совпадает с первой строкой матрицы $\bar{W}^{-1}$. Для нахождения же строки $\bar{z}$ нужно решить систему

$$\bar{z} \bar{H} = -\bar{Y} \bar{G}. \tag{28}$$

Если бы было известно нужное упорядочение множества $\bar{K}_2$, при котором матрица $\bar{H}$ обладает свойством треугольности, то решение системы (28) можно было бы получить за один просмотр ее столбцов. Однако если на данном шаге мы прошли через случаи II или IV, то нужное упорядочение нам не известно: в матрице, обладающей свойством треугольности, в этих случаях меняется один столбец. Однако и в этой ситуации на основе ранее разработанного алгорифма решения транспортных задач [4] можно так организовать решение системы (28), что потребуется лишь три неполных просмотра столбцов матрицы системы. Именно каждое уравнение системы (28) позволяет вычислить одну из компонент строки $\bar{z}$, если это уравнение с одним неизвестным, или значение второго неизвестного, входящего в данное уравнение, уже найдено. Если просмотреть уравнения системы (28) в том порядке, который получился после совершенных перестановок и замен номеров в базисном множестве, то определится часть неизвестных. После этого по крайней мере одна компонента $\bar{z}$, входящая в уравнение с номером $\bar{\mu}$ (соответствующ͏е новому элементу множества $\bar{K}_2$), окажется определенной, так что, если нужно, уравнение с номером $\bar{\mu}$ можно использовать для

нахождения еще одной компоненты строки $\tilde{z}$. Затем, просмотрев оставшиеся неиспользованными уравнения в обратном порядке, снова можно определить часть неизвестных. И, наконец, еще раз просмотрев неиспользованные уравнения в прямом порядке, можно определить оставшиеся компоненты строки $\tilde{z}$. Одновременно с решением системы (28) определяется новый порядок множества K_2 .

В заключение отметим, что если $B_0=(-1,0,\ldots,0)'$, как это имеет место при сведении задачи о минимизации формы $\sum_{k=1}^{\tilde{N}} c_k x_k$ к рассмотренному случаю, то матрица W^{-1} имеет вид :

$$W^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} -1 & y \\ \hline 0 & A \end{array}\right).$$

При этом $Y=(-1,y)$, а в качестве первых компонент столбцов B_k фигурируют коэффициенты c_k . При практическом применении метода левый столбец матрицы W^{-1} можно, разумеется, не сохранять. Кроме того, используемая для преобразования строки y компонента q_0 равна невязке в условии оптимальности, обнаруженной для номера $\varkappa$. Действительно, в силу (I2) и (I0),

$$YB_\varkappa+zV_\varkappa+w\mathcal{D}_\varkappa=\sum_{k\in K} q_k(YB_k+zV_k+w\mathcal{D}_k)=q_0 .$$

Отметим также, что при использовании для начала счета метода фиктивных переменных целесообразно в каждой группе номеров S_ν выбрать один номер γ_ν (скажем, соответствующий наименьшему коэффициенту c_k , $k\in S_\nu$) и затем уже, если нужно, привлечь фиктивные переменные для сбалансирования условий (I) и (2).

Литература

I. В.И.Шмырев, Алгорифм решения одного класса задач линейного программирования большого объема. Оптимальное планирование, II (I968).

2. Р.А.Звягина, Задача линейного программирования с матрицами узкоблочной структуры. Оптимальное планирование, I5 (I970).

3. Г.Ш.Рубинштейн, О решении задач линейного программирования большого объема. Оптимальное планирование, 2 (I964).

4. В.А.Булавский, Об одном алгорифме решения транспортной задачи. Оптимальное планирование, 2 (I964).

5. В.А.Булавский, Метод ортогонализации в линейном программировании. Оптимальное планирование, I5 (1970).
6. Л.В.Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН СССР, М., 1959.
7. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн, Линейное программирование. Физматгиз, М., 1969.

Поступила в редакцию
I5.I. 197I г.