УДК 519.12

О ПОСТРОЕНИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ПОРЯДКОВ ПРИ ЗАДАННЫХ УСЛОВИЯХ НА СРАВНИМОСТЬ

Р.А. Звягина

В публикуемой статье рассматривается вопрос об упорядочении дискретного множества P с некоторым симметричным бинарным отношением R между элементами таким образом, чтобы максимальная длина цепи[ж)] полученного упорядоченного множества P была минимальной и чтобы отношение сравнимости в этом порядке было расширением отношения R. Теорема, доказанная в § 2, позволяет задачу построения такого отношения порядка включить в класс задач динамического программирования [2], а также выделить класс отношений R в множестве P, при которых на каждом шаге динамического процесса Беллмана выбор наилучшего варианта очевиден.

В качестве приложения этого вопроса рассмотрим, например, упорядочение блоков матрицы, которое эффективно используется при решении задач линейного программирования большого объема.

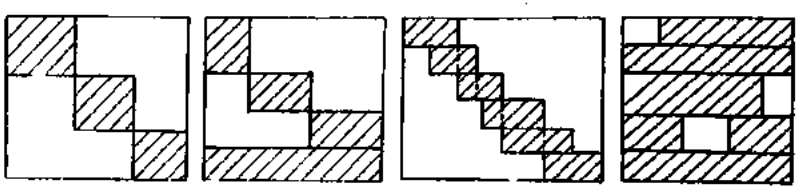

Рис. I

ж) Терминология, касающаяся упорядоченных множеств, согласуется с принятой в [1].

Пусть M – множество номеров строк, а N – множество номеров столбцов некоторой матрицы $A \equiv A[M,N]$ и пусть в этой матрице выделены подматрицы (блоки) $A[M_\kappa, N_\kappa]$, $\kappa \in P$, определяемые множествами M_κ и N_κ – номеров строк и столбцов соответственно. При этом $M_\kappa\ (\kappa \in P)$ – разбиение множества M, а

$$N_\kappa = \{ j \in N : A[M_\kappa, j] \neq \mathbf{0} \}, \ \kappa \in P,$$

где $A[M_\kappa, j]$ – j-й столбец подматрицы $A[M_\kappa, N]$ (на рис.I блокам $A[M_\kappa, N_\kappa]$ $\kappa \in P$, отвечают заштрихованные части). В этом примере будем считать, что элементы κ и κ' из P находятся в отношении R, если $N_\kappa \cap N_{\kappa'} \neq \phi$ $(\kappa \neq \kappa')$. Как показано автором [3, 4], если отношение порядка $\preccurlyeq$ в множестве P удовлетворяет условию

$$\Big(\bigcup_{\tau \preccurlyeq \kappa} N_\tau\Big) \cap \Big(\bigcup_{\tau \preccurlyeq \kappa'} N_\tau\Big) = \phi \qquad (I)$$

для любых несравнимых элементов κ и κ' из P, то сложность некоторого вычислительного процесса решения задачи линейного программирования (или линейной алгебры) с матрицей $A[M,N]$ зависит в основном от максимальной длины ℓ цепи упорядоченного множества P : процесс тем более эффективен, чем меньше величина ℓ.

§ I. Постановка задачи, определения и свойства

Пусть заданы множество $P = \{1, 2, \ldots, p\}$ и множество R, состоящее из неупорядоченных пар $[\kappa, \tau]$, где $\kappa \neq \tau$ – элементы P. Пара (P, R) определяет некоторое симметричное бинарное отношение между элементами множества P и может рассматриваться как неориентированный граф с множеством вершин P и множеством ребер R.*) Отношение порядка $\preccurlyeq$ в множестве P будем называть и е р а р х и ч е с к и м, если при любом $\kappa \in P$ упорядоченное подмножество

$$L(\kappa) = \{ \tau \in P : \kappa \preccurlyeq \tau \}$$

упорядоченного множества P является цепью, т.е. линейно упорядоченным множеством.

---

*) Терминология, касающаяся графов, согласуется с принятой в [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Иерархический порядок в множестве P будем называть **д о п у с т и м ы м** относительно R, если для любой пары $[\kappa, \tau] \in R$ элементы κ и τ сравнимы.[ж)]

В силу конечности множества P и транзитивности отношения порядка достаточно при его задании указать для каждого элемента $\kappa \in P$ все элементы, которые непосредственно ему предшествуют, т.е. достаточно указать множество V, состоящее из всех упорядоченных пар (τ, κ) элементов из P, для которых τ непосредственно предшествует κ. Тем самым упорядоченное множество P однозначно определяется парой (P, V), которую можно представлять ориентированным графом с множеством

Рис. 2

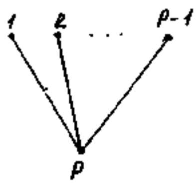

Рис.3

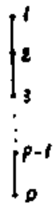

Рис.4

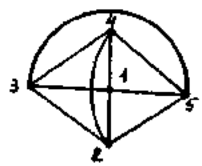

Рис.5

вершин P и множеством дуг V. Поэтому мы иногда вместо "порядок $\preccurlyeq$ " будем писать "порядок V ", а пару (P, V) – называть V-упорядоченным множеством P.

Пусть $\mathcal{V}$ – множество всех порядков в множестве P, допустимых относительно R. Поскольку всякий линейный порядок в P, например, $V = \{(\kappa, \kappa+1) : \kappa = 1, 2, \ldots, p-1\}$, является допустимым относительно любого множества R, то $\mathcal{V} \neq \phi$. Для любого $V \in \mathcal{V}$ через $\ell(V)$ обозначим максимальную длину цепи V-упорядоченного множества P, т.е. положим $\ell(V) = \max\limits_{\kappa \in P} |L(\kappa)|$, где $|L(\kappa)|$ – число элементов множества $L(\kappa)$, определенного выше. В силу иерархичности порядка V, очевидно, $\ell(V) = \max\limits_{\kappa = \min P} |L(\kappa)|$.

ж) Условие (1) в приведенном выше примере удовлетворяет условиям определения I.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Допустимый порядок V^* будем называть **оптимальным** в множестве P, если

$$\ell(V^*) = \min_{V \in \mathcal{V}} \ell(V).$$

В качестве тривиальных примеров укажем множество $R = \phi$ (рис. 2), при котором $V^* = \phi$ и $\ell(V^*) = 1$, а также множество $R = \{[\kappa, p] : \kappa = 1, 2, \dots, p-1\}$ (рис. 3), при котором $V^* = \{(\kappa, p) : \kappa = 1, 2, \dots, p-1\}$ и $\ell(V^*) = 2$. Кроме того, из определений I и 2 следует, что линейный порядок тогда и только тогда оптимален в P, когда граф (P, R) полный (рис. 5).

ЛЕММА I. *В множестве P при любом его допустимом упорядочении относительно R число максимальных элементов не превосходит числа компонент связности графа (P, R).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$P(\kappa) = \{\tau \in P : \tau \preccurlyeq \kappa\}, \ \kappa \in \{\max P\}. \qquad (2)$$

Из допустимости порядка $\preccurlyeq$ следует, что множества (2) образуют разбиение множества P и что при любых различных максимальных элементах κ и κ' множества P и любых $\tau \in P(\kappa)$ и $\tau' \in P(\kappa')$ пара $[\tau, \tau']$ не принадлежит R. Это означает, что граф (P, R) имеет по крайней мере $|\{\max P\}|$ компонент связности.

Для любого $\kappa \in P$ положим

$$S(\kappa) = \{\tau \in P : [\kappa, \tau] \in R\}, \ R_\kappa = \{[\kappa, \tau] : \tau \in S(\kappa)\},$$

и пусть ℓ^*_κ - максимальная длина цепи оптимально упорядоченного множества $P \setminus \{\kappa\}$ относительно множества $R \setminus R_\kappa$.

ЛЕММА 2. *Если граф (P, R) связный, то при любом оптимальном упорядочении множества P и любом κ из множества*

$$L = \bigcap_{\tau = \min P} L(\tau) \qquad (3)$$

индуцированный порядок в множе-

стве $P \setminus \{\kappa\}$ является оптимальным относительно $R \setminus R_\kappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу связности графа (P, R) и леммы I. множество (3) непусто при любом оптимальном упорядочении множества P. Если элемент κ из множества (3) не является максимальным элементом множества P, то, поменяв ролями элементы κ и $\max P$ в оптимально упорядоченном множестве P, получим новый допустимый порядок в множестве P с наибольшим элементом κ. Поскольку максимальная длина цепи не изменилась, то этот порядок будет также оптимальным. Неравенство $\ell_\kappa^* < \max_{\tau \in P \setminus \{\kappa\}} |L(\tau) \setminus \{\kappa\}|$ противоречит оптимальности указанных порядков. Лемма доказана.

Если граф (P, R) распадается на компоненты связности (P_i, R_i), $i = 1, 2, \ldots, \tau$ $(\tau \geq 2)$, то справедлива

ЛЕММА 3. Порядок $V^* = \bigcup_{1 \leq i \leq \tau} V_i^*$ оптимален в множестве P относительно R, если каждый порядок V_i^* оптимален в множестве P_i относительно R_i $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$.

§ 2. Основная теорема и её обобщение

Пусть для любого $\kappa \in P$ в множестве $P \setminus \{\kappa\}$ введено некоторое отношение порядка, оптимальное относительно множества $R \setminus R_\kappa$. Доопределив соотношения $\tau \prec \kappa$ при $\tau \in P \setminus \{\kappa\}$, в P получим допустимый порядок $V(\kappa)$, при котором $\ell(V(\kappa)) = 1 + \ell_\kappa^*$.

ТЕОРЕМА I. Если граф (P, R) связный, то

$$\ell(V^*) = 1 + \min_{\kappa \in P} \ell_\kappa^*, \tag{4}$$

причем если $S(\kappa_0) = P \setminus \{\kappa_0\}$ для некоторого $\kappa_0 \in P$, то $\ell(V^*) = 1 + \ell_{\kappa_0}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\ell(V^*) < 1 + \min_{\kappa \in P} \ell_\kappa^*$. По лемме I в V^*-упорядоченном множестве P существует

наибольший элемент $\bar{K}$, а по лемме 2 имеем равенство: $\ell(V^*) = 1 + \ell^*_{\bar{K}}$. Отсюда получаем противоречивое неравенство $\ell^*_{\bar{K}} < \min_{\kappa \in P} \ell^*_\kappa$. Далее, из определения I и условия $S(\kappa_0) = P \setminus \{\kappa_0\}$ следует, что κ_0 принадлежит множеству (3) при любом оптимальном упорядочении множества P. Теперь из леммы 2 следует, что $\ell(V^*) = 1 + \ell^*_{\kappa_0}$. Теорема доказана.

Заметим, что в силу леммы 3 условие связности графа (P, R) в теореме I не является обременительным.

Из доказанной теоремы видно, что задача построения оптимального порядка в множестве P может быть поставлена как задача динамического программирования. Однако получить отсюда универсальный и достаточно эффективный алгоритм решения этой задачи вряд ли возможно. Тем не менее в ряде случаев (некоторые из них рассматриваются в § 3) эта теорема позволяет решить поставленную задачу, а её обобщение, приведенное ниже, — расширить класс таких случаев.

Пусть Q — некоторое подмножество множества P. Положим

$$R_Q = \{[\kappa, \tau] \in R : \kappa \in Q, \tau \in S(\kappa)\}.$$

ЛЕММА 4 (обобщение леммы 2). Если граф (P, R) связный, то при любом оптимальном упорядочении множества P и любом Q, содержащемся в множестве (3), индуцированный порядок в множестве $P \setminus Q$ является оптимальным относительно $R \setminus R_Q$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.

Обозначим через (P_{Qi}, R_{Qi}), $i = 1, 2, \ldots, \tau_Q$, компоненты связности графа $(P \setminus Q, R \setminus R_Q)$ для любого $Q \subset P$. Непустое подмножество Q множества P будем называть динамическим, если граф

$$(Q, \{[\kappa, \tau] \in R : \kappa, \tau \in Q\})$$

полный и любой элемент $\kappa \in Q$ находится в отношении R хотя бы с одним элементом каждого из множеств P_{Qi}, $i = 1, 2, \ldots, \tau_Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Динамическое множество Q будем называть рассекающим, если граф $(P \setminus Q, R \setminus R_Q)$ распадает-

ся не менее чем на две компоненты связности.

Если граф (P,R) связный, то для любого $\kappa \in P$ множество $\{\kappa\}$ является динамическим. Пусть $\mathcal{P}$ - класс всех динамических, а $\mathcal{P}_o$ - класс всех рассекающих подмножеств множества P. При любом $Q \in \mathcal{P}$ через ℓ_Q^* обозначим максимальную длину цепи множества $P \setminus Q$, оптимально упорядоченного относительно $R \setminus R_Q$. Введя в множестве Q линейный порядок и полагая $\tau \prec \kappa$ при $\tau \in P \setminus Q$ и $\kappa \in Q$, получим расширение $V(Q)$ порядка в множествах Q и $P \setminus Q$ на все множество P. Порядок $V(Q)$ будет, очевидно, допустимым и $\ell(V(Q)) = |Q| + \ell_Q^*$.

ТЕОРЕМА 2. Если граф (P,R) связный, то

$$\ell(V^*) = \min_{Q \in \mathcal{P}} (|Q| + \ell_Q^*),$$

причём если $\mathcal{P}_o \neq \phi$ и при любом оптимальном упорядочении множества P его упорядоченное подмножество (3) содержит хотя бы один элемент $Q \in \mathcal{P}_o$, то

$$\ell(V^*) = \min_{Q \in \mathcal{P}_o} (|Q| + \ell_Q^*). \qquad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения следует из теоремы I и неравенства

$$1 + \min_{\kappa \in P} \ell_{\{\kappa\}}^* \geqslant \min_{Q \in \mathcal{P}} (|Q| + \ell_Q^*),$$

а вторая часть - из леммы 4.

§ 3. Приложение основной теоремы к построению оптимальных порядков

В этом параграфе рассматриваются примеры таких классов отношений R, в пределах каждого из которых величина $\ell(V^*)$ является неубывающей функцией числа элементов множества P.

I. Пусть для элементов множества P выбрано отношение

$$R = \{[\kappa, \kappa+1] : \kappa = 1, 2, \ldots, p-1\}, \qquad (6)$$

которому отвечает граф на рис. 4. Нетрудно показать, что в этом случае минимум в правой части выражения (4) достигается при $\kappa = \left[\frac{p}{2}\right] + 1$ (здесь под $[a]$ понимается целая часть числа a). Задача же построения оптимального порядка в множествах

$$P_{\kappa 1} = \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{p}{2}\right]\right\} \quad \text{и} \quad P_{\kappa 2} = \left\{\left[\frac{p}{2}\right]+2, \left[\frac{p}{2}\right]+3, \ldots, p\right\}$$

отличается от исходной лишь тем, что число элементов в них не превосходит $\left[\frac{p}{2}\right] < p$ при $p \geq 1$. Из теоремы I получается рекуррентная формула для максимальной длины $\ell(p)$ цепи в оптимально упорядоченном множестве P :

$$\ell(p) = \begin{cases} p, & \text{если } p = 1, 2, \\ \ell\left(\left[\frac{p}{2}\right]\right) + 1, & \text{если } p > 2, \end{cases} \tag{7}$$

откуда следует явное представление

$$\ell(p) = [\log_2 p] + 1 \tag{8}$$

(ниже рассматривается класс множеств R , включающий (6), где будет оправдана формула (8)). Получающийся при этом порядок в

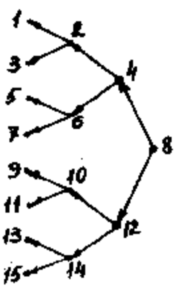

Рис. 6

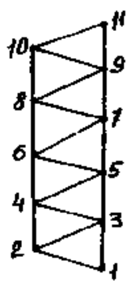

Рис. 7

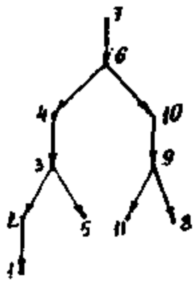

Рис.8

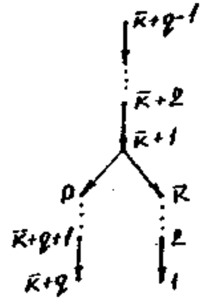

Рис. 9

множестве P изображен на рис. 6 при $p = 15$ (направление стрелки из κ в τ означает, что $\tau \prec \kappa$).

2. Используя теорему I и формулу (8), нетрудно решить задачу построения оптимальных порядков и в случаях, изображенных на рис. 10, так как в каждом из них минимум в выражении (4)

достигается при $\kappa = p$, а для множества $P \setminus \{p\}$ оптимальное упорядочение известно.

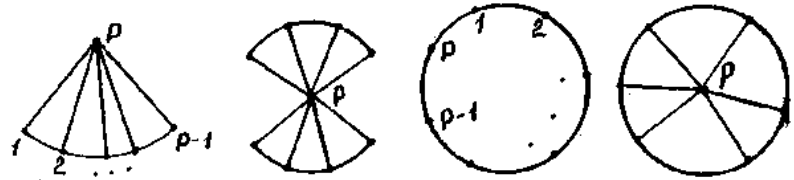

Рис. 10

3. Пусть элементы множества P находятся в отношении

$$R = \{[\kappa, \kappa+1], [\kappa, \kappa+2], \ldots, [\kappa, \kappa+q_0] : q_0 = \\ = \min\{q-1, p-\kappa\}, \kappa = 1, 2, \ldots, p-1\}, \tag{9}$$

где $q \geq 2$ – некоторое фиксированное целое число, а соответствующий граф (P, R) при $q = 3$ и $p = 11$ изображен на рис.7. Заметим, что множество (9) при $q = 2$ совпадает с (6).

В случае (9) при $1 \leq p \leq q$ граф (P, R) полный и линейный порядок будет оптимальным в множестве P. Пусть $p > q$, тогда множествами

$$Q_\kappa = \{\kappa+1, \kappa+2, \ldots, \kappa+q-1\}, \kappa = 1, 2, \ldots, p-q \tag{10}$$

исчерпывается класс $\mathcal{P}_0$. Покажем, что в этом случае выполнены условия второй части теоремы 2.

Действительно, в силу связности графа (P, R) множество (3) непусто, а поскольку $[1, p] \notin R$, то оптимальный порядок V^* в множестве P не может быть линейным. Это означает, что граф $(P \setminus L, R \setminus R_L)$ распадается на компоненты связности (P_{Li}, R_{Li}), $i = 1, 2, \ldots, \tau_L$ и $\tau_L \geq 2$. Из допустимости порядка V^* следует, что если $i \neq i'$, то $|\tau - \tau'| \geq q-1$ для любых $\tau \in P_{Li}$ и $\tau' \in P_{Li'}$, т.е. множество (3) содержит хотя бы одно из рассекающих множеств (10) при любом оптимальном упорядочении P.

Используя очевидное неубывание функции $\ell(p)$, нетрудно показать, что минимум в выражении (5) достигается на элементе $Q_{\bar\kappa} \in \mathcal{P}_0$ при $\bar\kappa = \left]\frac{p-q+2}{2}\right[$, причём характер отношений в множествах

$$P_{Q_{\bar\kappa}1} = \{1, 2, \ldots, \bar\kappa\} \quad \text{и} \quad P_{Q_{\bar\kappa}2} = \{\bar\kappa+q, \bar\kappa+q+1, \ldots, p\} \tag{11}$$

того же типа, что и в исходном множестве P. Если $k \le q$, то любой линейный порядок будет оптимальным в каждом из множеств (II), так как $p-(k+q-1) \le k$ и, следовательно, соответствующие графы полные (рис. 9). В противном случае задача оптимального упорядочения множеств (II) отличается от исходной лишь тем, что в каждом из них число элементов не превосходит $\left[\frac{p-q+2}{2}\right] < p$. Из теоремы 2 для значений функции $\ell(p)$ получается рекуррентная формула

$$\ell(p)=\begin{cases} p, & \text{если } 1 \le p \le q, \\ q-1+\ell\left(\left[\frac{p-q+2}{2}\right]\right), & \text{если } p > q, \end{cases} \qquad (12)$$

откуда при $q=2$ следует (7). Получающийся оптимальный порядок для множества $P=\{1,2,\dots,11\}$ при $q=3$ изображен на рис. 8.

Покажем, что в случае (9) для функции $\ell(p)$ справедливо также следующее явное представление:

$$\ell(p)=(q-1)\left(\left[\log_2\frac{p+q-2}{q-1}\right]-1\right)+\left[\frac{p+q-2}{2^{\left[\log_2\frac{p+q-2}{q-1}\right]}}\right]+1. \qquad (13)$$

Действительно, при $1 \le p \le q$ это представление справедливо, поскольку величина $\left[\log_2\frac{p+q-2}{q-1}\right]$ равна 0, если $1 \le p < q$, и 1, если $p=q$. Воспользовавшись формулой (12) при $p>q$ и считая соотношение (13) справедливым, если аргумент функции $\ell(x)$ меньше p, получим

$$\ell(p)=(q-1)\left(\left[\log_2\frac{\alpha}{q-1}\right]-1\right)+\left[\frac{\alpha}{2^{\left[\log_2\frac{\alpha}{q-1}\right]}}\right]+1, \qquad (14)$$

где $\alpha=2\left[\frac{p+q-2}{2}\right]$. Если число $p+q$ четное, то $\alpha=p+q-2$ и (14) совпадает с (13). Пусть $p+q$ – нечетное. Тогда по определению целой части числа $\alpha=p+q-3$, и поскольку $p>q$, то $\alpha \ge 2(q-1)$, т.е. для четного числа α имеет место представление

$$\alpha = 2^{\beta}(q-1)+\gamma \ , \text{ где } \beta \geq 1,\ 0 \leq \gamma \leq 2^{\beta}(q-1)-2 ,$$

и, следовательно, для величины $\frac{\gamma+1}{q-1}$ при $\beta \geq 1$ верны неравенства

$$0 < \frac{1}{q-1} \leq \frac{\gamma+1}{q-1} \leq 2^{\beta} - \frac{1}{q-1} < 2^{\beta}.$$

Отсюда и из определения целой части числа следует, что

$$\beta = \left[\log_2 \frac{\alpha}{q-1}\right] = \left[\log_2 \frac{\alpha+1}{q-1}\right]. \qquad (15)$$

Кроме того, для четного числа α имеет место представление $\alpha = \delta \cdot 2^{\beta} + \zeta$, где δ – неотрицательное целое число и $0 \leq \zeta \leq 2^{\beta}-2$. Следовательно, верны равенства

$$\delta = \left[\frac{\alpha}{2^{\beta}}\right] = \left[\delta + \frac{\zeta}{2^{\beta}}\right] = \left[\delta + \frac{\zeta+1}{2^{\beta}}\right] = \left[\frac{\alpha+1}{2^{\beta}}\right],$$

поскольку для величины $\frac{\zeta+1}{2^{\beta}}$ при $\beta \geq 1$ верны неравенства

$$0 < \frac{1}{2^{\beta}} \leq \frac{\zeta+1}{2^{\beta}} \leq \frac{2^{\beta}-1}{2^{\beta}} < 1.$$

Отсюда и из (15) следует (13) при нечетном значении $p+q$, а из формулы (13) при $q=2$ следует (8), так как в этом случае $\left[\frac{p}{2^{[\log_2 p]}}\right] = 1$ при $p \geq 1$.

4. Рассмотрим некоторое обобщение класса отношений R , определенного в (9). Пусть для каждого $\kappa \in P$ задано такое число q_{κ} , что

$$\kappa + q_{\kappa} \leq \tau + q_{\tau} \quad , \text{ если } \kappa < \tau < \kappa + q_{\kappa} \quad , \qquad (16)$$

и, кроме того, $2 \leq q_{\kappa} \leq p-\kappa+1$ для $\kappa = 1,2,\ldots,p-1$ $(q_p = 1)$.
В множестве P рассмотрим отношение $R = \bigcup_{1 \leq \kappa \leq p-1} R(\kappa)$, где

$$R(\kappa) = \{[\kappa,\kappa+1],[\kappa,\kappa+2],\ldots,[\kappa,\kappa+q_{\kappa}-1]\},\ \kappa = 1,2,\ldots,p-1.$$

Отсюда и из (16) следует, что условие $q_{\kappa} \geq 2$, $\kappa = 1,2,\ldots,p-1$, не ограничивает общности, так как в противном случае граф (P, R) несвязный.

Обозначим через $\ell(\kappa,t),\ \kappa \in P,\ 1 \leq t \leq p-\kappa+1$, максимальную длину цепи множества $P(\kappa,t) = \{\kappa,\kappa+1,\ldots,\kappa+t-1\}$, оптимально упорядоченного относительно

$$R(\kappa,t)=\{[\tau,\tau']\in R:\tau,\tau'\in P(\kappa,t)\},$$

и заметим, что при $1\le t\le q_\kappa$ этот порядок линейный. При $t>q_\kappa$ для любого $\tau\in P(\kappa,t-q_\tau)$ (в частности, для $\tau=\kappa$) через $s(\tau)$ обозначим наименьший из тех элементов $\alpha\in P(\tau,q_\tau)$, для которых $\tau+q_\tau<\alpha+q_\alpha$ (в частности, таким является $\alpha=\tau+q_\tau-1$). Тогда множества

$$Q_{s(\tau)-1}=P(s(\tau),\tau+q_\tau-s(\tau)),\quad \kappa\le\tau<\kappa+t-q_\tau$$

являются рассекающими в множестве $P(\kappa,t)$. Для любого другого рассекающего подмножества

$$Q_{\alpha-1}=\{\alpha,\alpha+1,\dots,\alpha+q-1\},\ \alpha\in P(\kappa,t),\ q\le q'_\alpha,$$

где $q'_\alpha=q_\alpha$, если $\alpha+q_\alpha<\kappa+t$, и $q'_\alpha=\kappa+t-\alpha$, если $\alpha+q_\alpha\ge\kappa+t$, в множестве $P(\kappa,t)$ существует такой элемент $\tau<\alpha$, что $\tau+q'_\alpha=\alpha+q$, и справедливы соотношения

$$\kappa\le\tau<\alpha\le\tau+q'_\alpha-1=\alpha+q-1<\alpha+q'_\alpha-1\le\kappa+t-1.$$

Отсюда следует, что $\kappa\le\tau<\kappa+t-q_\tau$, так как при $q'_\tau=\kappa+t-\tau$ неравенство $\tau+q'_\tau<\kappa+t$ противоречиво. Кроме того, поскольку $\tau'+q_{\tau'}\le\tau+q_\tau$ при $\kappa\le\tau'<\alpha$, то $\alpha=s(\tau)$. Заметим, что в силу условия (16) при любом $\tau\in P(\kappa,t-q_\tau)$

$$s(\tau')=s(\tau)\quad\text{, если}\quad \tau\le\tau'<s(\tau)\ . \tag{17}$$

Для любого $\tau\in P(\kappa,t-q_\tau)$ максимальная длина цепи $V(Q_{s(\tau)-1})$-упорядоченного множества $P(\kappa,t)$ равна

$$f_{\kappa t}(\tau)=q_\tau-s(\tau)+\tau+\max\{l(\kappa,s(\tau)-\kappa),\ l(\tau+q_\tau,\kappa+t-\tau-q_\tau)\}.$$

Нетрудно проверить (подобно тому, как сделано в п.3), что в рассматриваемом случае выполнены условия второй части теоремы 2, и потому для любых $\kappa\in P$ и $t=1,2,\dots,p-\kappa+1$ получается рекуррентная формула

$$l(\kappa,t)=\begin{cases} t\ , & \text{если}\ 1\le t\le q_\kappa,\\ \min\limits_{\kappa\le\tau<\kappa+t-q_\tau} f_{\kappa t}(\tau)\ , & \text{если}\ t>q_\kappa,\end{cases}\tag{18}$$

а из свойства (17) следует, что значения функции $f_{\kappa t}(\tau)$ в формуле (18) достаточно вычислять лишь для

$$\tau = \tau_1 = s(\kappa) - 1 \text{ и } \tau = \tau_i = s(\tau_{i-1} + 1) - 1,\ i = 2, 3, \dots, i_0, \quad (19)$$

где номер i_0 определяется из условия $\tau_{i_0} < \kappa + t - q_{\tau_{i_0}}$ и $\tau_{i_0+1} \geq \kappa + t - q_{\tau_{i_0+1}}$.

Таким образом, при $\kappa = 1$ и $t = p$ получим искомую величину $\ell(1, p)$ и оптимальный порядок в множестве $P(1, p) = P$, который восстанавливается обычным в динамическом программировании обратным ходом (см., например, [2], стр. 26). Для этого на каждом шаге при вычислении $\ell(\kappa, t),\ 1 \leq \kappa \leq p,\ q_\kappa < t \leq p - \kappa + 1$, запоминается элемент $\tau(\kappa, t) \in P(\kappa, t)$, на котором достигается минимум в выражении (18). Покажем, что если $\bar{\tau}(\kappa, t)$ – наименьший из таких элементов, то функция $\bar{\tau}(\kappa, t)$ при фиксированном $\kappa \in P$ не убывает с возрастанием t. Для фиксированных $t > q_\kappa$ и $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\kappa, t)$ и любого $\theta \geq t$ обозначим через $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ минимум функции $f_{\kappa\theta}(\tau)$ по множествам, заданным соответственно неравенствами $\kappa \leq \tau < \bar{\tau}$ и $\bar{\tau} \leq \tau < \kappa + \theta - q_\tau$. Используя очевидные неравенства $f_{\kappa t}(\tau) \leq f_{\kappa, t+1}(\tau) \leq f_{\kappa t}(\tau) + 1,\ \tau \in P(\kappa, t - q_\tau)$, получим

$$F_1(t+1) \geq F_1(t) > F_2(t) \geq \min_{\bar{\tau} \leq \tau \leq \kappa + t - q_\tau} f_{\kappa t}(\tau) \geq F_2(t+1) - 1,$$

откуда следует, что $\ell(\kappa, t+1) = F_2(t+1),\ t > q_\kappa$. Поэтому в (19) элемент τ_1 можно полагать равным $s(\bar{\tau}(\kappa, t-1)) - 1$ при $t > q_\kappa + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть в множестве P введено отношение порядка V^*, оптимальное относительно некоторого множества R. Через R^* обозначим отношение сравнимости в V^*-упорядоченном множестве P. Тогда порядок V^* в множестве P является допустимым относительно любого множества $R' \subset R^*$, и оптимальным, если $R \subset R' \subset R^*$.

Литература

1. Д.А.Райков, Векторные пространства. Физматгиз, М., 1962.
2. Р.Беллман, Динамическое программирование. ИЛ, М., 1960.
3. Р.А.Звягина, Задачи линейного программирования с матрицами произвольной блочной структуры. Докл. АН СССР, 196, 4 (1971), 755-758.

4. Р.А.Звягина, Об общем методе решения задач линейного программирования блочной структуры. Настоящий сборник, стр. 22-40.

5. К.Берж, Теория графов и её применения. ИЛ, М., 1962.

Поступила в редакцию
23.XII. 1970 г.